R F 1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR

Tomul XIII (XVII)

FASC. 1–2

1967 DEC 12

1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul XIII (XVII)

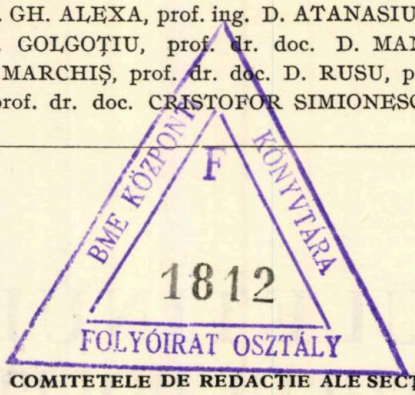
FASC. 1–2

1967

1989

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)



COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Conf. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)

Lector ing. H. ROSMAN (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XIII (XVII), fasc. 1—2 1967

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
58/1968

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XVI

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

AL. CLIMESCU, Asupra unei clase de algebre de ordinul patru (rom.; rez. franc.). 1
J. R. ISBELL (U.S.A.), Conjectură relativă la şiruri pătrate (engl.; rez. rom.) . 5
I. ENESCU, Asupra algebrelor asociative, comutative şi cu unitate principală, de ordin cinci, peste cîmpul real I. Algebre indecompozabile (franc.; rez. rom.) 13
AL. CLIMESCU, Asupra ecuaţiei funcţionale a distributivităţii unilaterale (III) (franc.; rez. rom.) 23
V. V. TOPENCIAROV (Franţa), Asupra incluziunii unei categorii de „triouri" într-o categorie de „cvartete" (franc.; rez. rom.) 25
J. MERMET (Franţa), Sinteza funcţiilor booleene prin operatori în linie (franc.; rez. rom.) 31
M. PICONE (Italia), D. MANGERON (R. S. România), Calculul soluţiilor sistemelor funcţionale interesînd fizica matematică, prin intermediul derivatelor totale (I) (ital.; rez. rom.) 41
N. FORBAT, A. HUAUX (Belgia), Asupra soluţiilor periodice ale ecuaţiilor diferenţiale neliniare. I. Existenţă şi construcţie (franc.; rez. rom.) . 47
R. IGLISCH (R.F.G.), Calculul explicit al soluţiei ecuaţiilor liniare din mecanica vibraţiilor în cazurile de rezonanţă şi de excepţie (germ.; rez. rom.) . 55
J. ARGÉMI (Franţa), Asupra numărului regiunilor nodale închise aparţinînd la un punct singular multiplu (franc.; rez. rom.) 65
K. B. BARATALIEV (U.R.S.S.), Rezolvarea aproximativă a problemei de contur pentru sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale cu argument întîrziat (rus.; rez. rom.) 67
L. CIOBANU, F. POTERAŞ, A. OPREA, M. BERCOVICI, A. TRIANDAF, Noi clase de funcţii derivate din sisteme funcţionale cu derivate totale. I. Funcţii ipergeometrice generalizate (ital.; rez. rom.) 77
M. N. OĞUZTÖRELI (Australia), Contribuţii la studiul problemelor de reglare optimală a timpului. I. Sisteme descrise de ecuaţii diferenţiale cu diferenţe (engl.; rez. rom.) 81
A. BLAQUIÈRE (Franţa), G. LEITMANN (U.S.A.), Unele aspecte geometrice ale proceselor optimale. I. Probleme de reglare cu constrîngeri (engl.; rez. rom.) 91
B. d'ORGEVAL (Franţa), Asupra curbelor strîmbe din S_3 construite pe un cîmp al lui Galois de caracteristică 2 (franc.; rez. rom.) 105

Pag.

ŞT. RUSCIOR, Un mod geometric de a caracteriza varietăţile generale prin mişcarea unui solid perfect fără punct fix în S_4 (franc.; rez. rom.) . . 107
A. BRAIER, Forma exponenţială a elementelor unor algebre (engl.; rez. rom.) . 115
C. ACKER, Variaţia direcţiei vitezei în curgerea laminară nestaţionară a unui fluid ideal, pe o familie de suprafeţe cilindrice (rus.; rez. rom.) . . 123
R. VALLÉE (Franţa), Fluide perfecte, încărcate, în teoria relativistă hexadimensională (franc.; rez. rom.) 131
LL. G. CHAMBERS (Anglia), Soluţia invariantă a lui Lorentz pentru ecuaţiile lui Lyttleton-Bondi (engl.; rez. rom.) 139
S. K. SARKAR (India), Asupra mişcării longitudinale a unei bare subţiri cu secţiune transversală variabilă (engl.; rez. rom.) 143
C. CIUBOTARIU, J. GOTTLIEB, G. ZET, Asupra legăturii între sistemele de referinţă uniform accelerate şi tratarea relativist-generală a cîmpului uniform (engl.; rez. rom.) 147
I. M. BELENKI (U. R. S. S.), Asupra unei clase de mişcări potenţiale (rus.; rez. rom.) 151
V. PETRESCU, GH. MAXIM, N. REZLESCU, Influenţa cîmpului de măsură asupra dezacomodării feritelor mangan-zinc (rom.; rez. ital.) . . 157
C. RUSCIOR, G. CĂLUGĂRU, M. SUCIU, Influenţa plasticităţii suportului asupra proprietăţilor magnetice ale straturilor subţiri de cobalt precipitate pe cale chimică (germ.; rez. rom.) 167

CHIMIE

W. F. LIBBY (U.S.A), Chimie spaţială (I) (engl.; rez. rom.) . . . 171
A. HEDVALL (Suedia), Consideraţii asupra desvoltării chimiei solidelor (I) (engl.; rez. rom.) 179
T. GOLGOŢIU, I. HÎNCU, J. LINDE, I. HERŢESCU, Consideraţii asupra unor reacţii în fază solidă (rom.; rez. franc.) 185
J. LINDE, I. HÎNCU, V. ROTARU, I. HERŢESCU, Studiul reacţiilor în fază solidă a unor sulfuri metalice (rom.; rez. franc.) 193
D. I. ERISTAVI, F. I. BROUCEK, V. D. ERISTAVI (U. R. S. S.), Metodă de determinare a beriliului în apele naturale (rus.; rez. rom.) . . 201
AL. NACU, D. NACU, C. BOTEZ, Rolul unor electroliţi în procesul de alterare a galenei sub acţiunea sulfatului de cupru (rom.; rez. franc.) . 207
R. VASILIU, C. CALISTRU, Asupra cineticii formării electrolitice a amalgamului de sodiu (rom.; rez. franc.) 221
T. SĂVEANU, R. TUDOSE, GH. CRISTIAN, Procese de transfer între lichide nemiscibile (I) (franc.; rez. rom.) 227
G. NATTA, F. SEVERINI, M. PEGORADO, E. BEATI, G. AURELLO, S. TOFFANO (Italia), Polimeri din clorură de vinil grefaţi pe elastomeri olefinici cu rezistenţă înaltă la şoc. I. Partea experimentală (ital.; rez. rom.). 233
J. ROCHE (Franţa), Unele aspecte actuale ale biochimiei tiroglobulinei şi ale biosintezei sale (franc.; rez. rom.) 241
I. MATEI, T. LIXANDRU, Condensarea acenaftenchinonei cu amine primare aromatice în prezenţa sărurilor metalice. Complecşi metalici (rom.; rez. franc.). 245
GH. BOTEZ, C. ONISCU, E. MERICA, C. GOREA, Sulfamidele acizilor fenoxiacetici şi fenoxipropionici. VI. Derivaţi sulfamidaţi ai acizilor clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici (rom.; rez. franc.) . . . 257
I. MATEI, E. COMANIŢĂ, Tiosemicarbazide ale acizilor bibazici şi produşi de ciclizare (III) (rom.; rez. franc.) 269
M. MARINESCU, E. MATEI, Cercetări privind cinetica uscării pieilor. III. Uscarea prin convecţie (rom.; rez. franc.) 275

Pag.

E. POPA, I. ADUMITRĂCESEI, M. PONTA, V. RĂUȚU, Contribuția industriei chimice la valorificarea superioară a unor resurse minerale din R. S. România (rom.; rez. ital.) 283

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

G. S. S. AVILA (U.S.A), Propagarea undelor electromagnetice într-un mediu omogen transversal anizotrop (engl.; rez. rom.) 293
V. N. NEDELCU, În legătură cu definiția puterii aparente complexe instantanee (germ.; rez. rom.) 299
R. CRAMARIUC, V. PETRESCU, Voltmetre cu efect Kerr (rom.; rez. franc.). 303
D. D. BAINOV, G. V. PLOTNIKOVA, I. P. MARINOV (R. P. Bulgaria), Asupra teoriei oscilatorilor de tip *LC* cu *n* circuite și cu inductanțe neliniare (rus.; rez. rom.) 313
GH. VASILIU, C. ONU, AL. MOLDOVANU, Magnetometru cu sondă de saturație tranzistorizat (rom.; rez. rus.) 319
L. PREDA, Posibilități de măsurare simultană cu patru echipaje a puterilor și energiilor active și reactive în rețele trifazate în regim dezechilibrat de curenți (rom.; rez. franc.) 329
N. GAVRILAȘ, Transformator cu două înfășurări supus la tensiunea de impuls (rom.; rez. franc.) 335
C. SAAL, Studiul unui oscilomotor bifazat sincron (engl.; rez. rom.) . . 345
C. DINCULESCU, D. CRISTESCU, Analiza unei scheme de protecție a stațiilor împotriva supratensiunilor cu ajutorul descărcătoarelor cu rezistență variabilă (franc.; rez. rom.) 363
N. V. BOȚAN, V. PRISĂCARU, B. PONOMAREV, L. CANTEMIR, E. BALABAN, Asupra posibilității de utilizare a amplificatorului magnetic trifazat în scheme de acționare electrică (rus.; rez. rom.) . . . 377
H. ROSMAN, Diagramele-loc geometric ale coeficienților de transfer ai unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, în regimurile rezonante (rom.; rez. franc.) 381

MECANICĂ TEHNICĂ

N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU, E. RUSU, Asupra problemei legăturilor olonome impuse sistemelor de solide rigide (franc.; rez. rom.) . . 389
BL. DOLAPCIEV (R. P. Bulgaria), Asupra stabilității și aplicabilității unor noi forme de ecuații ale dinamicii analitice (germ.; rez. rom.) . . . 399
W. BOGUSZ, J. M. SKOWRONSKI (R. P. Polonia), Sinteza cinetică a sistemelor mecanice generale (I) (engl.; rez. rom.) 409
D. MANGERON (R. S. România), S. M. GAMREKELI (U.R.S.S.), Problema dispozitivelor mecano-electronice interesînd teoria și practica mecanismelor și mașinilor. II. Dispozitiv pentru trasarea mecanică a diagramelor cinematice referitoare la mecanisme articulate patrulatere (rus.; rez. rom.) . 415
E. TOKACS, P. SIMA, A. ORĂNESCU, V. OLARIU, G. MUNTEANU, T. GAFENCO, G. DELIU, Extinderea domeniului de aplicație a ecuațiilor lui Lagrange-Mangeron la studiul mișcărilor mecanice continue și discontinue (I) (ital.; rez. rom.) 421
E. A. EICHELBRENNER (Canada), Formele de desprindere a stratului limită tridimensional (franc.; rez. rom.) 425
A. PETRE, Studiul distribuțiilor sarcinilor în condiții de hidroelasticitate (engl.; rez. rom.) 429
J. N. KAPUR, C. GUPTA (India), Forme invariante și funcții disipative pentru fluide non-newtoniene (engl.: rez. rom.) 433
N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIȚEANU, Contribuții la noi metode de încercare a rulmenților. I. Metodă de încercare a rulmenților sub sarcină progresivă și continuă (franc.; rez. rom.) 443

Pag.

E. GAIGINSCHI, M. GUTMAN, V. GIURCĂ, Proprietăţile centrului termodinamic al ciclului izobar (rom.; rez. franc.) 455
G. d'ALBON, V. CERNESCU, I. BENDESCU, E. JUGUREANU, V. MACRI, N. APETREI, Studiul coeficientului α în cazul convecţiei la rugozităţi artificiale şi la suprafeţe ondulate (rom.; rez. engl.) . . . 461
V. BELOUS, I. CONDREA, I. ILIE, W. ZERELLES, H. SEEWALDT, Studiul calităţilor aşchietoare ale tarozilor fabricaţi la fabrica de scule Rîşnov (rom.; rez. rus.) 467

CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

A. ŞESAN, S. COVALI, G. POPESCU, Asupra probabilităţii de cedare din teoria siguranţei construcţiilor (rom.; rez. franc.) 473
J. GOLECKI, J. WALCZAK (R. P. Polonia), Cîmpul de deplasări şi starea de tensiune într-un inel elastic greu, sprijinit într-un punct (II) (engl.; rez. rom.) 479
I. DEUTSCH, Caracterul general al ecuaţiei lui Clapeyron (rus.; rez. rom.) . 483
E. NEACŞU, A. VULPE, AL. DUMITRAŞCU, N. UNGUREANU, Considerarea stărilor de coacţiune în calculul structurilor metalice (rom.; rez. franc.). 491
A. RADU, Metodă analogă pentru studiul simplificat al difuziei vaporilor de apă şi pentru determinarea zonelor de condens în elementele de construcţie (franc.; rez. rom.) 499
A. MIHUL, C. LEONTE, CH. CAPATU, M. PATRAŞ, A. CUCIUREANU, Precomprimarea elementelor liniare din beton armat prin încărcare (rom.; rez. franc.) 505
D. ATANASIU, V. CIUBOTARU, H. ZAROJANU, B. COSOSCHI, N. VLAD, Corelarea traficului simulat cu cel real din cale curentă (rom.; rez. rus.). 513
V. ZBEGAN, M. GIURCONIU, GH. POPA, I. MIREL, Contribuţii privind calculul reţelelor de canal în cazul unor ipoteze globale asupra distribuţiei vitezei în lungul lor (rom.; rez. rus.) 519
O. NICHITA, GH. BÎGU, E. CRUDU, V. ERHAN, Studiul mineralizaţiei de la Delniţa-Cîrligătura (raionul Cîmpulung Moldovenesc) (rom.; rez. rus.) . 525
C. BRANIŞTE, E. CORLĂŢEANU, E. BOTEZ, Studiul adaosurilor tensioactive la cimentul silicios (rom.; rez. ital.) 531
E. FLOREA, C. MIHĂILESCU, A. DIMA, Unele aspecte ale eficienţei economice a mecanizării lucrărilor de construcţii (rom.; rez. rus.) . . 539

INDUSTRIE UŞOARĂ

M. BERCOVICI, A. TRIANDAF, Contribuţii la studiul unor probleme de programare liniară în industria textilă (germ.; rez. rom.) . . . 545
P. A. LEBEDEV (U.R.S.S.), Cu privire la sinteza mecanismului spaţial de acţionare a ratierei maşinii de ţesut 549
S. IFRIM, Modificări chimice ale lînei tratate cu hidroxizi alcalini (rom.; rez. franc.) 559

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIII (XVII), вып. 1—2 1967 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XV

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, Об одном классе алгебр четвертого порядка (рум.; рез. франц.) 1
ДЖ. Р. ИСБЕЛЛ, (США), Конъюктура о рядах квадратов (англ.; рез. рум.) 5
И. ЕНЕСКУ Об ассоциативных, коммутативных и с главной единицей алгебр пятого порядка над полем вещественных чисел (I) (франц.; рез. рум.) 13
АЛ. КЛИМЕСКУ, О функциональном уравнении одностороннего распределения (III) (франц.; рез. рум.) 23
В. В. ТОПЕНЧАРОВ (Франция), О вставке категории троек в категорию четверок (франц.; рез. рум.) 25
Ж. МЕРМЕТ (Франция), Синтез булевых функций линейными операциями (франц.; рез. рум.) 31
М. ПИКОНЕ (Италия), Д. МАНЖЕРОН (С. Р. Румыния), Количественное исчисление решений функциональных систем математической физики при помощи полных производных (I) (итал.; рез. рум.) . . . 41
Н. ФОРБА, А. ГЮО (Бельгия), О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений. I. Сущность и конструкция (франц.; рез. рум.) 47
Р. ИГЛИШ (ГФР), Построение решения линейных уравнений осцилляторов в случаях резонанса и особенных (нем.; рез. рум.) 55
Ж. АРДЖЕМИ (Франция) О числе узловых закрытых областей принадлежащих кратной особой точке (франц.; рез. рум.) 65
К. Б. БАРАТАЛИЕВ (СССР), Приближенное решение краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (русск.; рез. рум.) 67
Л. ЧОБАНУ, Ф. ПОТЕРАШ, А. ОПРЯ, М. БЕРКОВИЧ, А. ТРИАНДАФ, Новые классы относящиеся к функциональным уравнениям в полных производных. I. Обобщенные гипергеометрические функции (итал.; рез. рум.) 77
М. Н. ОГУЗТОРЕЛИ (Австралия), Исследования оптимальных по времени задач контроля. (I). Системы описываемые дифференциально-разностными уравнениями (англ.; рез. рум.) 81
А. БЛАКЬЕР (Франция), Г. ЛЕЙТМАНН (США), Некоторые геометрические проблемы относящиеся к оптимальным процессам. I. Проблемы контроля с помехами (англ.; рез. рум.) 91

Стр.

Б. д'ОРДЖЕВАЛЬ (Франция), О кубических кривых трехмерного пространства построенном на поле Галуа имеющем характеристику 2 (франц.; рез. рум.) 105
Ш. РУСЧОР, Геометрическая манера характеризовать многообразия образуемые движением идеального твердого тела без неподвижной точки в S_4 (франц.; рез. рум.) 107
А. БРАЙЕР, Экспоненциальная форма элементов некоторых алгебр (англ.; рез. рум.) 115
К. АКЕР, Вариация направления скорости в слоисто-неустановившемся течении идеальной жидкости на семействе цилиндрических поверхностей (русск.; рез. рум.) 123
Р. ВАЛЛЕ (Франция), Идеальные заряженные жидкости в теории относительности шести измерений (франц.; рез. рум.) . . . 131
ЛЛ. ДЖ. ЧЕМБЕРС (Англия), Инвариантное решение Лоренца уравнений Литтлетона-Бонди (англ.; рез. рум.) 139
С. К. САРКАР (Индия), О продольном движении тонкого стержня с переменным поперечным сечением (англ.; рез. рум.) . . . 143
К. ЧУБОТАРИУ, Ж. ГОТТЛИБ, Г. ЗЕТ, О связи между однородно ускоренными системами отчета и релятивистской трактовкой однородного поля (англ.; рез. рум.) 147
И. М. БЕЛЕНЬКИЙ (СССР), Об одном классе потенциальных движений (русск.; рез. рум.) 151
В. ПЕТРЕСКУ, Г. МАКСИМ, Н. РЕЗЛЕСКУ, Влияние поля мер на дезакомодацию ферритов Mn–Zn (рум.; рез. итал.) . . . 157
К. РУСЧОР, Г. КЭЛУГЭРУ, М. СУЧУ, Влияние пластичности подставки на магнитные свойства тонких слоев кобальта осажденных химическим путем (нем.; рез. рум.) 167

ХИМИЯ

В. Ф. ЛИББИ (США), Химия мирового пространства (I) (англ.; рез. рум.) 171
А. ГЕДВАЛЛ (Швеция), О развитии химии твердых тел (I) (англ.; рез. рум.) 179
Т. ГОЛГОЦИУ, И. ХЫНКУ, Ж. ЛИНДЕ, И. ХЕРЦЕСКУ, О твердофазовых реакциях (рум.; рез. франц.) 185
Ж. ЛИНДЕ, И. ХЫНКУ, В. РОТАРУ, И. ХЕРЦЕСКУ, Исследование реакций в твердой фазе некоторых металлических сульфидов (рум.; рез. франц.) 193
Д. И. ЭРИСТАВИ, Ф. И. БРОУЧЕК, В. Д. ЭРИСТАВИ (СССР), Метод определения бериллия в природных водах (русск.; рез. рум.) . 201
АЛ. НАКУ, Д. НАКУ, К. БОТЕЗ, Роль некоторых электролитов в процессе выветривания галена под действием сернокислой меди (рум.; рез. франц.) 207
Р. ВАСИЛИУ, К. КАЛИСТРУ, О кинетике электролитического образования амальгамы натрия (рум.; рез. франц.) 221
Т. СЭВЯНУ, Р. ТУДОСЕ, Г. КРИСТИАН, Исследование массопередачи между двумя несмешивающимися жидкостями (франц.; рез. рум.) . 227
Г. НАТТА, Ф. СЕВЕРИНИ, М. ПЕГОРАРО, Е. БЕАТИ, Г. АУРЕЛЛО, С. ТОФФАНО (Италия), Хлорвиниловые полимеры привитые на олефиновых эластомерах с высоким сопротивлением удару. I. Экспериментальная часть (итал.; рез. рум.) 233
Ж. РОШ, (Франция), Современное состояние тироглобулина с точки зрения биохимии и биосинтеза (франц.; рез. рум.) 241
И. МАТЕЙ, Т. ЛИКСАНДРУ, Конденсация аценафтенхинона с первичными ароматическими аминами в присутствии металлических солей. I. Металлические комплексы (рум.; рез. франц.) 245
Г. БОТЕЗ, К. ОНИСКУ, Сульфамиды фенокси-уксусных и фенокси-пропионовых кислот (рум.; рез. англ.) 257

Стр.

И. МАТЕЙ, Е. КОМАНИЦЭ, Тиосемикарбазиды двухосновных кислот и продукты их циклизации (III) (рум.; рез. франц.) . . . 269
М. МАРИНЕСКУ, Е. МАТЕЙ, Исследование кинетики сушки кож (III) (рум.; рез. франц.) 275
Е. ПОПА, И. АДУМИТРЭЧЕСЕЙ, М. ПОНТА, В. РЭУЦУ, Вклад химической промышленности в повышение товаро-материальной ценности некоторых минеральных ресурсов С. Р. Румынии (рум.; рез. итал.) 283

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Г. С. С. АВИЛА (США), Распространение электромагнитных волн в однородной поперечно-анизотропной среде (англ.; рез. рум.) . . 293
В. Н. НЕДЕЛКУ, К определению кажущейся, комплексной, мгновенной мощности (немецк.; рез. рум.) 299
Р. КРАМАРЮК, В. ПЕТРЕСУ, Вольтметры с эффектом Керра (рум.; рез. франц.) 303
Д. Д. БАЙНОВ, Г. В. ПЛОТНИКОВА, Ю. П. МАРИНОВ (Н. Р. Болгария), О теории n-контурных LC-автогенераторов с нелинейными индуктивностями (русск.; рез. рум.) 313
Г. ВАСИЛИУ, К. ОНУ, АЛ. МОЛДОВАНУ, Полупроводниковый магнитометр с насыщенным зондом (рум.; рез. русск.) . . . 319
Л. ПРЕДА, Возможности одновременного измерения четырьмя электрическими экипажами мощностей и активных и реактивных энергий в трехфазных цепях при несимметричном режиме токов (рум.; рез. франц.) 329
Н. ГАВРИЛАШ, Трансформатор с двумя обмотками под действием ударной волны (рум.; рез. франц.) 335
К. ЗААЛ, Исследование двухфазного синхронного осцилломотора (англ.; рез. рум.) 345
К. ДИНКУЛЕСКУ, Д. КРИСТЕСКУ, Анализ защитной схемы электростанций против сверхнапряжений с помощью разрядителей с переменным сопротивлением (франц.; рез. рум.) 363
Н. В. БОЦАН, В. ПРИСЭКАРУ, Б. ПОНОМАРЕВ, Л. КАНТЕМИР, Е. БАЛАБАН, Об одной возможности применения трехфазного магнитного усилителя в схемах электропривода (русск.; рез. рум.) . . 377
Г. РОСМАН, Диаграммы коэффициентов передачи линейного, пассивного, взаимного четырехполюсника в резонантных режимах (рум.; рез. франц.) 381

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Н. ИРИМИЧУК, И. ИБЭНЕСКУ, Е. РУСУ, К задаче о голономных связях систем твердых жестких тел I. Геометрические связи (франц.; рез. рум.) 389
БЛ. ДОЛАПЧИЕВ (Н. Р. Болгария), Вывод и применение некоторых новых форм уравнений аналитической динамики (нем.; рез. рум.) . . 399
В. БОГУШ, Я. М. СКОВРОНЬСКИЙ (Н. Р. Польша), Кинетический синтез общих механических систем (англ.; рез. рум.) 409
Д. МАНЖЕРОН (С. Р. Румыния), С. М. ГАМРЕКЕЛИ (СССР), К задаче механо-электронных устройств интересующих теорию и практику машин и механизмов. II. Устройство для механического вычерчивания кинематических диаграмм четырехзвенных механизмов (русск.; рез. рум.) 415
Е. ТОКАЧ, П. СИМА, А. ОРЭНЕСКУ, В. ОЛАРИУ, Г. МУНТЯНУ, Т. ГАФЕНКО, Г. ДЕЛИУ, Распространение области применения уравнений Лагранжа-Манжерона на изучение прерывных и непрерывных механических движений (I) (итал.; рез. рум.) 421

Стр.

Э. А. ЭЙХЕЛЬБРЕННЕР (Канада), Формы отрыва пограничного слоя трех измерений (франц.; рез. рум.) 425
А. ПЕТРЕ, Изучение распределения нагрузок в условиях гидроэластичности (англ.; рез. рум.) 429
Ж. Н. КАПУР, Р. К. ГУПТА (Индия), Инвариантные формы и функции рассеяния для неньютоновых жидкостей (англ.; рез. рум.) . . 433
Н. Г. ПОПИНЧЯНУ, М. Д. ГАФИЦЯНУ, К вопросу о новых методах испытания подшипников (I) (франц.; рез. рум.). . . . 443
Э. ГАЙДЖИНСКИЙ, М. ГУТМАН, В. ДЖЮРКЭ, Значения и свойства термодинамического центра изобарного цикла (рум.; рез. франц.) 455
Дж. д'АЛБОН, В. ЧЕРНЕСКУ, И. БЕНДЕСКУ, Е. ЖУГУРЯНУ, В. МАКРИ, Н. АПЕТРЕЙ, Конвекционный коэффициент α в случае искусственных шероховатостей и волнообразных поверхностей (рум.; рез. англ.) . 461
В. БЕЛОУС, И. КОНДРЯ, И. ИЛИЕ, В. ЦЕРЕЛЛЕС, Г. ЗЕЕВАЛДТ, Исследование режущих свойств метчиков (рум.; рез. русск.) . . 467

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

А. ШЕСАН, С. КОВАЛИ, Г. ПОПЕСКУ, О вероятности разрушений в теории надежности строительства (рум.; рез. англ.) . . . 473
И. ГОЛЕЦКИЙ, И. ВОЛЧАК (Н. Р. Польша), Поле смещения и состояние напряжения в тяжелом упругом кольце с одной точкой упора (II) (англ.; рез. рум.) 479
И. ДОЙЧ, Общий характер уравнений Клапейрона (русск.; рез. рум.) . 483
Е. НЯКШУ, А. ВУЛПЕ, АЛ. ДУМИТРАШКУ, Н. УНГУРЯНУ, Учет остаточных напряжений в расчетах металлических структур (рум.; рез. франц.) 491
А. РАДУ, Метод электрической аналогии в упрощенном исследовании диффузии паров воды и зон конденсации в строительных элементах (франц.; рез. рум.) 499
А. МИХУЛ, К. ЛЕОНТЕ, К. КАПАТУ, М. ПАТРАШ, А. КУЧУРЯНУ, Предварительное напряжение нагрузкой железобетонных линейных элементов (рум.; рез. англ.) 505
Д. АТАНАСИУ, В. ЧУБОТАРУ, Х. ЗАРОЖАНУ, Б. КОСОСКИ, Н. ВЛАД, Корреляция между действительным и симулированным грузооборотом обычной дороги (рум.; рез. русск.) 513
В. ЗБЕГАН, М. ДЖЮРКОНИУ, Г. ПОПА, И. МИРЕЛ, К расчету канализационных сетей в случае общих гипотез о распределении скорости по их длине (рум.; рез. русск.). 519
О. НИКИТА, Г. БЫГУ, Е. КРУДУ, В. ЕРХАН, Исследование минерализационной зоны Дельница-Кырлэгатура (район Кымпулунг Молдовенеск) рез. (рум.; русск.) 525
К. БРАНИШТЕ, Е. КОРЛЭЦЯНУ, Е. БОТЕЗ, Исследование тензо-активных добавок к кремниевому цементу (рум.; рез итал.) . . . 531
Е. ФЛОРЯ, К. МИХАЙЛЕСКУ, А. ДИМА, Некоторые виды экономической эффективности механизации строительных работ (рум.; рез. русск.) 539

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

М. БЕРКОВИЧ, А. ТРИАНДАФ, Некоторые задачи линейного программирования в текстильной промышленности (нем.; рез. рум.) . . 545
П. А. ЛЕБЕДЕВ (СССР), К синтезу пространственного механизма привода ремизо-подъемной каретки ткацких станков (русск.; рез. рум.) . 549
С. ИФРИМ, Химические изменения шерсти под влиянием щелочных гидроксилов (рум.; рез. франц.) 559

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XIII (XVII), fasc. 1—2 1967

CONTENTS

Pag.

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS XVI

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

AL. CLIMESCU, Sur une classe d'algèbres d'ordre quatre (Romanian; French summary) 1
J. B. ISBELL (USA), Squarelike sets, a conjecture (English; Romanian summary) 5
I. ENESCU, Les algèbres d'ordre cinq, associatives, commutatives et à unité principale, à scalaires réels. I. Algèbres indécomposables (French; Rumanian summary) 13
AL. CLIMESCU, Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale (III) (French; Romanian summary) 23
V. V. TOPENTCHAROV (France), Sur l'inclusion d'une catégorie de trios dans une catégorie de quatuors associée (French; Romanian summary) . . 25
J. MERMET, (France), Synthèse de fonctions booléennes par des opérateurs en ligne (French; Romanian summary) 31
M. PICONE (Italia), D. MANGERON, (Romania), Calcolo, tramite l'impiego delle derivate totali, delle soluzioni di vari sistemi funzionali della fisica matematica (I) (Italian; Romanian summary) 41
N. FORBAT, A. HUAUX (Belgique), Sur les solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires. I. Existence et costruction (French; Romanian summary) 47
R. IGLISCH (Deutsche Bundesrepublik), Explizite Berechnung der Lösung linearer Schwingungsgleichungen im Resonanz- und Ausnahmefall (German; Romanian summary) 55
J. ARGÉMI (France), Sur le nombre de régions nodales fermées appartenant à un point singulier multiple (French; Romanian summary) . . 65
K. B. BARATALIEV (U.R.S.S.), A boundary value problem approximate solution for an integro-differential system with retarded argument (Russian; Romanian summary) 67
L. CIOBANU, F. POTERAŞ, A. OPREA, M. BERCOVICI, A. TRIANDAF, Nuove classi di funzioni apettanti ai sistemi funzionali alle derivate totali. I. Funzioni ipergeometriche generalizzate (Italian; Romanian summary) 77
M. N. OĞUZTÖRELI (Australia), Studies concerned with time optimal control problems. I. Systems described by differential-difference equations (English; Romanian summary) 81
A. BLAQUIÈRE, G. LEITMANN (USA), Some geometric aspects of optimal processes. I. Problems with control constraints (English; Romanian summary) 91
B. d'ORGEVAL (France), Sur les cubiques gauches d'un espace S_3 construit sur un champ de Galois de caractéristique 2 (French; Romanian summary) 105

Pag.

ŞT. RUSCIOR, Une manière géométrique pour caractériser les variétés engendrées par le mouvement d'un solide parfait sans point fixe dans S_4 (French; Romanian summary) 107

A. BRAIER, Exponential form of the elements of some algebras (English; Romanian summary) 115

C. ACKER, Die Geschwindigkeitsrichtungsänderung einer auf zylindrischen Flächen strömenden Flüssigkeit im Falle unstationärer Strömung (Russian; Romanian summary) 123

R. VALLÉE (France), Fluides parfaits, chargés, en théorie relativiste hexadimensionnelle (French; Romanian summary) 131

LL. G. CHAMBERS (England), Lorentz invariant solution of Lyttleton-Bondi equations (English; Romanian summary) 139

S. K. SARKAR (India), Note on the longitudinal vibration of a thin viscoelastic rod of variable cross section (English; Romanian summary) . . 143

C. CIUBOTARIU, J. GOTTLIEB, G. ZET, On the connection between uniformly accelerated frames of reference and a general-relativistic handling of a uniform field (English; Romanian summary) 147

I. M. BELENKI (U.R.S.S.), On a class of potential motions (Russian; Romanian summary) 151

V. PETRESCU, GH. MAXIM, N. REZLESCU, Influenza del campo di misura sul desaccomodazione delle ferrite Mn-Zn (Romanian; Italian summary) 157

C. RUSCIOR, G. CĂLUGĂRU, M. SUCIU, Der Einfluss der Trägerplastizität auf die magnetischen Eigenschaften dünner, chemisch niedergeschlagener Kobaltschichten (German; Romanian summary) 167

CHEMISTRY

W. F. LIBBY (USA), Space chemistry (I) (English; Romanian summary) . 171

A. HEDVALL (Sweden), On the start and glimpses of development of the chemistry of solids (I) (English; Romanian summary) 179

T. GOLGOŢIU, I. HÎNCU, J. LINDE, I. HERŢESCU, Considérations sur quelques réactions en phase solide (Romanian; French sumary) . . 185

J. LINDE, I. HÎNCU, V. ROTARU, I. HERŢESCU, Étude en phase solide de quelques sulfures métalliques (Romanian; French summary) . . 193

D. I. ERISTAVI, F. I. BROUTCHEK, V. D. ERISTAVI (U.R.S.S.), Méthode de détermination du berillium dans les eaux naturelles (Russian; Romanian summary) 201

AL. NACU, D. NACU, C. BOTEZ, Le rôle de quelques électrolytes dans le processus de l'altération de la galène sous l'influence du sulfate de cuivre (Romanian; French summary) 207

R. VASILIU, C. CALISTRU, Sur la cinétique de formation électrolytique de l'amalgame de sodium (Romanian; French summary) . . . 221

TH. SĂVEANU, R. TUDOSE, GH. CRISTIAN, Processus de transfert entre liquides nonmiscibles. II. Extraction pelliculaire (French; Romanian summary) 227

G. NATTA, F. SEVERINI, M. PEGORARO, E. BEATI, G. AURELLO, S. TOFFANO (Italia), Polimeri del cloruro di vinile innestati su elastomeri olefinici dotati di elevata resistenza all'urto. I. Parte sperimentale (Italian; Romanian summary) 233

J. ROCHE (France), Sur quelques aspects actuels de la biochimie de la thyroglobuline et de sa biosynthèse (French; Romanian summary) . . 241

I. MATEI, T. LIXANDRU, Condensation de l'acénaphtenquinone avec des amines aromatiques en présence des sels métalliques. Complexes métalliques (Romanian; French summary) 245

GH. BOTEZ, C. ONISCU, E. MERICĂ, C. GOREA, Sulfamides of the phenoxyacetic and phenoxypropyonic acids. VI. Sulfamidated derivatives of the chloro-crezoxyacetic and chloro-crezoxy-α-propyonic acids (Romanian; English summary) 257

Pag.

I. MATEI, E. COMANIŢĂ, Thiosemicarbazides des acides bibasiques et produits de cyclisation III. (Romanian ; French summary) . . . 269
M. MARINESCU, E. MATEI, Études sur la cinétique du séchage des cuirs. III. Le séchage par convection (Romanian ; French summary) . . . 275
E. POPA, I. ADUMITRĂCESEI, M. PONTA, V. RĂUŢU, Apporto dell'industria chimica alla valorificazione di vari risorse minerarie nella Republica Socialista Romania (Romanian ; Italian summary) 283

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

G. S. S. AVILA (USA), Electromagnetic wave propagation in an homogeneous transversaly anisotropic medium (English ; Romanian summary) . . 293
N. V. NEDELCU, Im Zusammenhang mit dem Ausdruck der komplexen Augenblicksscheinleistung (German ; Romanian summary) . . . 299
R. CRAMARIUC, V. PETRESCU, Voltmètres à effect Kerr (Romanian ; French summary) 303
D. D. BAINOV, G. V. PLOTNIKOVA, I. P. MARINOV (Bulgarie), Sur la théorie des oscillateurs du type *LC* à *n* circuits et à inductances monlinéaires (Russian ; Romanian summary) 313
GH. VASILIU, C. ONU, AL. MOLDOVANU, Magnétomètre à sonde de saturation, transistorisé (Romanian ; Russian summary) . . . 319
L. PREDA, Possibilités de mesure simultanée avec quatre équipages des puissances et des énergies actives et réactives dans les réseaux triphasés en régime déséquilibré des courants (Romanian ; French summary) . . 329
N. GAVRILAŞ, Transformateur à deux enroulements soumis à l'action d'une onde de choc (Romanian ; French summary) 335
C. SAAL, Study of an oscillating biphase synchronous linear motor (I) (English ; Romanian summary) 345
C. DINCULESCU, D. CRISTESCU, Analyse d'un schéma de protection des stations contre les surtensions à l'aide des déchargeurs à résistance variable (French ; Romanian summary) 363
N.V. BOŢAN, V.PRISĂCARU, B.PONOMAREV, L.CANTEMIR, E.BALABAN, Sur la possibilité de l'utilisation des amplificateurs magnétiques triphasés dans les schémas de comande électrique (Russian ; Romanian summary) . 377
H. ROSMAN, Diagrammes des coefficients de transfert d'un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque, en régimes résonants (Romanian ; French summary) 381

MECHANICAL ENGINEERING

N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU, E. RUSU, Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides. I. Liaisons géométriques (French ; Romanian summary) 389
BL. DOLAPTSCHIEW (R.P. Bulgarien), Über die Aufstellung und die Andwedbarkeit einigen neuen Formen der Gleichungen der analytischen Dynamik (German ; Romanian summary) 399
W. BOGUSZ, J. M. SKOWRONSKI (Poland), Kinetic synthesis of general mechanical systems (I) (English ; Romanian summary) . . . 409
D. MANGERON (Roumanie), S. M. GAMRÉKÉLI (U.R.S.S), Sur le problème des dispositifs mécano-électroniques intéressant la théorie et la pratique des mécanismes et des machines (II) 415
E. TOKACS, P. SIMA, A. ORĂNESCU, V. OLARIU, G. MUNTEANU, T. GAFENCO, G. DELIU, Estensione del dominio di applicazione delle equazioni di Lagrange-Mangeron allo studio dei moti meccanici continui e discontinui (I) (Italian ; Romanian summary) 421

Pag.

E. A. EICHELBRENNER, (Canada), Formes de décollement de la couche limite tridimensionnele (French; Romanian summary) 425
A. PETRE, Hydroelastic distribution of loads due to lift in the case of hydrofoils (English; Romanian Summary) 429
J. N. KAPUR, R. C. GUPTA, (India), Invariant forms and dissipation functions for various non-newtonian fluids (English; Romanian summary) . . 433
N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIȚEANU, Contributions concernant les méthodes nouvelles pour l'essai des roulements. I. Méthode d'essai des roulemens sous charge progressive et continue (French ; Romanian summary) 443
E. GAIGINSCHI, M. GUTMAN, V. GIURCĂ, Les propriétés du centre thermodynamique du cycle isobare (French; Romanian summary) . 455
G. d'ALBON, V. CERNESCU, I. BENDESCU, E. JUGUREANU, V. MACRI, N. APETREI, On the α coefficient concerned with artificial roughnesses and corrugated sheets convection (Romanian; English summary) . . 467
V. BELOUS, I. CONDREA, I. ILIE, W. ZERELLES, H. SEEWALDT, Experimental study of tops cutting properties (Romanian; Russian summary) 461

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

A. ȘESAN, S. COVALI, G. POPESCU, Sur la probabilité de rupture dans la théorie de la sureté des constructions (Romanian; French summary) . 473
J. GOLECKI, J. WALCZAK (Poland), Displacement field and state of stress in heavy elastic ring supported at point (II) (English; Romanian summary) 479
I. DEUTSCH, Clapeyron's equation general character (Russian; Romanian summary) 483
E. NEACȘU, A. VULPE, AL. DUMITRAȘCU, N. UNGUREANU, Études des efforts résiduels dans le calcul des structures métalliques (Romanian; French summary) 491
A. RADU, Principe d'analogie électrique pour l'étude simplifiée de le diffusion des vapeurs d'eau et des zones de condensation dans les éléments de constructions (French; Romanian summary) 499
A. MIHUL, C. LEONTE, GH. CAPATU, M. PATRAȘ, A. CUCIUREANU, The prestressing of reinforced concrete members by means of loadings (Romanian; English summary) 505
D. ATANASIU. V. CIUBOTARU, H. ZAROJANU, B. COSOSCHI, N. VLAD, Correlazione tra il traffico simulato e quello effettivo spettante alla calle corrente (Romanian; Russian summary) 513
V. ZBEGAN, M. GIURCONIU, GH. POPA, I. MIREL, Contributions au calcul des réseaux de canaux dans des hypothèses intégrales sur la distributions de la vitesse aux long des réseaux (Romanian; Russian summary) . . 519
O. NICHITA, GH. BÎGU, E. CRUDU, V. ERHAN, Études de la minéralisation de Delnița-Cîrligătura (rayon Cîmpulung Moldovenesc) (Romanian; Russian summary) 525
C. BRANIȘTE, EL. CORLĂȚEANU, E. BOTEZ, Studio degli addenti tensioattivi al cemento silicoso (Romanian; Italian summary) . . . 531
E. FLOREA, C. MIHĂILESCU, A. DIMA, Some aspects of the economic efficiency of structural work mechanisation (Romanian: Russian summary) 535

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

M. BERCOVICI, A. TRIANDAF, Beitrag zum Studium eniniger Probleme der linearen Programmierung in der Textilindustrie (German; Romanian summary) 545
P. A. LEBEDEV (U. R. S. S.), Sur la synthèse du mécanisme spatial de commande de la ratière du métier à tisser (Russian; Romanian summary) . 549
S. IFRIM, Modifications chimiques de la laine traitée avec des hidroxydes alcalines (Romanian; French summary) 559

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

REDACŢIONALE

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS ОТ РЕДАКЦИИ

Articole ale colaboratorilor externi primite la redacţia revistei *Buletinul Institutului politehnic din Iaşi*

Papers received from the external collaborators by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

Статьи внеинститутских сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

PICONE M. (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia), MANGERON D., (Istituto politecnico di Iaşi, Romania), *Calcolo, tramite l'impiego delle derivate totali, delle equazioni della fisica matematica (I).*

ARGÉMI J. (Centre Nationale de la Recherche Scientifique, Marseille, France), *Sur le nombre de régions nodales fermées appartenant à un point singulier multiple.*

OĞUZTÖRELI M. N. (University of Queensland, St. Lucia, Brisbane, Australia), *Studies concerned with time optimal control problems (I).*

d'ORGEVAL B. (Université de Dijon, France), *Sur les cubiques gauches d'un espace S_3 construit sur un champ de Galois de caractéristique 2.*

VALLÉE R. (Université de Besançon, France), *Fluides parafaits, chargés, en théorie relativiste hexadimensionnelle.*

CHAMBERS LL. G. (University College of North Wales, England), *Lorentz invariant solution of Lyttleton–Bondi equations.*

LIBBY W. F. (University of California, Los Angeles, USA), *Space chemistry.*

HEDVALL A. (Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden), *On the start and glimpses of development of the chemistry of solids.*

NATTA G., SEVERINI F., PEGORARO M., BEATI E., AURELLO G., TOFFANO S., (Istituto di Chimica industriale del Politecnico, Milano, Italia), *Polimeri del cloruro di vinile innestati su elastomeri olefinici, dotati di elevata resistenza all'urto.*

ROCHE J. (Université de Paris, France), *Sur quelques aspects actuels de la biochimie de la thyroglobuline et de sa biosynthèse.*

NEDELCU V. N. (Technische Hochschule „Gh. Gheorghiu-Dej", Bukarest), *Im Zusammenhang mit dem Ausdruck der komplexen Augenblicksscheinlistung.*

SAAL C. (Polytechnic Institute of Brashov), *Study of an oscillating biphase synchronous linear motor (I).*

DOLAPTSCHIEW BL. (Akademie der Wissenschaften, Sofia, Bulgarien), *Über die Aufstellung und die Anwendbarkeit einigen neuen Formen der Gleichungen der analytischen Dynamik.*

TOKACS E., SIMA P., ORĂNESCU A., OLARIU V., MUNTEANU G., GAFENCO T., DELIU G., (Istituto Minero di Petroşani, Istituto Politecnico di Braşov, Istituto Politecnico di Galaţi), *Estensione del dominio di applicazione delle equazioni di Lagrange-Mangeron allo studio dei moti meccanici continui e discontinui (I).*

EICHELBRENNER E. A. (Université Laval, Québec, Canada), *Formes de décollement de la couche limite tridimensionnelle.*

PETRE A. (Institute of Applied Mechanics „Tr. Vuia", Academy of the Socialist Republic Romania), *Hydroelastic distribution of loads due to lift in the case of hydrofoils.*

ЛЕБЕДЕВ П. А. (Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности им. С. М. Кирова, СССР), *К синтезу пространственного механизма привода ремизоподъемной каретки ткацких станков.*

КАНТОР Б. Я. (Харьковский филиал института механики АН УССР, СССР), *Критические состояния гибкой пологой конической оболочки в температурном поле.*

АКИМОВ В. К., БРАГИНА С. И., БУСЕВ А. И. (Московский Университет им. М. В. Ломоносова, СССР), *Определение сульфат-ионов в поверхностноактивных и моющих веществах.*

БАЙНОВ Д. Д. (Машинно-электротехнический институт, София, Н. Р. Болгария), *Метод асимптотического интегрирования уравнений движения квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы.*

САННИКОВ С. С. (Физико-технический институт АН УССР, Харьков, СССР), *Об одном обобщении линейных представлений непрерывной группы.*

ПАРТИНОВА Н. А., БАЙНОВ Д. Д. (Машинно-электротехнический институт, София, Н. Р. Болгария), *Некоторые замечания относительно одного дифференциального уравнения параболического типа.*

KNAPP H. (Mathematisches Institut der Universität Innsbruck, Österreich), *Die Gröbnermethode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelsmechanik.*

POWELL C. F. (University of Bristol, England), *Why we study high-energy nuclear physics?*

DRĂGILĂ P. (Universitatea din Timişoara), *Sur quelques clases de réseaux.*

SENGUPTA K. (Department of Mathematics, Vista Bharati, West Bengal, India), *Note on the problem of slow and steady motion of viscous fluid with in a fixed elliptic cylinder, having a line source and a line sink equal strengths at the extremities of the major axis of the cross-section.*

ALOK KUMAR SEN GUPTA (Jadavpur University, India), *Note on the torsional vibration of a non-homogeneous truncated conical bar of aeolotropic material.*

SZÉKELY I., HANDRALUCA V. (Institutul politehnic Cluj), *Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu ajutorul funcţiilor de transmitere.*

SIMA P. (Institutul politehnic Braşov), *Vibraţiile sarcinilor suspendate elastic, luînd în consideraţie şi masa arcului.*

NIANG S. (Université de Dakar, Sénégal), *Intégrales premières d'un système mécanique constant et lié. Crochets et théorème de Poisson généralisé.*

DÎMBOIU E. (Institutul politehnic Braşov), *Asupra unor nomograme simetrice cu drepte concurente.*

KRALL ALLAN M. (The Pennsylvania State University, Penna, USA), *A general stability criterion for feedback systems.*

APOSTOLATOS N. (Technische Hochschule, München, Deutsche Bundesrepublik), *Verallgemeinerung des Begriffes einer gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung im Komplexen sowie Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.*

TARGONSKI GY. (Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach, Deutsche Bundesrepublik), *Lineare Operatoren auf Funktionenalgebren.*

ORĂNESCU A. (Institutul politehnic Galaţi), *Aplicaţiile cinematice ale unei probleme de dinamica mecanismelor.*

CROSSLEY F. E. (Yale University, New Haven, USA), *Die Nachbildung eines mechanischen Kurbelgetriebes mittels eines elektronischen Analogrechners.*

DIZIOĞLU B. (Technische Hochschule Braunschweig, Deutsche Bundesrepublik), *Beitrag zum Studium der Getriebelehre.*

MILTZLAFF G. (Technische Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg, D. D. R.), *Eine Verallgemeinerung der Aufgabe von Cauchy-Kovalewski für Systeme von partiellen Differentialgleichungen.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 1—2, 1967

Математика, Теоретическая механика, Физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 512.8

ASUPRA UNEI CLASE DE ALGEBRE DE ORDINUL PATRU

DE

AL. CLIMESCU

În cercetările sale privitoare la clasificarea algebrelor de ordin patru peste un cîmp oarecare, G. Scorza [2] menţionează clasa de algebre dată în baza u_1, u_2, u_3, u_4 prin tabela:

(1)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_3	$u_3 + \alpha u_4$	0	0
u_2	$\beta u_3 + \gamma u_4$	u_4	0	0
u_3	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0

Aceste algebre sînt asociative, iar cazul comutativ ($\alpha = 1$, $\gamma = \alpha$) intervine în determinarea unei clase de algebre de ordinul cinci peste cîmpul real, întreprinsă de către I. Enescu [1].

G. Scorza (*l.c.*, pp. 227—230) a dat de asemenea condiţiile necesare şi suficiente de izomorfism pentru două algebre de tip (1) care, specializate la cazul comutativ şi mărginindu-ne la cîmpul real, se exprimă în modul următor:

(a) Două algebre corespunzînd, una valorii $\alpha = 1/4$ şi cealaltă valorii $\alpha' \neq 1/4$, nu sînt izomorfe.

(b) Două algebre corespunzînd valorilor α, α' ($\neq 1/4$) sînt izomorfe dacă şi numai dacă există constante λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, satisfăcînd condiţiile:

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0, \tag{2}$$

$$\alpha\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2 + 2\alpha\lambda_1\mu_1 \neq 0, \tag{3}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}{\alpha\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}. \tag{4}$$

Vom completa rezultatul lui Scorza, demonstrînd următoarea propoziţie:

Algebrele de forma (1) *cu scalari reali şi comutative* ($\beta = 1$; $\gamma = \alpha$, $\alpha \neq 1/4$) *dau loc la două tipuri neizomorfe între ele şi anume:*

(a) *Toate acele cu* $\alpha > 1/4$ *sînt izomorfe între ele;*

(b) *Toate acele cu* $\alpha < 1/4$ *sînt izomorfe între ele.*

Proprietatea de structură care diferenţiază cele două tipuri este următoarea: Pentru tipul (a) *pătratele elementelor formează o subalgebră, iar pentru tipul* (b) *pătratele nu formează o subalgebră.*

Pentru demonstraţie, plecăm în primul rînd de la cazul $\alpha = 3/4$. Atunci

$$\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{4}\lambda_1^2 = \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2, \qquad \mu_2^2 + \mu_1\mu_2 + \frac{3}{4}\mu_1^2 = \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_1^2.$$

Rezultă că putem pune:

$$\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{2} = k\cos\alpha, \quad \mu_2 + \frac{\mu_1}{2} = l\cos\beta, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1 = k\sin\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1 = l\sin\beta$$

deci

$$\lambda_1 = k\sqrt{2}\sin\alpha, \quad \mu_1 = l\sqrt{2}\sin\beta, \quad \lambda_2 = k\cos\alpha - \frac{k}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \quad \mu_2 = l\cos\beta - \frac{l}{\sqrt{2}}\sin\beta,$$

de unde $\alpha' = k^2/l^2$, aşadar $l \neq 0$.

Condiţia (2) devine:

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = kl\sqrt{2}\,\sin(\alpha - \beta) \neq 0,$$

deci

$$k \neq 0, \quad \sin(\alpha - \beta) \neq 0.$$

Condiţia (3) devine:

$$l^2 = kl(\sqrt{2}\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \sqrt{2}\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta) +$$

$$+ 2kl\left(\cos\alpha\cos\beta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\cos\beta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta\right) +$$

$$+ \frac{3}{2}2kl\sin\alpha\sin\beta = kl(2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta) = 2kl\cos(\alpha - \beta),$$

de unde

$$\cos(\alpha - \beta) \neq 0 \text{ şi } \alpha' = \frac{k^2}{l^2} = \frac{1}{4\cos^2(\alpha - \beta)},$$

unde $0 < \cos^2(\alpha - \beta) < 1$ şi, prin urmare, α' poate lua orice valoare $> 1/4$ şi numai acestea, obţinîndu-se astfel tipul (a).

Dacă $x = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$, avem (pentru $\alpha = 1$):

$$x^2 = a^2u_3 + 2ab\,(u_3 + u_4) + b^2u_4 = (a^2 + 2ab)u_3 + (b^2 + 2ab)u_4\,.$$

Se verifică uşor că sistemul de ecuaţii:

$$a^3 + 2ab = c, \quad b^2 + 2ab = d$$

are soluţii reale, oricare ar fi c şi d reali, ceea ce revine la afirmaţia că subalgebra de bază (u_3, u_4) coincide cu ansamblul elementelor de forma x^2, prin urmare, acestea formează o subalgebră şi similar, pentru oricare $\alpha > 1/4$.

Plecînd apoi de la valoarea $\alpha = 0$, avem:

$$\alpha' = \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}\,,$$

deci $\mu_2 \neq 0$, $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$ şi se poate pune:

$$\lambda_2 = k\mu_2\,, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = l(\mu_1 + \mu_2)\,, \text{ adică } \lambda_1 = l\mu_1 + (l - k)\mu_2\,.$$

Condiţia (2) devine:

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = l\mu_1\mu_2 + (l - k)\mu_2^2 - k\mu_1\mu_2 = (l - k)\mu_2(\mu_1 + \mu_2)\,,$$

deci $l \neq k$, iar (3) devine:

$$\mu_2(\mu_1 + \mu_2) = l\mu_1\mu_2 + (l - k)\,\mu_2^2 + k\mu_1\mu_2 + 2k\mu_2^2 = (l + k)\mu_2(\mu_1 + \mu_2)\,,$$

adică $l + k = 1$ şi $\alpha' = kl$ cu condiţiile $l + k = 1$, $l \neq k$. Un calcul simplu arată atunci că α' poate lua orice valoare $< 1/4$ şi numai o astfel de valoare. În acest mod se găseşte tipul (b), iar in acest caz

$$x^2 = a^2u_3 + 2abu_3 + b^2u_4 = (a^2 + 2ab)\,u_3 + b^2u_4\,,$$

ceea ce arată că în această situaţie şi deci pentru orice $\alpha < 1/4$, pătratele nu formează o subalgebră.

Primită la 28 XI 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de Matematici I

BIBLIOGRAFIE

1. Enescu I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 13—22.
2. Scorza G., Atti dell'Accad. Sc. fis. mat. Napoli. serie 2, 1936, **XX**, *14*.

SUR UNE CLASSE D'ALGÈBRES D'ORDRE QUATRE

(Résumé)

Comme complément à un résultat de G. Scorza [2]. on démontre la proposition suivante :

Les algèbres de forme (1), *à scalaires réels et commutatives* ($\beta = 1$, $\gamma = \alpha$, $\alpha \neq 1/4$), *donnent lieu à deux types non-isomorphes comme suit :*

(a) *Toutes celles avec* $\alpha > 1/4$ *sont isomorphes entre elles ;*

(b) *Toutes celles avec* $\alpha < 1/4$ *sont isomorphes entre elles .*

La propriété de structure qui différencie les deux types est la suivante :

Pour le type (a) *les carrés des éléments forment une sous-algèbre, tandis que pour le type* (b) *les carrés ne forment pas une sous-algèbre.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 511.213

SQUARELIKE SETS, A CONJECTURE

BY

J. R. ISBELL

1. Introduction

This paper studies a conjecture, the first form of which was that the basic results on representing natural numbers as sums of two squares are so strong that they should characterize the set of squares. By „basic results" I mean such as these, including some preliminaries: (0) There is a non-zero number in the given set A; (1) A is closed under multiplication; (2*) A is multiplicatively generated by pairwise relatively prime numbers and possibly 0; (3) The set $A + A$ of all sums $a_1 + a_2$, a_i in A, is closed under multiplication; (4*) $A + A$ has relatively prime generators and possibly 0; (5) The generators of $A + A$ are uniquely representable as $a_1 + a_2$. Properties like these do not seem to suffice to distinguish the set S of squares from the set D of the odd natural numbers and 0. However, if there is a third set having all the properties listed, its members $< 32{,}000$ are the squares $< 32{,}000$.

Rather than strengthen the conditions (0)...(5), it seems good to weaken them; the reliance on the external operation $+$ is total, but the external notion of „relatively prime" should be replaced by the corresponding internal notions. This gives (2) [(4)]: The multiplicative semigroup $A[A + A]$ has unique factorization. If there is a third set satisfying unstarred (0)...(5), it agrees with S or D at least out to 961.

I am indebted to P. T. Bateman for pointing out the reference [2] and its applicability. The result needed, that there is for x of reasonable size ($x > 5$, actually) always a prime in $(7x, 8x)$, is the only result more recent than Dirichlet that is used. Recent results on primes in arithmetic progressions seem to be almost enough to finish the sets that start like D. Known results on primes represented by quadratic forms seem to be far from enough to finish the sets that start like S.

2. Verification through 7

A few remarks on the use of the axioms. After 7, some of the axioms are not used in the arguments that A (beginning 0, 1, 4) agrees with S for a long way, or (beginning 0, 1, 3) agrees with D for a long way. No very complex deductions from the axioms are used, and in particular, no global deductions. This is almost unexplored territory. One can show, for example, that $A + A$ must have infinitely many generators, by adapting (or quoting, if A begins 0, 1, 4) the fact that the Fermat numbers are pairwise relatively prime. This global conclusion seems too weak to help in proving the conjecture. It might help if we knew, for example, that every prime $4n + 1$ must be in $A + A$.

Let us call a set A of natural numbers *squarelike* if it satisfies the weaker conditions (0)...(5), *strongly squarelike* if it also satisfies (2*) and (4*). We want:

1.1. *The least element of a squarelike set must be* 0 *or* 1.

1.2. *If a squarelike set includes* 0 *it includes* 1.

1.3. *If a squarelike set includes* 1 *it includes* 0.

Proof of **1.1.** Conditions (2) and (5) are not needed. If a is the least element of A, $2a$ is the least element of $A + A$. In $A + A$, $2a(a^3 + a^2) = 2a^2(a^2 + a)$. Thus the generator $2a$ must divide or equal $2a^2$ or $a^2 + a$. For $a > 1$ equality fails, and the other factor would be less than the least element $2a$.

Proof of **1.2.** First suppose A begins 0, 2. Then $A + A$ includes 2, 6, and 18. As $2.18 = 6^2$, 3 must be in $A + A$. With 1 not in A this means $3 \in A$, whence condition (5) is violated by $3 + 8 = 9 + 2$.

With the second member a of A exceeding 2, we get $a > 4$ from $3.12 = 6^2$, $4^3 = 8^2$. Now every $b \in A$ is a multiple in $A + A$ of a; for $a.2b = 2a.b$, and a does not divide $2a$ in $A + A$. Hence every element of $A + A$ is an integral multiple of a. Hence, then, every element of A except a itself is an integral multiple of a^2. Returning to $A + A$, the only elements less than a^2 are 0, a, and $2a$. Back in A, every element is at least a^3 except 0, a, a^2 and $2a^2$. $2a^2$ is in A, since $4a^2$ is in $A + A$ and $4a^2 < a^3$. This determines the nine elements $0,...,4a^2$ of $A + A$ that are less than a^3. For each of the cases $a = 5$, 6, 7, 8, there is a simple violation of condition (4). If $a > 8$, then $8a^3 < a^4$, $(2a)^3 \in A + A$, and $4a^3$ must be in A (the largest possible number $< a^4$). Now $(2a^2)^2 = a.4a^3$ in A, violating condition (2).

Proof of **1.3.** If 1 is in A and 0 not, $A + A$ includes 2, thus also 4, and 2 or 3 must be in A. Not both, for $2 + 3 = 4 + 1$. With 3, not 4, since $9 + 4 = 12 + 1$. Not 5, since $5 + 1 = 3 + 3$, a generator of $A + A$. Therefore 7 must be in A, for $A + A$ has to include 8. But now the generator 10 of $A + A$ is $7 + 3$ and $9 + 1$, contradicting the trial assumption $3 \in A$.

In the other case A includes 1 and 2, hence 4 and 8. We noted $3 \notin A$. As for 5, 6, 7, first suppose none of them is in A. Since $A + A$ includes 3 and 5, it includes 15; A must include 11, 13, or 14. Not 13, for $13 + 4 = 16 + 1$. 11 in A would yield 22 and $33 = 22 + 11$ in $A + A$, as well as 2 and 3, whence $11 \in A + A$. So 9 or 10 must be in A. But $9 + 4 = 11 + 2$, while $10 \in A$ yields 14 and 21 in $A + A$, as well as 2 and 3, a contradiction. There remains the subcase $14 \in A$. As above for 11, this yields 28, 42, hence 14 in $A + A$. A must include 10, 12, or 13. 10 and 13 are excluded as before, and 12 would yield 14 and 49 in $A + A$, a contradiction again. A must intersect $\{5, 6, 7\}$.

The assumption $7 \in A$ yields (like 11 and 14) $7 \in A + A$, whence 5 or 6 is in A. 6 and 7 together give the contradiction $6 + 7 = 12 + 1$. 5 and 7 give $7 + 10 = 16 + 1$. The assumption $5 \in A$ gives 133 and 57 in $A + A$, with 3 and 7, whence $19 \in A + A$. But this cannot be arranged; 18 (in A) would yield $36 + 5 = 25 + 16$, $17 + 20$ is $32 + 5$, 16 is useless since $3 \notin A$, $15 + 2 = 16 + 1$, and $16 + 1$ also is $13 + 4 = 9 + 8$. The remaining representations of 19 require 14 or 11, 14 would yield $28 + 1 = 25 + 4$, and $11 + 2 = 8 + 5$. Thus $7 \notin A$ and $5 \notin A$.

In the remaining case A begins 1, 2, 4, 6, 8. 15 must still be in $A + A$, and 9, 11, 13 are excluded by $9.4 = 6^2$ (in A), $11 + 2 = 12 + 1$, $13 + 4 = 16 + 1$. Thus $14 \in A$. This gives 38 two representations $24 + 14$, $32 + 6$; so 38 is not a generator in $A + A$, $19 \in A + A$. As $15 + 2 = 16 + 1$ and $17 + 12 = 28 + 1$, 19 could only be represented as $18 + 1$; but $18.2 = 6^2$, contradiction. The proof is complete.

We know now that a squarelike set A must include both 0 and 1. Thus the prime 2 is in $A + A$, and $2 \notin A$. Since 4 is in $A + A$, A includes 3 or 4; not both, since $9 + 4 = 12 + 1$.

We still need special computations for:

1.4. *The members* < 8 *of a squarelike set are either* 0, 1, *and* 4 *or* 0, 1, 3, 5, *and* 7.

Proof. If A begins 0, 1, 4, then 5 in A would yield 6 and 9 in $A + A$, $2.9 = 6^2$, contradiction. Next suppose $6 \in A$. The prime $6 + 1$ is not in A (condition (5)). 9 or 12 would violate condition (2). Yet 52 and 65, hence 13 too, are in $A + A$. This requires $13 \in A$ and yields the violation $13 + 4 = 16 + 1$. Next, if A begins 0, 1, 4, 7, then $10 \notin A$ since $10 + 1 = 7 + 4$. But $10 \in A + A$, so $9 \in A$, and $37 = 36 + 1 = 28 + 9$; this concludes the 0, 1, 4 case.

If A begins 0, 1, 3, we have noted $4 \notin A$. If 5 were not in A, then since $8 \in A + A$, A would include 7 or 8. $7 + 3 = 9 + 1 = 10$, a generator. 8 in A yields 25 in $A + A$, where $25.2^2 = 10^2$, violating unique factorization. Thus A begins 0, 1, 3, 5. 6 would yield the violation $25 + 6 = 30 + 1$. It remains to show that 7 cannot be omitted.

We should have $8 \notin A$. Otherwise A would begin 0, 1, 3, 5, 8, 9. By unique factorization, $10 \notin A$, $12 \notin A$. The next four primes are excluded by $11 + 0 = 8 + 3$, $13 + 0 = 8 + 5$, $17 + 0 = 8 + 9$, $19 + 24 = 40 + 3$. We

have $15 = 3.5 \in A$. $14 \notin A$ since $14 + 9 = 15 + 8$. Finally $21 + 8 = 24 + 5$, $22 + 1 = 15 + 8$, so that 22 cannot be in $A + A$, contradiction.

Accordingly A must begin 0, 1, 3, 5, 9. $10 \notin A$ since 35, 14, 2, 5 in $A + A$ would violate (4). In fact, since 14, 2 and 5 are certainly in $A + A$, keeping 35 out requires 20, 26, 30, 32, 34, $35 \notin A$. Similarly $21 \notin A + A$, so 12, 16, 18, $21 \notin A$. As 14 is a generator in $A + A$, 11, 13, $14 \notin A$. Hence $13 \notin A + A$, $26 = 25 + 1$ is a generator, and 17, $23 \notin A$. We now have $17 \notin A + A$, 34 is a generator, and 19, 29, 31, $33 \notin A$. Like 21 and 35, $49 \notin A + A$; 22, 24, 40, $49 \notin A$ (besides others). By this time $23 \notin A + A$, 46 is a generator, and 31, 37, 41, $43 \notin A$. $28 \notin A$ because it would yield 33, 55, violating (4). Like 21 and 35, 39 and 65 are not in $A + A$; 39, 56, 64, $65 \notin A$. Similarly 63, $69 \notin A + A$; 36, 38, 42, 63, $68 \notin A$. Now $A + A$ omits 29, 31, 37, 41, 43; so their doubles, when they appear, are generators. We have to get 56, 64, 68 in $A + A$; the remaining possibilities require A to intersect each of {47, 53, 55}, {55, 59, 61}, and {53, 59, 67}. 53 cannot be in A, for $53 + 5 = 55 + 3$, $53 + 9 = 59 + 3$, $53 + 9 = 61 + 1$. 47 cannot be in with 59 or 61, as $47 + 27 = 59 + 15$, $47 + 15 = 61 + 1$. Thus $55 \in A$. Since $67 + 15 = 55 + 27$, $67 \notin A$. It remains that $59 \in A$; but $59 + 27 = 81 + 5$, the conclusive violation.

2. Concerning $(7, \infty)$

To establish the conjecture would require four results, one of which is easy.

2.1. *If m is an odd number greater than 3 and A is a squarelike set containing all odd numbers less than m and no non-zero even number less than m, then $m \in A$.*

Proof. For $m = 5, 7$, this is in **1.4.** If m is composite it is immediate from condition (1). If m is prime, $m \notin A$ implying here $m \notin A + A$, $2m$ could not have two representations as a sum of elements of A. But for $m \equiv 1 \pmod 3$, $2m = (m + 2) + (m - 2) = (m + 8) + (m - 8)$ violates, and similarly in the other case $m \equiv 2 \pmod 3$.

As for the corresponding result for even m, there is a simple argument, used already for 4, that probably suffices for even $m > 6$ and can probably be proved, by refining arguments in the literature, for all sufficiently large m. If A begins with 0, the odd numbers $1, \ldots, m - 1$, and m, then there cannot be a prime p in $(3m, 4m)$ such that $p - m$ is composite; for this would give p two representations $3m + a = m + (p - m)$. Thus any prime in that interval must be incongruent to m modulo 3, modulo 5, and so on. Quite a bit is known about primes in finite arithmetic progressions, but apparently not enough for this. Cf. Prachar's review [1] of a paper of Fogels improving previous results; Prachar notes a result that would follow from the Riemann hypothesis for L-functions and would be much more than enough (for all sufficiently large even m).

The stronger conditions (2*) and (4*) suffice for A beginning 0, 1, 3. We need to note:

For each real number $x \geqslant 5$ there is a prime between $7x$ and $8x$.

This follows mostly Rosser and Schoenfeld's sharp estimates [2] for the sum of the logarithms of the primes less than y: for $y \geqslant 227$, it is between $.89y$ and $1.017y$. Thus if $x \geqslant 33$, this sum at $7x$ is less than $7.119x$, and at $8x$ it exceeds $7.12x$; there was a prime between. From 7.5 to 7.33 one can check that the ratios of successive primes are less than 8:7. (For the latter part, 101, 113, 127, 139, 157, 173, 191, 211, 233 will do).

2.2. Theorem. *The only strongly squarelike set that includes 3 is the set consisting of 0 and the odd natural numbers.*

Proof. After **2.1**, we need only show that for each even $m \geqslant 8$, a strongly squarelike set beginning with $0, 1, 3, \ldots, m-1$ cannot have m in it. Moreover, from (2*), m would have to be relatively prime to all preceding odd numbers, and thus a power of 2. For $m = 8$, there is $29 \equiv m \pmod 3$ in $(3m, 4m)$, and the argument after **2.1** applies.

For the rest, $m \geqslant 16$. From condition (2*), the first five even numbers in A are $0, m, 3m, 5m, 7m$. Consider a prime p in $(7m, 8m)$. Then p has one representation $7m + a$ in $A + A$; hence $p - m$, $p - 3m$, and $p - 5m$ are not in A.

The latter two must be prime, since $p - 5m < 3m$ and $p - 3m$ is less than $5m$ and not divisible by 3. Thus $p \equiv m \pmod 3$. The numbers $p - 5m$ and $(p-m)/3$, and every odd number $q < 3m$, must be in $A+A$. For there are three even numbers c in [0, 28] such that 5 divides $q + c$, whence all three $q + c$ are in A, $(3m + 28 < 5m)$, and one $q - c$ must be divisible by 3. Thus $(q + c) + (q - c)$ is in $A + A$, and (4*) requires $q \in A + A$. The only possible representations for the numbers mentioned require $p - 6m$ and $(p - 4m)/3$ to be in A. Hence $p - 4m \in A$ also, and $p - 3m$ has two representations, a contradiction.

2.3. *If m is a non-square number greater than 4 and A is a strongly squarelike set containing all of the squares, and none of the non-squares, less than m, then m is not in A.*

The proof of **2.3** becomes fairly uniform for $m \geqslant 17$. The steps from $m > 7$ (**1.4**) to 15 are easy. For example, 8 is obvious. To bring in a different illustration, if 9 were not in A, 10 must be since $10 \in A + A$. With or without 9, $10 \in A$ yields 26, 65, hence 13 in $A + A$. $13 \notin A$ since $13 + 4 = 16 + 1$. $12 \notin A$ since it would yield (with 10) 14, 49 in $A + A$; contradiction. The rest of these will be omitted. The strong conditions (2*), (4*) are not needed, and in fact one can go at least through $960 \notin A$, $961 \in A$ without them.

The rest of the proof of **2.3** differs little from a proof of:

2.4. *If m is a non-square number greater than 16 then there is a prime $4n + 3 \leqslant (m/2) + 8$ modulo which m is not a quadratic residue.*

Proof. Evidently we may assume m is not divisible by 4, if we check separately $m = 32, 48$, and (other) $4u$ for non-square u from 5 to

15 (check omitted.) For the rest, recall that modulo a prime $4n+3$, -1 is not a square, so that the non-squares are exactly the negatives of the squares. If m is congruent to 2, 5, or 6 modulo 8, then $m+4$, $m+1$, $m+16$ respectively has the form $8k+6$; at least one of the prime factors of $4k+3$ must have the form $4n+3$, and it has the required property. If m is congruent to 3 or 11 modulo 16, the same reasoning applies to $m+9$ or $m+1$, except that for $m \equiv 3 \pmod{16}$, $m \equiv 0 \pmod 3$ (which makes m at least 51) $m+9$ should be replaced by $m+25$. Similarly the case $m \equiv 7 \pmod 8$ subdivides into four cases (mod 32), for which one considers $m+1$, $m+9$, $m+25$, $m+49$, with 9 or 49 replaced by 169 or 81 when 3 or 7 divides m (respectively); as the result is divisible by 8, one gets a sufficiently small prime $4n+3$ always, since $m+169$ is needed only if $m \geqslant 111$.

In the case $m \equiv 1 \pmod 8$, to begin with, we may assume m is squarefree; for the squarefree part of m is also $\equiv 1 \pmod 8$, and therefore greater than 16. If m has a prime factor $4n+3$, let q be the smallest such. As $m/q \equiv 3 \pmod 4$, m has another such prime factor, $q^2 < m$, and $m + q^2 = 8a+2 < 2m$; $(m+q^2)/2q$ is relatively prime to m and divisible by a prime $4b+3 < m/3$.

The last case is $m \equiv 1 \pmod 8$ with no prime factor $4n+3$. First use quadratic reciprocity and the Chinese remainder theorem to locate a prime $q = 4n+3$ such that the Legendre symbol $\left(\frac{m}{q}\right) = -1$. One considers the prime factors p of the squarefree part of m and imposes suitable conditions $q \equiv c \pmod p$ (besides $q \equiv 3 \pmod 4$). Any such conditions, one for each p, determine an arithmetic progression; by Dirichlet's theorem, if no c is 0, that progression contains primes q; and for suitable choice of the c's, $\left(\frac{m}{q}\right)$ will be -1. Thus some number $m+x^2$ is divisible by a prime $q = 4n+3$. Since $m+x^2 \equiv 1$ or 2 or 5 $\pmod 8$, there must be two such prime factors q_1, q_2, counting the possibility $q_1 = q_2$. Suppose x is as small as possible (>0). Then $2x$ is less than either q_i, since $x^2 \equiv (q-x)^2 \pmod q$. If q_1 is the smaller, we have $q_1^2 \leqslant m + x^2$. If q_1^2 exceeded $2m$, x^2 would exceed m. Then $q_1 m^{1/2} < q_1 x < q_1(q_1 - x) < q_1^2 - x^2 \leqslant m$, $q_1 < m^{1/2}$, contradicting the assumption. Thus in this case q_1 is less than the square root of $2m$ and considerably less than $(m/2)+8$.

To prove **2.3** we continue the argument for the last case, noting $x^2 < (q_1 - x)^2 < q_1^2 - x^2 \leqslant m$. Thus both $s_1 = m + x^2$ and $s_2 = m + (q_1 - x)^2$ are $A + A$ if m is, both are less than $2m$, and they have opposite parity. If the even s_i is not divisible by q_1^2 then half of it is a number less than m, in $A + A$ (by (4*)), and not a sum of two squares, a contradiction. If the even s_i is divisible by q_1^2 then it is at least $2q_1^2$; $q_1^2 < m$, $q_1^2 \in A \subset A + A$. Since the other s_i is in $A + A$ and divisible by q_1 but not by q_1^2, (4*) is violated.

In the other cases we added to m a square smaller than m (with two exceptions, checked below) to get an even number $< 2m$, half of which cannot be a sum of two squares. The only exceptions are $m = 39$ and $m = 111$, both of which are excluded by (2*).

2.5. Remark. In my computations showing that a squarelike set $\{0, 1, 4, \ldots\}$ omits each non-square $m \leqslant 960$ and (as long as non-squares do not enter before x^2) includes each square $x^2 < 179^2$, the logical complexity drops after $x^2 = 9$ (done in **2.3**). The assumption $193 \in A$ leads to 781, 869, and $11\,218 \in A$, violating (4); this is the last occurrence of such numbers as $4m + 9\,(781)$, $m + c^2$ sufficing thereafter, and also the last occurrence of numbers greater than $m^{3/2}$ resp. x^3.

This work was supported by the U. S. National Science Foundation.

Received the 1 III 1966

Case Institute of Technology,
Cleveland, Ohio,
USA

REFERENCES

1. Prachar K., Math. Rev., 1962, **23**, p. A455.
2 Rosser J. B., Schoenfeld L., Illinois J. Math., 1962, **6**, pp. 64—94.

CONJECTURĂ RELATIVĂ LA ŞIRURI PĂTRATE

(Rezumat)

Se expune o ipoteză ce are drept punct de plecare rezultatele fundamentale relative la reprezentarea numerelor naturale ca sume de două pătrate [1], [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 519.4

LES ALGÈBRES D'ORDRE CINQ, ASSOCIATIVES, COMMUTATIVES ET À UNITÉ PRINCIPALE, À SCALAIRES RÉELS

Note I

ALGÈBRES INDÉCOMPOSABLES

PAR

I. ENESCU

Extrait de la communication présentée à la session scientifique de l'Université «Al. I. Cuza» de Jassy, 29—30 octobre 1966

1. On pose ici le problème de déterminer tous les types d'algèbres d'ordre cinq à scalaires réels, linéaires, associatives et commutatives, à unité principale, non-isomorphes.

Compte tenu que les algèbres ayant les propriétés indiquées ci-dessus peuvent être classifiées en indécomposables et décomposables P e i r c e, on trouve tous les types d'ordre cinq non-isomorphes, selon les valeurs des ordres des pouvoirs du radical.

Nous utiliserons les notations suivantes: A — une algèbre avec les propriétés indiquées; N — le radical de l'algèbre; R et K, respectivement le corps réel et le corps complexe; n_i = l'ordre de N^i; δ = ordre N — ordre N^2.

2. Dans le cas indécomposable, l'algèbre ne contient pas des éléments idempotents, en exceptant le zéro et l'unité principale et, alors, elle est la somme d'un corps commutatif et de son radical [1]. Bien que la somme ne soit pas directe, le seul élément commun au corps commutatif et au radical est le zéro de A et alors l'ordre de l'algèbre est la somme des ordres du corps et du radical.

$$\text{I. } A = R + N$$

$n = 4$ et alors sont possibles les situations suivantes:

1°. $n_1 = 4, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 1, \quad n_5 = 0;$

2°. $n_1 = 4, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1, \quad n_4 = 0;$

3°. $n_1 = 4, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 0;$

4°. $n_1 = 4, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 0;$

5°. $n_1 = 4, \quad n_2 = 0.$

Nous examinerons successivement chaque cas.

I.1°. Parce que $\delta = 1$, N est une algèbre potentielle, ce cas étant l'unique possible [2]. Notant par e_2, e_3, e_4, e_5 la base de pouvoirs de N, sa table de multiplication est

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_3	e_4	e_5	0
e_3	e_4	e_5	0	0
e_4	e_5	0	0	0
e_5	0	0	0	0

Il en résulte [3] que l'algèbre A est polynômiale, générée par le polynôme $(\lambda - \lambda_0)^5$ et ayant dans la base de pouvoirs [4], la table

(1)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_3	e_4	e_5	0
e_3	e_3	e_4	e_5	0	0
e_4	e_4	e_5	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

I.2°. L'indice de nilpotence du radical est égal à son ordre et alors la table de multiplication est [5] :

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	αe_5	0	0	0
e_3	0	e_4	e_5	0
e_4	0	e_5	0	0
e_5	0	0	0	0

où α est un scalaire réel quelconque.

Pour $\alpha > 0$, faisant le changement de base : $\varepsilon_2 = e_2/\sqrt{\alpha}$, $\varepsilon_3 = -e_3$, $\varepsilon_4 = e_4$, $\varepsilon_5 = e_5$, on obtient immédiatement la table

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	ε_5	0	0	0
ε_3	0	ε_4	ε_5	0
ε_4	0	ε_5	0	0
ε_5	0	0	0	0

ce qui démontre que toutes les algèbres N à $\alpha > 0$ sont isomorphes, pouvant être représentées par celle correspondante à $\alpha = 1$.

Dans le cas $\alpha < 0$, le changement de base : $\varepsilon_2 = e_2/\sqrt{-\alpha}$, $\varepsilon_3 = e_3$, $\varepsilon_4 = e_4$, $\varepsilon_5 = e_5$, conduit à la table

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	$-\varepsilon_5$	0	0	0
ε_3	0	ε_4	ε_5	0
ε_4	0	ε_5	0	0
ε_5	0	0	0	0

ce qui démontre que les algèbres N à $\alpha < 0$ sont isomorphes à celle qui correspond à $\alpha = -1$.

Pour $\alpha = 1$, par le changement de base : $u_2 = e_2$, $u_3 = -e_3$, $u_4 = e_4$, $u_5 = -e_5$, on obtient la table

	u_2	u_3	u_4	u_5
u_2	$-u_5$	0	0	0
u_3	0	u_4	u_5	0
u_4	0	u_5	0	0
u_5	0	0	0	0

ce qui démontre que toutes les algèbres correspondantes à toutes les valeurs $\alpha \neq 0$ sont isomorphes.

Enfin, remarquons que le type $\alpha = 0$ n'est pas isomorphe à celui avec $\alpha \neq 0$. En effet, pour $\alpha = 0$, la table de multiplication est

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	0	0	0	0
e_3	0	e_4	e_5	0
e_4	0	e_5	0	0
e_5	0	0	0	0

et l'on voit que les diviseurs de zéro ont, dans ce cas, la forme $\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_5$ avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$, tandis que pour le cas $\alpha \neq 0$ ils ont la forme λe_5 avec $\lambda \neq 0$.

Alors existent, pour l'algèbre A, deux types non-isomorphes, donnés respectivement par les tables :

(2_1)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_5	0	0	0
e_3	e_3	0	e_4	e_5	0
e_4	e_4	0	e_5	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

et (2_2)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	e_3	0	e_4	e_5	0
e_4	e_4	0	e_5	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

I.3°. Le radical N, comme algèbre d'ordre quatre, peut être donné par une des tables [6] :

(p)

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_4	$e_4 + \alpha e_5$	0	0
e_3	$e_4 + \alpha e_5$	e_5	0	0
e_4	0	0	0	0
e_5	0	0	0	0

$\alpha \neq \frac{1}{4}$

(q)

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_4	e_5	0	0
e_3	e_5	0	0	0
e_4	0	0	0	0
e_5	0	0	0	0

(r)

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_4	0	0	0
e_3	0	e_5	0	0
e_4	0	0	0	0
e_5	0	0	0	0

Dans [6] on montre que les algèbres représentées par respectivement chaque table (p), (q), (r), ne sont pas isomorphes. Dans ce Bulletin, le prof. Climescu [7] a démontré que pour le cas (p) existent deux types non-isomorphes qui correspondent aux valeurs $\alpha > 1/4$ et respectivement $\alpha < 1/4$, qui peuvent être représentés, par exemple, par les tables avec $\alpha = 1$ et respectivement $\alpha = 0$.

Il existe donc pour l'algèbre A, quatre tipes non-isomorphes, donnés par les tables

(3_1)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_4	$e_4 + e_5$	0	0
e_3	e_3	$e_4 + e_5$	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

(3_2)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_4	e_4	0	0
e_3	e_3	e_4	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

(3_3)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_4	e_5	0	0
e_3	e_3	e_5	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

,

(3_4)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_4	0	0	0
e_3	e_3	0	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

.

I.4°. Le radical N, comme algèbre d'ordre quatre, peut avoir [6] une des tables

(I)

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	αe_5	0	0	0
e_3	0	e_5	0	0
e_4	0	0	βe_5	0
e_5	0	0	0	0

$\alpha \neq 0$

,

(II)

	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_5	0	0	0
e_3	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0
e_5	0	0	0	0

.

Évidemment, les deux types ne sont pas isomorphes, parce que dans l'algèbre (I) les diviseurs de zéro ont la forme λe_5 avec $\lambda \neq 0$, ou la forme $\lambda e_4 + \mu e_5$, avec $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ selon que $\beta \neq 0$ ou $\beta = 0$, tandis que, dans l'algèbre (II), ils ont la forme $\lambda e_3 + \mu e_4 + \nu e_5$ avec $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$.

Il faut poser aussi la question de trouver les types non isomorphes des algèbres données par (I), pour toutes les valeurs possibles de α et β.

Remarquons d'abord que, effectuant dans (I) le changement de base: $\varepsilon_2 = e_4$, $\varepsilon_3 = e_3$, $\varepsilon_4 = e_2$, $\varepsilon_5 = e_5$, on obtient la table

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	$\beta\varepsilon_5$	0	0	0
ε_3	0	ε_5	0	0
ε_4	0	0	$\alpha\varepsilon_5$	0
ε_5	0	0	0	0

,

ce qui démontre que le changement entre eux, des paramètres α et β, n'affecte pas la structure des algèbres (I).

Dans le cas $\alpha = \beta = 0$, par le changement de base $\varepsilon_2 = e_3$, $\varepsilon_3 = e_2$, $\varepsilon_4 = e_4$, $\varepsilon_5 = e_5$, on obtient la table

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	ε_5	0	0	0
ε_3	0	0	0	0
ε_4	0	0	0	0
ε_5	0	0	0	0

ce qui démontre que le type (II) s'obtient de (I) pour $\alpha = \beta = 0$.

Soit maintenant $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En posant : $\varepsilon_2 = e_2/\sqrt{\alpha}$, $\varepsilon_3 = e_3$, $\varepsilon_4 = e_4/\sqrt{\beta}$, $\varepsilon_5 = e_5$, nous sommes conduits à la table

(I_1)

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	ε_5	0	0	0
ε_3	0	ε_5	0	0
ε_4	0	0	ε_5	0
ε_5	0	0	0	0

Si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$, le changement : $\varepsilon_2 = e_2/\sqrt{-\alpha}$, $\varepsilon_3 = e_3$, $\varepsilon_4 = e_4/\sqrt{-\beta}$, $\varepsilon_5 = e_5$, donne la table

(I_2)

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	$-\varepsilon_5$	0	0	0
ε_3	0	ε_5	0	0
ε_4	0	0	$-\varepsilon_5$	0
ε_5	0	0	0	0

Puis, pour $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, un changement évident de la base, donne la table

(I_3))

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	ε_5	0	0	0
ε_3	0	ε_5	0	0
ε_4	0	0	$-\varepsilon_5$	0
ε_5	0	0	0	0

qui évidemment, correspond aussi au cas $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, le changement : $\varepsilon_2 = e_2/\sqrt{\alpha}$, $\varepsilon_3 = e_3$, $\varepsilon_4 = e_4$, $\varepsilon_5 = e_5$, conduit à la table

(I$_4$)

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	ε_5	0	0	0
ε_3	0	ε_5	0	0
ε_4	0	0	0	0
ε_5	0	0	0	0

et pour le cas $\alpha < 0$, $\beta = 0$, un changement similaire : $\varepsilon_2 = e_2/\sqrt{-\alpha}$, $\varepsilon_i = e_i$, $(i = 3, 4, 5)$, conduit au

(I$_5$)

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_2	$-\varepsilon_5$	0	0	0
ε_3	0	ε_5	0	0
ε_4	0	0	0	0
ε_5	0	0	0	0

On voit que, pour les cas (I$_4$) et (I$_5$), les diviseurs de zéro ont la forme $\alpha_4 \varepsilon_4 + \alpha_5 \varepsilon_5$ avec $\alpha_4^2 + \alpha_5^2 \neq 0$, tandis que, pour les cas (I$_1$), (I$_2$) et (I$_3$) ils ont la forme λe_5 avec $\lambda \neq 0$, ce qui indique que les algèbres (I$_4$) et (I$_5$) ne peuvent pas être isomorphes avec respectivement (I$_1$), (I$_2$) et (I$_3$).

Utilisant pour (I$_2$) la base donnée par $u_2 = e_2$, $u_3 = e_4$, $u_4 = e_3$, $u_5 = -e_5$, on obtient une table identique à (I$_3$) ce qui démontre l'isomorphisme de ces deux types.

Dans [6] on donne des conditions nécessaires et suffisantes afin que deux algèbres qui correspondent aux valeurs différentes (α, β) et respectivement (α', β'), avec la table de multiplication (I), soient isomorphes.

Pour notre problème, ces conditions ont la forme $\beta^2 + \beta'^2 = 0$ et alors $\alpha' = \alpha\varrho^2$, $(\varrho \neq 0)$, ou $\beta^2 + \beta'^2 \neq 0$ et alors

$$\alpha' = \frac{\alpha\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \beta\lambda_3^2}{\alpha\beta\sigma^2(\beta\sigma_1^2 + \alpha\beta\sigma_2^2 + \alpha\sigma_3^2)}, \quad \beta' = \frac{\alpha\nu_1^2 + \nu_2^2 + \beta\nu_3^2}{\alpha\beta\sigma^2(\beta\sigma_1^2 + \alpha\beta\sigma_2^2 + \alpha\sigma_3^2)},$$

ou λ_i, ν_i, σ_i, σ, sont nombres réels soumis aux coditions :

$$\alpha\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \beta\lambda_3\nu_3 = 0, \quad \sigma_1 = \lambda_2\nu_3 - \lambda_3\nu_2, \quad \sigma_2 = \lambda_3\nu_1 - \lambda_1\nu_3, \quad \sigma_3 = \lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1.$$

Si $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, on voit que $\beta' = -1 = \dfrac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}{\sigma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} > 0$, ce qui évidemment est impossible.

Puis, si $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, bien que $\beta^2 + \beta'^2 = 0$, il n'est pas possible qu'on a $\alpha' = -1 = \varrho^2$.

Nous avons donc démontré que (I$_1$) n'est pas isomorphe à (I$_2$) et aussi (I$_4$) n'est pas isomorphe à (I$_5$).

Alors l'algèbre A peut avoir l'une des formes:

(4_1)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_5	0	0	0
e_3	e_3	0	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	e_5	0
e_5	e_5	0	0	0	0

,

(4_2)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_5	0	0	0
e_3	e_3	0	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	$-e_5$	0
e_5	e_5	0	0	0	0

,

(4_3)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_5	0	0	0
e_3	e_3	0	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

,

(4_4)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	$-e_5$	0	0	0
e_3	e_3	0	e_5	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

,

(4_5)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	e_5	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

.

I.5°. Dans ce cas le radical est l'algèbre nulle d'ordre quatre et alors A est déterminée par la table

(5)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0	0
e_5	e_5	0	0	0	0

.

II. $A = K + N$

$n = 3$ et, par conséquent, sont possibles les cas suivants:

1°. $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$;
2°. $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$;
3°. $n_1 = 3$, $n_2 = 0$.

II.1°. Parce que $\delta = 1$, il en résulte que l'algèbre N est potentielle, ayant la table de la forme

	e_3	e_4	e_5
e_3	e_4	e_5	0
e_4	e_5	0	0
e_5	0	0	0

.

Puis, parce que N est idéal dans l'algèbre A, il en résulte nécessairement qu'il existe une base, dont la table de multiplication ait la forme :

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	$-e_1$	$\sum_3^5 \alpha_i e_i$	$\sum_3^5 \beta_i e_i$	$\sum_5^3 \gamma_i e_i$
e_3	e_3	$\sum_3^5 \alpha_i e_i$	e_4	e_5	0 .
e_4	e_4	$\sum_3^5 \beta_i e_i$	e_5	0	0
e_5	e_5	$\sum_3^5 \gamma_i e_i$	0	0	0

Mais on pose maintenant le problème de l'existence des constantes réelles α_i, β_i, γ_i, $(i = 3, 4, 5)$, d'une telle manière que la multiplication soit associative.

Nous avons $(e_2 e_3) e_4 = (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5) e_4 = \alpha_3 e_5$ et $e_2 (e_3 e_4) = e_2 e_5 = \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5$. En tenant compte de $(e_2 e_3) e_4 = e_2 (e_3 e_4)$, il en résulte $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$, donc $e_2 e_5 = \gamma_5 e_5$.

Soit maintenant $(e_2 e_2) e_5 = -e_5$ et $e_2 (e_2 e_5) = e_2 (\gamma_5 e_5) = \gamma_5 (e_2 e_5) = \gamma_5^2 e_5$. En tenant compte que $(e_2 e_2) e_5 = e_2 (e_2 e_5)$ il en résulte que $\gamma_5^2 = -1$, ce qui démontre que l'algèbre A, à scalaires réels, n'existe pas dans ce cas.

II.2°. L'indice de nilpotence du radical est égal à son ordre et égal à trois. Compte tenu que la multiplication est commutative, ce cas ne peut pas exister, ainsi qu'il en résulte de [5].

II.3°. Le radical est l'algèbre nulle d'ordre trois et compte tenu de l'observation faite au cas II.1°, l'algèbre A a une base de la forme

(a)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_2	$-e_1$	$\sum_3^5 \alpha_i e_i$	$\sum_3^5 \beta_i e_i$	$\sum_3^5 \gamma_i e_i$
e_3	e_3	$\sum_3^5 \alpha_i e_i$	0	0	0 .
e_4	e_4	$\sum_3^5 \beta_i e_i$	0	0	0
e_5	e_5	$\sum_5^3 \gamma_r e_i$	0	0	0

En imposant pour la multiplication les conditions d'associativité, on aboutit au suivant système de neuf équations algébriques du degré deux, avec les neuf constantes α_i, β_i, γ_i comme inconnues :

$$(b)\quad \begin{cases} \alpha_3^2+\alpha_4\beta_3+\alpha_5\gamma_3=-1, \quad \alpha_3\alpha_4+\alpha_4\beta_4+\alpha_5\gamma_4=0, \\ \qquad\qquad \alpha_3\alpha_5+\alpha_4\beta_5+\alpha_5\gamma_5=0, \\ \alpha_3\beta_3+\beta_3\beta_4+\beta_5\gamma_3=0, \quad \alpha_4\beta_3+\beta_4^2+\beta_5\gamma_4=-1, \\ \qquad\qquad \alpha_5\beta_3+\beta_4\beta_5+\beta_5\gamma_5=0, \\ \alpha_3\gamma_3+\beta_4\gamma_4+\gamma_5\gamma_3=0, \quad \alpha_4\gamma_3+\beta_4\gamma_4+\gamma_4\gamma_5=0, \\ \qquad\qquad \alpha_5\gamma_3+\beta_5\gamma_4+\gamma_5^2=-1. \end{cases}$$

Le type considéré d'algèbre existe effectivement si ce système admet au moins une solution réelle.

Les difficultés du calcul empêchent à donner, pour le moment, la réponse à cette question.

3. Il faut remarquer que, à l'exception des cas dont l'associativité du produit a été étudiée specialement, cette propriété est évidente.

En conclusion, ont été déterminés treize types d'algèbres indécomposables (si le type (a) existe, ils sont quatorze), *qui sont non-isomorphes.*

L'étude des types décomposables ferra l'objet d'une recherche ultérieure.

Institut Politechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Deuhring M., *Algebren.* Berlin, 1935.
2. Scorza G., *Sulla struttura delle algebre pseudonulle.* Rend. R. Acc. Naz. Lincei, 1934, (6), **20,** p. 146.
3. Enescu I., *Asupra algebrelor polinomiale* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV),** *3—4,* pp. 25—28.
4. — *Asupra algebrelor hipercomplexe de ordin finit peste corpul real.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV),** *1—2,* pp. 39—42.
5. Scorza G., *Sopra una classe di algebre pseudonulle.* Atti R. Acc. Sc. Torino, 1934-1935, **70,** p. 10.
6. — *Le algebre de 4 ordine.* Atti R. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, 1935, (2), **20.**
7. Climescu Al., *Asupra unei clase de algebre de ordinul patru.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII),** *1—2,* pp. 1—4.

ASUPRA ALGEBRELOR ASOCIATIVE, COMUTATIVE ŞI CU UNITATE PRINCIPALĂ DE ORDIN CINCI, PESTE CÎMPUL REAL

Nota I

Algebre indecompozabile

(Rezumat)

Plecînd de la observaţia că algebrele cu proprietăţile indicate în titlu se pot clasific în indecompozabile şi decompozabile Peirce, se găsesc toate tipurile de ordin cinci, neizomorfe indecompozabile. În acest scop s-a utilizat faptul că o asemenea algebră este suma dintre un cîmp şi radicalul ei, folosindu-se o bază care pune în evidenţă această proprietate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 517.948

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA DISTRIBUTIVITÉ UNILATÉRALE (III)

PAR

AL. CLIMESCU

Le but de cette Note est d'étendre la proposition II de [2] aux ensembles dénombrables, en démontrant la proposition suivante:

Si M est dénombrable, il existe des fonctions $g(x,y): M\times M\to M$ telles que $f(x,y): M\times M\to M$ satisfaisant à l'équation

$$f(x,g(y,z))=g(f(x,y)f(x,z))$$

soit univoquement déterminée et $f(x,y)=y$.

Soit $M=\bigcup_i M_i$ où les ensembles $M_i=(a_i,b_i)$ sont mutuellement disjoints. Ecrivons $x+y$ au lieu de $g(x,y)$ et définissons $x+y$ par les égalités

$$(\forall i)\quad a_i+a_i=a_i+b_i=b_i+a_i=b_i,\ b_i+b_i=a_i,$$
$$(\forall i,\forall j, i<j)\quad a_i+a_j=a_0,\ b_i+b_j=b_{i+1},$$
$$(\forall i,\forall j, i>j)\quad a_i+a_j=a_j,$$

$x+y$ étant arbitraire pour les autres paires d'éléments.

La proposition sera démontrée [1, prop. IV] si l'on peut montrer que $\varphi: M\to M$ et $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)\Rightarrow\varphi(x)=x$.

Or on a:

1° $\varphi(a_i)=b_j\Rightarrow\varphi(a_i+a_i)=\varphi(b_i)\quad b_j+b_j=a_j\Rightarrow\varphi(a_i+b_i)=\varphi(b_j)=a_j=\varphi(a_i)+\varphi(b_i)=b_j+a_j=a_j$, ce qui est impossible. Donc $\varphi(a_i)=a_j$, ce qui est équivalent à $\varphi(b_i)=b_j$ (démonstration similaire).

2° $\varphi(a_0)=a_i$, $(i>0)$, donnerait $\varphi(a_0+a_i)=\varphi(a_0)=a_i=\varphi(a_0)+\varphi(a_i)=a_i+a_j=a_0$, $(i<j)$, b_i, $(i=j)$ ou a_j, $(i>j)$, donc impossibilité et $\varphi(a_0)=a_0$.

3° $\varphi(a_i)=a_0\Rightarrow\varphi(a_i+a_0)=\varphi(a_0)=a_0+a_0=b$, donc impossibilité.

4° $\varphi(a_i) = a_j$, $(0<j<i)$, donnerait $\varphi(a_j + a_i) = \varphi(a_0) = a_0 = \varphi(a_j) + a_j = a_k + a_j \Rightarrow$, $(j > k)$, ensuite $\varphi(a_j) = a_k \Rightarrow \varphi(a_k) = a_e$, $i > j > k > l, \ldots$ ce qui est impossible, donc $\varphi(a_i) = a_j$, $(0 < j < i)$, est impossible.

5° Si $\varphi(x) \neq x$, il existerait un premier élément i tel que $\varphi(a_i) = a_j$, $(i < j, i > 0)$; d'après 2^0 donc $i-1$ existe et $\varphi(b_{i-1} + b_i) = \varphi(b_i) = b_j = \varphi(b_{i-1}) + \varphi(b_i) = b_{i-1} + b_j = b_j$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $\varphi(x) = x$ et la proposition est démontrée.

Remarque. La même construction appliquée à un ensemble à $2n$ éléments donne le même résultat pour ces ensembles (n fini).

Reçu le 12 XII 1966

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Climescu Al., *Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale (I).* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 1—6.
2. — *Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale (II).* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 1—6.

ASUPRA ECUAŢIEI FUNCŢIONALE A DISTRIBUTIVITĂŢII UNILATERALE (III)

(Rezumat)

Ca o extensiune a propoziţiei II din [2] se demonstrează următoarea propoziţie:

Dacă M este numărabilă, există funcţii $g(x, y)$: $M \times M \to M$ aşa fel încît $f(x, y)$: $M \times M \to M$ satisfăcînd la ecuaţia

$$f(x, g(y, z)) = g(f(x, y), f(x, z))$$

este univoc determinată şi $f(x, y) = y$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 519.56

SUR L'INCLUSION D'UNE CATÉGORIE DE TRIOS DANS UNE CATÉGORIE DE QUATUORS ASSOCIÉE

PAR

V. V. TOPENTCHAROV

1. La Note présente est consacrée au problème suivant : étant donnée une catégorie $C^{\cdot}$ et une classe G, qui donnent lieu à une catégorie de trios $\square\!\!\square(G^{\alpha}, C^{\cdot})$, trouver une catégorie $H^{\cdot}$, telle que la catégorie $\square\!\!\square(G^{\alpha}, C^{\cdot})$ soit inclue dans la catégorie latérale $\boxplus H^{\cdot}$ des quatuors de $H^{\cdot}$. La terminologie et les notations sont celles de [1].

2. Rappelons quelques définitions (voir les détails dans [1]). Soit C une classe (ou un ensemble) munie d'une loi de composition interne partiellement définie et dont la classe des couples composables est $C \barwedge C \subset C \times C$.

Définition 1. *Une catégorie $C^{\cdot}$ est une classe C munie d'une loi de composition binaire partiellement définie, qui vérifie les axiomes :*

(G. 1) *Axiome des unités :* pour tout morphisme $f \in C$ il existe une seule unité à droite $\alpha(f)$, telle que $(f, \alpha(f)) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ et $f \cdot \alpha(f) = f$ et une et une seule unité à gauche $\beta(f)$, telle que $(\beta(f), f)) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ et $\beta(f) \cdot f = f$ (on les appelle encore „source" et „but").

(G. 2) *Unités du composé d'un couple composable :* $(g, f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot} \Rightarrow \alpha(g) = \beta(f)$, $\alpha(g \cdot f) = \alpha(f)$ *et* $\beta(g \cdot f) = \beta(g)$.

(G. 3) *Associativité de la loi de composition :* $(g, f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$, $(h, g \cdot f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$, $(h, g) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ *et* $(h \cdot g, f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot} \Rightarrow h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$.

(G. 4) *Axiome de composabilité :* $(g, f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ et $\alpha(g) = \beta(f) \Rightarrow (g, f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$.

Définition 2. *Un quatuor Q de $C^{\cdot}$ est un quadruplet (h', f', f, h), tel que $h' \in C$, $h \in C$, $f' \in C$, $f, \in C$, $(h', f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$, $(f', h) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ et $h' \cdot f = f' \cdot h$.*

La classe des quatuors de $C^{\cdot}$ sera notée $\square\!\!\square C^{\cdot}$, un quatuor par $Q = (h', f', f, h)$ et sera représenté par un diagramme de flèches (fig. 1).

Cette définition est particularisée par les conditions $h \in L$, $h' \in L$ et $f' \in K$, $f \in K$, où $L \subset C$, $K \subset C$; alors Q est un quatuor de $(C^{\cdot}; K, L)$ et la classe de quatuors est notée $\square\!\!\square(C^{\cdot}; K, L)$. Une classe de quatuors peut être munie de deux lois de composition internes partiellement définies, comme suit :

a) $\boxplus$ — *multiplication latérale :* $(h_1', f_1', f_1, h_1) \boxplus (h', f', f, h) = (h_1' \cdot h', f_1', f, h_1 \cdot h)$ si et seulement si $h_1 = h'$, $(h_1', h') \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ et $(h_1, h) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$;

b) $\square\!\!\square$ — *multiplication longitudinale :* $(h_1', f_1', f_1, h_1) \square\!\!\square (h', f', f, h) = (h_1', f_1' \cdot f', f_1 \cdot f, h)$ si et seulement si $f_1 = f'$, $(f_1', f') \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$ et $(f_1, f) \in C^{\cdot} \barwedge C^{\cdot}$.

Les classes de quatuors munies de ces lois de composition sont des catégories, notées respectivement $\overline{\overline{=}}\, C^{\cdot}$, $\overline{\overline{\square}}\, C^{\cdot}$, $\overline{\overline{=}}\, (C^{\cdot}; K, L)$ et $\overline{\overline{\square}}\, (C^{\cdot}; K, L)$.

Définition 3. *Un trio de* $(\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot})$ *est un triplet* (f', f, h) *tel que* $f \in G$, $h \in C$, $f' \in G$, $\overline{\alpha}(f) = \alpha(h)$ et $\overline{\alpha}(f') = \beta(h)$, *où* $\alpha : G \to C_0^{\cdot} \subset C_0^{\cdot}$ (fig. 2).

La classe des trios, notée $\overline{\square}\, (\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot})$, est munie de la loi de composition $\overline{\square} : (f_1', f_1, h_1)$ $\overline{\square}\, (f', f, h) = (f_1', f, h_1 \cdot h)$ si et seulement si $f_1 = f'$ et $(h_1, h) \in C^{\cdot} \times C^{\cdot}$ (voir fig. 3) est une catégorie.

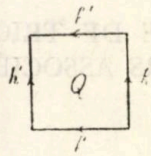


Fig. 1

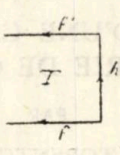


Fig. 2

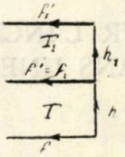


Fig. 3

Définition 4. *Un quadruplet de* $(G^{\cdot}, C^{\cdot})$, *avec* $G_0^{\cdot} = C_0^{\cdot}$, *est une séquence de quatres éléments* (h', f', f, h) *tels que* $(f', f, h) \in \overline{\square}\, (\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot})$, $\alpha(h') = \beta(f)$ et $\beta(f') = \beta(h')$. La classe des quadruplets de $(G^{\cdot}, C^{\cdot})$ est notée $G^{\cdot} \overline{\square}\, C^{\cdot}$.

Munie des lois de composition $\overline{\overline{\square}}$ et $\overline{\overline{=}}$ la classe $G^{\cdot} \overline{\square}\, C^{\cdot}$ devient $G^{\cdot} \overline{\overline{\square}}\, C^{\cdot}$ — *catégorie longitudinale* et $C^{\cdot} \overline{\overline{=}}\, C^{\cdot}$ — *catégorie latérale* des quadruplets.

3. On démontre [1] pour les catégories ainsi construites que :

Si $L^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $C^{\cdot}$, l'application $(h', f', f, h) \to (f', f, h)$, où $(h', f', f, h) \in \overline{\overline{=}}\, (C^{\cdot}; K, L)$, définit un foncteur $\tau = (\overline{\square}\, (K^{\cdot}, L^{\cdot}), \tau, \overline{\overline{=}}\, (C^{\cdot}; K, L))$ et tout élément de $\tau(\overline{\overline{=}}\, (C^{\cdot}; K, L))$ est *un trio inclus dans un quatuor* de $(C^{\cdot}, K, L)$.

Si $K^{\cdot}$ et $L^{\cdot}$ sont des sous-catégories de $C^{\cdot}$, $\overline{\overline{=}}\, (C^{\cdot}; K, L)$ est une sous-catégorie de $K^{\cdot} \overline{\overline{=}}\, L^{\cdot}$ et $\overline{\overline{\square}}\, (C^{\cdot}; K, L)$ est une sous-catégorie de $K^{\cdot} \overline{\overline{\square}}\, L^{\cdot}$.

Sous certaines conditions qui seront précisées dans la suite, il est possible de démontrer des propositions inverses à ces résultats.

4. Soit G une classe de morphismes munie de deux rétractions $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ qui vérifient (G. 1) et soit $C^{\cdot}$ une catégorie, telle que le couple $(\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot})$ donne lieu à la classe de trios $\overline{\square}\, (\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot})$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1. *Il existe une catégorie* $H^{\cdot}$, *dont la catégorie latérale des quatuors* $\overline{\overline{=}}\, H^{\cdot}$ *est telle que le triplet* $(\overline{\overline{=}}\, H^{\cdot}, \overline{\tau}, \overline{\square}\, (\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot}))$ *est un foncteur défini par l'application* $\overline{\tau}$: $(f', f, h) \to (f', f', f, h)$, *avec* $\overline{\beta}(f') = \beta(h')$ *et* $\overline{\beta}(f) = \alpha(h')$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{M}_0$ une classe de classes, qui avec une classe contient toutes ses sous-classes et soit $\mathfrak{M}$ la classe des applications d'une classe de $\mathfrak{M}_0$ dans une classe de $\mathfrak{M}_0$ (c'est une catégorie pour la loi de composition usuelle des applications). Puisque G vérifie (G. 1) et que $\overline{\square}\, (\overline{G^{\alpha}}, C^{\cdot})$ est une classe de trios, on a $\overline{\alpha}(G) \subset C_0^{\cdot}$ et $\overline{\beta}(G) \subset G$; considérons

une classe H_0 telle que $\bar{\beta}(G) \cup C_0^{\cdot} \subset H_0$ et supposons que $H_0 \in \mathfrak{M}_0$, qui est toujours vérifié si $\mathfrak{M}_0$ est choisie assez grande. Soit $H^{\cdot}$ une catégorie dont la classe des unités est $H_0^{\cdot}$ et telle que pour tout couple d'éléments de H_0 il existe au moins un morphisme $f \in H^{\cdot}$, tel que, si l'on pose $(e, e') \in H_0 \times H_0$, on a $e' = \beta(f)$, $e'' = \alpha(f)$. La catégorie ainsi construite existe en vertu des hypothèses faites pour $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}$ et notons $\square H^{\cdot}$ la catégorie latérale des quatuors de $H^{\cdot}$. La catégorie $H^{\cdot}$ vérifie les conditions du théorème. En effet, l'application $\bar{\tau}$ associe à $(f', f, h) \in \square(G^{\bar{\alpha}}, C^{\cdot})$ un quadruplet (h', f', f, h) tel que $\bar{\beta}(f') = \beta(h')$ et $\bar{\beta}(f) = \alpha(h')$, l'élément h, existant par hypothèse, puisque $\alpha(h')$ et $\beta(h')$ sont des éléments de $H_0^{\cdot}$ et que dans $H^{\cdot}$ on a $(e, e') \in H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot} \Rightarrow e.H.e' \neq \emptyset$; de plus comme $\bar{\beta}(f) = \alpha(h')$ par hypothèse, on a en vertu de (G. 4), $(h', f) \in H^{\cdot} \times H^{\cdot}$ et aussi $\beta(h) = \alpha(f')$ entraine $(f', h) \in H^{\cdot} \times H^{\cdot}$; en vertu de (G. 2) on a $\alpha(h'.f) = \bar{\alpha}(f) = \alpha(h) = \alpha(f'.h)$ et $\beta(h'.f) = \bar{\beta}(h') = \bar{\beta}(f') = \beta(f'.h)$, ce qui prouve la commutativité du diagramme (fig. 1) et l'on a $h'.f = f'.h$, donc $(h', f'f, h) \in \square H^{\cdot}$, C. Q. F. D.

La démonstration même du théorème 1 indique, que la catégorie $H^{\cdot}$, construite de anière à satisfaire aux conditions du théorème, n'est pas unique. Il existe une famille de catégories possédant les mêmes propriétés, qui sera notée $\{H_i^{\cdot} \mid i \in I\}$, où I est un ensemble d'indices. La classe $\{H_i^{\cdot} \mid i \in I\}$ donne lieu à quelque propositions, qui précisent le résultat du théorème 1, dont les démonstrations, peu compliquées d'ailleurs, sont omises.

Proposition 1. *La classe $\{H_i^{\cdot} \mid i \in I\}$ est ordonnée par la relation d'ordre définie dans $\{H_i^{\cdot} \mid i \in I\}$ par celle présentée par l'inclusion des classes d'unités correspondentes, donc on a $(\{H_i^{\cdot} \mid i \in I\}, \varrho)$, où $\varrho : H_j^{\cdot} < H_k^{\cdot}$ si et seulement si $H_{0j}^{\cdot} \subset H_{0k}^{\cdot}$.*

Proposition 2. *La famille $\{H_i^{\cdot} \mid i \in I\}$ admet une seule intersection $\bigcap_{i \in I} H_i^{\cdot} = \bar{H}^{\cdot}$, qui est la plus petite catégorie vérifiant les conditions du théorème 1.*

Proposition 3. *La catégorie $H^{\cdot}$ est la seule catégorie pleine saturée, dont la classe des unités est telle que $\bar{H}_0^{\cdot} = C_0^{\cdot} \cup \beta(G)$; on a donc :*

$$(e, e') \in \bar{H}_0^{\cdot} \times \bar{H}_0^{\cdot} \Rightarrow e.\bar{H}.e' \neq \emptyset .$$

Remarque 1. En supprimant (G. 3) et (G. 4) de la definition 1 on obtient la notion de graphe multiplicatif et par suite de néofoncteur (dénomination peu justifiée). Le théorème 1 est encore vrai, avec $H^{\cdot}$, $\square H^{\cdot}$, $C^{\cdot}$ et $\square(G^{\bar{\alpha}}, C^{\cdot})$ des graphes multiplicatifs et τ un néofoncteur.

Remarque 2. Une généralisation du théorème 1 est bien possible en passant aux classes multiplicatives (classe C, munie d'une loi de compo-

sition binaire partiellement définie), mais ne présente pas un intérêt particulier, les notions de trio et de quatuor n'étant plus utiles aux applications.

Remarque 3. Il est possible de considérer l'inclusion de la classe des trios dans la catégorie longitudinale des quatuors ; le problème ne présente pas d'intérêt, les lois de composition $\boxplus$ et $\sqsupset$ n'étant pas compatibles.

Remarque 4. Un cas particulier, assez utile dans certaines applications se présente si $\bar{\beta}(G) = (e_1, e_1)$: la classe des quatuors de la catégorie minimale se réduit à un *faisseau de quatuors*, ayant tous un morphisme commun.

Théorème 2. *Soient $K^\cdot$ et $L^\cdot$ deux sous-catégories de $C^\cdot$, $\sqsupset(K^\cdot, L^\cdot)$ — la catégorie des trios du couple $(K^\cdot, L^\cdot)$ et $K^\cdot \boxminus L^\cdot$ — la catégorie latérale des quadruplets de $(K^\cdot, L^\cdot)$. Il existe une application de $\sqsupset(K^\cdot, L^\cdot)$ dans $K^\cdot \boxminus L^\cdot$*

$$\bar{\tau}' : (k', k, h) \to (h', k', k, h)$$

qui définit un foncteur $\tau' = (K^\cdot \boxminus L^\cdot, \bar{\tau}', \sqsupset(K^\cdot, L^\cdot))$ et la catégorie des trios est inclue par $\bar{\tau}'$ dans $K^\cdot \boxminus L^\cdot$.

Dans les conditions particulières du théorème 2 (les sous-classes K et L sont des sous-catégories de $C^\cdot$ pour la loi induite) le corollaire suivant fait voir une propriété intéressante :

Corollaire 1. *Il existe une application de $\sqsupset(K^\cdot, L^\cdot)$ vers $K^\cdot \boxplus L^\cdot$*

$$\tau' : (k', k, h) \to (k', h', h, k)$$

qui définit un foncteur $\tau' = (K^\cdot \boxplus L^\cdot, \tau', \sqsupset K^\cdot, L^\cdot))$ et la catégorie des trios $\sqsupset(K^\cdot, L^\cdot)$ est incluse dan $K^\cdot \boxplus L^\cdot$.

5. Les notions de trio et de quatuor sont importantes en théorie comme outil standard dans les démonstrations [2], [3], étant l'équivalent algébrique des diagrammes commutatifs [4]. Elles interviennent, ainsi que les problèmes d'inclusions traités ci-dessus, dans l'étude des circuits de machines digitales.

Des généralisations qui vont très loin s'obtiennent en considérant des *ensembles de plus de quatres morphismes* (pour des „pentuors" voir J. Benabou [5]) et qui mènent de façon naturelle à la notion de n-catégorie, considérée indépendement ou comme généralisation des n-groupes de Dörnte-Souchkéwitz.

Reçu le 7 IV 1966

Faculté des Sciences,
Djon, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Ehresmann Ch., *Catégories et structures*. Dunod, Paris, 1965.
2. — Com. Math. Helv., 1963, **38**, pp. 219—283.
3. — Ann. Ec. Norm. Sup., 1963, **80**, pp. 349—426.

4. Bourbaki N., *Théorie des Ensembles*. Hermann, Paris, 1960, 3-ème éd.
5. Benabou J,, *Structures algèbriques dans les catégories*. Thèse, Paris, 1966.
6. Topentcharov V. V., *Théorie des n-catégories*, (à paraître).

ASUPRA INCLUZIUNII UNEI CATEGORII DE „TRIOURI" ÎNTR-O CATEGORIE DE „CVARTETE"

(Rezumat)

Fiind dată o clasă G, prevăzută cu retracțiunile $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$, o categorie $C^{\cdot}$ și clasa de triouri $\overline{\overline{|}}\,(G^{\bar{\alpha}}, C^{\cdot})$, se demonstrează existența unei categorii $H^{\cdot}$ astfel încît categoria laterală a cvartetelor $\overline{\overline{|=|}}\,H^{\cdot}$ dă loc unui functor $\tau = (\overline{\overline{|=|}}\,H^{\cdot}, \tau, \overline{\overline{|}}\,(G^{\bar{\alpha}}, C^{\cdot}))$, definind incluziunea lui $\overline{\overline{|}}\,(G^{\bar{\alpha}}, C^{\cdot})$ în $\overline{\overline{|=|}}\,H^{\cdot}$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 512.4

SYNTHÈSE DE FONCTIONS BOOLÉENNES PAR DES OPÉRATEURS EN LIGNE

PAR

J. MERMET

1. Notations

a) Le produit booléen est noté . (ou rien).
b) La somme booléenne est notée $+$.
c) La somme galoisienne (disjonction) est notée $\oplus$.
d) x_i désigne l'une des formes directe ou complémentée de la variable x_i.
e) Nous utiliserons la forme galoisienne d'une fonction, c'est-à-dire une expression où les seuls signes opératoires sont le produit booléen et la somme disjonctive.

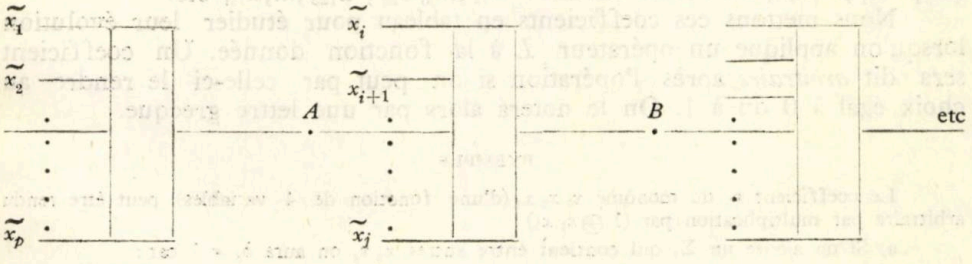


Fig. 1

f) Au point A de la chaîne on a une quantité booléenne G, en B on recueille une fonction F_1 :

$$F_1 = f_{n-1}(\widetilde{x_i}, \widetilde{x_{i+1}}, \ldots, \widetilde{x_j}) \cdot (G \oplus \widetilde{g}_{n-1}(\widetilde{x_i}, \widetilde{x_{i+1}}, \ldots, \widetilde{x_j})).$$

g) On voit que si $f_{n-1} \equiv 1$, l'opération se réduit à l'addition à G de $g_{n-1}(\widetilde{x_i}, \widetilde{x_{i+1}}, \ldots, \widetilde{x_j})$.

On peut donc généraliser l'opération et recueillir après plusieurs opérateurs : $F_2 = f_{n-1}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, \ldots, \tilde{x}_j)\,(G \oplus \Sigma_{n-1})$, où Σ_{n-1} désigne une somme galoisienne de monômes ayant au plus $n-1$ variables prises parmi p quelconques $(p > n)$.

h) f_{n-1} peut toujours s'écrire : $f_{n-1} = \Pi\,(1 \oplus \tilde{x}_i \,.\, \tilde{x}_{i+1} \ldots \tilde{x}_j)$.

2. Définition

On appelle opérateur L, un opérateur qui réalise

$$F = (1 \oplus \Pi_{n-1})\,(G \oplus \Sigma_{n-1}),$$

les variables présentes dans Π_{n-1} et Σ_{n-1} pouvant ne pas être les mêmes, et pouvant être soit directes soit accentuées.

Il résulte des définitions précédentes que :

a) À toute chaîne d'opérateurs à n entrées correspond une chaîne d'opérateurs L.

b) Si une fonction n'est pas réalisable par une chaîne d'opérateurs L, elle n'est pas réalisable par une structure en ligne d'opérateurs à n entrées.

Nous attribuons un coefficient à chaque monôme de la forme galoisienne d'une fonction, il vaudra 1 si le monôme existe pour la fonction, 0 s'il est absent.

Soient a, le coefficient de $x_1 \,.\, x_2 \ldots x_n$ qui contient toutes les variables ; b_1, $b_2, \ldots, b_n$ ceux des monômes qui contiennent toutes les variables sauf une (resp. $x_1, \ldots, x_n$), de même ensuite : $C_{12}, \ldots, C_{pq}$, $d_{123}, \ldots, d_{rst}$ etc.

Nous mettons ces coefficients en tableau pour étudier leur évolution lorsqu'on applique un opérateur L à la fonction donnée. Un coefficient sera dit *arbitraire* après l'opération si on peut par celle-ci le rendre au choix égal à 0 ou à 1. On le notera alors par une lettre grecque.

EXEMPLE

Le coefficient b_3 du monôme $x_1 x_2 x_4$ (d'une fonction de 4 variables) peut être rendu arbitraire par multiplication par $(1 \oplus x_1 x_2)$:

a) Si on ajoute un Σ_2 qui contient entre autres $x_2 x_4$ on aura $b_3 = 1$ car :

$$(x_1 x_2 x_4 \oplus x_2 x_4)(1 \oplus x_1 x_2) = x_1 x_2 x_4 \oplus x_2 x_4 .$$

(Le $x_2 x_4$ obtenu sera englobé dans le Σ_2 suivant).

b) Si on n'ajoute rien on aura $b_3 = 0$ car :

$$x_1 x_2 x_4 (1 \oplus x_1 x_2) = x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 = 0.$$

3. A. Opérateurs a 3 entrées, fonctions de 4 variables

On peut construire toutes les fonctions de 4 variables en seulement 2 opérations L.

On voit sur le tableau 1 que tous les coefficients peuvent être rendus arbitraires.

C_{12} fait partie de Σ_2 donc est arbitraire. Donc $b_1 \oplus b_2 \oplus C_{12}$ est arbitraire, et aussi $b_3 + b_4 + C_{34} = \gamma$.

Tableau 1

a	$b_1 \oplus b_2 \oplus C_{12}$	γ
b_1	b_1	δ
b_2	b_2	ε
b_3	α	α
b_4	β	β
$f_2(x, y)$	$1 \oplus x_1 x_2$	$1 \oplus x_3 x_4$
	1ère opération	2ème opération

Tableau 2

a	α
b_1	b_1
b_2	b_2
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
b_{n-1}	b_{n-1}
b_n	β
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
b_{2n-2}	λ
C_{12}	C_{12}
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$C_{n-1,\,n-2}$	$C_{n-1,2n-2}$
$C_{n,\,n+1}$	μ
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$C_{n-1,2n-2}$	γ
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$	$(1 + x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$

3. B. Généralisation : n entrées, $2n-2$ variables

L'opération L s'écrit alors :

$$L(G) =$$

$$= (1 \oplus \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_{n-1})\,(G \oplus \Sigma_{n-1}).$$

On peut former dans Σ_{n-1} une suite unique de monômes contenant $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-2}$, telle que le produit de chacun d'eux par $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ donne la suite des monômes repérés par $a, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n-2}, C_{n,n+1}$.

L'apparition on non d'un de ces monômes dans Σ_{n-1} décide de la nullité ou non de a, b_n, $b_{n+1}, \ldots, b_{2n-2}, \ldots$, donc l'opération L rend ces coefficients arbitraires.

Les coefficients non rendus arbitraires sont inchangés par l'opération.

Il est évident qu'avec moins de C_{2n-2} opérations L on rend de cette manière tous les coefficients arbitraires, donc :

On peut construire toutes les fonctions de $2n-2$ variables avec des structures en ligne d'opérateurs à n entrées.

4. A. Opérateurs a 3 entrées, fonctions de 5 variables

Le tableau 3 montre le résultat d'une opération L avec $f(x, y) = 1 \oplus \oplus x_1 x_2$.

Avec 4 telles opérations au plus on peut rendre arbitraires tous les coefficents sauf le premier qui doit vérifier :

1° $a \oplus b_i \oplus b_j \oplus c_{ij} = 0.$

Si la dernière opération L a utilisé $f(x, y) = 1 \oplus x_i y_j$:

2° $b_i \oplus c_{ij}$ si on a utilisé $f(x, y) = 1 \oplus x_i x_j$,

3° $b_j \oplus c_{ij}$ si on a utilisé $f(x, y) = 1 \oplus x_i x_j$,

4° $c_{ij} = 0$, si on a utilisé $f(x, y) = 1 \oplus x_i x'_j$.

Tableau 3

a	$b_1 \oplus b_2 \oplus C_{12}$
b_1	b_1
b_2	b_2
b_3	ζ
b_4	ξ
b_5	n
C_{12}	C_{12}
C_{13}	C_{13}
C_{14}	C_{14}
C_{15}	C_{15}
C_{23}	C_{23}
C_{24}	C_{24}
C_{25}	C_{25}
C_{34}	α
C_{35}	β
C_{45}	γ
$f(x. y)$	$1 \oplus x_1 x_2$

Tableau 4

a	$a \oplus b_1 \oplus c_{12}$
b_1	c_{12}
b_2	b_2
b_3	ζ
b_4	η
b_5	ξ
$1 \oplus x'_1 x_1$	

Dans les cas 2°, 3° ou 4° les coefficients ne sont plus, ou rendus arbitraires, ou inchangés. Mais il ne s'introduit aucune relation nouvelle de dépendance.

EXEMPLE

Multiplication par $1 \oplus x_i' x_j$. Seule condition de possibilité:

$$b_1 \oplus c_{12} = 0.$$

Il y aura donc impossibilité seulement dans le cas

$$c_{ij}(c_{ij} \oplus b_i)(c_{ij} \oplus b_j)(a \oplus b_i \oplus b_j \oplus c_{ij}) = 1$$

c'est-à-dire : $c_{ij} = 1$, $b_i = b_j = 0$, $a = 0$ (v. tableau 4).

Les fonctions relatives à de tels coefficients sont les seules de 5 variables que l'on ne puisse pas construire, il est facile de voir qu'il y en a 2^{16}, soit une proportion de $1/2^{16}$.

4. B. Généralisation : n entrées, $2n-1$ variables

Comme dans le cas de 3 entrées et 5 variables il va rester une proportion de fonctions impossibles à construire $1/2^h$.

Calculons h. On peut rendre tous les coefficients arbitraires sauf le 1er astreint à vérifier :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &a \oplus b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_{n-1} \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus \dots \oplus c_{n-1,\,2n-1} \oplus d_{123} \oplus \dots \\ &\dots \oplus d_{n-1,\,2n-2n,\,2n-1} \oplus \dots \oplus f_{1,2,3,4\dots,n-1} = 0. \end{aligned}$$

Il y a C_{2n-1} ensembles de $n-1$ variables donc la relation sous sa forme (1) n'est impossible que dans 1 cas sur $2^{C^{n-1}_{2n-1}}$.

Mais on peut opérer dans $f(x_1, = x_2, \dots, x_{n-1})$ des changements de la forme $x_k \longleftrightarrow 1 \oplus x_k$. On va trouver une impossibilité sur $2^{C^{n-2}_{2n-1}}$ pour la nouvelle relation.

Si on change $n-2$ variables en leur complément on trouve 1 impossibilité sur $2^{C^1_{2n-1}} = 2^{2n-1}$.

Si on change $n-1$ variables en leur complément on trouve $2^{C^0_{2n-1}} = 2$ cas dont 1 est impossible.

Donc au total :

$$h = C^{n-1}_{2n-1} + C^{n-2}_{2n-1} + \dots + C^1_{2n-1} + C^0_{2n-1} = 2^{2n-2}.$$

Application (3 entrées, 5 variables)

$$2n - 1 = 5 \Rightarrow h = C^2_5 + C^1_5 + C^0_5 = 16.$$

Conclusion. *On sait construire toutes les fonctions de $2n-1$ variables, avec une structure en ligne d'opérateurs à n entrées sauf un nombre $2^{2^{2n-2}}$, qui se trouve égal au nombre des fonctions de $2n-2$ variables.*

Application (2 entrées et 3 variables)

La proportion d'impossibilités est $\frac{1}{2^{2^2}} = \frac{1}{16}$, elle est formée des fonctions qui contiennent tous les monômes $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$ et qui ne contiennent pas le monôme $x_1 x_2 x_3$; il y en a effectivement 16.

(L'impossibilité de leur construction avait déjà été démontrée par ailleurs).

5. Opérateurs a n entrées, fonctions de $2n$ variables

La complexité devient trop grande dans ce cas pour qu'on puisse espérer une solution rigoureuse du problème. Au lieu d'une relation à vérifier sur le dernier coefficient c'est en effet un système de relations qui est imposé.

A. Principe d'une approximation du pourcentage de fonctions constructibles

On a sur les coefficients a, b etc. un groupe de $2n+1$ relations à vérifier.

a) Si le dernier produit booléen est effectué par $1 \oplus x_1 x_2 \dots x_{n-1}$, n—1 relations ne seront pas touchées et proviendront des $n-1$ multiplications précédentes.

Si la dernière multiplication est effectuée par $1 \oplus x_1' x_2 \dots x_{n-1}$, l'une des $n-1$ relations disparait en fusionnant avec la première etc.

Appelons A' ce sous-système de $n-1$ équations au maximum, le nombre d'impossibilités qu'il introduit est maximum lorsqu'il a effectivement $n-1$ équations. On peut se contenter de majorer ce nombre en le majorant dans ce dernier cas.

Par un calcul très proche de celui de **4.B** on trouve pour une seule équation 1 cas impossible sur 2^{h_1} cas :

$$h_1 = 1 + (2n-1) + (2n-2) + \dots + [2n-(n-1)] =$$

$$= (n-1)(n+1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1 = \frac{3n^2-3n+2}{2} .$$

Donc on est certain que la proportion K_1 de fonctions qui ne vérifient pas la sous système A' est telle que :

$$K_1 < \frac{n-1}{2^{\frac{3n^2-3n+2}{2}}} .$$

Comme ce majorant décroit vite et tend vers 0 (pour $n=3$ il est déjà inférieur à 1/500) nous considérons que le sous-système A' est toujours vérifié.

b) Reste donc à vérifier un groupe A de $n+2$ relations toutes obtenues à partir de la dernière opération L.

Pour cette dernière opération il y a 2^{n-1} produits booléens différents possibles chacun par C_{2n}^{n-1} fonctions $(1 + x_1 x_2 \dots x_{n-1})$ possibles. Donc au total $2^{n-1} C_{2n}^{n-1}$ systèmes de $n+2$ équations ; il suffira que *l'un d'eux soit vérifié.*

Ecrivons ci-après le dernier de ces systèmes, celui qui a la forme la plus simple (variables séparés), (en fait il y a C_{2n}^{n-1} systèmes de type (H)) :

$$(H)\quad \begin{cases} (1)\ h_{1,2,\dots,n-1} = 0, \\ (2)\ i_{1,2,\dots,n-1,n} = 0, \\ (3)\ i_{1,2,\dots,n-1,n+1} = 0, \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ (n+2)\ i_{1,2,\dots,n-1,2n} = 0. \end{cases}$$

Nous avons résolu ce système pour $n = 2$ et $n = 3$ et effectué un calcul approché pour $n = 4$; on trouve :

$n = 2 \longrightarrow 215$ cas possibles sur 1 024 ;

$n = 3 \longrightarrow 11.901041248$ cas sur 2^{35} cas ;

$n = 4 \longrightarrow \cong 50\ \%$ de cas possibles.

La proportion k de possibilités pour ce dernier système semble augmenter (21 %, 33 %, 50 %,...) avec n, or, le nombre de systèmes augmente comme 2^{n-1}. On peut sans doute approximer assez précisément la proportion K de cas où l'un au moins des systèmes est vérifié par

$$K = 1 - (1 - k)^{2n-1}.$$

Ceci donne pour $\begin{cases} n = 3 \to 80\ \%, \\ n = 4 \to K > 99\ \%. \end{cases}$

Donc *une structure en ligne d'opérateurs à n entrées semble permettre de construire la plus grande partie des fonctions de 2n variables.*

B. Étude en machine (sur 7044 I. B. M.)

a) *Calcul exact pour* $n = 2$. C'est le cas le plus défavorable. On construit encore peu de fonctions de 4 variables.

22.240 cas possibles sur les 65.536.

b) *Étude statistique pour* $n = 3$. Nous avons appliqué le critère de constructibilité (60 systèmes de 7 équations) à 8 échantillons de 50 000 fonctions choisies de façons aléatoires. On trouve (v. tableau 5) :

Tableau 5

Echantillon	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Nombre de fonctions constructibles	39 996	39 495	39 406	39 863	39 654	39 542	39 298	40 172
Pourcentage	80 %	79 %	78,8%	79,7%	79,3%	79,1%	78,6%	80,3%

Ceci se recoupe bien avec l'évaluation théorique ci-dessus.

6. Opérateurs à n entrées, fonctions de $2n + 1$ variables

Principe d'une majoration de la proportion de fonctions constructibles

On a maintenant $2n + 2 + (2n + 1)\,n = 2n^2 + 3n + 2$ relations sur es coefficients à vérifier. On est certain de majorer, en négligeant parmi les relations toutes celles qui ne sont pas déterminées par la dernière opération L, soient $\dfrac{3n^2 + n - 4}{2}$ relations.

Il reste donc à vérifier $\dfrac{n^2 + 5n + 8}{2}$ relations ; le nombre total de systèmes d'équations est $2^{n-1}\,C_{2n+1}^{n-1}$; on majore donc largement la proportion de fonctions constructibles par :

$$K_2 = \frac{2^{n-1}\,C_{2n+1}^{n-1}}{2^{\frac{n^2}{2} + \frac{5}{2}n + 4}} = \frac{C_{2n+1}^{n-1}}{2^{\frac{n^2 + 3n + 10}{2}}}.$$

Cette proportion tend très rapidement vers 0 (pour $n = 3$ on ne construit même pas le 1/750 des fonctions de 7 variablees).

Avec des opérateurs à n entrées en ligne on construit une proportion presque nulle de fonctions de $2n + 1$ variables.

Tous les résultats précédents sont résumés dans le tableau 6.

Dans tous les cas il est simple de reconnaître à partir de la forme galoisienne si la fonction est synthétisable et de trouver une structure qui la représente.

Tableau 6

p \ n	2	3	4	...	n
2	$K=100\,\%$				
3	$1-K=\frac{1}{2^4}$				
4	$K=34\,\%$	$K=100\,\%$			
5	$K<\frac{1}{200}$	$1-K=\frac{1}{2^{16}}$			
6		$K=80\,\%$	$K=100\,\%$		
7		$K<\frac{1}{750}$	$1-K=\frac{1}{2^{64}}$		
8			$K\cong 99\,\%$		
⋮					
$2n-2$					$K=100\,\%$
$2n-1$					$1-K=\frac{1}{2^{2^{2n-2}}}$
$2n$					$K=100\,\%$
$2n+1$					$K<\frac{C_{2n+1}^{n-1}}{2^{\frac{n^2+3n+10}{2}}}$

Reçu le 28 XII 1965

Institut Polytechnique, Grenoble, France

SINTEZA FUNCŢIILOR BOOLEENE PRIN OPERATORI ÎN LINIE

(Rezumat)

Se studiază posibilităţile de sinteză a funcţiilor booleene simple printr-un lanţ de operatori cu n intrări (fig. 1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 517.433

CALCOLO, TRAMITE L'IMPIEGO DELLE DERIVATE TOTALI, DELLE SOLUZIONI DI VARI SISTEMI FUNZIONALI DELLA FISICA MATEMATICA (I)

DI

MAURO PICONE
Socio d'onore dell'Accademia della Repubblica Socialista di Romania
e
D. MANGERON

1. Nella sua ininterotta serie di lavori sintetici consacrati alle realizzazioni ed alle possibilità dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, coadiuvate oggidì dall'avvento delle Calcolatrici Elettroniche, il primo degli autori ha addittato tra l'altro ad un vasto insieme di nuovi metodi da lui elaborati per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica [1], allorchè vari scienziati hanno sottolineato la portata dei risultati conseguiti dal secondo nel dominio delle equazioni alle derivate totali [2]...[5].

In ciò che segue si espongono alcuni teoremi concernenti il calcolo, tramite l'impiego delle derivate totali, di vari sistemi dinamici ed, in particolare, polivibranti, pur situando questa prima Nota nell'ambito di un vasto studio dei vari sistemi funzionali della Fisica Matematica.

2. Si supponga che un corpo elastico C, dello spazio a tre dimensioni per il quale diremo x_1, x_2, x_3, le coordinate di punto, sia suscettibile d'essere rappresentato, in modo biunivoco e continuo, sul cubo Q

$$Q\,(0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1)$$

dello spazio (x, y, z), in maniera che a punti interni di C corrispondano punti interni di Q, a punti della frontiera di C, punti della frontiera di Q. Se

$$\text{(a)} \qquad x_1 = x_1\,(x, y, z), \quad x_2 = x_2\,(x, y, z), \quad x_3 = x_3\,(x, y, z)$$

sono le formole della rappresentazione, supporremo che le funzioni x_1, x_2, x_3, siano continue con le loro derivate parziali fino a quelle, incluse, del second'ordine.

Per una funzione f, delle tre variabili x, y, z, definita nel cubo Q, designeremo con

$$f^{000},\ f^{010},\ f^{001},\ f^{011},\ f^{100},\ f^{110},\ f^{101},\ f^{111}$$

i valori ch'essa assume nei vertici di Q: $(0,0,0)$, $(0,1,0)$,..., con

$$f^{00}_{yz}(x),\quad f^{01}_{yz}(x),\quad f^{10}_{yz}(x),\quad f^{11}_{yz}(x),$$

le derivate seconde delle quattro funzioni di x alle quali la f si riduce sulle quattro costole di Q, rispettivamente di equazioni:

$$y=0,\ z=0;\quad y=0,\ z=1;\quad y=1,\ z=0;\quad y=1,\ z=1,$$

con significato analogo per i simboli

$$f^{00}_{zx}(y),\quad f^{01}_{zx}(y),\quad f^{10}_{zx}(y),\quad f^{11}_{zx}(y),\quad f^{00}_{xy}(z),\quad f^{01}_{xy}(z),\quad f^{10}_{xy}(z),\quad f^{11}_{xy}(z),$$

con

$$f^{0}_{x}(y,z),\quad f^{1}_{x}(y,z)$$

designeremo le derivate seconde totali delle due funzioni di y e z alle quali la f si riduce sulle due facce di Q, rispettivamente di equazioni

$$x=0,\quad x=1,$$

con significato analogo per i simboli $f^{0}_{y}(z,x)$, $f^{1}_{y}(x,z)$, $f^{0}_{z}(x,y)$, $f^{1}_{z}(x,y)$; con

$$f''(x,y,z)\equiv\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}$$

designeremo la derivata seconda totale di f nell'interno di Q. Sussiste il fondamentale

Teorema I. *Ad una funzione f, da definirsi nel cubo Q si possono arbitrariamente assegnare i suoi valori sui vertici del cubo, le sue derivate seconde totali sulle costole, sulle facce e nell'interno del cubo, in seguito a che essa riesce determinata e data dalla formola:*

$$f=f^{000}(1-x)(1-y)(1-z)+f^{010}(1-x)\,y\,(1-z)+$$
$$+f^{001}(1-x)(1-y)\,z+f^{011}(1-x)\,yz+f^{100}x\,(1-y)(1-z)+$$
$$f^{110}xy\,(1-z)+f^{101}x\,(1-y)\,z+f^{111}xyz+$$
$$+\sum_{(x,y,z)}\Big\{(1-y)(1-z)\int_0^1 G(x,\xi)\,f^{01}_{yz}(\xi)\,d\xi+y\,(1-z)\int_0^1 G(x,\xi)\,f^{10}_{yz}(\xi)\,d\xi+$$
$$+(1-y)\,z\int_0^1 G(x,\xi)\,f^{01}_{yz}(\xi)\,d\xi+yz\int_0^1 G(x,\xi)\,f^{11}_{yz}(\xi)\,d\xi\Big\}+$$

$$+\sum_{(x,y,z)}\left\{(1-x)\int_0^1\int_0^1 G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,f_x^0(\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta+\right.$$

$$\left.+x\int_0^1\int_0^1 G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,f_x^1(\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta\right\}+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\,G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,f''(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

ove $G(x,\xi)$ *designa la funzione di* Burkhardt

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi(x-1), & \text{per } \xi\leqslant x,\\ x(\xi-1), & \text{per } \xi\geqslant x,\end{cases}$$

e i termini delle sommatorie si ottengono, da quella scritta, operandovi le sostituzioni circolari (x,y,z), (ξ,η,ζ).

Se il corpo elastico C è in moto attorno ad una sua posizione naturale, rappresentata dalle (a) sul cubo Q, il sistema dinamico spettante agli spostamenti u_h:

$$\sum_{k=1}^{3}\left\{p_{hk}^{11}(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+\cdots+p_{hk}^{1}\frac{\partial u_k}{\partial x}+p_{hk}u_k+q_{hk}\frac{\partial u_k}{\partial t}+q_{hk}^{1}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right\}= \tag{1}$$

$$=P_h(x,y,z,t),$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left\{a_{hk}^{01}(y,z,t)\frac{\partial u_k}{\partial x}+a_{hk}^{02}\frac{\partial u_k}{\partial y}+a_{hk}^{03}\frac{\partial u_k}{\partial z}+a_{hk}^{04}\frac{\partial u_k}{\partial t}+a_{hk}u_k\right\}_{x=0}= \tag{2}$$

$$=A_h^0(y,z,t),$$

$$u_k(x,y,z,0)=\varphi_k(x,y,z),\ \cdots\ \frac{\partial}{\partial t}u_k(x,y,z,0)=\psi_k(x,y,z), \tag{3}$$

si riconduce, ove si ponga ($f(x,y,z,t)$ indica una qualunque delle u_k)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=F(x,y,z,t),\quad f(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\quad \frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,0)=\psi(x,y,z),$$

$$H(t,\tau)=\begin{cases}t-\tau, & \text{per } \tau\leqslant t,\\ 0, & \text{per } \tau\geqslant t,\end{cases}$$

essendovi $(0,T)$ l'intervallo di tempo, finito o infinito, nel quale si vuole studiare il moto di C, alla seguente rappresentazione integrale delle f:

$$f = \varphi(x,y,z) + \psi(x,y,z)\,t + \int_0^T H(t,\tau)\,F(x,y,z,\tau)\,d\tau = \varphi(x,y,z) + \psi(x,y,z)\,t +$$

$$+ (1-x)(1-y)(1-z)\int_0^T H(t,\tau)\,F^{000}(\tau)\,d\tau + \cdots + xyz\int_0^T H(t,\tau)\,F^{111}(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \sum_{(x,y,z)}\Big\{(1-y)(1-z)\int_0^T\int_0^1 H(t,\tau)\,G(x,\xi)\,F^{00}_{yz}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \cdots +$$

(4)

$$+ yz\int_0^T\int_0^1 H(t,\tau)\,G(x,\xi)\,F^{11}_{yz}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big\} +$$

$$+ \sum_{(x,y,z)}\Big\{(1-x)\int_0^T\int_0^1\int_0^1 H(t,\tau)\,G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,F^{0}_{x}(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\,d\zeta\,d\tau + \cdots\Big\} +$$

$$+ \int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1 H(t,\tau)\,G(x,\xi)\,G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,F''(\xi,\eta,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau .$$

Detta dunque U_k la derivata seconda della u_k rispetto al tempo t, assunte come incognite i valori che U_k prende sui vertici del cubo Q e tutte le sue derivate seconde totali sulle costole, sulle facce e nell'interno del cubo, si esprimono le u_k conformemente alla (4), nella quale, in luogo di f, φ, ψ, F, si sostituiscono rispettivamente, u_k, φ_k, ψ, U_k — a mezzo di dette incognite. Introdotte tali espressioni delle u_k nelle (1) e (2), si ottiene, nelle incognite assunte, un sistema di 21 equazioni integrali, subito riconducibile ad un sistema di infinite equazioni integrali vettoriali Fischer-Riesz, donde il calcolo delle u_k.

3. La moderna teoria delle approssimazioni e dello sviluppo delle funzioni in serie di autofunzioni[1]) si è arrichita in questi tempi dalla problematica iniziatasi dal secondo degli autori con lo studio delle equazioni alle derivate totali spettanti ai domini „rettangolari" di cui il prototipo è il problema al contorno

$$(5) \qquad [A(x)\,u' + \lambda B(x)\,u]' + \lambda[B(x)\,u' + C(x)\,u] = 0,$$

$$(6) \qquad u|_{\mathrm{FrR}} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad R = R\{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$u' \equiv Du = \frac{\partial^m u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_m}.$$

[1]) Giova sottolineare che le equazioni polivibranti costituiscono tutt'ora, specialmente nel quadro di sistemi integro-differenziali, il soggetto di studio del secondo degli autori in collaborazione con la oramai ben nota Scuola di Frunze, condotta dai Proff. Bykov e Krivošein [6].

Nell'ambito degli studi spettanti alla matematica costruttiva relativa ai vari sistemi integro-differenziali, d'importanza vieppiù crescente nelle applicazioni [7][2]), presentiamo qui il seguente teorema di unicità per un certo sistema polivibrante, pur additando al fatto che gli studi concernenti l'esistenza, la stabilità ed il calcolo effettivo delle soluzioni di vari sistemi del prototipo di cui sotto si inseriscono successivamente nel *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* [8], [9].

Teorema 2. *Il sistema contenente la derivata totale del primo ordine con gli operatori integro-differenziali ed argomenti ritardati*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y} = p(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + f(x,y) + \sum_{i+j=0}^{1}\left\{r_{ij}(x,y)\,u[\alpha_i(x),\beta_j(y)] + \right.$$

$$\left. + \int_0^x\int_0^y K_{ij}(x,y;t,\tau)\,u[\alpha_i(t),\beta_j(\tau)]\,d\tau\,dt\right\}, \tag{7}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y),\ (y \geqslant 0),\quad u(x,0) = \psi_2(x),\ (x \geqslant 0),\quad \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$$

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \textit{per } x \leqslant 0,\ y = 0,\ \textit{ovvero } y \leqslant 0,\ x = 0, \tag{8}$$

ove $r_{ij}(x,y)$, $K_{ij}(x,y;t,\tau)$, $(0 \leqslant i+j \leqslant 1)$, $p(x)$, $f(x,y)$ *sono funzioni continue per tutti* $x, t \in [0,a], y, \tau \in [0,b]$; $D = [0,a] \times [0,b]$, *mentre* $\alpha_i(x)$, $\beta_j(y)$ *denotano gli argomenti ritardati, possiede nel dominio D una soluzione unica dotata di derivata prima totale continua e questa soluzione è data dalla soluzione dell'equazione integrale*

$$u(x,y) = \psi_2(x) + \psi_1(y)\exp\int_0^x p(x)\,dx + \int_0^x\int_0^y \exp\left[\int_0^x p(x)\,dx - \int_0^t p(t)\,dt\right] \times$$

$$\times \left[f(t,\tau) + \sum_{i+j=0}^{1}\left\{r_{ij}(t,\tau)\,u[\alpha_i(t),\beta_j(\tau)] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^x\int_0^y K_{ij}(t,\tau;\xi,\eta)\,u[\alpha_i(\xi),\beta_j(\eta)]\,d\xi\,d\eta\right\}\right] dt\,d\tau \equiv \tag{9}$$

$$\equiv g(x,y) + \int_T\int \sum_{i+j=0}^{1} P_{ij}(x,y;t,\tau)\,u[\alpha_i(x),\beta_j(\tau)]\,dt\,d\tau$$

ad argomenti ritardati.

Ricevuta il 14 VII 1966

Accademia Nazionale dei Lincei,
Roma, Italia,
Instituto politecnico di Iaşi,
Romania

[2]) Il primato del secondo degli autori che prima di J. Hadamard ed altri scienziati insigni ha formulato e risolto problemi al contorno per sistemi contenenti operatori differenziali non ellittici à stato dovutamente sottolineato nell'addenda al cap. IV del recente libro dell'Acad. M. Yu. Berezanksi [10].

BIBLIOGRAFIA

1. Picone M., *Biobibliografia.* Annuario dell'Accademia dei XL. Roma, 1961, 40 pp.
2. Mangeron D., *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate totali.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *3—4*, pp. 40—52.
3. Favard J., *Théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites „équations de Mangeron".* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 17—20.
4. Rossi F. S., *Sopra il metodo di Mangeron in certi problemi al contorno non lineari.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, pp. 39—42.
5. Oğuztöreli M. N., *Methods in Control Systems Studies.* Academic Press, New York, (in print).
6. * * * III Сибирская Конференция по Математике и Механике. Ташкент, 1964.
7. * * * Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics. General Lectures. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-N. Y., 1966.
8. Mangeron D., *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. VIII, 1965, **XXXIX**, *1—2*, pp. 22—28.
9. Mangeron D., Krivošein L. E., *Valutazione dei moduli delle soluzioni di certi sistemi polivibranti.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. VIII, 1965, **XXXIX**, *1—2*, pp. 29—36.
10. Березанский М. Ю., *Разложения по собственным функциям дифференциальных операторов.* Изд. Наукова Думка, Киев, 1965 г.

CALCULUL SOLUŢIILOR SISTEMELOR FUNCŢIONALE INTERESÎND FIZICA MATEMATICĂ, PRIN INTERMEDIUL DERIVATELOR TOTALE (I)

(Rezumat)

În cadrul Notei elaborate se stabilesc :

1. O formulă ce exprimă o funcţie f care urmează a fi definită într-un cub Q, fixîndu-i-se arbitrar valorile sale în vîrfurile cubului, derivatele totale secunde de-a lungul muchiilor, feţelor şi în interiorul cubului.

2. O reprezentare integrală a deplasărilor u_k ale punctelor dintr-un corp elastic, izotrop sau nu, în jurul unei poziţii naturale a sa, reprezentată prin transformările (a) prin cubul Q, dată prin (4) şi, în consecinţă, reducerea problemei formulate de elastodinamică la un sistem de infinite ecuaţii integrale vectoriale Fischer-Riesz.

3. O reprezentare printr-o ecuaţie integrală a unor sisteme polivibrante cu remanenţă şi argumente întîrziate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 517.934

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

Note I

EXISTENCE et CONSTRUCTION

PAR

N. FORBAT et A. HUAUX

§ 1. Introduction

Soit l'équation différentielle

$$L(x) = P(t) + \varphi(x, x'),\ x' \equiv \frac{dx}{dt}; \tag{1.1}$$

on admet les hypothèses suivantes :

a) $P(t) \in C,\ t \geqslant t_0 > 0$; $P(t+T) = P(t)$, T réel et positif ; on pose $T = 2\pi/\omega$;

$$\text{b)}\ L(x) \equiv a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_n x^{n)},\ x^{i)} = \frac{d^i x}{dt^i}; \tag{1.2}$$

les $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles.

On pose

$$p(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n; \tag{1.3}$$

$p(u)$ est le polynôme caractéristique correspondant. Nous supposons provisoirement $n \geqslant 3$; au § 6 nous traiterons de la levée de cette restriction (cf. Sonnenschein [4]).

On suppose de plus

$$p(i\nu\omega) \neq 0, \tag{1.4}$$

ν entier positif, nul ou négatif ; autrement dit, l'équation différentielle

$$L(x) = 0 \tag{1.5}$$

n'a pas de solution périodique de période T en t.

c) $\varphi(x, x')$ définit la partie non linéaire de (1.1) ; on suppose que

$$\varphi(0, 0) = 0, \tag{1.6}$$

que $\varphi(x, x')$ est définie $\forall (x, x')$ tel que $x \in (-r, +r)$, $x' \in (-r, +r)$ et vérifie dans cet intervalle une condition de Lipschitz de constante M :

$$|\varphi(x_1, x'_1) - \varphi(x_2, x'_2)| < M(|x_1 - x_2| + |x'_1 - x'_2|). \tag{1.7}$$

Si $\varphi(x, x')$ est une fonction analytique de ses arguments, la condition (1.6) n'est pas restrictive car l'éventuelle constante de sa série de Mac Laurin peut toujours être englobée dans la fonction périodique $P(t)$.

Nous allons démontrer que *dans ces conditions, si certaines inégalités sont satisfaites, il existe toujours une solution généralisée de* (1.1), *périodique de même période T en t, pouvant être construite par une méthode d'itération.*

§ 2. Solution périodique de l'équation différentielle linéaire

$$L(x) = P(t). \tag{2.1}$$

Supposons $P(t)$ de la forme

$$P(t) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu e^{i\nu\omega t} + \bar{c}_\nu e^{-i\nu\omega t}) \tag{2.2}$$

(c_ν et $\bar{c}_\nu$ sont des constantes complexes conjuguées).

Si la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu$ est absolument convergente, montrons que la solution périodique de (2.1) est

$$x(t) = \frac{c_0}{p(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{c_\nu e^{i\nu\omega t}}{p(i\nu\omega)} + \frac{\bar{c}_\nu e^{-i\nu\omega t}}{p(-i\nu\omega)} \right]. \tag{2.3}$$

En effet, dès que $n \geqslant 2$, la série (2.3) converge uniformément ainsi que les séries des dérivées première et seconde, et ici on a supposé $n \geqslant 3$. De plus, pour $\nu \geqslant 1$, on a en vertu de l'hypothèse a),

$$c_\nu = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T P(\tau) e^{-i\nu\omega\tau} d\tau, \quad \bar{c}_\nu = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T P(\tau) e^{i\nu\omega\tau} d\tau, \tag{2.4}$$

d'où (2.3) s'écrit

$$x(t) = \frac{\omega}{2\pi p(0)} \int_0^T P(\tau) d\tau + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty\,\prime} \frac{e^{i\nu\omega t}}{2p(i\nu\omega)} \int_0^T P(\tau) e^{-i\nu\omega\tau} d\tau. \tag{2.5}$$

Dans la somme $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty\,\prime}$, $\nu = 0$ n'est pas à compter.

Considérons de plus près la série

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{e^{-i\nu\omega\tau}}{p(i\nu\omega)} e^{i\nu\omega t} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{e^{-i\nu\omega(t-\tau)}}{p(i\nu\omega)}; \tag{2.6}$$

la série (2.6) admet la majorante

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{p(i\nu\omega)} \right| \tag{2.7}$$

qui est convergente puisque le degré de $p(u)$ est au moins égal à 3. Par conséquent, la série (2.6) est uniformément convergente et dans l'égalité (2.5) on peut intervertir la sommation et l'intégration parce que $P(\tau)$ est bornée, d'où (2.5) peut s'écrire

$$x(t) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T P(\tau) \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu\omega(t-\tau)}}{p(i\nu\omega)} d\tau. \tag{2.8}$$

Posons

$$K(t,\tau) = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu\omega(t-\tau)}}{p(i\nu\omega)}; \tag{2.9}$$

(2.8) et (2.9) donnent

$$x(t) = \int_0^T K(t,\tau) P(\tau) d\tau. \tag{2.10}$$

$K(t,\tau)$ est une fonction continue partout dans le plan (t,τ) en les deux variables t et τ, et cela en vertu de la convergence uniforme de la série (2.6) ; $K(t,\tau)$ est périodique de période T en t et τ, et sa dérivée par rapport à t est une série majorée par la série (2.11) :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{i\nu\omega}{p(i\nu\omega)} \right|, \tag{2.11}$$

qui converge dès que *l'ordre de* $L(x)$ *défini par* (1.3) *est au moins égal à* 2. Par conséquent, puisque cet ordre est supérieur ou égal à 3, la série qui définit $\partial K/\partial t$ est aussi uniformément convergente et continue par rapport à t; on l'obtient en dérivant les deux membres de (2.9), terme à terme et par rapport à t.

§ 3. Transformation de l'équation différentielle (1.1) en équation integrale. Principe de la contraction

Considérons l'équation intégrale

$$x(t) = \int_0^T K(t,\tau) [P(\tau) + \varphi(x(\tau), x'(\tau))] d\tau \tag{3.1}$$

en la fonction inconnue $x(t)$.

Toute solution de (3.1) est périodique de période T en t. De plus, toute solution périodique de période T et de classe $C^{2)}$ de (1.1) est solution de (3.1) et réciproquement, toute solution de (3.1) qui est de classe $C^{2)}$ est une solution périodique de période T de (1.1). Nous dirons que toute solution continue de (3.1) (nécessairement périodique de période T en t) est une solution généralisée de (1.1) et nous démontrerons qu'une telle solution existe.

Dans ce but, et pour utiliser une méthode d'itérations, soit la transformation

$$y(t) = \int_0^T K(t, \tau)\,[P(\tau) + \varphi(x(\tau), x'(\tau))]\,d\tau, \tag{3.2}$$

qui associe à toute fonction $x(\tau)$ de classe $C^{1)}$ et périodique de période T une autre fonction périodique $y(t)$, de même période T et aussi de classe $C^{1)}$; cette propriété résulte de la continuité par rapport à t de $K(t, \tau)$ et de $\partial K/\partial t$. Pour abréger, on écrira

$$y = Rx. \tag{3.3}$$

Plaçons-nous dans l'espace de Banach B des fonctions périodiques de période T en t et de classe $C^{1)}$, dans lequel nous avons défini la distance de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ par la relation

$$d(f, g) = \max_{t \in [0,T]} |f(t) - g(t)| + \max_{t \in [0,T]} |f'(t) - g'(t)|. \tag{3.4}$$

Cet espace est complet car toute suite de Cauchy de fonctions $f_n(t)$ de cet espace converge vers une fonction de même période et de classe $C^{1)}$. Dans cet espace B, envisageons le sous-ensemble E des fonctions $f(t)$ telles que pout tout $t \in [0, T]$ on ait

$$\text{(A)} \quad |f(t)| \leqslant r \quad \text{et} \quad \text{(B)} \quad |f'(t)| \leqslant r.$$

E est un sous-ensemble fermé de B car une suite uniformément convergente de fonctions de classe $C^{1)}$, périodique et vérifiant (A) et (B), converge vers une fonction de classe $C^{1)}$, périodique et vérifiant (A) et (B) ; E est aussi un espace métrique complet.

Aux § **4** et **5** de ce travail, il sera fait usage du principe de la contraction, qui peut s'énoncer comme suit (Kolmogorov et Fomin [2]) :

Soit E un espace métrique complet ; si A est une application $E \to E$ contractive, c'est-à-dire s'il existe une constante $a < 1$ telle que quels que soient x et y, points de E, on ait

$$d(Ax, Ay) \leqslant a.\,d(x, y), \tag{3.5}$$

alors le principe de la contraction permet d'affirmer que cette application possède un point fixe unique dans E, soit x_0, tel que

$$x_0 = Ax_0 . \tag{3.6}$$

Le point fixe x_0 peut être obtenu comme limite

$$\lim_{n\to\infty} A^n x = x_0 , \tag{3.7}$$

où x est un point quelconque de E et où $A^n x$ signifie la n-ième itération de l'application A.

§ 4. Existence et construction de solutions de l'équation intégrale (3.1)

Soit $x(t)$ une fonction appartenant au sous-ensemble E défini au § 3. On aura, en vertu de la condition de Lipschitz (1.7) et de (A) et (B),

$$|\varphi(x(\tau), x'(\tau))| \leqslant 2Mr. \tag{4.1}$$

Soit k le maximum de $|K(t, \tau)|$ et soit m le maximum de $|P(\tau)|$ pour $t \in [0, T]$ et $\tau \in [0, T]$. En vertu de (3.2) on aura, si $x(t) \in E$:

$$|y(t)| \leqslant T(m + 2Mr). \tag{4.2}$$

D'autre part, en dérivant les deux membres de (3.2) par rapport à t, il vient, compte tenu de l'appartenance de $x(t)$ à E,

$$y'(t) = \int_0^T \frac{\partial K}{\partial t} [P(\tau) + \varphi(x(\tau), x'(\tau))]\, d\tau, \tag{4.3}$$

d'où par un raisonnement analogue à celui qui a établi (4.2), et en désignant par k' le maximum de $|\partial K/\partial t|$,

$$|y'(t)| \leqslant Tk'(m + 2Mr). \tag{4.4}$$

Il résulte de (4.2) et (4.4) que $y(t)$ appartient aussi au sous-ensemble E si l'on a

$$Tk(m + 2Mr) \leqslant r, \tag{4.5}$$

$$Tk'(m + 2Mr) \leqslant r. \tag{4.6}$$

Si les relations (4.5) et (4.6) sont vérifiées, la transformation (3.3) est une application du sous-ensemble E sur lui-même. Soient

$$y_1 = Rx_1 \quad \text{et} \quad y_2 = Rx_2 . \tag{4.7, 4.8}$$

On a

$$|y_2 - y_1| = |Rx_2 - Rx_1| = \left| \int_0^T R(t, \tau)\, [\varphi x(x_2, x_2') - \varphi(x_1, x_1')]\, d\tau \right| , \tag{4.9}$$

donc

$$|y_2 - y_1| \leqslant Tk \max_{\tau \in [0,T]} [\varphi(x_2, x_2') - \varphi(x_1, x_1')] \leqslant$$

(4.10)

$$\leqslant Tk \max_{\tau \in [0,T]} [M|x_2 - x_1| + M|x_2' - x_1'|]$$

ou

$$|y_2 - y_1| \leqslant TkM [\max_{\tau \in [0,T]} |x_2 - x_1| + \max_{\tau \in [0,T]} |x_2' - x_1'|]$$

ou

$$|y_2 - y_1| \leqslant TkM\, d(x_2, x_1). \tag{4.11}$$

D'une manière analogue on trouve

$$|y_2' - y_1'| \leqslant Tk'M\, d(x_2, x_1). \tag{4.12}$$

En additionnant membre à membre les inégalités (4.11) et (4.12) on trouve

$$d(y_2, y_1) = \max_{t \in [0,T]} |y_2 - y_1| + \max_{t \in [0,T]} |y_2' - y_1'| \leqslant TM(k + k')\, d(x_2, x_1). \tag{4.13}$$

Pour que la transformation $y = Rx$ soit une contraction, il suffit que

$$TM(k + k') < 1\,; \tag{4.14}$$

comme M est non-négatif, (4.14) sera vérifié si les inégalités (4.5) et (4.6) le sont. Par conséquent, en vertu du principe de la contraction, si (4.5) et (4.6) sont satisfaits, il existera un et un seul élément double de la transformation dans notre sous-ensemble, c'est-à-dire une solution de l'équation intégrale (3.1), solution qui sera périodique de période T et de clase $C^{1)}$. Cet élément double ou point fixe du sous-ensemble, soit $\bar{x}(t)$, vérifiant (3.1), pourra être obtenu en écrivant

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} R^n x, \tag{4.15}$$

où R^n est la n-ième itération de la transformation R et où x est un élément quelconque de notre sous-ensemble. On prendra par exemple $x_0(t) = 0$, $x_1 = Rx_0, \ldots, x_n = Rx_{n-1}, \ldots$, etc.

La suite des fonctions continues et périodiques $x_n(t)$ converge uniformément vers la fonction $\bar{x}(t)$, solution de l'équation intégrale (3.1).

§ 5. Borne supérieure de l'erreur commise

En vue des applications pratiques, il y a lieu de calculer une borne supérieure de l'erreur $|\bar{x}(t) - y_n(t)|$ et $|\bar{x}(t) - y_n'(t)|$ commise en remplaçant la solution $\bar{x}(t)$ par une solution approchée et la dérivée $x'(t)$ par la dérivée de cette solution approchée. Supposons en effet que, dans l'application itérée de la transformation R, nous partions de la fonction $x(t) \equiv 0$, $(x'(t) \equiv 0)$. Nous aurons

(5.1) $$y_1(t) = R(0),\ y_2(t) = Ry_1, \ldots, y_{n+1} = Ry_n,$$

et en vertu de (4.13) il vient

$$d(y_1, y_2) \leqslant TM(k+k')\, d(0, y_1) = TM(k+k') \left[\max_{t\in[0,T]} |y_1| + \max_{t\in[0,T]} |y_1|\right],$$

. . . . . .

$$d(y_n, y_{n+1}) \leqslant TM(k+k')\, d(y_{n-1}, y_n),$$

ou bien

(5.2) $$d(y_n, y_{n+1}) \leqslant [TM(k+k')]^n \left[\max_{t\in[0,T]} |y_1| + \max_{t\in[0,T]} |y_1'|\right].$$

On en tire

$$d(y_n, \bar{x}) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} d(y_{n+i},\ y_{n+i+1}),$$

ou

(5.3) $$d(y_n, \bar{x}) \leqslant \frac{a^n}{1-a} \left[\max_{t\in[0,T]} |y_1| + \max_{t\in[0,T]} |y_1'|\right],$$

où l'on a posé

(5.4) $$a = TM(k+k') < 1.$$

En vertu de la définition (3.4) de la distance, on a *a fortiori*

(5.5) $$\max_{t\in[0,T]} |y_n - \bar{x}(t)| \leqslant \frac{a^n}{1-a} \left[\max_{t\in[0,T]} |y_1| + \max_{t\in[0,T]} |y_1'|\right],$$

et

(5.6) $$\max_{t\in[0,T]} |y_1' - \bar{x}'(t)| \leqslant \frac{a^n}{1-a} \left[\max_{t\in[0,T]} |y_1| + \max_{t\in[0,T]} |y_1'|\right].$$

On voit qu'en prenant n suffismament grand ces bornes supérieures des erreurs commises deviennent arbitrairement petites.

§ 6. Généralisation

a) On peut étendre immédiatement le précédent raisonnement à l'équation différentielle

(6.1) $$L(x) = P(t) + \varphi(x, x', x'', \ldots, x^{s)}),$$

pourvu que l'ordre de l'opérateur L soit supérieur au moins de deux unités à s; les calculs sont immédiats (Forbat [1]).

b) En vue des applications à la Mécanique non linéaire, il est à remarquer que souvent on écrit (1.1) sous la forme

(6.2) $$L(x) = \varepsilon [P(t) + \varphi(x, x')],$$

où ε est un paramètre „suffisamment petit", ce qui peut être précisé à l'aide des égalités (4.5) et (4.6) qui deviennent respectivement

(6.3) $Tk\varepsilon\,(m + 2Mr) \leqslant r$, (6.4) $Tk'\varepsilon\,(m + 2Mr) \leqslant r$;

par conséquent, pour des valeurs „suffisamment petites" du paramètre de non-linéarité ε, la solution périodique $x(t)$ existera toujours et sera unique.

c) J. Sonnenschein [4], [5] a donné des conditions permettant d'adoucir la restriction imposée à (6.1) et relative aux ordres respectifs de L et de φ. Il a montré qu'il suffit d'avoir

(6.5) $$n - s \geqslant 1$$

pour que la méthode puisse s'appliquer.

Reçu le 25 XII 1965

Faculté Polytechnique, Mons,
et
Université de Bruxelles,
Belgique

BIBLIOGRAFIE

1. Forbat N. H., *Sur une généralisation d'un théorème de M. Sonnenschein.* Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut, 1963, **77**, pp. 21—26.
2. Kolmogoroff A. N., Fomin S. W., *Functional Analysis*, Vol. **I**, pp. 43, (traduit de russe).
3. Sonnenschein J., *Sur les solutions périodiques d'une équation différentielle non linéaire.* Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut, 1963, **77**, pp. 13—20.
4. — *Sur les solutions périodiques de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires.* Bull. Acad. r. Belgique, Cl. Sc., 1963, pp. 548—554.
5. — *Solutions périodiques de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires.* Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut, 1964, **78**, pp. 121—124.

ASUPRA SOLUȚIILOR PERIODICE ALE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE NELINIARE

Nota I

Existență și construcție

(Rezumat)

Se expune un procedeu de demonstrație a existenței și a construcției aproximative a soluției periodice a ecuațiilor diferențiale neliniare și neautonome.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. K. 517.942.932

EXPLIZITE BERECHNUNG DER LÖSUNG LINEARER SCHWINGUNGSGLEICHUNGEN IM RESONANZ- UND AUSNAHMEFALL

VON

RUDOLF IGLISCH

1. Problemstellung, Hauptfall

Behandelt wird für $0 \leqslant t < \infty$ die reelle Differentialgleichung

$$\ddot{Z} + a(t)\dot{Z} + b(t)Z = f(t), \tag{1}$$

in der alle gegebenen Funktionen[1]) die gleiche, nicht notwendig kleinste, Periode P haben mögen:

$$a(t+P) = a(t), \quad b(t+P) = b(t), \quad f(t+P) = f(t). \tag{2}$$

In [1] wurden die Begriffe Hauptfall, Resonanzfall und Ausnahmefall eingeführt und diskutiert, die beiden letzteren aber nur unter Führung indirekter Beweise. Es ist das Ziel vorliegender Note, auch im Resonanz- und Ausnahmefall eine explizite einfache Darstellung der Lösungen von (1) zu geben, und zwar ohne Verwendung von besonderen Vorkenntnissen. Dabei werden diejenigen Teile von [1], die schon explizite Ergebnisse enthalten, durch Zitat übernommen[2]).

Dazu gehört das Ergebnis [1, §4] im

Hauptfall. Die homogene Gleichung

$$\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0 \tag{3}$$

habe keine mit P periodische Lösung. Dann lässt sich eindeutig $Y(t)$ als mit P periodische Partikularlösung von (1) wählen, also

---

[1]) Man möge sie der Einfachheit halber als stetig voraussetzen, was aber keineswegs nötig ist.

[2]) Allgemeinere Untersuchungen bzgl. einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung findet man in [2].

$$Y(t+P) = Y(t), \tag{4}$$

derart, dass die allgemeine Lösung von (1) die Form

$$Z(t) = Y(t) + C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) \tag{5}$$

hat, wo $z_1(t)$ und $z_2(t)$ ein Fundamentalsystem von (3) bilden.

2. Der Fall einfacher Resonanz

Man setze

$$v(t) = c \exp \int_0^t a(s)\, ds, \quad \text{also } \dot{v} = av, \tag{6}$$

wo c so bestimmt sei, dass für das Fundamentalsystem $z_1(t), z_2(t)$ von (3) gilt

$$v(t) = 1 : \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten findet man als Partikularlösung von (1)

$$Y(t) = -z_1(t) \int_0^t v(s)\, z_2(s)\, f(s)\, ds + z_2(t) \int_0^t v(s)\, z_1(s)\, f(s)\, ds. \tag{8}$$

Die allgemeine Lösung von (1) hat wieder die Form (5).

Fall I. $z_1(t)$ und $z_2(t)$ mögen beide die Periode P haben. Dann gilt nach (7) auch

$$v(t+P) = v(t). \tag{9}$$

Der Resonanzfall [1, §§ 1 und 3] liegt vor, wenn von den Integralen

$$\int_0^P v(s)\, z_\nu(s)\, f(s)\, ds = A_\nu, \quad (\nu = 1, 2), \tag{10}$$

mindestens eins von Null verschieden ist. Durch evtl. Linearkombination der $z_\nu(t)$ kann man dann erreichen, dass

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 = 0 \tag{11}$$

ist. Man findet aus (8) mit einer natürlichen Zahl m

$$Y(mP+\tau) = -z_1(\tau)\int_0^{\tau} v(s)\, z_2(s) f(s)\, ds +$$

(12)

$$+ z_2(\tau)\left[\int_0^{\tau} v(s)\, z_1(s) f(s)\, ds + mA_1\right], \quad 0 \leqslant \tau \leqslant P.$$

Wir definieren, zunächst für $0 \leqslant \tau \leqslant P$,

$$X_2(\tau) = -\frac{A_1}{P}\tau + \int_0^{\tau} v(s)\, z_1(s) f(s)\, ds, \tag{13}$$

dehnen diese Definition auf alle Werte von τ aus und finden $X_2(\tau + P) = X_2(\tau)$, so dass $X_2(\tau)$ eine für alle τ definierte stetige und stetig differenzierbare mit P periodische Funktion ist. Sie braucht also, wie auch alle folgenden mit P periodischen Funktionen, nur im Intervall $0 \leqslant \tau \leqslant P$ berechnet zu werden. Die Funktion

$$X_1(t) = \int_0^{t} v(s)\, z_2(s) f(s)\, ds \tag{14}$$

ist mit P periodisch. Ersichtlich folgt nun aus (12)

$$Y(t) = -z_1(t)\, X_1(t) + z_2(t)\left[\frac{A_1}{P}t + X_2(t)\right]. \tag{15}$$

Das den Faktor t enthaltende erste Glied in der Klammer ist charakteristisch für den einfachen Resonanzfall.

Fall II. $z_1(t)$ habe die Periode P, $z_2(t)$ nicht.

Wir machen in diesem Paragraphen die

Zusatzvoraussetzung. $v(t)$ habe nicht die Periode P. Infolge (6) bedeutet dies

$$\int_0^{P} a(s)\, ds = \alpha \neq 0. \tag{16}$$

Dann kann man nach [1, § 2] unter Erfüllung von (7) $z_2(t)$ eindeutig so bestimmen, dass mit

$$w(t) = v(t)\, z_2(t) \text{ gilt } w(t+P) = w(t). \tag{17}$$

Bei Vorliegen des Resonanzfalles [1, §§ 1 und 3] ist

$$\int_0^P w(s) f(s)\,\mathrm{d}s = A_2 \neq 0, \tag{18}$$

und man findet statt (12) mit $0 \leqslant \tau \leqslant P$

$$\begin{aligned} Y(mP+\tau) = &- z_1(\tau)\left[mA_2 + \int_0^\tau w(s) f(s)\,\mathrm{d}s\right] + \\ &+ z_2(mP+\tau)\left[\int_0^{mP+\tau} v(s)\, z_1(s) f(s)\,\mathrm{d}s + C_2\right], \end{aligned} \tag{19}$$

wo wir über C_2 noch passend verfügen werden. Infolge (6) und (16) ist

$$v(mP+\tau) = \mathrm{e}^{m\alpha} v(t) \tag{20}$$

und nach (17)

$$z_2(mP+\tau) = \frac{w(mP+\tau)}{v(mP+\tau)} = \frac{w(\tau)}{v(\tau)} \cdot \mathrm{e}^{-m\alpha} = z_2(t) \cdot \mathrm{e}^{-m\alpha}. \tag{21}$$

Mit der Abkürzung

$$U(t) = z_1(t) f(t), \quad U(t+P) = U(t), \tag{22}$$

wird das zweite Integral in (19)

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2(mP+\tau) &= \int_0^{mP+\tau} v(s)\, U(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_{\nu P}^{(\nu+1)P} v(s)\, U(s)\,\mathrm{d}s + \int_{mP}^{mP+\tau} v(s)\, U(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_0^P v(\nu P + \varrho_\nu)\, U(\varrho_\nu)\,\mathrm{d}\varrho_\nu + \int_0^\tau v(mP+\varrho_m)\, U(\varrho_m)\,\mathrm{d}\varrho_m = \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathrm{e}^{\nu\alpha} \int_0^P v(\varrho_\nu) U(\varrho_\nu)\,\mathrm{d}\varrho_\nu + \mathrm{e}^{m\alpha} \int_0^\tau v(\varrho_m)\, U(\varrho_m)\,\mathrm{d}\varrho_m. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\int_0^P v(s)\, U(s)\,\mathrm{d}s = \gamma, \tag{23}$$

geht das über in

$$\mathfrak{f}_2(mP+\tau) = \gamma \frac{e^{m\alpha}-1}{e^{\alpha}-1} + e^{m\alpha} \int_0^{\tau} v(s)\, U(s)\, ds.$$

Daher wird mit (21)

$$z_2(mP+\tau)\, \mathfrak{f}_2(mP+\tau) = z_2(\tau) \left[\gamma \frac{1-e^{-m\alpha}}{e^{\alpha}-1} + \int_0^{\tau} v(s)\, U(s)\, ds \right]. \tag{24}$$

Mit der Wahl

$$C_2 = \frac{\gamma}{e^{\alpha}-1}, \tag{25}$$

geht der zweite Summand von (19), wieder unter Beachtung von (21), über in

$$z_2(\tau) \left[C_2 + \int_0^{\tau} v(s)\, U(s)\, ds \right] \equiv X_2(\tau). \tag{26}$$

Diese Definition gilt zunächst für $0 \leqslant \tau \leqslant P$, wird dann auf alle τ-Werte ausgedehnt, und man bestätigt leicht:

$$X_2(\tau + P) = X_2(\tau),$$

Analog (13), setzen wir

$$X_1(\tau) = -\frac{A_2}{P}\tau + \int_0^{\tau} w(s)\, f(s)\, ds, \tag{27}$$

was wieder die Periode P besitzt. Also ist nach (19)

$$Y(t) = -z_1(t) \left[\frac{A_2}{P} t + X_1(t) \right] + X_2(t), \tag{28}$$

weist also wieder einen mit t multiplizierten Summanden auf.

3. Ein Fall von Doppelresonanz

Es bleibt noch der Fall nur eines mit P periodischen $z_1(t)$ unter der Voraussetzung

$$\int_0^{P} a(s)\, ds = 0 \tag{29}$$

zu behandeln[3]). Sicher gibt es mindestens eine Stelle t_1 mit

$$\dot{z}_1(t_1) = 0. \tag{30}$$

Wir führen

$$\tau = t - t_1 \tag{31}$$

als neue unabhängige Veränderliche ein. Mit

$$\begin{cases} U(\tau) = Z(t), \quad u_\nu(\tau) = z_\nu(t), \quad (\nu = 1, 2), \quad w(\tau) = v(t), \\ A(\tau) = a(t), \quad B(\tau) = b(t), \quad F(\tau) = f(t), \\ u_1(\tau + P) = u_1(\tau), \quad w(\tau + P) = w(\tau), \quad \dot{u}_1(0) = 0, \end{cases} \tag{32}$$

haben wir dann statt (1)

$$\ddot{U} + A(\tau)\dot{U} + B(\tau)U = F(\tau) \tag{33}$$

und statt (3)

$$\ddot{u} + A(\tau)\dot{u} + B(\tau)u = 0. \tag{34}$$

Aus (7) folgt dann

$$u_1(P)\dot{u}_2(P) = \frac{1}{w(P)} = \frac{1}{w(0)} = u_1(0)\dot{u}_2(0) \tag{35}$$

und daraus

$$\dot{u}_2(mP) = \dot{u}_2(0). \tag{36}$$

Da $u_2(\tau)$ nicht die Periode P haben soll, ist

$$u_2(P) - u_2(0) = \beta \neq 0. \tag{37}$$

Dann ist infolge $\dot{u}_1(0) = 0$ und (36) für $0 \leqslant \tau \leqslant P$

$$u_2(\tau + P) = u_2(\tau) + \delta u_1(\tau) \tag{38}$$

mit (man beachte $u_1(0) \neq 0$)

$$\delta = \beta : u_1(0), \tag{39}$$

---

[3]) Ein Beispiel für diesen Fall ist (vgl. [1, S. 183]) mit $a > b$ die Differentiallgleichung

$$\{[a + b\cos t]\dot{z}\}^{\cdot} + 3b\sin t\,\dot{z} + [a - b\cos t]z = 0$$

mit dem Fundamentalsystem

$$z_1(t) = \sin t, \quad z_2(t) = (a^2 + b^2)\cos t + 2ab + b^2 t\sin t.$$

Hier ist (abgesehen von einem konstanten Faktor)

$$v(t) = (a + b\cos t)^{-2},$$

also gleichfalls mit 2π periodisch.

da (37) und (36) erfüllt sind (mit $m=1$) und (34) mit P periodische Koeffizienten hat. So schliesst man weiter auf

$$u_2(\tau+mP)=u_2(\tau)+m\delta u_1(\tau) \quad \text{für} \quad 0\leqslant\tau\leqslant P \tag{40}$$

und hieraus auf die Gültigkeit von (38) für alle τ.

Die Funktion

$$R(\tau)=u_2(\tau)-\frac{\delta}{P}\tau u_1(\tau) \tag{41}$$

erweist sich daher als mit P periodisch, so dass gilt

$$u_2(\tau)=\frac{\delta}{P}\tau u_1(\tau)+R(\tau), \tag{42}$$

oder

$$z_2(t)=\frac{\delta}{P}t z_1(t)+R(t-t_1)-\frac{\delta}{P}t_1 z_1(t), \tag{43}$$

wo die letzten beiden Summanden sowie $z_1(t)$ mit P periodisch sind.

Wir bestimmen nun eine Partikularlösung $V(\tau)$ von (33). Dazu schreiben wir (8) um:

$$V(\tau)=-u_1(\tau)\int_0^\tau w(s)\,u_2(s)\,F(s)\,ds+u_2(\tau)\int_0^\tau w(s)\,u_1(s)\,F(s)\,ds. \tag{44}$$

Im Resonanzfall ist

$$\int_0^P w(s)\,u_1(s)\,F(s)\,ds=C_1\neq 0. \tag{45}$$

Wir bezeichnen

$$\int_0^P w(s)\,u_2(s)\,F(s)\,ds=\varepsilon. \tag{46}$$

Aus dem ersten Integral in (44) wird mit $0\leqslant\sigma<P$ vermöge (40)

$$\begin{aligned}\int_0^{mP+\sigma} w(s)\,u_2(s)\,F(s)\,ds&=\sum_{\nu=0}^{m-1}\int_0^P w(s)\,[u_2(s)+\nu\delta u_1(s)]\,F(s)\,ds+\\&+\int_0^\sigma w(s)\,[u_2(s)+m\delta u_1(s)]\,F(s)\,ds=\\&=m\varepsilon+\frac{m(m-1)}{2}\delta C_1+\int_0^\sigma w(s)\,[u_2(s)+m\delta u_1(s)]\,F(s)\,ds.\end{aligned}$$

Das zweite Integral in (44) wird

$$\int_0^{mP+\sigma} w(s)\, u_1(s)\, F(s)\, \mathrm{d}s = m\, C_1 + \int_0^{\sigma} w(s)\, u_1(s)\, F(s)\, \mathrm{d}s.$$

Setzt man beide in (44) ein, so erhält man

$$V(\sigma+mP) = -u_1(\sigma)\left\{ m\varepsilon + \frac{m(m-1)}{2}\,\delta\, C_1 + \int_0^{\sigma} w(s)\,[u_2(s)+m\delta\, u_1(s)]\, F(s)\, \mathrm{d}s\right\} +$$

$$+ [u_2(\sigma) + m\delta\, u_1(\sigma)]\left\{ m\, C_1 + \int_0^{\sigma} w(s)\, u_1(s)\, F(s)\, \mathrm{d}s\right\},$$

oder mit der neuen Partikularlösung von (33)

$$V_1(\tau) = V(\tau) + \frac{\varepsilon}{\delta}\, u_2(\tau) \tag{47}$$

bei Beachtung von (42)

$$V_1(\sigma + mP) = u_1(\sigma)\left\{ \frac{1}{2}\, C_1\, \delta\, m^2 + \frac{1}{2}\, C_1\, \delta m - \int_0^{\sigma} w(s)\, u_2(s)\, F(s)\, \mathrm{d}s\right\} +$$

$$+ u_2(\sigma)\left\{ C_1\, m + \int_0^{\sigma} w(s)\, u_1(s)\, F(s)\, \mathrm{d}s + \frac{\varepsilon}{\delta}\right\}. \tag{48}$$

Wir führen hier wieder

$$\tau = \sigma + mP, \quad m = \frac{\tau - \sigma}{P} \tag{49}$$

ein und ordnen nach Potenzen von τ/P; die Koeffizienten werden unter Beachtung von $R(0) = u_2(0)$ (nach (42)) für $0 \leqslant \sigma \leqslant P$:

$$\left(\frac{\tau}{P}\right)^2 \cdots \frac{1}{2}\, C_1\, \delta\, u_1(\sigma),$$

$$\frac{\tau}{P} \cdots g(\sigma) \equiv C_1\left\{\left(-\frac{\delta\sigma}{P} + \frac{1}{2}\,\delta\right) u_1(\sigma) + u_2(\sigma)\right\}, \tag{50}$$

$$(51)\quad \left(\frac{\tau}{P}\right)^0 \cdots h(\sigma) \equiv u_1(\sigma)\left\{\frac{1}{2}\,C_1\,\delta\left(\frac{\sigma}{P}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\delta\,C_1\frac{\sigma}{P} - \int_0^\sigma w(s)\,u_2(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s\right\} +$$
$$+\,u_2(\sigma)\left\{-\,C_1\frac{\sigma}{P} + \int_0^\sigma w(s)\,u_1(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\varepsilon}{\delta}\right\}.$$

Man bestätigt durch Rechnung, dass alle drei Koeffizienten für alle Werte von σ mit P periodisch sind. Etwas aufpassen muss man hier bei der Funktion $h(\sigma)$. Man erhält zunächst

$$h(\sigma+P) - h(\sigma) = u_1(\sigma)\left[-\int_\sigma^{\sigma+P} w(s)\,u_2(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s + \delta\int_0^\sigma w(s)\,u_1(s)\,F(s)\,\mathrm{d}s + \varepsilon\right].$$

Der Differentialquotient der eckigen Klammer nach σ ist

$$-\,w(\sigma)\,F(\sigma)\,[u_2(\sigma+P) - u_2(\sigma)] + \delta w(\sigma)\,u_1(\sigma)\,F(\sigma) = 0,$$

da die runde Klammer nach (38) den Wert $\delta u_1(\sigma)$ hat. Um den Wert der eckigen Klammer zu rechnen, kann man also $\sigma = 0$ setzen und erhält den Wert 0.

(48) geht nun über in

$$(52)\qquad V_1(\tau) = \frac{1}{2}C_1\,\delta\left(\frac{\tau}{P}\right)^2 u_1(\tau) + g(\tau)\frac{\tau}{P} + h(\tau).$$

Dem entspricht nach (31) folgende Partikularlösung von (1):

$$(53)\qquad Y_1(t) = \frac{1}{2}\,C_1\,\delta\left(\frac{t-t_1}{P}\right)^2 z_1(t) + g(t-t_1)\frac{t-t_1}{P} + h(t-t_1).$$

Hier hat man also einen in t quadratischen Faktor. Natürlich kann man (53) auch nach Potenzen von t ordnen. Der Koeffizient von t und das Absolutglied ändern sich dann nur um mit P periodische Summanden.

4. Der Ausnahmefall

Der Ausnahmefall (vgl. [1, §§ **1** und **5**]) liegt vor, wenn zwar (3) mit P periodische Lösungen besitzt, für alle diese aber (vgl. (10), bzw. (45))

$$(54)\qquad A_\nu = 0, \quad \text{bzw. } C_1 = 0$$

ist. In (15), (28) und (53) fallen dann die mit Potenzen von t/P, bzw. $(t-t_1)/P$ multiplizierten Ausdrücke fort, so dass mit P periodische Partikular-Lösungen von (1) übrig bleiben.

Eingegangen am 30 XII 1965

Technische Hochschule, Braunschweig, Deutsche Bundesrepublik

LITERATARVERZEICHNIS

1. Iglisch R., *Der Resonanzbegriff bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Arch. for Rat. Mech. a. Anal., 1959, 3, pp. 179—186.
2. Karim R. I. I. A., *Über den Resonanzbegriff bei Systemen linearer und nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Diss. Braunschweig, 1963, (insbesondere Teil IV: *Über den Resonanzfall bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung,* S. 67 ff).

CALCULUL EXPLICIT AL SOLUȚIEI ECUAȚIILOR LINIARE DIN MECANICA VIBRAȚIILOR ÎN CAZURILE DE REZONANȚĂ ȘI DE EXCEPȚIE

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei expusă într-o lucrare anterioară [1], determină soluția explicită a sistemului dife ențial (1), (2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 517.934

SUR LE NOMBRE DE RÉGIONS NODALES FERMÉES APPARTENANT À UN POINT SINGULIER MULTIPLE

PAR

JOSÉ ARGÉMI

1. Nombre de problèmes intéressant surtout la mécanique non linéaire, exposés lors des colloques ou conférences récents consacrés aux oscillations non linéaires [1], [2], utilisent des études relatives aux points singuliers multiples des espaces de phase [3], [4], [8].

Dans ce que suit l'Auteur, tout en utilisant les résultats propres établit dans sa Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [5], améliore un théorème de B e n d i x s o n [6] concernant le nombre de régions nodales fermées appartenant à un point singulier multiple de l'espace de phase, lorsque, dans le voisinage de ce point, la pente des trajectoires est équivalente au quotient de deux polynômes de même degré. On déduit de ce résultat que le degré des polynômes majore l'indice du point singulier.

2. Considérons un système différentiel du type suivant :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X_m + X_{m+1}, \quad \frac{dy}{dt} = Y_m + Y_{m+1},$$

où X_m et Y_m désignent des polynômes homogènes en x et y de degré m, premiers entre eux et X_{m+1}, Y_{m+1} désignent des séries de puissances ne contenant que des termes de degré supérieur à m et convergentes par exemple à l'intérieur d'un cercle centré à l'origine; supposons en outre que l'origine soit le seul point singulier de (1) contenu dans un disque intérieur à ce cercle.

Désignant par le nom de région nodale fermée appartenant à un point P, une région du plan où toutes les courbes intégrales sont des courbes fermées aboutissant à P pour $t = +\infty$ et pour $t = -\infty$, Bendixson a montré que le système (1) admettait au plus $2m$ régions nodales fermées appartenant à l'origine.

À l'aide de la substitution $y = \lambda x$, nous avons indiqué dans une Note précédente [7] que l'on pouvait ramener l'étude de (1) à celle d'un système auxiliaire d'un espace projectif, pourvu que l'équation $F(\lambda) = Y_m(1, \lambda) - \lambda X_m(1, \lambda) = 0$ ait au moins une racine réelle; ceci permet sans difficulté

une investigation détaillée des diverses structures topologiques des courbes intégrales de (1) dans le voisinage de l'origine.

Nous pouvons alors définir deux régions nodales fermées du plan (x, y) par l'existence dans le plan (x, λ), de deux noeuds consécutifs ou extrêmes situés sur l'axe λ. Cette définition est équivalente à celle de Bendixson.

λ_0 désignant une racine réelle de $F(\lambda) = 0$, on aura un noeud de coordonnées $x = 0$, $\lambda = \lambda_0$ si

$$X_m(1, \lambda_0) \left[\frac{dF}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0} > 0; \tag{2}$$

or, les coefficients des termes de plus haut degré des fonctions $X_m(1, \lambda)$ et $dF/d\lambda$ étant de signes nécessairement opposés, il est clair que (2) ne peut être vérifiée que pour au plus m racines de $F(\lambda) = 0$; on peut donc trouver au plus $2(m-1)$ régions nodales fermées du plan (x, y) appartenant à l'origine; ce résultat améliore par conséquent celui de Bendixson.

En outre, à l'aide de la formule de Bendixson [6] $c - n_f = 2(i+1)$, où c désigne le nombre de courbes intégrales de (1) qui traversent l'origine, n_f le nombre de régions nodales fermées et i l'indice du point singulier, on peut établir que $\sup |i| = m$, puisque c peut au plus être égal à $2m + 2$ (lorsque $n_f = 0$) et que $c = 0$ si $n_f = 2m - 2$.

Reçu le 14 VII 1965

Centre National de la Recherche Scientifique, Marseille, France

BIBLIOGRAPHIE

1. *** *Les vibrations forcées dans les systèmes non-linéaires.* Colloque International du CNRS, N° *148,* Paris, 1965,
2. *** III. *Konferenz über nichtlineare Schwingungen.* **I, II.** Bd., Akad.-Verlag, Berlin, 1965.
3. Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *3—4,* pp. 347—359.
4. Huaux A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4,* pp. 71—80.
5. Argémi J., C. r. Acad. Sci., Paris, 1965, **260**, pp. 2397—2398.
6. Bendixson I., Acta Math., 1901, **24**, pp. 189—205.
7. Argémi J., C. r. Acad. Sci., Paris, 1962, **254**, pp. 4135—4136.
8. Mangeron D,, Chaléat R., *Higher Order Approximation in the Study of the Disturbed Motion of Oscillators.* International Congress of Mathematicians, Moscow, 1966, Section 12: Appl. Math. a. Math. Phys., Abstracts, pp. 14—15.

ASUPRA NUMĂRULUI REGIUNILOR NODALE ÎNCHISE APARŢINÎND LA UN PUNCT SINGULAR MULTIPLU

(Rezumat)

Se aduc ameliorări unei teoreme clasice a lui Bendixson [6] în cazul punctelor singulare multiple din spaţiul de fază.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

ДК. 517.948.34

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

К. Б. БАРАТАЛИЕВ

1. В развитие общей теории уравнений с запаздывающим аргументом большой вклад внесли А. Д. Мышкис [1], [2], Л. Э. Эльсгольц [3], [4], А. Халанай [5], [6], Н. Н. Красовский [7], С. Н. Шиманов [8], С. Б. Норкин [9], Г. А. Каменский [10] и другие авторы.

В последние годы появился ряд статей Д. Манжерона и Л. Е. Кривошеина [11], [12], [15] посвященных интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных параболического и гиперболического типов с запаздывающими аргументами, в которых изучаются условия существования, единственности и устойчивости решений, априорные и апостериорные оценки, а также рассматриваются некоторые аспекты построения приближенных решений этих уравнений для граничных задач с начальными множествами. В частности приведены оценки погрешностей для построенных аппроксимативных процессов. Отметим, что дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами решаются в замкнутой форме лишь в простейших случаях. Поэтому построение их приближенных решений представляет несомненный интерес.

Ниже решается методом осреднения коэффициентов краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{j=0}^{p} A_j(t)\,x(\alpha_j(t)) = f(t) + \lambda \int_a^t \sum_{j=0}^{p} B_j(t,s)\,x(\alpha_j(s))\,ds \tag{1}$$

и дополнительными условиями

$$Rx \equiv Mx(a) + Nx(b) = \gamma, \tag{2}$$

причем для $t < a$ [9]

$$x(t) = \varphi(t)\,x(a), \tag{3}$$

где известные квадратные матрицы M, N и вектор γ —постоянны; $\varphi(t)$ —заданная на начальном множестве

$$E_a = \bigcup_{j=0}^{p} E_{aj}\{\alpha_j(t) \leqslant t;\ \alpha_j(t) \leqslant a;\ t \in [a, b]\} \tag{4}$$

непрерывная диагонально-матричная функция, причем $\varphi(a) = I$, (I—единичная матрица).

Предполагаются также непрерывными скалярные функции запаздывания $\alpha_j(t) \leqslant t$, $(i = 0, 1, ..., p)$, n-мерный вектор f, определенный на $[a, b]$, и матричные функции $A_j(t)$, $B_j(t, s)$ в области $G = \{a \leqslant t \leqslant b;\ a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\}$; λ —числовой параметр, отличный от собственных значений однородной краевой задачи (1)...(3) ($f = 0$; $\gamma = 0$). Пусть при $t \in [a, b]$

$$t - \alpha_j(t) \leqslant \Delta, \quad (j = 0, 1, ..., p;\ \Delta > 0;\ \alpha_0(t) \equiv t). \tag{5}$$

В диссертации автора [13] установлено, что задача (1)...(3) имеет единственное решение, если λ не является собственным значением специально построенной системы интегральных уравнений. Поэтому предполагая существование и единственность решения этой задачи обеспеченными, займемся построением ее приближенного решения методом осреднения коэффициентов. Этот метод расчитан на тот случай, когда при применении метода шагов получающиеся на каждом шаге интегро-дифференциальные уравнения без отклонений аргумента также не интегрируются в замкнутой форме.

2. Разобьем промежуток $[a, b]$ на m частей точками $a = t_0 < t_1 < ... \leqslant t_m = b$ таким образом, чтобы

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant m} |t_r - t_{r-1}| < \Delta \tag{6}$$

и рассмотрим на первом частичном промежутке $[a, t_1]$ аппроксимирующую систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{du_1(t)}{dt} + A_{01}u_1(t) + \sum_{j=1}^{p} A_j(t)u_1(\alpha_j(t)) = f(t) + \\ &+ \lambda \int_a^t B_0(t, s)u_1(s)\,ds + \lambda \int_a^t \sum_{j=1}^{p} B_j(t, s)u_1(\alpha_j(s))\,ds, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$A_{01} = (t_1 - a)^{-1} \int_a^{t_1} A_0(t)\,dt,$$

при условиях (2) и (3). Векторное уравнение (7), в силу (3) и (6), для $t \in [a, t_1]$ можно записать в виде

$$(8)\qquad \frac{du_1(t)}{dt} + A_{01}u_1(t) = f_1(t, \lambda, u_1(a)) + \lambda\int_a^t B_0(t, s)u_1(s)\,ds,$$

где

$$(9)\quad f_1(t, \lambda, u_1(a)) \equiv f(t) - u_1(a)\sum_{j=1}^{p}\left[A_j(t)\varphi(\alpha_j(t)) - \lambda\int_a^t B_j(t, s)\varphi(\alpha_j(s))ds\right].$$

Из (8) получаем

$$(10)\qquad u_1(t) = Z_1(t)C_1 + K(t, \lambda, u_1(a)) + \lambda\int_a^t K_1(t, s)u_1(s)\,ds,$$

где $Z_1(t)$ —фундаментальная матрица решений уравнения

$$\frac{du_1(t)}{dt} + A_{01}u_1(t) = 0;$$

$$K(t, \lambda, u_1(a)) = \int_a^t H_1(t, s)f_1(s, \lambda, u_1(a))ds; \quad H_1(t, s) = Z_1(t)Z_1^{-1}(s);$$

$$K_1(t, s) = \int_s^t H_1(t, \xi)B_0(\xi, s)\,d\xi;$$

постоянный n-мерный вектор C_1 является пока неизвестным.

Решение интегрального уравнения (10) запишем в виде

$$(11)\qquad u_1(t) = \varrho(t, \lambda) + \sigma(t, \lambda)C_1,$$

где $\varrho(t, \lambda)$ и $\sigma(t, \lambda)$ —известные функции.

Пусть теперь $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Опять осредняя каждый элемент матрицы $A_0(t)$ на $[t_1, t_2]$, т. е. полагая $A_{02} = (t_2 - t_1)^{-1}\int_{t_1}^{t_2} A_0(t)\,dt$, и продолжив начальное множество (4) на $[t_1, t_2]$:

$$(12)\qquad E_{t_1} = E_a \cup [a, t_1],$$

т. е.

$$(13)\qquad u_2(t) = u_1(t), \quad t \in E_{t_1},$$

получаем следующее уравнение:

$$\frac{du_2(t)}{dt} + A_{02}u_2(t) + \sum_{j=1}^{p} A_j(t)u_2(\alpha_j(t)) = f(t) +$$

$$(14) \qquad + \lambda \int_a^{t_1} \left[B_0(t,s)u_1(s) + C_1 \sum_{j=1}^{p} B_j(t,s)\varphi(\alpha_j(s)) \right] ds +$$

$$+ \lambda \int_{t_1}^{t} \left[B_0(t,s)u_2(s) + \sum_{j=1}^{p} B_j(t,s)u_2(\alpha_j(s)) \right] ds.$$

Запишем уравнение (14), в силу (5) и (11), в виде

$$(15) \qquad \frac{du_2(t)}{dt} + A_{02}u_2(t) = f_2(t, \lambda, C_1) + \lambda \int_{t_1}^{t} B_0(t,s)u_2(s)\,ds,$$

где

$$f_2(t, \lambda, C_1) \equiv f(t) + \lambda \int_a^{t_1} \left[B_0(t,s)u_1(s) + C_1 \sum_{j=1}^{p} B_j(t,s)\varphi(\alpha_j(s)) \right] ds -$$

$$(16) \qquad - \sum_{j=1}^{p} \left[A_j(t)u_1(\alpha_j(t)) - \lambda \int_{t_1}^{t} B_j(t,s)u_1(\alpha_j(s))\,ds \right].$$

Из (15) имеем

$$(17) \quad u_2(t) = Z_2(t)C_2 + \int_{t_1}^{t} Z_2(t)Z_2^{-1}(s) \left[f_2(s, \lambda, C_1) + \lambda \int_{t_1}^{s} B_0(s,\xi)u_2(\xi)\,d\xi \right] ds,$$

где $Z_2(t)$ —фундаментальная матрица решений уравнения $du_2(t)/dt + A_{01}u_2(t) = 0$, C_2 — подлежащий определению n-мерный постоянный вектор.

Запишем решение интегрального уравнения (17) в виде

$$(18) \qquad u_2(t) = \varrho_1(t, \lambda) + \sigma_1(t, \lambda)C_1 + \omega(t, \lambda)C_2.$$

Здесь ϱ_1, σ_1, ω — известные векторно-матричные функции.

Потребуем выполнения равенства $u_1(t_1) = u_2(t_1)$. Тогда из (11) и (18) получаем

$$\varrho(t_1, \lambda) + \sigma(t_1, \lambda)C_1 = \varrho_1(t_1, \lambda) + \sigma_1(t_1, \lambda)C_1 + \omega(t_1, \lambda)C_2.$$

Если матрица $\omega(t_1, \lambda)$ неособенная, то из последнего выражения найдем $C_2 = \beta(\lambda) + \beta_1(\lambda)C_1$. Вставляя последнее выражение в (18), имеем

$$u_2(t) = \varrho_2(t, \lambda) + \sigma_2(t, \lambda) C_1. \tag{19}$$

Продолжая этот процесс и далее, получим

$$u_m(t) = \varrho_m(t, \lambda) + \sigma_m(t, \lambda) C_1, \quad t_{m-1} \leqslant t \leqslant b. \tag{20}$$

Используя граничные условия (2),

$$Ru \equiv Mu_1(a) + Nu_m(b) = M[\varrho(a, \lambda) + \sigma(a, \lambda) C_1] + \\ + N[\varrho_m(b, \lambda) + \sigma_m(b, \lambda) C_1] = \gamma,$$

и считая, что матрица $M\sigma(a, \lambda) + N\sigma_m(b, \lambda)$ имеет обратную, находим

$$C_1 = [M\sigma(a, \lambda) + N\sigma_m(b, \lambda)]^{-1} [\gamma - M\varrho(a, \lambda) - N\varrho_m(b, \lambda)] \equiv h(\lambda).$$

Подставив теперь $h(\lambda)$ в $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots, u_m(t)$, мы полностью определим все элементы приближенного решения $u(t)$ задачи (1)...(3):

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t) h(\lambda), \; t \in E_a, \\ u_1(t), \; a \leqslant t \leqslant t_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_m(t), \; t_{m-1} \leqslant t \leqslant b. \end{cases} \tag{21}$$

3. Для оценки погрешности рассмотрим, кроме исходного уравнения (1), невязку $\xi(t, \lambda)$:

$$\frac{du(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{p} A_j(t) u(\alpha_j(t)) - f(t) - \lambda \int_a^t \sum_{j=1}^{p} B_j(t, s) u(\alpha_j(s)) \, ds \, d\xi \equiv \xi(t, \lambda). \tag{22}$$

Тогда разность $w(t) = u(t) - x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw(t)}{dt} + \sum_{j=0}^{p} A_j(t) w(\alpha_j(t)) - \lambda \int_a^t \sum_{j=0}^{p} B_j(t, s) w(\alpha_j(s)) ds = \xi(t, \lambda). \tag{23}$$

Отсюда

$$w(t) = C + \int_a^t \sum_{j=0}^{p} N_j(t, s, \lambda) w(\alpha_j(s)) ds + F(t, \lambda), \tag{24}$$

где

$$N_j(t, s, \lambda) = -A_j(s) + \lambda \int_s^t B_j(\xi, s) d\xi, \quad (j = 0, 1, \ldots, p); \quad F(t, \lambda) = \int_a^t \xi(s, \lambda) ds,$$

а C —неизвестный n-мерный постоянный вектор, определяемый из условия

$$Rw \equiv M[C+F(a,\lambda)]+N\left[C+\int_a^b\sum_{j=0}^{p}N_j(b,s,\lambda)w(\alpha_j(s))\,ds+F(b,\lambda)\right]=0.$$

В предположении, что матрица $M+N$ имеет обратную, находим

$$(25)\quad C=-[M+N]^{-1}\left\{[MF(a,\lambda)+NF(b,\lambda)+N\int_a^b\sum_{j=0}^{p}N_j(b,s,\lambda)w(\alpha_j(s))\,ds\right\}.$$

Учитывая в (24) выражение (25), приходим к интегральному уравнению

$$(26)\qquad w(t)=T(t,\lambda)+\sum_{j=0}^{p}\int_a^b M_j(t,s,\lambda)w(\alpha_j(s))\,ds,$$

где

$$T(t,\lambda)=-[M+N]^{-1}[MF(a,\lambda)+NF(b,\lambda)]+F(t,\lambda),$$

$$M_j(t,s,\lambda)=-[M+N]^{-1}NN_j(b,s,\lambda)+\bar{N}_j(t,s,\lambda),$$

$$\bar{N}_j(t,s,\lambda)\equiv\begin{cases}N_j(t,s,\lambda), & a\leqslant s\leqslant t,\\ 0, & t\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$

Приведем следующие способы оценки погрешности.

1°. Если учесть, что в области $a\leqslant t\leqslant b$, $\|w(\alpha_j)t)\|\leqslant\|w(t)\|$, $(j=0,1,\ldots,p)$, то

$$\|w(t)\|\leqslant\|T(t,\lambda)\|+\|w(t)\|\left\|\int_a^b\sum_{j=0}^{p}M_j(t,s,\lambda)\,ds\right\|,$$

где

$$\|T(t,\lambda)\|=\max_g|T(t,\lambda)|,\quad g=\{a\leqslant t\leqslant b,\quad\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2\},$$

$$\left\|\int_a^b\sum_{j=0}^{p}M_j(t,s,\lambda)\,ds\right\|=\max_g\int_a^b\sum_{j=0}^{p}|M_j(t,s,\lambda)|\,ds.$$

Поэтому, если

$$L=1-\left\|\int_a^b\sum_{j=0}^{p}M_j(t,s,\lambda)\,ds\right\|>0,$$

то $\|w(t)\|\leqslant L^{-1}\|T(t,\lambda)\|\equiv\mu$; следовательно

$$|w(t)|\leqslant|F(t,\lambda)|+\mu\sum_{j=0}^{p}\int_a^b|M_j(t,s,\lambda)|\,ds,\quad t,\lambda\in g.$$

2°. Воспользуемся методом прогонки [14] для оценки погрешности. Этот путь хотя и более громоздок, чем предыдущий, но позволяет в некоторой мере учитывать в погрешности индивидуальные запаздывания.

Пусть

$$L_0 = 1 - \left\| \int_a^b M_0(t, s, \lambda)\, ds \right\| > 0.$$

Тогда из (26) имеем

$$\| w(t) \| \leqslant L_0^{-1} \| T(t, \lambda) \| + L_0^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{p} \int_a^b M_j(t, s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\| \equiv$$

$$\equiv P_0 + Q_0 \left\| \sum_{j=1}^{p} \int_a^b M_j(t, s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\|. \tag{27}$$

При $t = \alpha_1(t)$ из (27) получим

$$\| w(\alpha_1(t)) \| \leqslant \| T(\alpha_1(t), \lambda) \| + \left\| \int_a^b M_0(\alpha_1(t), s, \lambda)\, ds \right\| \| w(t) \| +$$

$$+ \left\| \sum_{j=1}^{p} \int_a^b M_j(\alpha_1(t), s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\| \leqslant \| T(\alpha_1(t), \lambda) \| +$$

$$+ \left\| \sum_{j=1}^{p} \int_a^b M_j(\alpha_1(t), s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\|.$$

Поэтому, при выполнении условия

$$L_1 = 1 - \left\| \int_a^b M_0(\alpha_1(t), s, \lambda)\, ds \right\| \left\| \int_a^b M_1(\alpha_1(t), s, \lambda)\, ds \right\| Q - \left\| \int_a^b M_1(\alpha_1(t), s, \lambda)\, ds \right\| > 0$$

справедливо неравенство

$$\| w(\alpha_1(t)) \| \leqslant L_1^{-1} \| T(\alpha_1(t), \lambda) \| + L_1^{-1} \left\| \int_a^b M_0(\alpha_0(t), s, \lambda)\, ds \right\| P_0 +$$

$$+ \left\| \int_a^b M_0(\alpha_1(t), s, \lambda)\, ds \right\| Q_0 \left\| \sum_{j=2}^{p} \int_a^b M_j(\alpha_1(t), s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{j=2}^{p} \int_a^b M_j(\alpha_1(t), s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\| \equiv P_1 + Q_1 \left\| \sum_{j=2}^{p} \int_a^b M_j(\alpha_1(t), s, \lambda)\, w(\alpha_j(s))\, ds \right\|. \tag{28}$$

Если при $j = p - 1$ найдено

$$\|w(\alpha_{p-1}(t))\| \leqslant P_{p-1} + Q_{p-1}\left\|\int_a^b M(\alpha_{p-1}(t), s)\, w(\alpha_p(s))\,ds\right\|, \tag{29}$$

то, с помощью (27)...(29) из (26) получим

$$\|w(\alpha_p(t))\| \leqslant P_p + Q_p\left\|\int_a^b M_p(\alpha_p(t), s, \lambda)\, w(\alpha_p(s))\,ds\right\|,$$

где P_p, Q_p, M_p — известные. Следовательно, при выполнении неравенства

$$L_p = 1 - Q_p\left\|\int_a^b M_p(\alpha_p(t), s, \lambda)\,ds\right\| > 0 \tag{30}$$

имеем

$$\|w(\alpha_p(t))\| \leqslant L_p^{-1} P_p. \tag{31}$$

Осуществляя обратный ход, последовательно, определяем

$$\|w(\alpha_{p-1}(t))\|,\ \|w(\alpha_{p-2}(t))\|,\ldots,\|w(\alpha_1(t))\|,\ \|w(t)\|.$$

4. Выше мы видели, что с помощью разбиения (6) промежутка $[a, b]$ можно свести задачу нахождения приближенного решения матричного уравнения (1) при дополнительных условиях (2), (3) к решению той же задачи, но только с постоянными матричными коэффициентами и без запаздывания аргументов:

$$\frac{du_r(t)}{dt} + A_{0r}u_r(t) - \lambda\int_{t_r}^{t} B_0(t, s)\,u_r(s)\,ds - f_r(t, \lambda) = 0. \tag{32}$$

Заметим, что разбиение (6) вместе с процессом осреднения элементов матрицы $A_0(t)$, т. е. $A_{0r} = (t_r - t_{r-1})^{-1}\int_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(t)\,dt$, определяет m новых точек $t_r^* \in [t_{r-1}, t_r]$, $(r = 1, 2,\ldots, m)$, при которых в силу теоремы о среднем значении интеграла имеют место равенства $A_{0r} = A_0(t_r^*)$ и поэтому (32) эквивалентно уравнению

$$\frac{du_r(t)}{dt} + A_0(t_r^*)u_r(t) - \lambda\int_{t_r}^{t} B_0(t, s)\,u_r(s)\,ds - f_r(t, \lambda) = 0.$$

Следовательно, вышеопределенные фундаментальные матрицы решений $Z_r(t)$, $(r = 1, 2, ..., m)$, являются фактически фундаментальными матрицами решений уравнений

$$\frac{du_r(t)}{dt} + A_0(t_r^*)u_r(t) = 0, \quad (r = 1, 2, ..., m).$$

Матрицы $Z_r(t)$ будем связывать друг с другом следующим образом:

$$\Phi_1(t) = Z_1(t),$$

$$\Phi_2(t) = Z_2(t)\,[Z_2(t_1^*)]^{-1}\Phi_1(t_1^*) \equiv Z_2(t)\,[Z_2(t_1^*)]^{-1}Z_1(t_1^*),$$

и т. д.

$$\Phi_r(t) = Z_r(t)\,[Z_r(t_{r-1}^*)]^{-1}\Phi_{r-1}(t_{r-1}^*) =$$

$$= Z_r(t)\,[Z_r(t_{r-1}^*)]^{-1}Z_{r-1}(t_{r-1}^*)\,[Z_{r-1}(t_{r-2}^*)]^{-1} \ldots Z_2(t_2)\,[Z_2(t_1^*)]^{-1}Z_1(t_1^*).$$

Из хода построения $\Phi_r(t)$, $(r = 1, 2, ..., m)$, следует, что они являются фундаментальными матрицами решений уравнений

$$\frac{du_r(t)}{dt} + A_0(t_r^*)u_r(t) = 0, \quad (r = 1, 2, ..., m).$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ (\Delta\to 0)}} \Phi_r(t) = \Phi(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad (r = 1, 2, ..., m),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $dx(t)/dt + A_0(t)x(t) = 0$. Действительно, при достаточно малом Δ разность $A_0(t_r^*) - A_0(t)$, $(t_r^* \in [t_{r-1}, t_r])$, можно сделать по абсолютной величине меньше любого числа $\varepsilon > 0$. Тогда из соотношения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + A_0(t_r^*)\Phi(t) = [A_0(t_r^*) - A_0(t)]\,\Phi(t)$$

имеем для $t \in [t_{r-1}, t_r]$

$$\left|\frac{d\Phi(t)}{dt} + A_0(t_r^*)\Phi(t)\right| = |[A_0(t_r^*) - A_0(t)]\,\Phi(t)| \leqslant \varepsilon_r \|\Phi\|.$$

Рассматривая скалярное уравнение

$$\frac{d\delta(t)}{dt} + \|A_0(t)\|\,\delta(t) = \varepsilon\|\Phi\|, \quad \varepsilon = \sup_{1\leqslant r\leqslant m} \varepsilon_r, \tag{33}$$

при условии $\delta(a) = 0$, заметим, что $\|\Phi - \Phi_r\| \leqslant \delta(t)$. Тогда из (33) найдем

$$(34)\qquad \delta(t) \leqslant \varepsilon \|\Phi\| \exp[-\|A_0(t)\|(t-a)] \int_a^t \exp[\|A_0(t)\|(s-a)]\, ds.$$

Так как на $[a, b]$, $\|\Phi\|$ — величина ограниченная, то последнее соотношение показывает, что разность $\|\Phi - \Phi_\tau\|$ можно сделать как угодно малой при достаточно малом Δ. Выражение (34) может служить также оценкой уклонения приближенной фундаментальной матрицы от точной.

Этим самым доказана сходимость рассматриваемого процесса.

Поступила 23 VII 1965 з.

Киргизский государственный университет, Фрунзе, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* Гостехиздат М., 1951.
2. — УМН, 1949, **4**, *5*, стр. 99—141.
3. Эльсгольц Л. Э., *Качественные методы в математическом анализе.* Гостехиздат, М., 1955.
4. — *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* Наука, М., 1964.
5. Halanay A., Rev. de math. pures et appl., Acad. R.P.R., 1961, **6**, *4*, стр. 633—653.
6. — Тр. межд. симп. по нелинейным колебаниям, Киев, Изд. АН УССР, 1963, **II**, стр. 394—408.
7. Красовский Н. Н., *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* Физматгиз, М., 1959.
8. Шиманов С. Н., ПММ, 1963, **27**, *3*, стр. 450—458.
9. Норкин С. Б., *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом*, Наука, М., 1965.
10. Каменский Г. А., Учен. зап. МГУ, *165*, Матем., *8*, стр. 83—89.
11. Mangeron D., Krivošein, Rend. sem. Mat. Univ. Padova, 1965, **XXXV**, pp. 1—24.
12. — Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 8, **38** (5), 1965, pp. 614—620.
13. Бараталиев К. Б., *Приближенное решение некоторых задач для интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Канд. диссерт., Фрунзе, 1965.
14. Кривошеин Л. Е., Тр. фрунзенск. полит. ин-та, Сер. мат. и мех., *21*, стр. 104—117.
15. Oğuztöreli M. N., *New Results concerned with Time-Lag Control Systems.* Academic Press, New York, (in print).

REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A PROBLEMEI DE CONTUR PENTRU SISTEME DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare o serie de lucrări recente consacrate studiilor ecuaţiilor integro-diferenţiale cu argument întîrziat, elaborate de D. Mangeron şi L. E. Krivoşein [11], [12] şi folosite apoi de alţi numeroşi autori, ca, de ex., M. N. Oğuztöreli [15], utilizează metoda mediatizării coeficienţilor şi soluţionează problema la limită pentru sistemul (1) de ecuaţii integro-diferenţiale cu coeficienţi variabili şi argumente întîrziate, cu condiţiile suplimentare (2), (3), în care M şi N sînt matrici pătratice cunoscute, γ — un vector constant, $\varphi(t)$ — o funcţie matrice-diagonală continuă, dată pe mulţimea iniţială (4).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 517.56

NUOVE CLASSI DI FUNZIONI SPETTANTI AI SISTEMI FUNZIONALI ALLE DERIVATE TOTALI

NOTA I
FUNZIONI IPERGEOMETRICHE GENERALIZZATE

DI

LIVIU CIOBANU, FLORIN POTERAŞ, ARSENIE OPREA, MALCA BERCOVICI ed ANA TRIANDAF

Estratto dalla communicazione, presentata entro la sessione scientifica giubilare dell'Instituto Politecnico di Iaşi, 9—11 novembre 1962

1. La serie di lavori di vasta portata inaugurati in questo *Bollettino* dall'Illustre accademico linceo Mauro Picone ed il Prof. D. Mangeron [1]...[3] [1]) relativa al computo, nel quadro della Matematica costruttiva, delle soluzioni delle equazioni della Fisica Matematica tramite l'utilizzazione delle derivate totali [4], [5], [16], coadiuvata con le applicazioni odierne vieppiù crescenti di vari classi di funzioni speciali nuove e classiche in tutti i rami della scienza, incominciando con quella delle costruzioni [6] e l'Elastomeccanica [7] e terminando coi nuovi modelli dei medi continui [8], ha condotto gli autori ad uno studio assai sviluppato, contenente in parte anche molti risultati formali, di nuove classi di funzioni spettanti sopratutto ai vari equazioni polivibranti [2]).

In questa nostra Nota assai corta, che ne costituisce in un certo senso la continuazione della nostra precedente [12], si espongono alcuni risultati relativi alle funzioni ipergeometriche generalizzate.

2. Nell'ambito dell'insieme di problemi spettanti alle equazioni polivibranti, coadiuvati poscià con operatori di rimanenza ed argomenti ritardati [3], di cui il prototipo è dato dal problema al contorno

$$\text{(a)} \qquad [A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda [B(x)u' + C(x)u] = 0, \quad u_{\Gamma_t R} = 0, \qquad x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

[1]) Quest'ultima è stata aggiunta durante la correzione delle bozze. Anche gli altri dati bibliografici sono stati aggiornati.

[2]) Tali equazioni, caratterizzate dalla presenza sistematica degli operatori di derivate totali, sono state chiamate da vari scienziati „equazioni di Mangeron" [9]...[11].

il di cui novità consta nel fatto che il dominio R è — nel caso inizialmente studiato — un „rettangolo" ad m dimensioni $R = R(x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**})$, mentre col simbolo $'$ si è designata la derivata totale prima nel senso di Picone della funzione u

$$u' \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_m}, \tag{b}$$

consideriamo il problema della determinazione delle funzioni ipergeometriche generalizzate spettanti all'equazione

$$\theta(1-\theta)\,u'' + \{\gamma^m - [(\alpha+\beta)^m + 1]\,\theta\}\,u' - (\alpha\beta)^m u = 0, \tag{1}$$

ove è stato posto

$$\theta \equiv x_1 x_2 \ldots x_m. \tag{2}$$

Le soluzioni particolari dell'equazione (1), che ne costituiscono le serie ipergeometriche generalizzate ricercate si presentato sotto la forma

$$u = u_1 = F_m(\alpha, \beta, \gamma; \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha, \beta)_k}{(k!)^m (\gamma)_k} \theta^k, \quad |\theta| < 1, \ \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{3}$$

e

$$u = u_2 = \theta^{1+(-1)^{1/m}\gamma} F_m^*(\alpha, \beta, \gamma; \theta) = \theta^{1+(-1)^{1/m}\gamma} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{[1+(-1)^{1/m}\gamma]^m(-1)^{1/m}\gamma + [(\alpha+\beta)^m+1][1+(-1)^{1/m}\gamma]^m + (\alpha\beta)^m\}_k}{[2+(-1)^{1/m}\gamma]_k \{[1+(-1)^{1/m}\gamma]^m + \gamma^m\}_k} \theta^k, \tag{4}$$

$$\gamma \neq 2, 3, 4, \ldots, \ |\theta| < 1,$$

ove si sono introdotte le seguenti notazioni

$$\begin{cases} (\alpha, \beta)_k = \prod_{k=1}^{k} \{(k-1)^m (k-2)^m + [(\alpha+\beta)^m + 1](k-1)^m + (\alpha\beta)^m\}, \ (\alpha, \beta)_0 = 1, \\ (\gamma)_k = \prod_{k=1}^{k} \{(k-1)^m + \gamma^m\}, \ (\gamma)_0 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

3. In un'altra Nota si esporranno alcuni teoremi che ne costituiscono l'estensione degli enunciati classici spettanti alle varie classi di polinomi, incominciando con quelli di Legendre [13]...[15] e si daranno vari classi di funzioni speciali spettanti alle equazioni polivibranti d'ordine superiore, prendendo le mosse in un primo tempo dai modelli formali già studiati per le equazioni con una sola variabile reale o complessa.

Nota riveduta pervenuta il 23 VIII 1966

Istituto Politecnico, Iaşi,
Cattedra di Matematica I,
Cattedra di Matematica II,
Cattedra di Statica delle Costruzioni

BIBLIOGRAFIA

1. Picone M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1948, **III**, *1*, pp. 78—86.
2. Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 73—76.
3. Picone M., Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII, (XVII)**, *1—2*, pp.
4. Mangeron D., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1965, s. VIII, **XXXIX**, *1—2*, pp. 22—28.
5. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 17—20.
6. Beleş A., Soare M., *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii*. Ed. Acad. R. P. R., Bucureşti, 1964.
7. Коваленко А. Д., Прикл. Мех., 1966, **11**, *8*, стр. 19—31.
8. * * * Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, General lectures. Springer-Verlag, 1966.
9. Rossi F. S., Bul. Inst. polit, Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, pp. 39—42.
10. Oğuztöreli M. N., *Methods in Control Systems Studies*. Academic Press, New York, (in print).
11. Kamytov T., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1964, s. VIII, **XXXVII**, *5*, pp. 242—245.
12. Ciobanu L. e collab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 315—318.
13. Szegö G., *Orthogonal Polynomials*. American Math. Soc., N. Y., 1959.
14. Meinardus G., *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. Springer-Verlag, 1964.
15. Neema L. N., Mathematica Japonicae, 1966, **11**, *1*, pp. 1—4.
16. Mangeron D., *Dynamic Programming of the Boundary Value Problems related with Integro-differential Equations containing Polyvibrating Operators*. International Congress of Mathematicians, Moscow, 1966, Abstracts, Section 13: Mathematical Problems of Control Systems, pp. 36—37.

NOI CLASE DE FUNCŢII DERIVATE DIN SISTEME FUNCŢIONALE CU DERIVATE TOTALE

Nota I

Funcţii hipergeometrice generalizate

(Rezumat)

Autorii, luînd la bază lucrările [1]...[3], continuă Nota precedentă proprie [12], stabilind unele rezultate referitoare la tematica enunţată în titlu (formulele (1)...(5)).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 517.949.22 ; 621—52

STUDIES CONCERNED WITH TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

I. SYSTEMS DESCRIBED BY DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS

BY

M. N. OĞUZTÖRELI

1. In a very recent author's book devoted to *Studies on Control Systems* [1] the author has had due mention and use of a large set of valuable R. Bellman, R. Conti, D. Mangeron, E. Roxin and their pupil's papers, some of their being published in this *Bulletin* [2]...[4].

In a set of the author's previous papers [5], [6], various subjects related with time optimal control problems and relay type control systems with retardation and switching delay was considered. Following step by step our reasonings concerned with optimal pursuit strategy processes with retarded control systems [7], we investigate here an optimal pursuit problem for systems described by linear differential-difference equations (8) with retarded argument, the control functions and the initial conditions being allowed to vary in given closed compact and convex sets.

2. We consider two control systems X and Z, given, in the n-dimensional phase-space, by linear differential-difference equations with retarded argument of the form

$$x'(t+c_m) + \sum_{i=0}^{m} A_i(t)\, x(t+c_i) = A(t)\, u(t), \tag{1}$$

and

$$z'(t+d_k) + \sum_{j=0}^{k} B_j(t)\, z(t+d_j) = B(t)\, v(t), \tag{2}$$

where t is a real variable (time), $' \equiv \dfrac{d}{dt}$, c_i and d_j, $(i = 0, 1,..., m;\ j = 0, 1,..., k)$, are given constants such that

$$0 = c_0 < c_1 < ... < c_m \text{ and } 0 = d_0 < d_1 < ... < d_k, \tag{3}$$

$A_i(t)$ and $B_j(t)$, $(i = 0, 1,..., m;\ j = 0, 1,..., k)$, are given $n \times n$ continuous matrix functions, $A(t)$ is a given continuous $n \times r$ matrix function, $B(t)$

is a given continuous $n \times s$ matrix function, $x(t)$ and $z(t)$ are n-dimensional vectors which describe the states of the control systems X and Z, respectively, at time t, $u(t)$ is an s-dimensional vector function controlling the motion of the system X and $v(t)$ is an s-dimensional vector function controlling the motion of system Z. The components of u and v will be denoted by $u_1, \ldots, u_r$ and $v_1, \ldots, v_s$, respectively.

Let U be a set of r-dimensional vector functions $u(t)$ piecewise continuous on each finite interval $[t_0, t]$ and V be a set of s-dimensional vector functions $v(t)$ piecewise continuous on each finite interval $[t_0^*, t]$; U and V are the „control regions" for the systems X and Z respectively. We shall suppose the U and V are closed, compact, bounded, convex and contain the origin. Vector functions $u(t)$, defined in U, and vector functions $v(t)$, defined in V, will be called *admissible control functions* for the systems X and Z respectively.

Let Φ be a closed, compact, bounded and convex subset of the set of all real-valued n-dimensional vectors functions $\varphi(t)$, continuous in the *initial interval* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + c_m$ and having the property

$$\varphi(t_0) = x_0, \tag{4}$$

where x_0 is given. The elements of the set Φ will be called *admissible initial conditions for the system X.*

Similarly, we shall denote by Ψ a compact, closed, bounded and convex subset of all real-valued n-dimensional vector functions $\psi(t)$, continuous in the *initial interval* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_0^* + d_k$ and having the property

$$\psi(t_0) = z_0, \tag{5}$$

where z_0 is given. Functions $\psi(t)$ which belong to the set Ψ will be called *admissible initial conditions for the system Z.*

A solution $x(t)$ of the system (1) which satisfies the *initial condition*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + c_m, \quad \varphi \in \Phi, \tag{6}$$

obviously depends on the choice of functions $u(t)$ and $\varphi(t)$. To indicate this relationship we shall denote by $x(t, \varphi, u)$ the solution of (1) satisfying the initial condition (6) with the selected control function $u = u(t)$. It is well known [8] that there is a unique continuous solution of (1) for $t \geqslant t_0$ which satisfies the initial condition (6).

A continuous solution $z(t)$ of the system (2), with the selected control function $v = v(t)$, which satisfies the initial condition

$$z(t) = \psi(t), \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_0^* + d_k, \quad \psi \in \Psi, \tag{7}$$

will be denoted, as above, by $z(t, \psi, v)$.

The system X will be called the *pursuing system* and the system Z the *pursued system*[1]).

For an arbitrary admissible control $v(t)$ and arbitrary admissible initial condition $\psi(t)$ let us assume that there exists an admissible pair $u(t)$ and $\varphi(t)$ such that the trajectories $x(t, \varphi, u)$ and $z(t, \psi, v)$ of (1) and (2) corresponding to the controls u, v and initial conditions φ, ψ, respectively, satisfy the equation

$$x(T, \varphi, u) = z(T, \psi, v) \tag{8}$$

for some

$$T > \max[t_0 + c_m, t_0^* + d_k] \tag{9}$$

and

$$x(t, \varphi, u) \neq z(t, \psi, v), \quad t < T. \tag{10}$$

The quantity T depends on the chosen controls $u(t)$ and $v(t)$ and the chosen initial conditions $\varphi(t)$ and $\psi(t)$; therefore we may write $T = T(u, \varphi; v, \psi)$. This time T will be called the *pursuit time.*

If an admissible pair $v(t)$ and $\psi(t)$ for the pursued system Z is chosen, the pursuing system X should be controlled in such a manner that the corresponding pursuit time $T(u, \varphi; v, \psi)$ will assume its minimal value. Denote it by

$$T_{v,\psi} = \min_{u \in U,\, \varphi \in \Phi} T(u, \varphi; v, \psi). \tag{11}$$

The system Z should choose an admissible pair $v(t)$, $\psi(t)$ which maximizes the quantity $T_{v,\psi}$. This maximum will be denoted by

$$T^0 = \max_{v \in V,\, \psi \in \Psi} \min_{u \in U,\, \varphi \in \Phi} T(u, \varphi; v, \psi). \tag{12}$$

In the present paper, we wish to investigate the following optimization problem.

Find the admissible controls $u(t) \in U$, $v(t) \in V$ and the admissible initial conditions $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ for which the corresponding pursuit time $T(u, \varphi; v, \psi)$ satisfies

$$T(u, \varphi; v, \psi) = T^0. \tag{13}$$

The above problem for systems X and Z involving no time delay has recently been considered by Kelendzheridze [12]. His main objective is Pontryagin's maximum principle. We shall follow here a method

[1]) The author considers very important to underline here the large significance both from physical and mathematical standpoints of the quite recent R. Isaacs and L. S. Pontryagin [9], [20] research works devoted to *differential games,* just reviewed by D. Mangeron in this *Bulletin* [11].

which is a synthesis of that used by Kelendzheridze and another developed by LaSalle [13] and Neustadt [14]. This method has been used recently by the author [6] for a time optimal control problem with time delay.

We shall generally assume, as mentioned above, that the sets U and V are bounded, closed, compact, convex and contain the origin as an interior point. Particularly, we shall consider the case in which U and V consist of piecewise continuous vector functions such that

$$U:\{|u_i(t)|\leqslant 1,\ i=1,2,...,r\},\quad V:\{|v_j(t)|\leqslant 1,\ j=1,2,...,s\}. \tag{14}$$

We shall generally suppose that the sets Φ and Ψ of continuous initial conditions are closed, compact, convex and contain the origin as an interior point. Only in one of the next papers shall we consider a special case in which the sets Φ and Ψ will consist of piecewise continuous functions such that

$$\begin{cases} \Phi:\{|\varphi_i(t)|\leqslant 1, & t_0\leqslant t\leqslant t_0+c_m,\quad i=1,2,...,n\},\\ \Psi:\{|\psi_i(t)|\leqslant 1, & t_0^*\leqslant t\leqslant t_0^*+d_k,\quad i=1,2,...,n\}. \end{cases} \tag{15}$$

Note that, if the retardations c_i and d_i in (1) and (2) all approach zero, our optimization problem reduces to the problem which is considered by Kelendzheridze.

3. Let $V(s,t)$ and $W(s,t)$ be Bellman-Cooke kernel matrices [8] of the systems (1) and (2) respectively, and $H(s,t)$ and $K(s,t)$ be the kernel matrices, introduced by the author in [6], of the homogeneous systems

$$x'(t+c_m)+\sum_{i=0}^{m}A_i(t)\,x(t+c_i)=0, \tag{16}$$

and

$$z'(t+d_k)+\sum_{j=0}^{k}B_j(t)\,z(t+d_j)=0, \tag{17}$$

which correspond to (1) and (2) respectively.

Consider now the functionals

$$\Omega(t,\varphi,u)=\int_a^b H(s,t)\,\varphi(s)\,ds+\int_a^t V(s,t)\,A(s)\,u(s)\,ds \tag{18}$$

and

$$\Theta(t,\psi,v)=\int_c^d K(s,t)\,\psi(s)\,ds+\int_c^t W(s,t)\,B(s)\,v(s)\,ds, \tag{19}$$

where

$$a=t_0,\quad b=t_0+c_m,\quad c=t_0^*,\quad d=t_0^*+d_k. \tag{20}$$

As is shown in [6], we have the following representations of the solutions $x(t, \varphi, u)$ and $z(t, \psi, v)$:

$$x(t, \varphi, u) = \Omega^*(t, \varphi, u), \quad z(t, \psi, v) = \Theta^*(t, \psi, v), \tag{21}$$

where

$$\Omega^*(t, \varphi, u) = \Omega(t - c_m, \varphi, u), \quad \Theta^*(t) = \Theta(t - d_k, \psi, v). \tag{22}$$

From (8) and (21) we can write

$$\Omega^*(T, \varphi, u) = \Theta^*(T, \psi, v), \tag{23}$$

where T is the pursuit time, defined in [2]. Obviously, $T = T(u, \varphi; v, \psi)$. By its definition, T is single-valued.

Consider now the sets

$$C(t) = \{\Omega^*(t, \varphi, u); \varphi \in \Phi, u \in U\}, \tag{24}$$

and

$$E(t) = \{\Theta^*(t, \psi, v); \psi \in \Psi, v \in V\}. \tag{25}$$

In the remainder of the discussion, we shall need the following properties of the sets $C(t)$ and $E(t)$, proved in [6].

(I) *$C(t)$ and $E(t)$ are compact and convex.*

(II) *If $\widetilde{U}$ and $\widetilde{V}$ are the sets of all bang-bang control functions, and if U and V are defined by* (14), *then*

$$C(t) = \{\Omega^*(t, \varphi, \widetilde{u}), \varphi \in \Phi, \widetilde{u} \in \widetilde{U}\}, \quad E(t) = \{\Theta^*(t, \varphi, \widetilde{v}), \psi \in \Psi, \widetilde{v} \in \widetilde{V}\}.$$

(III) *If Ω is an interior point of $C(t)$, then there exists an $\varepsilon > 0$ such than $N_\varepsilon(\Omega) \subset C(\tau)$ for all τ in $(t - \varepsilon, t]$, where $N_\varepsilon(\Omega)$ is a neighborhood of Ω of radius ε.*

4. We shall prove now the following existence of optimal strategies theorem, which is an extension of that due to Kelendzheridze [12], [15]:

Theorem 1. *If for an arbitrary admissible pair $v(t)$ and $\psi(t)$ there exists an admissible pair $u(t)$ and $\varphi(t)$, such that $x(t, \varphi, u) = z(t, \psi, v)$, then there exist two pairs of functions $u^0 \in U$, $\varphi^0 \in \Phi$ and $v^0 \in V$, $\psi^0 \in \Psi$, which are optimals, that is,*

$$T^0 = T(u^0, \varphi^0; v^0, \psi^0),$$

where T^0 is defined by (2).

Proof. By hypothesis the set

$$\Gamma = \{T, x(T, \varphi, u) = z(T, \psi, v); u \in U, v \in V, \varphi \in \Phi, \psi \in \Psi\} \tag{26}$$

is not empty.

Let us choose arbitrarily an admissible pair $v^\star(t) \in V$, $\psi^\star(t) \in \Psi$, and consider the following subset of Γ

$$\Gamma^\star = \{T^\star = T(u, \varphi; v^\star, \psi^\star);\ u \in U,\ \varphi \in \Phi,\ T \in \Gamma\}. \tag{27}$$

By hypothesis $\Gamma^\star$ is not empty.

Let $T_{v^\star,\psi^\star}$ be the greatest lower bound of all $T^\star \in \Gamma^\star$,

$$T_{v^\star,\psi^\star} = \inf_{u\in U,\,\varphi\in\Phi} T(u, \varphi; v^\star, \psi^\star). \tag{28}$$

By definition, we have $\Omega^\star(T^\star, \varphi, u) = \Theta^\star(T^\star, \psi^\star, v^\star) \in C(T^\star)$, $T^\star \in \Gamma^\star$. Let the sequence $T^\star \in \Gamma^\star$, $i = 1, 2, \ldots$, be selected so that

$$\lim_{i\to\infty} T_i^\star = T_{v^\star,\psi^\star}.$$

Consider now the sequence $\{\Omega^\star(T_i^\star, \varphi^i, u^i)\}$, $\{\Omega^\star(T_{v^\star,\psi^\star}, \varphi^i, u^i)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, where $\varphi^i = \varphi^i(t)$ and $u^i = u^i(t)$ are admissible. As shown in [6], for $T_i^\star - T_{v^\star,\psi^\star} < \delta$, we have $\| \Omega^\star(T_i^\star, \varphi^i, u^i) - \Omega^\star(T_{v^\star,\psi^\star}, \varphi^i, u^i) \| < \varepsilon$, where ε is an arbitrarily small positive number and

$$\delta = \min\left[\frac{\varepsilon}{3m_1 m_2},\ \frac{\varepsilon}{3c_m m_1 m_3}\right],$$

where

$$m_1 = \max_{a\leqslant s\leqslant t} \| V(s,t) A(s) \|,\quad m_2 = \sup_{u\in U,\, t\geqslant t_0} \| u \|,\quad m_3 = \sup_{\varphi\in\Phi} \| \varphi \|,$$

the norm being defined as follows

$$\| \alpha \| = \begin{cases} \max\{|\alpha_i|\},\ i = 1,\ldots,\lambda, \text{ if } \alpha \text{ is a } \lambda\text{-vector with components } \alpha_i, \\ \max\{|\alpha_{ij}|\},\ i = 1,\ldots,\mu;\ j = 1,\ldots,\nu, \text{ if } \alpha \text{ is a } \mu\times\nu \text{ matrix with elements } \alpha_{ij}. \end{cases} \tag{29}$$

In the definition of m_1 and m_2 we suppose that t is sufficiently large.

Since the set $C(T_{v^\star,\psi^\star})$ is closed and compact, we can extract subsequences

$$\{\varphi^{i_k}(t)\},\ \{u^{i_k}(t)\},\quad k = 1, 2, \ldots,$$

from the sequences $\{\varphi^i(t)\}$ and $\{u^i(t)\}$ so that they converge to the functions $\varphi^0(t) \in \Phi$ and $u^0(t) \in U$ respectively. Therefore

$$\Theta^\star(T_{v^\star,\psi^\star}, \psi^\star, v^\star) = \Omega^\star(T_{v^\star,\psi^\star}, \varphi^0, u^0) \in C(T_{v^\star,\psi^\star}), \tag{30}$$

where $T_{v^\star,\psi^\star}$ is defined by (28), $v^\star \in V$, $\psi^\star \in \Psi$ being selected arbitrarily so that $T^\star = T(u, \varphi; v^\star, \psi^\star) \in \Gamma^\star$. Obviously $T_{v^\star,\psi^\star} = T(u^0, \varphi^0, v^\star, \psi^\star)$.

Consider now the set

$$\Gamma^0 = \{T_{v,\psi};\ v \in V,\ \psi \in \Psi\}. \tag{31}$$

Let T^0 be the least upper bound of all $T_{v,\psi} \in \Gamma^0$,

$$T^0 = \sup_{v\in V,\ \psi\in\Psi} T(u^0, \varphi^0; v, \psi) = \sup_{v\in V,\ \psi\in\Psi} T_{v,\psi}, \tag{32}$$

which is equal to T^0 defined by (12). This optimal time T^0 may be finite or infinite according as the set Γ^0 is bounded or unbounded.

Consider first the case in which T^0 is finite. Let the sequence $T_j^0 \in \Gamma^0, j = 1, 2,...,$ be selected so that

$$\lim_{j\to\infty} T_j^0 = T^0.$$

Consider the sequence $\{\Theta^*(T_j^0, \psi^j, v^j)\}$, $\{\Theta^*(T^0, \psi^j, v^j)\}$, $j = 1, 2,...,$ where $v^j = v^j(t)$ and $\psi^j = \psi^j(t)$ are admissible. If

$$m_4 = \max_{c\le s\le t} \| W(s,t)\, B(s) \|,\quad m_5 = \sup_{v\in V,\ t\ge c} \| v \|,\quad m_6 = \sup_{\psi\in\Psi} \| \psi \|,$$

t sufficiently large, we may easily show that, for

$$T^0 - T_j^0 < \min\left[\frac{\varepsilon}{3m_4\, m_5},\ \frac{\varepsilon}{3d_k\, m_5\, m_6}\right],$$

we have $\| \Theta^*(T^0, \psi^j, v^j) - \Theta^*(T_j^0, \psi^j, v^j) \| < \varepsilon$ is an arbitrarily small positive number. Since the set $E(T^0)$ is compact and closed, we can extract subsequences $\{\psi^{j_k}(t)\}$, $\{v^{j_k}(t)\}$, $k = 1, 2,...,$ from the sequences $\{\psi^j(t)\}$ and $\{v^j(t)\}$ so that they converge to the functions $\psi^0(t) \in \Psi$ and $v^0(t) \in V$ respectively. Therefore,

$$T^0 = T(u^0, \varphi^0; v^0, \psi^0) \tag{33}$$

and

$$\Omega^*(T^0, \varphi^0, u^0) = \Theta^*(T^0, \psi^0, v^0) \in E(T^0). \tag{34}$$

Consider now the case $T^0 = \infty$. Let the sequence $T_k^0 \in \Gamma, k = 1, 2,...,$ be so chosen that

$$T_{k\to\infty}^0 \to \infty \text{ monotonically.}$$

Since $T_k^0 \in \Gamma^0$, we have

$$\Theta^*(T_k^0, v, \psi) = \Omega^*(T_k^0, \varphi^0, u^0),\quad k = 1, 2,..., \tag{35}$$

for some $v \in V, \psi \in \Psi$, for each k. Let us select an admissible pair $v^k(t)$, $\psi^k(t)$, which satisfies (35). Therefore

$$T_k^0 = T(u^0, \varphi^0; v^k, \psi^k),\quad k = 1, 2,... \tag{36}$$

Consider the sequences $\{\psi^k(t)\}$ and $\{v^k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Since $v^k(t) \in V$, $\psi^k(t) \in \Psi$ and since the sets V and Ψ are compact and closed, we can extract subsequences $\{\psi^{k_r}(t)\}$ and $\{v^{k_r}(t)\}$, $r = 1, 2, \ldots$, from the sets $\{\psi^k(t)\}$ and $\{v^k(t)\}$ so that they converge to the functions $\varphi^0(t) \in \Psi$, $v^0(t) \in V$, respectively. Therefore $T(u^0, \varphi^0; v^0, \psi^0) = +\infty$.

Remark. Let P be the topological space of points $p = (u, \varphi; v, \psi)$, where $u \in U$, $\varphi \in \Phi$, $v \in V$, $\psi \in \Psi$, with the metric defined by

$$\varrho(p_1, p_2) = \begin{cases} \sup\limits_{t \geqslant a} \| u_1 - u_2 \|, \ \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \\ \sup\limits_{t \geqslant c} \| v_1 - v_2 \|, \ \sup\limits_{c \leqslant t \leqslant d} \| \psi_1 - \psi_2 \|. \end{cases}$$

Consider now the function $f(t, p) = \| \Omega^*(t, \varphi, u) - \Theta^*(t, \psi, v) \|, t \geqslant e$, where $e = \max[b, d]$. It is shown in [6] that

(i) $t \to f(t, p)$ is continuous for $t \geqslant e$ and for fixed $p \in P$;

(ii) $p \to f(t, p)$ is continuous for $p \in P$ and for fixed $t \geqslant e$.

Let $p_0 \in P$ and consider the equation $f(t, p_0) = 0$. Let T_0 be the greatest lower bound of all the solutions of this equation.

Therefore, $f(T_0, p_0) = 0$, and $f(t, p_0) \neq 0$ for $t < T_0$, $T_0 \geqslant e$. Suppose that

(iii) $f'(t, p) \geqslant c \,|\, > 0 \,|$ for $|t - T_0| < \delta_0$, $p \in N_0$, where $\delta_0 > 0$ and N_0 is some neighborhood of p_0;

(iv) $\lim\limits_{p \to p_0} \sup\limits_{t \geqslant e} |f(t, p) - f(t, p_0)| = 0$.

Suppose now that p is close to p_0 and consider the solution of $f(t, p) = 0$. For small h we have $f(T_0 + h, p) = f(T_0, p) + hf'(T_0 + \Theta h, p)$, $(0 \leqslant \Theta \leqslant 1)$. By (ii) we can choose a neighborhood $N_1 \subset N$ of p_0 such that $0 \leqslant f(T_0, p) < \frac{1}{2} \delta_1 c$ for $p \in N_1$. If $p \in N_1$ and $0 \leqslant h < \delta_1$, then from (iii) we can get $f(T_0 + h, p) \geqslant ch > 0$. Similarly, if $-\delta_1 < h \leqslant 0$, then $f(T_0 + h, p) \leqslant \frac{1}{2} \delta_1 c + ch$, which is negative if $h = -\frac{3}{4} \delta_1$. It follows from (i) that there exists a solution t of $f(t, p) = 0$ satisfying $|t - T_0| \leqslant \frac{3}{4} \delta_1$. In fact, the argument shows that a solution t exists satisfying

$$|t - T_0| \leqslant \text{const. } f(T_0, p),$$

which tends to zero as $p \to p_0$, by (ii).

If T_p is the lower bound of such solutions we have therefore $T_p \leqslant T_0 + \eta(p)$, where $\eta(p) \to 0$ as $p \to p_0$. On the other hand, by (i), given any $\xi > 0$, there exists an $A(\xi) > 0$ such that $f(t, p_0) \geqslant A(\xi)$ for $0 \leqslant t \leqslant T_0 - \xi$. So, by (iv), we have for some neighborhood $N_\xi \subset N_0$ of p_0,

$$f(t,p) \geqslant \frac{1}{2} A(\xi) > 0 \text{ for } 0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad p \in N_\xi.$$

It follows that $T_p > T_0 - \xi$ if $p \in N_\xi$. So, finally, $|T_p - T_0| \to 0$ as $p \to p_0$. (Note that the case $f'(t,p) \leqslant c (< 0)$ for $|t - T_0| < \delta_0, p \in N_0$, can be treated in a similar way).

We see that under the hypotheses (iii) and (iv) the functional $T(u, \varphi; v, \psi)$ is continuous in all its arguments. Taking into account some of the Mathematical Problems of Control systems presented during the International Congress of Mathematicians (f. i. [16], [17]), we shall assume the hypotheses (iii) and (iv) in our next paper devoted to studies of various properties of optimal strategies as wel as to optimal strategies in a particular cases.

Received the 1 IX 1966

University of Queensland,
St. Lucia, Brisbane,
Australia

REFERENCES

1. Oğuztöreli M. N., *Studies on Control Systems.* Pergamon Press, N. Y., (in print).
2. Bellman R., *An Approximate Procedure in Control Theory based on Quasilinearization.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4,* pp. 5—10.
3. Conti R., *Controlli t-minimanti.* Corso Matematico Estivo, Varenna, 1963.
4. Mangeron D., Roxin Em. O., *The Existence of Optimal Controls and some Applications.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1—2,* pp. 29—36; Ibid., 1964, **X (XIV)**, *3—4,* pp. 61—66,
5. Oğuztöreli M. N., *A Time optimal Control Problem for Systems described by Difference-Differential Equations.* J. SIAM Control, 1963, **1**, pp. 290—310.
6. — *Relay type Control Systems with Retardation and Switching Delay.* J. SIAM Control, 1963, **1**, pp. 275—289.
7. — *Optimal Pursuit Strategy Processes with Retarded Control Systems,* J. SIAM Control, 1964, Ser. A, **2**, *1,* pp. 89—105.
8. Bellman R., Cooke K. L., *Differential-Difference Equations.* Academic Press, N. Y., 1963.
9. Isaacs R., *Differential Games.* John Wiley a. Sons, N. Y., 1965, XXII+384 pp.
10. Понтрягин Л. С., *К теории дифференциальных игр.* УМН, 1966, **XXI**, *4 (130),* стр. 219—274.
11. Mangeron D., Bookreview: Issacs R., *Differential Games. A mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4,* pp. 528—529.
12. Kelendzheridze D. L., *On the Theory of Optimal Pursuit.* English transl. Soviet Math.-Dokl., 1961, **2**, pp. 654-656.
13. LaSalle J. P., *The Time optimal Control Problem.* Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, 1963, **5**, pp. 1—24.
14. Neustadt L. W., *Synthesizing Time optimal Control Systems.* J. Math. Anal. Appl., 1960, **1**, pp. 484—493.
15. Pontryagin L. S., Boltyanski V. C., Gamkrelidze R. W. and Mishchenko E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* L. W. Newstadt, K. N. Trirogoff, Interscience, N. Y., 1962, (transl. from Russian).

16. Mangeron D., *Dynamic Programming concerned with Boundary Value Problems related with Integro-Differential Equations containing Polyvibrating Operators.* ICM, Moscow, Abstracts of brief scientific Communications, Section 13: Mathematical Problems of Control Systems, 1966, pp. 36—37.
17. Isaacs R., *Differential Games the Progenitor of Control Theory, and what it can contribute thereto.* ICM, Moscow, Abstracts of brief scientific Communications, Section 13: Mathematical Problems of Control Systems, 1966, pp. 34—35.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL PROBLEMELOR DE REGLARE OPTIMALĂ A TIMPULUI

I. Sisteme descrise de ecuaţii diferenţiale şi cu diferenţe finite

(Rezumat)

Într-unul din volumele sale recente sub tipar în editura Pergamon Press din New York [1], autorul, luînd ca bază vasta gamă de lucrări datorite lui R. Bellman, R. Conti, D. Mangeron, E. Roxin, ş. a., dintre care unele publicate în acest *Buletin* [2]...[4], a studiat *sisteme de reglare automată cu întîrziere în timp.*

În această lucrare, autorul studiază problema de urmărire optimală referitoare la sisteme descrise cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale şi cu diferenţe finite liniare cu argument întîrziat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 513.82 ; 519.3 ; 621—52

SOME GEOMETRIC ASPECTS OF OPTIMAL PROCESSES

PART I

PROBLEMS WITH CONTROL CONSTRAINTS [1)]

BY

A. BLAQUIÈRE aod G. LEITMANN

1. Introduction

We shall consider a dynamical system whose state at any instant of time, t, is a point $\underset{\sim}{x} = (x_1, x, ..., x_n)$ in an n-dimensional Euclidean space, E^n. We shall suppose that the behavior of the system, i. e., the time-history of its states, is governed by any one of a *prescribed set of rules*. For the time being, we need not specify this set of rules; instead, we shall make certain assumption regarding the system's behavior.

Associated with an admissible rule — namely, one belonging to the prescribed set — is a corresponding evolution of the systems's states, $\underset{\sim}{x}(t)$. In other words, given a rule, r, the state moves along a path, p, in state space. We shall assume that such paths are continuous, i. e., that $\underset{\sim}{x}(t)$ is continuous on any finite time interval. In the ensuing discussion we shall consider the paths which result from all admissible rules. In particular, we shall be concerned with transferring the system from a given state, $\underset{\sim}{x}$, to a given terminal manifold, θ^1, of dimension less than n. In general, some rules will result in transfer from $\underset{\sim}{x}$ to $\underset{\sim}{x}^1 \in \theta^1$, while others will result in paths which do not reach the terminal manifold but rather terminate at $\underset{\sim}{x}^1 \notin \theta^1$.

[1)] The discussion in this part of the lecture is based, in part, on University of California IER Report AM-64-10, *On the Geometry of Optimal Processes*, Part I, by A. Blaquière and G. Leitmann.

Next let there be given a *performance index,* i. e., a rule or functional, which assigns a unique number to each transfer effected by an admissible rule. Such a number will be called the cost of the transfer. In general, the cost of a transfer from $\underset{\sim}{x}$ to $\underset{\sim}{x}^f$, where $\underset{\sim}{x}^f = \underset{\sim}{x}^1$ or $\bar{\underset{\sim}{x}}^1$, depends on the rule x and the corresponding path p; it will be denoted by $V(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}^f; r, p)$.

We shall say that a rule, r^*, is *optimal* if the corresponding path, p^*, from $\underset{\sim}{x}$ reaches some state $\underset{\sim}{x}^{1*} \in \theta^1$, and the cost takes on its minimum value, i. e.

$$V(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}^{1*}; r^*, p^*) \leqslant V(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}^1; r, p) \tag{1}$$

for all admissible rules.

While an optimal rule need not be unique, it follows from (1) that the *minimum cost is unique*; hence, we shall write

$$V^*(\underset{\sim}{x};\ \theta^1) \triangleq V(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}^{1*}; r^*, p^*),\ \forall r^*,$$

in order to emphazise that, for prescribed terminal manifold θ^1, the minimum cost is a function of the initial state only.

Next let us consider two subsets of state space, E^n:

(i) the set, E, of all points from which there exist paths to θ^1; i. e.,

$$E \triangleq \{\underset{\sim}{x}:\ \exists p \text{ from } \underset{\sim}{x} \text{ to } \theta^1\};$$

(ii) the set, E^*, of all points from which there exist paths generated by optimal rules; i. e.,

$$E^* \triangleq \{\underset{\sim}{x}:\ \exists p \text{ from } \underset{\sim}{x} \text{ to } \theta^1\}.$$

We shall make the following assumptions:

(i) E^* is „n-dimensional“: i. e., if $E^* \not\equiv E^n$ then any neighborhood, no matter how small, of a boundary of E^* contains interior points (with respect to E^n) of E^*;

(ii)[2] $V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)$ is continuous on E^*;

(iii) $\partial V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)/\partial x_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, may be discontinuous at points of lower-dimensional manifolds, but possess unique limiting values or else tend to infinity;

(iv)[3] the cost of transfer is additive; i. e.,

---

[2]) This assumption can be shown to be valid for the kind of system considered subsequently; see [1].

[3]) This is valid for integral cost to be considered later.

$$(2)\qquad V(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x^f}; r, p) = V(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x^i}; r, p^i) + V(\underset{\sim}{x^i}, \underset{\sim}{x^f}; r, p_i), \quad \forall \underset{\sim}{x^i} \in p,\ p = p^i \cup p_i$$

and

$$\lim_{\substack{\underset{\sim}{x^i} \to \underset{\sim}{x^f}}} V(\underset{\sim}{x^i}, \underset{\sim}{x^f}; r, p_i) = 0.$$

2. Trajectories in Augmented State Space

Next consider an augmented state space, namely, the $(n+1)$-dimensional Euclidean space, E^{n+1}, of points $x = (\underset{\sim}{x_0}, x)$. Let us define curve Γ in E^{n+1}, whose projection is path p in E^n, such that

$$(3)\qquad \Gamma \overset{\Delta}{=} \left\{ \underset{\sim}{x^i} :\ x_0^i + V(\underset{\sim}{x^i}, \underset{\sim}{x^f}; r, p_i) = C,\ p_i \subset p \right\},$$

where p is generated by rule r, and C is a constant parameter. We call Γ a *trajectory* in augmented state space. If a generating rule is optimal, the corresponding trajectory is called an *optimal trajectory*

$$(4)\qquad \Gamma^\star \overset{\Delta}{=} \left\{ \underset{\sim}{x^i} :\ x_0^i + V(\underset{\sim}{x^i}, \underset{\sim}{x^{1\star}}; r^\star, p_i) = C,\ p_i \subset p^\star \right\}.$$

By varying the value of parameter C in (3) and (4), there is generated a one-parameter family of trajectories which lie on an x_0-cylindrical surface which intersects E^n in p or $p^\star$.

3. Limiting Surfaces and Optimal Isocost Surfaces

In view of assumption (i) that $E^\star$ is „n-dimensional", and (ii) that $V^\star(\underset{\sim}{x}; \theta^1)$ is continuous on $E^\star$, the equation

$$(5)\qquad x_0 + V^\star(\underset{\sim}{x}; \theta^1) = C$$

defines an n-dimensional surface, Σ, in E^{n+1}. Since $V^\star(\underset{\sim}{x}; \theta^1)$ is single-valued, Σ is a surface of a single sheet. However, since (iii) partial derivatives $\partial V^\star(\underset{\sim}{x}; \theta^1)/\partial x_j$ may be discontinuous, the tangent planes of Σ may not be uniquely defined at points of lower-dimensional manifolds on Σ. Thus, a Σ surface need be only piecewise regular[4]).

In general, the function $x_0 = C - V^\star(\underset{\sim}{x}; \theta^1)$ vanishes on an $(n-1)$-dimensional surface, S, whose equation is

$$(6)\qquad V^\star(\underset{\sim}{x}; \theta^1) = C.$$

[4]) A point of a surface will be said to be *regular*, if the tangent plane of the surface is uniquely defined at that point.

As the value of parameter C is varied, (5) and (6) define two one-parameter families of surfaces: limiting surfaces $\{\Sigma\}$ in $E^* \times x_0$ and optimal isocost surfaces $\{S\}$ in E^*. The first name is chosen as a consequence of a property to be discussed in the next section. The second name follows from the fact that a given S surface is the locus of initial points corresponding to the *same* minimum cost of transfer to θ^1, namely, C.

4. Some Properties of Limiting Surfaces

From the assumed additivity of the cost (2) and the definition of optimality (1), it follows that

$$V(\underset{\sim}{x^i}, \underset{\sim}{x^{1*}}; r^*, p_i) = V^*(\underset{\sim}{x^i}; \theta^1), \quad \forall \underset{\sim}{x^i} \in p^*, \; p_i \subset p^*, \tag{7}$$

whence we have

Lemma 1. *Any optimal trajectory, Γ^*, which intersects manifold $\theta^1 \times x_0$ at point $\underset{\sim}{x^1}$ lies entirely in the Σ surface through $\underset{\sim}{x^1}$.*

By definition (5), the members of $\{\Sigma\}$ may be obtained from one another by translation parallel to the x_0-axis, and are ordered along the x_0-axis in the same way as the values of C. Thus, one and only Σ surface passes through a given point in $E^* \times x_0$. This property and Lemma 1 result in

Lemma 2. *An optimal trajectory, Γ^*, with one point on a limiting surface, Σ, lies entirely in Σ; thus, the limiting surfaces are the loci of all optimal trajectories.*

A given limiting surface, Σ, separates $E^* \times x_0$ into two regions open with respect to Σ. We shall denote these regions by A/Σ („above" Σ) and B/Σ („below" Σ), respectively. If Σ is the limiting surface corresponding to cost C, then

$$A/\Sigma \triangleq \left\{\underset{\sim}{x}: \; x_0 > C - V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)\right\} \quad \text{and} \quad B/\Sigma \triangleq \left\{\underset{\sim}{x}: \; x_0 < C - V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)\right\}.$$

If $\underset{\sim}{x} \in A/\Sigma$, it is called an A-point relative to Σ; similarly, if $\underset{\sim}{x} \in B/\Sigma$, it is called a B-point relative to Σ.

Lemma 2, together with the definitions of trajectories and Σ surfaces leads to

Lemma 3. *There exists no trajectory which starts on a given limiting surface, Σ, and intersects $\theta^1 \times x_0$ at a B-point relative to Σ.*

Lemmas 2 and 3, in turn, result in the fundamental

Theorem I. *A trajectory (optimal or non-optimal) whose initial point belongs to a given limiting surface, Σ, cannot have a B-point relative to Σ.*

This theorem embodies the limiting nature of surfaces $\{\Sigma\}$; namely, a given Σ surface belongs to the boundary of the region which contains *all* trajectories emanating from that surface.

5. State Equations

Henceforth we shall restrict our discussion to systems whose state variables are functions of time satisfying state equations

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

where $u_1, u_2, \ldots, u_m$ are *control variables* which define a point $\underset{\sim}{u}$ in an m-dimensional Euclidean space, E^m. We shall say that *control* $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, is *admissible,* if (i) $\underset{\sim}{u}(t)$ is defined and piecewise continuous on interval $[t_0, t_1]$; (ii) $\underset{\sim}{u}(t) \in \underset{\sim}{U}$ for all $t \in [t_0, t_1]$, where U is a constant [5]) subset of E^m.

We shall assume that functions $f_j(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u})$ and $\partial f_j(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u})/\partial x_i$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, are defined and continuous on $E^n \times U$. Thus, for prescribed admissible control $\underset{\sim}{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, and given initial condition $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^0$ at $t = t_0$, there exists a unique, continuous solution, $\underset{\sim}{x}(t)$, of $(\mathcal{E})$. The state equations, together with the admissible controls, constitute the set of admissible rules.

6. Integral Performance Index

Henceforth we shall consider a performance index in integral form

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\underset{\sim}{x}(t), \underset{\sim}{u}(t))\, dt \tag{9}$$

so that, in the language of Section 1,

$$V(\underset{\sim}{x}^i, \underset{\sim}{x}^f; r, p_i) = \int_t^{t_1} f_0(\underset{\sim}{x}(\tau), \underset{\sim}{u}(\tau))\, d\tau \quad \text{and} \quad x_0(t) + \int_t^{t_1} f_0(\underset{\sim}{x}(\tau), \underset{\sim}{u}(\tau))\, d\tau = C.$$

Hence

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}). \tag{10}$$

Functions $f_0(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u})$ and $\partial f_0(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u})/\partial x_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, are assumed to be defined and continuous on $E^n \times U$.

[5]) All results can be extended readily to systems with state-dependent U.

Upon combining (8) and (10), we have the equation whose solutions are trajectories in E^{n+1}, namely,

$$\frac{d\underset{\sim}{x}}{dt} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}), \tag{11}$$

where $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) = (f_0(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}), f_1(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}), \ldots, f_n(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}))$.

An *optimal control* $\underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, results in a transfer of the system from a prescribed state $\underset{\sim}{x}^0$ at t_0 to some state $\underset{\sim}{x}^{1*} \in \theta^1$ at t such that integral (9) takes on its minimum value.

Note that transfer time $t_1 - t_0$ is not specified here. All results can be extended readily to non-autonomous problems.

7. Properties of a Linear Transformation

Consider a vector $\underset{\sim}{\eta} = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ at point $\underset{\sim}{x}^*(t)$ of optimal trajectory Γ^* generated by control $\underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, whose component $\eta_j = \eta_j(t)$ are solutions of *variational equations*

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_j(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}^*(t))}{\partial x_i}\bigg|_{\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^*(t)} \eta_i, \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \tag{12}$$

for given initial conditions $\eta_j(t_0) = \eta_j^0$.

Equations (12) define a non-singular, linear transformation $A(t_0, t)$ such that

$$\underset{\sim}{\eta}(t) = A(t_0, t)\,\underset{\sim}{\eta}^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{13}$$

From the properties of such a transformation we have

Lemma 4. *The transform,* $\Pi(\underset{\sim}{x}^*(t))$, *of a plane* $\Pi(\underset{\sim}{x}^*(t_0))$ *containing point* $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$ *of* Γ^*, *due to linear transformation* $A(t_0, t)$, *has these properties*:

(i) $\Pi(\underset{\sim}{x}^*(t))$ *is defined for all* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$;

(ii) $\Pi(\underset{\sim}{x}^*(t))$ *is a plane of the same dimension as* $\Pi(\underset{\sim}{x}^*(t_0))$;

(iii) *the orientation of* $\Pi(\underset{\sim}{x}^*(t))$ *is continuous on* $[t_0, t_1]$.

8. Transformation of Tangent Plane

Let Γ^* denote an optimal trajectory with control $\underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, whose initial point, $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$, is a *regular, interior* point of limiting surface Σ. By Lemma 2, Γ^* lies entirely on Σ.

Consider a neighborhood in Σ of point $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$ defined by

$$\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_0)) \overset{\Delta}{=} \left\{ \underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(t_0) \in \Sigma \right\}, \tag{14}$$

where $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}^*(t_0) + \varepsilon \underset{\sim}{\eta}^0 + \underset{\sim}{o}(\varepsilon)$ and

(i) ε is sufficiently small so that $\underset{\sim}{x}(t_0) \in \Sigma$;

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \underset{\sim}{o}(\varepsilon)/\varepsilon = 0$;

(iii) $\underset{\sim}{\eta}_0 \in T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_0))$, the tangent plane of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_0))$ at $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$. Clearly $T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_0)) \equiv T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t_0))$, the tangent plane of Σ at $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$.

The transformation of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_0))$, by means of trajectory equations (11) with $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, results in the set of points

$$\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t)) \overset{\Delta}{=} \left\{ \underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(t) \right\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{15}$$

where

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}^*(t) + \varepsilon \underset{\sim}{\eta}(t) + \underset{\sim}{o}(t, \varepsilon)$$

and

(i) $\underset{\sim}{o}(t, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ uniformly for all $t \in [t_0, t_1]$ as $\varepsilon \to 0$;

(ii) $\underset{\sim}{\eta}(t)$ is a solution of (12) with $\underset{\sim}{\eta}(t_0) = \underset{\sim}{\eta}^0$.

Since every point $\underset{\sim}{x}(t)$ belongs to a trajectory whose initial point lies in Σ, it follows from Theorem I that $\underset{\sim}{x}(t) \in A/\Sigma \cup \Sigma$, provided $\underset{\sim}{x}^*(t)$ is an interior point of Σ and $|\varepsilon|$ is sufficiently small. This result, together with Lemma 4, leads to

Lemma 5. *If points* $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$ *and* $\underset{\sim}{x}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *of optimal trajectory* Γ^* *on limiting surface* Σ *are regular, interior points of* Σ, *then the tangent plane of* Σ *at* $\underset{\sim}{x}^*(t_0)$ *is trasformed into that at* $\underset{\sim}{x}^*(t)$ *by the linear transformation defined by variational equations* (12); *i. e.,*

$$T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t)) = A(t_0, t)\, T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t_0)). \tag{16}$$

9. Regular Interior Points of Limiting Surface

Let $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x}')$ denote the unit vector which is normal to limiting surface Σ and directed into region B/Σ at a regular interior point, $\underset{\sim}{x}'$, of Σ; i. e.,

$$n_0(\underset{\sim}{x}') \leqslant 0, \tag{17}$$

where n_0 is the zeroth component of $\underset{\sim}{n}$. As a direct consequence of Theorem I, we have

$$\underset{\sim}{n}(x') \cdot \underset{\sim}{f}(x', \underset{\sim}{u}) \leqslant 0, \quad \forall \underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{U}. \tag{18}$$

Furthermore, if $\underset{\sim}{x'} = \underset{\sim}{x^*}(t')$ of optimal trajectory Γ^* generated by control $\underset{\sim}{u^*}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, it follows from Lemma 2 that

$$\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x^*}(t')) \cdot \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x^*}(t')), \underset{\sim}{u^*}(t')) = 0. \tag{19}$$

10. Regular Optimal Trajectories

Suppose that Γ^* — corresponding to $\underset{\sim}{x^*}(t)$ and $\underset{\sim}{u^*}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — is a *regular* optimal trajectory, i. e., one all of whose points are regular, interior points of the limiting surface, Σ, on which Γ^* lies. Consider now the equations adjoint to variational equations (12), namely,

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_j}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i(x, \underset{\sim}{u^*}(t))}{\partial x_j}\bigg|_{\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x^*}(t)} \lambda_i, \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \tag{20}$$

whose solution $\underset{\sim}{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$, for given initial condition $\underset{\sim}{\lambda}(t_0) = \underset{\sim}{\lambda^0}$, is unique and continuous on $[t_0, t_1]$. We have the well-known result

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) \cdot \underset{\sim}{\eta}(t) = \text{constant}, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{21}$$

Let us choose the following initial conditions for (12) and (20), respectively:

(i) $\underset{\sim}{\eta^0} \neq 0$ and $\in T_\Sigma(\underset{\sim}{x^*}(t_0))$;

(ii) $\underset{\sim}{\lambda^0} \neq 0$ and $\perp T_\Sigma(\underset{\sim}{x^*}(t_0))$ and directed into B/Σ.

Then it follows from (21) that

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) \cdot \underset{\sim}{\eta}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{22}$$

so that, by (18) and (19),

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) \cdot \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x^*}(t), \underset{\sim}{u}) \leqslant 0, \quad \forall \underset{\sim}{u} \in U \text{ and } \underset{\sim}{\lambda}(t) \cdot \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x^*}(t), \underset{\sim}{u^*}(t)) = 0 \tag{23, 24}$$

for all t on $[t_0, t_1]$.

Since x_0 does not occur explicitly in (20), and in view of (17), we have

$$\lambda_0(t) \equiv \text{constant} \leqslant 0. \tag{25}$$

11. Terminal Transversality Condition

Let us recall that we wish to transfer the system, with state equations (8) and performance index (9), from a given state z^0 at time t_0 to a given terminal manifold θ^1 at unspecified time t_1. We shall assume that θ^1 is a smooth $(n-q)$-dimensional manifold, namely, one given by the intersection of q smooth surfaces, $1 \leqslant q \leqslant n$, whose equations are

$$\theta_\sigma^1(\underset{\sim}{x}) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, q). \tag{26}$$

Furthermore, we shall assume that grad $\theta_\sigma^1(\underset{\sim}{x})$, $(\sigma = 1, 2, \ldots, q)$, are linearly independent for all $\underset{\sim}{x} \in \theta^1$, so that θ^1 possesses a unique tangent plane $T_{\theta^1}(\underset{\sim}{x})$ for all $x \in \theta^1$.

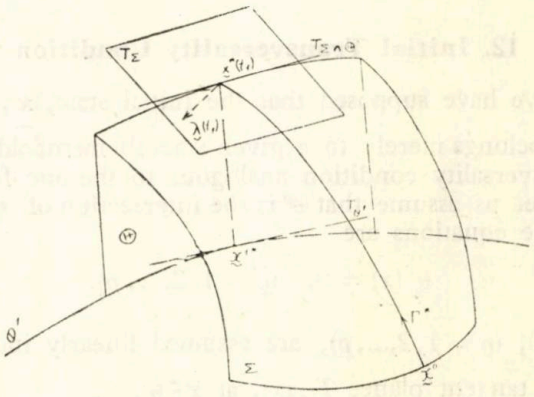


Fig. 1. — Terminal transversality.

Let Σ be the limiting surface corresponding to cost C, and let $\Theta^1 \overset{\Delta}{=} \theta^1 \times x_0$. Then the tangent plane, $T_{\Sigma\cap\Theta^1}(\underset{\sim}{x^1})$, of $\Sigma \cap \Theta^1$ at $\underset{\sim}{x^1} = (C, \underset{\sim}{x^1})$ is the set of all $x = (C, x)$, where $x \in \theta^1$. Clearly, the $(n-q)$-dimensional plane $T_{\Sigma\cap\Theta^1}(\underset{\sim}{x^1}) \subset T_\Sigma(\underset{\sim}{x^1})$ (Fig. 1). Hence, by (22), $\underset{\sim}{\lambda}(t_1)$ is normal to $T_{\Sigma\cap\Theta^1}(\underset{\sim}{x^*}(t_1))$, i.e., normal to *any* vector $\underset{\sim}{\eta^1} = (\eta_0^1, \eta_1^1, \ldots, \eta_n^1) \in T_{\Sigma\cap\Theta^1}(\underset{\sim}{x^*}(t_1))$. Thus, we have the *terminal transversality condition*

$$\underset{\sim}{\lambda}(t_1) \cdot \underset{\sim}{\eta^1} = 0, \tag{27}$$

where

$$(28) \qquad \eta_0^i = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\sigma^1(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=x^{1*}} \eta_j = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, q).$$

In view of the assumed linear independence of vectors grad $\theta_\sigma^1(x)$, (28) can be solved for $q+1$ components of η^1 as linear combinations of the remaining $n-q$ components which are arbitrary. The coefficients of the arbitrary components of η^1 in (27) must vanish, yielding $n-q$ conditions on $\lambda(t)$ and $x(t)$ at the terminal point of an optimal trajectory, Γ^*. Note that $\lambda_0(t_1)$ is not present in these conditions. Thus, the terminal transversality condition, together with terminal condition (26), yields a set of n relations involving $2n$ variables. The remaining n relations are provided by specification of the initial state.

12. Initial Transversality Condition

Thus far we have supposed that the initial state, x^0, is prescribed. If the initial state belongs merely to a given smooth manifold θ^0, we can arrive at on initial transversality condition analogous to the one found in the previous section. Let us assume that θ^0 is the intersection of p smooth surfaces, $1 \leqslant p \leqslant n$, whose equations are

$$(29) \qquad \theta_\rho^0(x) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

where grad $\theta_\rho^0(x)$, $(\rho = 1, 2, \ldots, p)$, are assumed linearly independent so that θ^0 has a unique tangent plane, $T_{\theta^0}(x)$, at $x \in \theta^0$.

Consider now two points, x_1^0 and x_2^0, both of which belong to E^* and lie on θ^0. Let Γ_1^* and Γ_2^* denote optimal trajectories which start at $x_1^0 = (0, x_1^0)$ and $x_2^0 = (0, x_2^0)$, respectively. Let Σ_1 and Σ_2 be the corresponding limiting surfaces with parameters C_1 and C_2, respectively. Supposse that x_1^0 is a B-point relative to Σ_2 (Fig. 2). Then it follows from the definitions of limiting surfaces and of B-points that $C_1 \leqslant C_2$, and hence that $V^*(x_1^0; \theta^1) < V^*(x_2^0; \theta^1)$. Thus, if optimal trajectory Γ^* starts at $x^*(t_0) = (0, x^{0*})$, lies on limiting surface Σ, *and is optimal with respect to all initial points on* θ^0, i.e.,

$$V^*(x^{0*}; \theta^1) \leqslant V^*(x^0; \theta^1), \quad \forall x^0 \in \theta^0 \cap E^*,$$

then every point of $\theta^0 \cap E^*$ belongs to region $A/\Sigma \cup \Sigma$. This implies that the tangent plane, $T_{\theta^0}(\underset{\sim}{x^*}(t_0))$, of θ^0 at $\underset{\sim}{x^*}(t_0)$ belongs to the tangent plane, $T_\Sigma(\underset{\sim}{x^*}(t_0))$, of Σ at the initial point of Γ^* (Fig. 3).

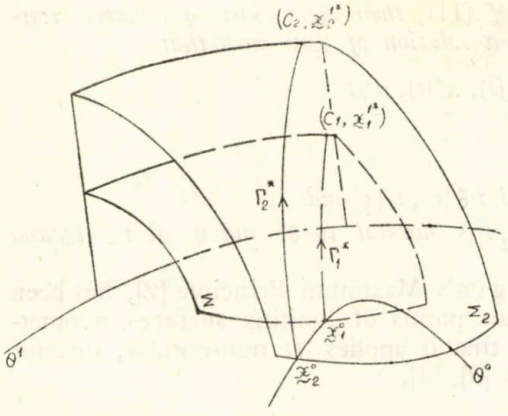


Fig. 2. — Initial Manifold.

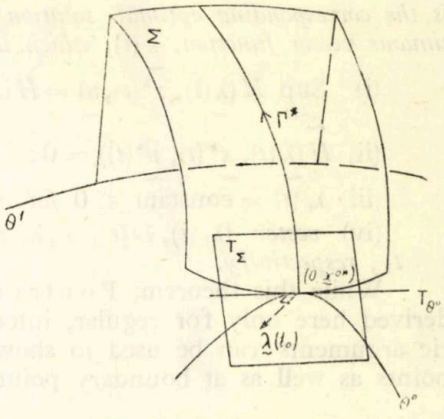


Fig. 3. — Initial Transversality.

By the choice of $\underset{\sim}{\lambda}(t_0)$, namely, normal to $T_\Sigma(\underset{\sim}{x^*}(t_0))$, we have the *initial transversality condition*

$$\underset{\sim}{\lambda}(t_0) \cdot \underset{\sim}{\eta}^0 = 0, \tag{30}$$

where $\underset{\sim}{\eta}^0 = (\eta_0^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0)$ is *any* vector in $T_{\theta^0}(\underset{\sim}{x^*}(t_0))$; i. e.,

$$\eta_0^0 = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta_\varrho^0(\underset{\sim}{x})}{\partial x_j}\bigg|_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x^{0*}}} \eta_j = 0, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, p. \tag{31}$$

We may solve (31) for $p+1$ components of $\underset{\sim}{\eta}^0$; the coefficients of the $n-p$ arbitrary coefficients of $\underset{\sim}{\eta}^0$ in (30) must vanish. Since $\lambda_0(t_0)$ does not appear explicitly in the resulting $n-p$ relations, the initial transversality condition and initial condition (29) lead to a set of n relations among $2n$ variables.

13. The Maximum Principle

The results of Sections **10** ... **12** apply to the transfer along regular optimal trajectories of a system, governed by state equations (8) with performance index (9), from a given initial manifold, θ^0, at time t_0 to a given terminal manifold, θ^1, at unspecified time t_1.

Letting

$$H(\underset{\sim}{\lambda}, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \overset{\Delta}{=} \underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u})$$

we may state

Theorem II. *If* $\underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *is an optimal control, and* $\underset{\sim}{x}^*(t)$ *is the corresponding optimal solution of* (11), *then there exists a nonzero continuous vector function,* $\underset{\sim}{\lambda}(t)$, *which is a solution of* (20) *such that*

(i) $\underset{\underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{U}}{\text{Sup}}\ H(\underset{\sim}{\lambda}(t), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}) = H(\underset{\sim}{\lambda}(t), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t))$;

(ii) $H(\underset{\sim}{\lambda}(t), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t)) = 0$;

(iii) $\lambda_0(t) = \text{constant} \leqslant 0$ *for all* $t \in [t_0, t_1]$; *and*

(iv) *vector* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t))$ *is normal to* θ^0 *and* θ^1 *at* $t = t_0$ *and* $t = t_1$, *respectively.*

While this theorem, Pontryagin's Maximum Principle [2], has been derived here only for regular, interior points of limiting surfaces, geometric arguments can be used to show that it applies at non-regular, interior points as well as at boundary points [3], [4].

14. The Functional Equation

Let us recall the definition of a limiting surface, Σ; namely

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) \overset{\Delta}{=} \underset{\sim}{x}_0 + V^*(x; \theta^1) = C \tag{32}$$

and consider

$$\text{grad}\ \Phi(\underset{\sim}{x}) = \left(1, \frac{\partial V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)}{\partial x_n}\right). \tag{33}$$

This vector is defined at $x = \underset{\sim}{x}^*(t)$ of an optimal trajectory Γ^*, provided:

(i) $\underset{\sim}{x}^*(t)$ is a regular interior point of limiting surface Σ containing Γ^*;

(ii) $\partial V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)/\partial x_j$, $x = \underset{\sim}{x}^*(t)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, are defined.

If condition (i) is met, then $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ is normal to Σ and directed into B/Σ. If condition (ii) is met, then $\underset{\sim}{n}_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) \neq 0$; hence, $\lambda_0(t) \equiv \text{constant} \neq 0$. Since all pertinent relations are homogeneous of degree one in the adjoint variables, we may set $\lambda_0(t) \equiv -1$. Since $\text{grad}\ \Phi(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ are proportional to each other and possess zeroth components equal to 1 and -1, respectively, we have

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) = -\ \text{grad}\ \Phi(\underset{\sim}{x}^*(t)), \tag{34}$$

wherever conditions (i) and (ii) are met.

Upon use of (34) in (i) and (ii) of Theorem II, we obtain the functional equation of Dynamic Programming [5]

$$\text{(35)} \qquad \inf_{\underset{\sim}{u} \in U} \left[f_0(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) + \sum_{j=1}^{n} f_j(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \frac{\partial V^*(\underset{\sim}{x}; \theta^1)}{\partial x_j} \right]_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}^*(t)} = 0 .$$

15. Example

Let us now consider a simple example with a view towards demonstrating some of the results of the aforegoing sections. This example may be interpreted as the time-optimal, rectilinear transfer of a rocket operating at constant power. The end values of velocity and mass are specified, and the thrust acceleration is bounded.

The state equations are

$$\frac{dx_1}{dt} = u, \quad \frac{dx_2}{dt} = u^2 ,$$

where $|u| \leqslant 1$.

It is desired to transfer the system from (x_1^0, x_2^0) at time t_0 to (x_1^1, x_2^1) at time t_1, while minimizing $t_1 - t_0$.

It is readily shown that *extremal control*, i. e., control satisfying Theorem II, is either (i) $|u(t)| \equiv 1$ (bang-bang); or (ii) $u(t) \equiv$ constant.

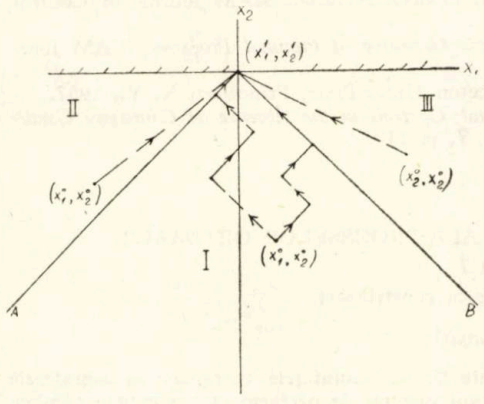


Fig. 4. — Initial Point Regions.

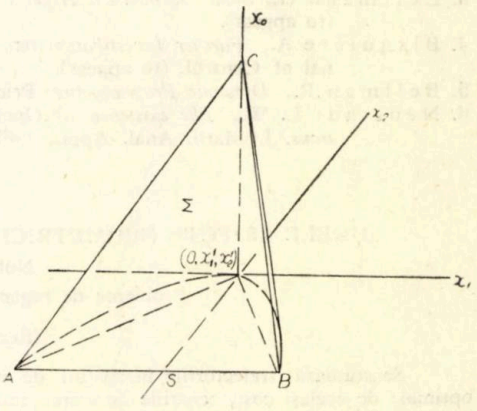


Fig. 5. — Limiting Surface.

Furthermore, the region of initial points from which the terminal point can be reached is the open half-plane $x_2 - x_2^1 < 0$. This region, in turn, is divided into three sub-regions separated by two straight lines of slope 1 and —1, respectively, passing through terminal point (x_1^1, x_2^1) (Fig. 4). In the two outside regions, *II* and *III* of Fig. 4, only $u(t) \equiv$ constant is admissible. In the middle-region, *I* of Fig. 4, only $|u(t)| \equiv 1$ is admissible; however, in case *any* bang-bang control which transfers the system to the given terminal point yields *same* value of transfer time. Thus, extremal control is unique for initial points in *II* it is not unique but is equivalent for initial points in *I*. Since an existence theorem [6 to this problem, extremal control is indeed optimal.

An optimal isocost surface is a parabola tangent to the x_1-axis passing through (x_1^1, x_2^1), and symmetric about the x_2-axis through the terminal point. The corresponding limiting surface in E^3 is composed of a portion of a parabolic right cone and a triangular planar surface (see Fig. 5). Every optimal trajectory, $\Gamma\Gamma^*$, has its final portion in a edge or intersection manifold of a Σ surface, *AC* or *BC* in Fig. 5. At a point of such an intersection manifold, the tangent plane of Σ is not defined, i. e.. Γ^* is *not regular*.

Received the 28 IX 1965

University of Paris,
Faculty of Science,
France
and
University of California,
Departament of Mechanical Enginering,
Berkeley, U.S.A.

REFERENCES

1. Schaver III R., Doctoral Dissertation, Dir. of Appl. Mech., Univ. of California, Berkeley, 1965.
2. Pontryagin L. S. et al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience-Wiley, N. Y., 1962, (translated from Russian,
3. Leitmann G., *Some Geometrical Aspects of Optimal Processes.* SIAM Journal of Control, (to appear).
4. Blaquière A., *Further Investigation into the Geometry of Optimal Processes.* SIAM Journal of Control, (to appear).
5. Bellman R., *Dynamic Programming.* Princeton Univ. Press, Princeton, N. Y., 1957.
6. Neustadt L. W., *The existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions.* J. Math. Anal. Appl., 1963, **7**, p. 110.

UNELE ASPECTE GEOMETRICE ALE PROCESELOR OPTIMALE

Nota I

Probleme de reglare cu constrîngeri

(Rezumat)

Se studiază traiectoriile în spaţiul de stare lărgit, suprafeţele marginale şi suprafeţele optimale de acelaşi cost, ecuaţiile de stare, indexul integral de performanţă, punctele regulate interioare ale suprafeţei marginale, traiectoriile optimale regulate, condiţiile de transversalitate terminale şi iniţiale.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Transversalitate terminală.
Fig. 2. — Varietatea iniţială.
Fig. 3. — Transversalitate iniţială.
Fig. 4. — Regiunile punctului iniţial.
Fig. 5. — Suprafaţa limită.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 513.615

SUR LES CUBIQUES GAUCHES D'UN ESPACE S_3 CONSTRUIT SUR UN CHAMP DE GALOIS DE CARACTÈRISTIQUE 2

PAR

B. D'ORGEVAL

Il est bien connu, [1], que dans un plan $S_{2,q}$ construit sur un champ de Galois de caractéristique 2, c'est-à-dire où $q = 2^h$, toute conique est telle que les tangentes en chacun de ses points vont concourir en un point dit le noyau de la conique. L'ensemble formé des points de la conique et du noyau constitue un $(q + 2)$-arc, sans que l'on puisse dire réciproquement que tout $(q + 2)$-arc puisse être formé d'une conique et de son noyau.

Il peut être intéressant de voir ce qui se passe dans le cas de la cubique gauche d'un espace S_3 construit sur un champ de caractéristique 2.

Considérons donc dans un tel espace, une cubique gauche C_3, qui possède $q + 1$ points; soit A l'un de ces points; projetons C_3 à partir de A sur un plan P de S_3 ne passant pas en A. La projection sera une conique C_2, passant par les q points, b_i, projections des points B_i de la cubique autres que A et par la trace t de la tangente AT au point A. Comme la caractéristique de P est 2, la conique C_2 a un noyau f. La droite af représente la trace sur P du plan osculateur en A à C_3. Les droites $b_i f$ sont les sections de P par les plans tangents aux différents points B_i passant par A. Il en résulte que toutes les tangentes $B_i T_i$ aux différents points B_i rencontrent une droite Af du plan osculateur en A.

Prenons alors un des points B_i, B_1 par exemple : son plan osculateur est évidemment distinct de celui en A, car il ne saurait couper une cubique en six points; si donc on appelle f_1 le noyau de la conique projection de C_3 à partir de B_1 les droites Af et $B_1 f_1$ sont distinctes. Deux cas sont alors possibles : ou Af et $B_1 f_1$ sont concourantes, ou ces droites sont gauches.

Si le premier cas se vérifiait, il y aurait un point F tel que FA et FB_1 soient toutes deux tangentes, donc leur plan couperait la cubique en quatre points, ce qui est impossible. Les tangentes aux différents points de la cubique sont donc gauches entre elles, formant un système de $q+1$ droites, chacune rencontrant les $q + i$ droites $B_i f_i$ et Af, également gauches. Ces deux systèmes de droites constituent chacun une demi-quadrique. Il passe donc par C_3 une quadrique dont le système des génératrices bisécantes est formé des tangentes : cette quadrique est donc la développable dont la cubique est l'arête de rebroussement, le plan tangent à la quadrique en B_i étant défini par $B_i T_i$ et $B_i f_i$, qui est bien le plan osculateur à C_3. On peut donc énoncer le

Théorème 1. *Si une cubique gauche appartient à un espace S_3 construit sur un champ de Galois de caractéristique 2, il existe une quadrique passant par cette cubique qui est la développable dont la cubique est l'arête de rebroussement.*

Réciproquement, nous allons établir le

Théorème 2. *Si dans un espace S_3, construit sur un champ de Galois d'ordre q, il existe une cubique gauche dont la développable est une quadrique, alors, la caractéristique du champ est 2 ($q=2^h$).*

En effet, soit A, un point de la cubique ; les tangentes aux autres points de la cubique sont les génératrices de la quadrique du même système que la tangente AT. Elles rencontrent donc toutes la génératrice Af passant en A, de l'autre système. Si alors, on projette sur un plan P ne passant pas en A, la conique projection a toutes ses tangentes passant en f, ce qui caractérise le cas $p = 2$.

Ces résultats s'obtiennent facilement par calcul. L'équation de la cubique gauche se ramenant en coordonnées non homogènes à $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, d'où si $p=2$, la développable $X = t + r$, $Y = t^2$, $Z = t^2(t + r)$, c'est-à-dire la quadrique $Z = XY$.

La plan tangent en T est $TY + TX + (Z + T^3) = 0$, dont l'intersection avec la courbe est $Tt^2 + T^2t + t^3 + T^3 = (T + t)^3 = 0$, qui montre que ce plan est bien osculateur à la cubique.

Considérons maintenant dans le S_3 (de caractéristique 2) une courbe formée de $q + 1$ points dont les projections à partir de l'un quelconque de ses points donne un $(q + 1)$-arc de P du type indiqué par M. B. Segre [2]. Si une telle courbe existe dans S_3 ses tangentes y sont concourantes. Supposons prendre pour plan P le plan xOy d'un système de coordonnées homogènes ; sur ce plan la projection est $y = x^r$ avec $r = 2^g$, $q = 2^a b$, b impair, $a \geqslant 0$; g et b premiers entre eux. Cette courbe passe par les q points dont la coordonnée x est un élément du champ d'ordre q, et par le point à l'infini (0, 1, 0).

Retenons cette courbe comme projection d'une courbe $x = x$, $y = x^r$, $z = x^s$. Nos hypothèses supposent au moins que la projection sur xOz soit du type de Segre, c'est-à-dire que $s = 2j$, j premier avec b.

S'il en est ainsi, la tangente au point x, y, z a pour paramètres directeurs : 1, 0, 0 et toutes ces tangentes vont concourir au point à l'infini de Ox.

Reçu le 30 XII 1966 *Université de Dijon, France*

BIBLIOGRAPHIE

1. Segre B., *Intorno alla geometria sopra un corpo di caratteristica due*. Rev. Fac. Sc. Univ. Istambul, ser. A, 1956, **21**, pp. 97—123.
2. — *Modern Geometry*. Ed Cremonese, Roma, 1961, § **178.**

ASUPRA CUBICELOR STRÎMBE DIN S_3 CONSTRUITE PE UN CÎMP AL LUI GALOIS DE CARACTERISTICĂ 2

(Rezumat)

Un spațiu S_3 construit pe un cîmp de caracteristică 2 poate fi caracterizat prin proprietatea că cubicele sale strîmbe au drept suprafețe desfășurabile niște cuadrice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 513.82; 531.134

UNE MANIÈRE GÉOMÉTRIQUE POUR CARACTÉRISER LES VARIÉTÉS ENGENDRÉES PAR LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE PARFAIT SANS POINT FIXE DANS S_4

PAR

ŞTEFANIA RUSCIOR

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucarest, 27—29 mai 1966

1. Dans les dernières années la liaison entre les problèmes engendrés par les étude géométriques des espaces à plusieures dimensions et les recherches concernant la cinématiqus dans les différents espaces, présentant de l'intérêt pour la physique et la technique modernee s'est cristalisee en plusieurs ouvrages remarquables [1] ... [5].

Dans un mémoire récent [6] R. Woinaroski en étudiant les mouvements d'un solide parfait sans points fixe dans S_4, montre que les plans instantanés de rotation engendrent en certaines conditions des variétés euclidiennes à trois dimensions, et il précise qu'ils peuvent en résulter cinq et seulement cinq catégories de telles variétés.

Les variétés obtenues dans le mémoire mentionné ci-dessus sont du même genre que les variétés biréglées étudiées par nous dans un mémoire antérieur [7].

Nous nous proposons de caractériser ci-dessous les cinq catégories de variétés obtenues, en employant des éléments géométriques intrinséquement liés à la variété respective, et puis de les mettre en correspondance par parallélisme.

2. Soit la courbe γ, donnée par l'équation vectorielle $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(u)$, le lieu géométrique décrit par le centre instantané de rotation par rapport au repère dans lequel on étudie le mouvement du solide.

Nous considérons deux vecteurs unitaires $\bar{a}(u)$ et $\bar{b}(u)$ dans le plan instantané de rotation P, et soit la variété V engendrée par le mouvement de ce plan, qui se déplace le long de la courbe γ. Cette variété à l'équation

$$\bar{r} = \bar{\varrho}_0(u) + v\bar{a}(u) + w\bar{b}(u). \tag{1}$$

On constate que la variété (1) est une hypersurface réglée ayant pour surface directrice une surface réglée S donnée par l'équation

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}_0(u) + v\bar{a}(u).$$

La génératrice de cette hypersurface réglée est une droite g avec le verseur $\bar{b}(u)$, caracterisée par $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ La direction de la génératrice de la surface directrice est donnée par le verseur $\bar{a}(u)$, cette génératrice étant caractérisée par $u = \text{const.}$, $w = \text{const.}$

Les variétes V données par (1) sont donc des hypersurfaces réglées et elles peuvent être de catégories différentes, ce qui résulte du tableau de classification affine donnée par nous dans un autre mémoire [8].

Nous allons montrer que l'équation (1) ne peut représenter que cinq catégories de variétés euclidiennes, distinctes du point de vue affine, catégories qui correspondent aux cinq classes de variétés établies par R. Woinaroski [6].

Pour caractériser ces classes de variétés du point de vue affine nous allons employer deux indices, à savoir: l'indice a qui donne le nombre des points singuliers situés sur une génératrice générique, et l'indice d donnant la dimension de la section impropre. Ainsi, les variétés V de S_n seront caractérisées par ces deux indices, et nous les noterons par V_a^d. Ces indices sont liés entre eux par la relation

$$a + d \geqslant n - 2. \tag{2}$$

En effet, la dimension d de la section impropre d'une hypersurface de S_n est égale à la différence entre le nombre $n-2$ et le nombre ν des points singuliers impropres situés sur une génératrice générique: $d = n-2-\nu$, d'où la relation (2) résulte en vertu de l'inégalité $\nu \leqslant a$, où a est le nombre de points singuliers situés sur une génératrice générique. La relation (2) détermine l'existence des variétés.

Une génératrice g d'une hypersurface réglée dans S_4 peut ne contenir aucun point singulier, en contenir un ou bien deux. Dans un point singulier l'hyperplan tangent est indéterminé. En chaque point non singulier de l'hypersurface existe un seul hyperplan tangent, déterminé par les vecteurs $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$. La matrice fonctionelle $M = (\bar{r}_u\ \bar{r}_v\ \bar{r}_w)$ a le rang 3 dans un point non singulier de l'hypersurface et le rang inférieur à 3 dans un point singulier.

La nature de l'enveloppe des hyperplans tangents le long d'une génératrice g est déterminée par le nombre des points singuliers situés sur cette génératrice [9], à savoir:

1°. Lorsque la génératrice g ne contient pas de points singuliers, les hyperplans tangents le long de celle-ci enveloppent un cône de second degré.

2°. Lorsque sur une génératrice il existe un point singulier, les hyperplans tangents forment un fascicule d'hyperplans.

3°. Lorsque la génératrice a deux points singuliers, l'hyperplan tangent est fixe le long de celle-ci.

Considérons l'équation de l'hyperplan H tangent à la variété (1), $[\bar{R} - \bar{r}, \bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w] = 0$. Ayant en vue l'expression de $\bar{r}$ donnée par (1) et en ordonnant d'après w, nous obtenons

$$w\,[\bar{R} - \bar{\varrho}_0, \bar{b}_u, \bar{a}, \bar{b}] + [\bar{R} - \bar{\varrho}_0, \bar{\varrho}_{0u} + v\bar{a}_u, \bar{a}, \bar{b}] = 0. \tag{3}$$

L'équation (3) nous montre que les hyperplans tangents le long de la génératrice g forment un fascicule d'hyperplans, par conséquent ils passent par un plan Π, nommé *plan de base* de la génératrice g. Mais de l'équation (3) on constate que ce plan contient les vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$, donc il coïncide avec le plan instantané de rotation P dans le point où la génératrice g rencontre la courbe γ. Le plan de base de la génératrice est donné par les équations

$$[\bar{R} - \bar{\varrho}_0, \bar{b}_u, \bar{a}, \bar{b}] = 0, \quad [\bar{R} - \bar{\varrho}_0, \bar{\varrho}_{0u} + v\bar{a}_u, \bar{a}, \bar{b}] = 0. \tag{4}$$

Comme l'on a montré dans [9], dans le cas où les hyperplans tangents le long d'une génératrice forment un fascicule, il existe sur la génératrice un point singulier et un seul. Il s'ensuit, donc, que les variétés V ont sur une génératrice générique g un seul point singulier. Par conséquent l'indice $a = 1$, et les variétés V sont de la catégorie V_1^d.

Le point singulier peut se trouver à une distance finie, alors la section impropre a la dimension $d = 2$, et la matrice fonctionnelle $M = (\bar{a}, \bar{b}, \mathrm{d}\bar{b}/\mathrm{d}u)$, qui caractérise la nature de la section impropre, a le rang 3. Lorsque la matrice M a le rang 2, la section impropre a la dimension $d = 1$, et le point singulier se trouve à l'infini. Enfin, lorsque M a le rang 1, la section impropre est un point, c'est-à-dire $d = 0$.

Nous avons ainsi des variétés de categories V_1^2, V_1^1 et V_1^0. Les deux premières peuvent exister, parce qu'elles satisfont la relation (2), tandis que les variétés du type V_1^0 ne satisfont pas cette relation, donc elles n'existent pas. En effet, si la figure impropre est un point, l'hypersurface est un hypercylindre, où l'hyperplan tangent est fixe le long de la génératrice. Mais de l'équation (3) il en résulte que les hyperplans tangents le long de la génératrice forment un fascicule. Dans le cas de V_1^0 les deux conditions ne peuvent pas être satisfaites simultanément, donc cette catégorie n'existe pas. Par conséquent, les variétés V_1^d considérées appartiennent soit à la catégorie V_1^2, soit à la catégorie V_1^1.

Pour les variétés V_1^d on peut définir les éléments géométriques suivants, liés d'une manière intrinsèque à la variété, à savoir: *le point caractéristique*, *la droite caractéristique* et *l'hypersurface caractéristique*.

Nous avons vu qu'une génératrice g admet un plan de base P. À un déplacement infinitésimal de la génératrice déterminée par $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}v$ correspond un autre plan de base P_1. Ces deux plans de base P et P_1 déterminent dans S_4 un point, nommé *point caractéristique*, de direction $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$. Le lieu géométrique décrit par le point caractéristique, lorsque $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}v$ varient,

est une droite, la *droite caractéristique* de la génératrice. Elle est contenue dans le plan P, et nous nous proposons d'en trouver l'équation. Le plan P est déterminé par les vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$. Le point caractéristique dans la direction du, dv est un point de ce plan, donné par l'équation

$$\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}_0 + \sigma\bar{b} + \tau\bar{a}.$$

Mais il se trouve aussi dans le plan P_1, de sorte qu'il vérifie l'équation

$$\mathrm{d}\,(\bar{\varrho}_0 + \sigma\bar{b} + \tau\bar{a}) = A\bar{a} + B\bar{b}.$$

Donc, nous avons

$$\bar{\varrho}_{0u}\,du + \sigma\bar{b}_u\,du + \tau a_u\,du = A\bar{a} + B\bar{b}.$$

Les vecteurs $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{b}_u$, $\bar{\varrho}_{0u}$ étant indépendants, ils peuvent être pris comme verseurs fondamentaux. Le vecteur $\bar{a}_u$, rapporté à ce système, s'exprime par la relation

$$\bar{a}_u = a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{b}_u + d\bar{\varrho}_{0u}.$$

Si nous considérons l'origine dans $\bar{\varrho}_0$ et remplaçons la valeur de $\bar{a}_u$ dans la condition précédente, nous obtenons

$$\sigma\bar{b}_u\,du + \sigma\,(a\bar{a}_u + b\bar{b} + c\bar{b}_u + d\bar{\varrho}_{0u})\,du = A\bar{a} + B\bar{b}.$$

Il en résulte que le lieu géométrique décrit par le point caractéristique lorsque du varie arbitrairement, est

$$\sigma + \tau c = 0. \tag{5}$$

L'équation (5) représente dans le plan P l'équation de la droite caractérisique correspondante à la génératrice g. De cette manière on constate qu'à une génératrice g sur l'hypersurface (1) correspond une certaine droite caractéristique δ du plan P. Lorsque g décrit l'hypersurface donnée, la droite δ décrit une hypersurface réglée liée d'une manière intrinsèque à V et qui est *l'hypersurface caractéristique* de la variété.

Considérons, enfin, le cas où les deux hyperplans donnés par l'équation (4), qui déterminent la base du fascicule, sont confondus. Dans ce cas l'hyperplan tangent le long de la génératrice est fixe. La variété donnée par (1) a sur chaque génératrice deux points singuliers, conformément au théorème démontré dans [9], où l'on montre que si l'hyperplan reste fixe le long d'une génératrice, il existe sur cette génératrice deux points singuliers.

Dans ce cas l'équation de l'hyperplan tangent (3) est indépendante de w, et les vecteurs $\bar{a}$, b, $\bar{a}_u$, $\bar{b}_u$, $\bar{\varrho}_{0u}$ se trouvent dans le même hyperplan, qui est l'hyperplan tangent le long de la génératrice g. La matrice

(6) $$M' = (\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a}_u,\ \bar{b}_u,\ \bar{\varrho}_{0u})$$

est de rang 3. Les deux points singuliers peuvent être distribués comme il suit :

1°. Les deux points sont à une distance finie; alors la matrice M' a le rang 3, et la section impropre est de dimension $d=2$.

2°. Un point se trouve à une distance finie (point propre) et l'autre, à l'infini (point impropre); dans ce cas la section impropre a la dimension 1, et la matrice M' a le rang 2.

3°. Les deux points se trouvent à l'infini; alors la section impropre se réduit à un point, la matrice M' a le rang 1, et $d=0$.

Nous avons donc les catégories de variétés V_2^2, V_2^1, V_2^0. Elles satisfont la relation (2), donc elles peuvent exister.

En conclusion, les variétés (1) obtenues par le mouvement du solide sans point fixe dans S_4 appartiennent aux 5 catégories définies plus haut, à savoir: 2 catégories du type V_1^d, $(d=2, 1)$, et 3 catégories du type V_2^d, $(d=2, 1, 0)$.

Dans le cas particulier où la surface S sur la variété V est une surface développable de la forme $\bar{\varrho}=\bar{\varrho}_0(u)+v\bar{\varrho}_0'(u)$, le plan de base de la génératrice c'est justement le plan tangent de la surface développable, parce que ce plan est contenu dans tous les hyperplans tangents le long de la génératrice considérée.

Le plan tangent à la surface développable c'est justement le plan osculateur de la courbe γ, dans le point où la génératrice rencontre cette courbe.

Une génératrice g de l'hypersurface est contenue dans le plan de base, donc son verseur est de la forme $\bar{b}=l_1\bar{\varrho}_0'+l_2\bar{\varrho}_0''$.

Dans ce cas l'hyperplan tangent est fixe le long de la génératrice, parce que le rang de la matrice M' est égal à 3. La matrice M' se réduit dans ce cas à l'expression

$$M' = (\bar{\varrho}_0,\ l_1\bar{\varrho}_0'+l_2\bar{\varrho}_0'',\ \bar{\varrho}_0',\ l_1\bar{\varrho}_0''+l_2\bar{\varrho}_0''',\ \bar{\varrho}_0''),$$

d'où il en résulte que les seuls vecteurs indépendants sont $\bar{\varrho}_0'$, $\bar{\varrho}_0''$, $\bar{\varrho}_0'''$. L'hyperplan tangent le long d'une génératrice est déterminé seulement par ces vecteurs, et par conséquent, il est fixe. Il a l'équation

(7) $$[\bar{R}-\bar{\varrho}_0,\ \bar{\varrho}_0',\ \bar{\varrho}_0'',\ \bar{\varrho}_0'''] = 0$$

et il représente l'hyperplan osculateur de la courbe γ dans le point où la génératrice g rencontre cette courbe.

La génératrice a un contact d'ordre 2 avec la surface directrice. Son point singulier est double et représente le point même d'intersection de la génératrice avec la surface directrice. Par conséquent, cette dernière est une surface focale de la variété. Nous avons ainsi une hypersurface du type V_2^d, rapportée à une surface focale.

3. Le problème de la corespondance par hyperplans tangents parallèles qui conservent les génératrices peut se poser seulement entre les variétés V de la même catégorie. En effet, lorsque deux hyperplans sont parallèles, ils coupent l'hyperplan impropre d'après le même plan. Si nous supposons une correspondance par hyperplans tangents parallèles entre les points de deux génératrices correspondantes sur V et V^*, les enveloppes formées par les hyperplans tangents relativement à ces génératrices ont la même intersection avec l'hyperplan impropre, par conséquent les indices a et d, qui caractérisent l'hypersurface réglée, sont les mêmes. Les variétés V et V^* sont donc de la même catégorie.

Considérons le cas particulier où le plan générateur de la variété V reste parallèle à un plan fixe P détérminé par les verseurs constants $\bar{a}$ et $\bar{b}$. Nous obtenons ainsi la variété particulière donnée par l'équation

$$\bar{r} = \bar{\varrho}_0(u) + v\bar{a} + w\bar{b}, \tag{8}$$

où $\bar{a} = \text{const.}$ et $\bar{b} = \text{const.}$ Celle-ci est une variété réglée qui admet come surface directrice une surface cylindrique $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}_0(u) + \bar{a}$. Elle peut être écrite aussi sous la forme

$$\bar{r} = \bar{\varrho}(u, v) + w\bar{b}.$$

L'hyperplan tangent dans un point de la variété (8) a l'équation

$$[\bar{R} - \bar{\varrho}_0, \bar{\varrho}_0', \bar{a}, \bar{b}] = 0. \tag{9}$$

Par conséquent, la section impropre a la dimension 0. Sur chaque génératrice il existe deux points singuliers, et la variété est du type V_2^0. L'hyperplan tangent considéré est fixe le long de la génératrice; il est déterminé en chaque point de la courbe directrice γ par la tangente à cette courbe et par un plan parallèle au plan P qui passe par ce point.

Considérons maintenant le problème de la correspondance par hyperplans tangents parallèles qui conservent les génératrices entre deux variétés réglées V et V^* de la catégorie V_2^0. Soit l'équation de la variété V^* donnée par

$$\bar{r}^* = \bar{\varrho}_0^* + v\bar{a}^* + w\bar{b}^*, \tag{10}$$

ayant comme surface directrice $\bar{\varrho}^* = \bar{\varrho}_0^*(u) + v\bar{a}^*$.

Le centre instantané de rotation de cette variété décrit une courbe γ^* et le plan instantané de rotation est parallèle au plan fixe P^* déterminé par les vecteurs $\bar{a}^* = \text{const.}$ et $\bar{b}^* = \text{const.}$

La correspondance par hyperplans tangents parallèles qui conservent les génératrices peut être établie seulement lorsque sur V et V^* il existe des couples de génératrices correspondantes telles que les hyperplans correspondants à ces génératrices soient parallèles. Soit g et g^* le couple de génératrices correspondantes ayant les verseurs $\bar{b}$ et $\bar{b}^*$.

L'hyperplan tangent H est déterminé sur V par les vecteurs $\bar{\varrho}_0'$, $\bar{a}$, $\bar{b}$; linéairement indépendants. La matrice $(\bar{\varrho}_0', \bar{a}, \bar{b})$ a le rang 3. L'hyperplan correspondant H^* est parallèle à H, donc les vecteurs $\bar{\varrho}_0^{*\prime}$, $\bar{a}^*$, $\bar{b}^*$ forment une variété linéaire parallèle à H.

Si nous choisissons une direction arbitraire $\bar{\alpha}$, telle que $\bar{\varrho}_0'$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{\alpha}$ soient linéairement indépendants, nous pouvons exprimer les éléments de la variété V^* en fonction des éléments de la variété V de la manière suivante:

$$\bar{\varrho}^* = \bar{\varrho} + A\bar{b} + B\bar{\varrho}_0' + C\bar{a} + D\bar{\alpha}, \quad \bar{b}^* = l_1\bar{b} + l_2\bar{\varrho}_0' + l_3\bar{a}.$$

En imposant la condition qu'ils se correspondent par hyperplans tangents parallèles avec la conservation des génératrices, nous nous proposons de trouver les éléments de la variété V^* en fonction des éléments de la variété V.

Pour que la variété V^* soit de la catégorie V_2^0, et les hyperplans tangents correspondants soient parallèles, nous devons avoir les relations sivantes:

$$\bar{\varrho}_0^{*\prime} = a_1^*\bar{b} + a_2^*\bar{\varrho}_0' + a_3^*\bar{a}, \quad \bar{a}^* = b_1^*\bar{b} + b_2^*\bar{\varrho}_0' + b_3^*\bar{a}. \tag{11}$$

En substituant la valeur de $\bar{\varrho}^*$ dans (11) et en annulant les coefficients de $\bar{\alpha}$, nous obtenons le système

$$D_u + Db_4 = 0, \quad D_v + Dc_4 = 0, \quad l_2 t_4 = 0. \tag{12}$$

Dans ce système b_4, c_4, t_4 sont les projections correspondantes des vecteurs $\bar{\alpha}_u(b_i)$, $\bar{\alpha}_v(c_i)$ et $\bar{\varrho}_0''(t_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

La troisième équation du système (12) est vérifiée pour toute valeur réelle de t_4. Nous allons distinguer les deux cas suivants: a) $t_4 \neq 0$, b) $t_4 = 0$.

Cas a. Lorsque $t_4 \neq 0$, il résulte $l_2 = 0$, par conséquent:

La génératrice correspondante g^* est parallèle au plan fixe P et elle a une direction quelconque dans ce plan, étant déterminée par une fonction arbitraire dépendant d'un argument.

En vertu du système (12) la fonction D résulte comme la solution d'une équation à différentielles totales et dépend donc d'une constante arbitraire, car la condition d'intégrabilité totale $b_{4v} = c_{4u}$ est satisfaite par la relation $(\bar{\alpha}_u)_v = (\bar{\alpha}_v)_u$.

Par conséquent, les éléments de la variété V^* mis en correspondance avec les éléments de V par hyperplans tangents parallèles avec la conservation des génératrices, peuvent être déterminés en fonction des éléments de la variété V par l'intermédiaire d'une fonction arbitraire d'un argument, de deux fonctions arbitraires de deux arguments et d'une constante arbitraire.

En écrivant les relations de parallélisme symétriques aux relations (11), dans lesquelles les éléments de V s'expriment à l'aide des éléments de V^*, nous obtenons des résultats symétriques, à savoir: la génératrice g^* sur V

est parallèle au plan fixe P et elle a une direction quelconque dans ce plan, étant déterminée à l'aide d'une fonction arbitraire. Mais si g est parallèle à P^* et g^* est parallèle à P, et en même temps g est contenue dans P, et g^* dans P^*, il résulte que les deux plans P et P^* ont deux points communs dans l'hyperplan impropre, donc ils sont complètement parallèles.

Cas b. Lorsque $t_4 = 0$, les lignes asymptotiques de la surface directrice $\bar{\varrho}$ sont indéterminées, ϱ représente un plan, V — un hyperplan et V^* — un hyperplan parallèle. Par conséquent:

On peut mettre en correspondance par le parallélisme considéré deux variétés V et V^* du type V_2^0, si les plans instantanés de rotation qui engendrent les deux variétés sont des plans complètement parallèles. Les éléments de l'hypersurface V se déterminent en fonction des éléments de l'hypersurface V^* par l'intermédiaire de trois fonctions arbitraires et d'une constante arbitraire.

Institut polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Garnier R., *Leçons de cinématique.* T. **I**, **II**, **III**, Gauthier-Villars, Paris, 1953—1956.
2. Blaschke W., *Sphärische Kinematik.* Springer-Verlag, Berlin, 1962.
3. Mangeron D., Topentcharov V. V., *Cinématique généralisée.* Annuaire I. M. E., Sofia, 1965.
4. Mangeron D., Ciobanu Gh., Braier A., *Problema distribuţiei acceleraţiilor de ordin oarecare în mişcarea sistemelor materiale.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *1—2*, pp. 29—37.
5. Манжерон Д., *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* ДАН СССР, 1955, **102**, *5*, стр. 897—898.
6. Woinaroski R., *Cinematica solidului rigid fără punct fix în spaţiul eucludian cu patru dimensiuni.* St. şi Cerc. de Mec. Apl., (sous presse).
7. Ruscior Şt., *Varietăţi biriglate în S_4.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, V (**IX**), *1—2*, pp. 13—18.
8. — *Sur une classification affine des hypersufaces réglées dans E_4.* Bull. Acad. roy. Belgique, cl. sci., 5e série, 1964, **L**, pp. 309—314.
9. — *Corespondenţe prin hiperplane tangente paralele între două hipersuprafeţe riglate din S_4 afin.* An şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, 1962, **VIII**, *2*, pp. 369—394.

UN MOD GEOMETRIC DE A CARACTERIZA VARIETĂŢILE GENERATE PRIN MIŞCAREA UNUI SOLID PERFECT FĂRĂ PUNCT FIX ÎN S_4

(Rezumat)

Luînd ca punct de plecare un şir de cercetări proprii şi ţinînd seama de rezultatele obţinute într-o lucrare recentă de R. Woinaroski [6], se caracterizează cele cinci varietăţi referitoare la problema din titlu, folosind în acest scop elemente geometrice legate intrinsec de varietatea respectivă şi puse apoi în corespondenţă prin paralelism.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 512.91

EXPONENTIAL FORM OF THE ELEMENTS OF SOME ALGEBRAS

BY

ALFRED BRAIER

1. In [1]...[4] was studied the symbolic representation of some functions of a scalar variable by the elements of an algebra on the real field and was shown its applications in the Mechanics of linear vibrations, particularly in linear feedback systems.

The main object of this Note is to emphasize an exponential form for the elements of some associative algebras with unit, which are important for studying the steady-state response of linear systems under modulated driving functions.

Let ε_i, $(i = 1, 2, ..., n)$, be the element of the basis of such an algebra and u its unit. Then defining

$$e^{k_i \varepsilon_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_i^k}{k!} \varepsilon_i^k, \tag{1}$$

where x_i is real, $\varepsilon_i^0 = u$ and expressing, by means of the multiplication table, the powers of ε_i through the basis elements, (1) becomes $e^{x_i \varepsilon_i} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(i)} \varepsilon_j$, where the scalars $\varphi_j^{(i)} = \varphi_j^{(i)}(x_i)$ represent sums of real power series, when they are convergent.

Obviously that, (1),

$$e^{xu} = e^x u, \quad (u^2 = u). \tag{2}$$

2. Let us consider the monomial algebra with $n = 2$

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = \lambda \varepsilon_1, \tag{3}$$

with λ real and $u = \varepsilon_1$.

The element

$$w = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 \tag{4}$$

represents symbolically the function $f(t)$ in the following manner.

a) When $\lambda = -1$ (complex algebra), a_1 and a_2 being arbitrary, (4) represents the function

$$f(t) = Ae^{ht} \sin(\omega t + \alpha), \tag{5}$$

where

$$a_1 = A\cos\alpha, \quad a_2 = A\sin\alpha. \tag{6}$$

b) When $\lambda = 0$ (dual algebra), $a_1 \neq 0$ and a_2 arbitrary, (4) represents the function

$$f(t) = (At + B)\,e^{ht}, \tag{7}$$

where

$$a_1 = A, \quad a_2 = B. \tag{8}$$

c) When $\lambda = -1$ (direct sum of real algebras) and $a_1 > 0$, $a_1 > a_2$, (4) represents the function

$$f(t) = Ae^{ht} \sinh(\omega t + \alpha), \tag{9}$$

where

$$a_1 = A\cosh\alpha, \quad a_2 = A\sinh\alpha; \tag{10}$$

if $a_1 < a_2$,

$$f(t) = e^{ht}(a_1 \cosh\omega t + a_2 \sinh\omega t), \tag{9'}$$

and if $a_1 = a_2$, (4) is divisor of zero and has not correspondent in the class (9') of functions.

Since ε_1 is the unit of the algebra (3), hence in view of (2) one obtains for every real x

$$e^{x\varepsilon_1} = e^x\,\varepsilon_1. \tag{11}$$

Now, in virtue of (1) and of the multiplication table (3), we get for every real y

$$e^{y\varepsilon_2} = \varphi(y)\,\varepsilon_1 + \psi(y)\,\varepsilon_2, \text{ with } \varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}\lambda^k}{(2k)!} \text{ and } \psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\lambda^k. \tag{12}$$

We see that

$$\frac{d\varphi}{dy} = \lambda\psi, \quad \frac{d\psi}{dy} = \varphi; \quad \varphi(0) = 1, \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 = 0, \tag{13}$$

from which we get immediately

$$\begin{cases} \varphi(y) = \cos(\sqrt{|\lambda|}\,y), \ \psi(y) = \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \sin(\sqrt{|\lambda|}\,y), & \text{if } \lambda < 0, \\ \varphi(y) = 1, \qquad \psi(y) = y, & \text{if } \lambda = 0, \\ \varphi(y) = \cosh(\sqrt{\lambda}\,y), \quad \psi(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \sinh(\sqrt{\lambda}\,y), & \text{if } \lambda > 0. \end{cases} \tag{14}$$

After elimination of y and integration, the system (13) results in

$$\varphi^2(y) - \lambda\,\psi^2(y) = 1\,. \tag{15}$$

We obtain, also, the functional equations

$$\varphi(y+z) = \varphi(y)\,\varphi(z) + \lambda\psi(y)\,\psi(z),\quad \psi(y+z) = \varphi(y)\,\psi(z) + \psi(y)\,\varphi(z). \tag{16}$$

Now taking into account the definition (1) and (11), (12), one proves that

$$e^{x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2} = e^{x\varepsilon_1}\,e^{y\varepsilon_2} = e^x\,[\varphi(y)\,\varepsilon_1 + \psi(y)\,\varepsilon_2], \tag{17}$$

so that we may pose the problem of expressing the element (4) of the algebra (3) under the exponential form (17). It follows that

$$a_1 = e^x\,\varphi(y),\quad a_2 = e^x\,\psi(y)\,. \tag{18}$$

Using (15), (18) results in

$$e^x = \sqrt{a_1^2 - \lambda a_2^2}\,, \tag{19}$$

i. e., only the elements (4) with

$$a_1^2 > \lambda a_2^2 \tag{20}$$

can take the above introduced exponential form; if $\lambda \leqslant 0$, (20) is evermore satisfied. If $a_1^2 = \lambda a_2^2$ (possible with $\lambda > 0$), the respectiv element becomes divisor of zero.

When $\lambda = -1$, (6), (18), (14_1) and (19) lead to the well known exponential form of the complex numbers (4), attached to the function (5), namely $A(\cos\alpha\,\varepsilon_1 + \sin\alpha\,\varepsilon_2) = Ae^{\alpha\varepsilon_2}$ $(\varepsilon_2^2 = -\varepsilon_1)$.

When $\lambda = 0$, we obtain the known exponential form of the dual numbers which can be attached to the function (7), namely $w = A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 = Ae^{(B/A)\,\varepsilon_2}$, $(\varepsilon_2^2 = 0)$, and when $\lambda = 1$ — the exponential form for the element attached to the function (9), $w = A(\cosh\varepsilon_1 + \sinh\varepsilon_2) = Ae^{\alpha\varepsilon_2}$, $(\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1)$.

3. In [3] was shown that the algebra attached to a product of functions of a real variable is the direct product of the algebras attached to the same functions and there was also indicated applications to the symbolic representation of driving functions with amplitude modulation. The functions

$$\begin{gathered} f(t) = Ae^{ht}\sin(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta),\quad f(t) = (At + B)\,e^{ht}\sin(\omega t + \alpha), \\ f(t) = Ae^{ht}\sinh(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta) \end{gathered} \tag{21}$$

are representable through direct products of algebras of type (3) $(\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1',\ \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' = \varepsilon_2',\ \varepsilon_2'^2 = \lambda'\varepsilon_1';\ \ldots,\ \varepsilon_2''^2 = \lambda''\varepsilon_2'')$. The associative algebra of order $n = 4$ which results has the multiplication table

(22)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_2	ε_2	$\lambda''\varepsilon_1$	ε_4	$\lambda''\varepsilon_3$
ε_3	ε_3	ε_4	$\lambda'\varepsilon_1$	$\lambda'\varepsilon_2$
ε_4	ε_4	$\lambda''\varepsilon_3$	$\lambda'\varepsilon_2$	$\lambda'\lambda''\varepsilon_1$

The relation (1) and the multiplication table (22) lead to

$$(23)\quad \begin{cases} e^{X\varepsilon_1} = e^X\varepsilon_1, \quad e^{Y\varepsilon_2} = \varphi''(Y)\varepsilon_1 + \psi''(Y)\varepsilon_2, \\ e^{Z\varepsilon_3} = \varphi'(Z)\varepsilon_1 + \psi'(Z)\varepsilon_3, \quad e^{T\varepsilon_4} = \Phi(T)\varepsilon_1 + \Psi(T)\varepsilon_4, \end{cases}$$

where φ'', ψ''; φ', ψ'; Φ, Ψ are functions of type (14), which correspond respectively to $\lambda = \lambda''$, $\lambda = \lambda'$ and $\lambda = \lambda'\lambda''$.

By means of direct calculation one proves that,

$$(24)\quad e^{X\varepsilon_1 + Y\varepsilon_2 + Z\varepsilon_3 + T\varepsilon_4} = e^{X\varepsilon_1} e^{Y\varepsilon_2} e^{T\varepsilon_3} e^{\varepsilon_4} \quad \left(= \sum_{i=1}^{1} a_i \varepsilon_i\right).$$

For an element of the algebra (22) follow the relations which permit to establish his exponential form, namely

$$(25)\quad \begin{cases} a_1 = e^X[\varphi'(Z)\varphi''(Y)\Phi(T) + \lambda'\lambda''\psi'(Z)\psi''(Y)\Psi(T)], \\ a_2 = e^X[\varphi'(Z)\psi''(Y)\Phi(T) + \lambda'\psi'(Z)\varphi''(Y)\Psi(T)], \\ a_3 = e^X[\psi'(Z)\varphi''(Y)\Phi(T) + \lambda''\varphi'(Z)\psi''(Y)\Psi(T)], \\ a_4 = e^X[\psi'(Z)\psi'(Y)\Phi(T) + \varphi'(Z)\varphi''(Y)\Psi(T)]. \end{cases}$$

Using relations of type (15) it results

$$(26)\quad \begin{cases} a_1^2 - \lambda'' a_2^2 - \lambda'(a_3^2 - \lambda'' a_4^2) = e^{2X}[\Phi^2(T) + \lambda'\lambda''\Psi^2(T)], \\ a_1 a_4 - a_2 a_3 = e^{2X}\Phi(T)\Psi(T), \end{cases}$$

whence we obtain $e^{2X}\Phi^2(T)$, $e^{2X}\Psi^2(T)$, and finally (see (15))

$$(27)\quad e^{2X} = \sqrt{[a_1^2 - \lambda'' a_2^2 - \lambda'(a_3^2 - \lambda'' a_4^2)]^2 - 4\lambda'\lambda''(a_1 a_4 - a_2 a_3)^2}.$$

Therefore, only the elements of the algebra (22) characterised by

$$28)\quad [a_1^2 - \lambda'' a_2^2 - \lambda'(a_3^2 - \lambda'' a_4^2)]^2 - 4\lambda'\lambda''(a_1 a_4 - a_2 a_3)^2 > 0$$

can take the exponential forme (24); the equality with zero is proper to the divisors of zero.

In view of (14), the equation (26_2) lead to $T = 0$ for the elements characterised by

(29) $$a_1 a_4 = a_2 a_3 \text{ [1]};$$

therefore, their exponential form (24) becomes

(24′) $$e^{X^*\varepsilon_1+Y^*\varepsilon_2+Z^*\varepsilon_3} = e^{X^*\varepsilon_1} e^{Y^*\varepsilon_2} e^{Z^*\varepsilon_3} \left(= \sum_{i=1}^{4} a_i \varepsilon_i\right), \quad a_1 a_4 = a_2 a_3,$$

with

(27′) $$e^{X^*} = \sqrt{a_1^2 - \lambda'' a_2^2 - \lambda' (a_3^2 - \gamma'' a_4^2)}.$$

Then

(25′) $$\begin{cases} a_1 = e^{X^*} \varphi'(Z^*) \varphi''(Y^*), & a_2 = e^{X^*} \varphi'(Z^*) \psi''(Y^*), \\ a_3 = e^{X^*} \psi'(Z^*) \varphi''(Y^*), & a_4 = e^{X^*} \psi'(Z^*) \psi''(Y^*), \end{cases}$$

whence

(30) $$\frac{\psi'(Z^*)}{\varphi'(Z^*)} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_4}{a_2}, \quad \frac{\psi''(Y^*)}{\varphi''(Z^*)} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3}.$$

In order to determine Z^* and Y^*, we must use (14) (taking into account the character of λ' and λ'', and the fact that

(31) $$\begin{cases} \operatorname{sign}[\varphi'(Z^*) \psi'(Z^*)] = \operatorname{sign}(a_1 a_2) = \operatorname{sign}(a_3 a_4), \\ \operatorname{sign}[\varphi''(Y^*) \psi''(Z^*)] = \operatorname{sign}(a_1 a_3) = \operatorname{sign}(a_2 a_4). \end{cases}$$

With a view to get the exponential form of the elements for which $a_1 a_4 \neq a_2 a_3$, we should first notice that (see (26_2)) it is possible to determine T by choosing

(32) $$\Phi(T) > 0, \quad \operatorname{sign} \Psi(T) = \operatorname{sign}(a_1 a_4 - a_2 a_3).$$

Equations (26) give for $\lambda' \lambda'' \neq 0$

(33) $$\Phi^2(T), \ \lambda' \lambda'' \Psi^2(T) = \frac{a_1^2 - \lambda'' a_2^2 - \lambda' (a_3^2 - \lambda'' a_4^2) \pm e^{2X}}{2e^{2X}},$$

where e^{2X} has the expression (27); one obtains T taking (32) and (14) into account. Returning to system (25) we get easily the expressions of the following products of functions, wich we denote by $b_1, \ldots, b_4$:

(34) $$\begin{cases} b_1 = e^X \varphi'(Z) \varphi''(Y) = a_1 \Phi(T) - \lambda' \lambda'' a_4 \Psi(T), \\ b_2 = e^X \varphi'(Z) \psi''(Y) = a_2 \Phi(T) - \lambda' a_3 \Psi(T), \\ b_3 = e^X \psi'(Z) \varphi''(Y) = a_3 \Phi(T) - \lambda'' a_2 \Psi(T), \\ b_4 = e^X \psi'(Z) \psi''(Y) = a_4 \Phi(T) - a_1 \Psi(T). \end{cases}$$

---

[1]) In [3] has been pointed out that the elements of the algebra (22) attached to the functions (21) answer the conditions (29); for the functions (21) this fact was remarked in [5] and his meaning in applications, analysed in [6].

Using now relations similar to (30) and (31), (where $b_1,...,b_4$ (34) take the place of $a_1,...,a_4$), we obtain Z and Y.

4. a) If $\lambda' = \lambda'' = -1$, the algebra (22), direct product of complex algebras (see also [3]), becomes the algebra of the $\mathcal{P}$-polynions [1], [5], able to represent symbolically the functions (21_1), with $w = \sum_{i=1}^{4} a_i \varepsilon_i$, where

$$(35) \qquad \begin{cases} a_1 = A\cos\alpha\cos\beta, & a_2 = A\cos\alpha\sin\beta, \\ a_3 = A\sin\alpha\cos\beta, & a_4 = A\sin\alpha\sin\beta, \end{cases} \qquad (a_1 a_4 = a_2 a_3).$$

Now the functions φ', ψ', φ'', ψ'' have the expressions (14_1) and the use of (27'), (30) and (31) lead to

$$(36) \qquad e^{X^*} = A, \quad Z^* = \alpha, \quad Y^* = \beta;$$

hence, the element (35) can always take the form

$$(36') \qquad w = A\,\varepsilon_1\, e^{\alpha\varepsilon_3}\, e^{\beta\varepsilon_2}.$$

This exponential form, like other following expressions, have been obtained with some small changes in [5], [6], by a direct way, but using there some specific properties of the functions (21_1).

When $a_1 a_4 \neq a_2 a_3$, then (27) results in

$$(37) \qquad e^X = \sqrt[4]{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - 4(a_1 a_4 - a_2 a_3)^2},$$

and (33) combined with (14) leads to

$$(38) \qquad \cosh T,\ \sinh T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a_1 + a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2} \pm \sqrt{(a_1 - a_4)^2 + (a_2 + a_3)^2}\right) e^{-X};$$

in view of (14) and (38), (34) provides

$$(39) \qquad \begin{cases} \tan Y = \dfrac{a_2 + a_3 \tanh T}{a_1 - a_4 \tanh T} \left(= \dfrac{a_4 - a_1 \tanh T}{a_2 + a_3 \tanh T}\right), \\ \tan Z = \dfrac{a_3 + a_2 \tanh T}{a_1 - a_4 \tanh T} \left(= \dfrac{a_4 - a_1 \tanh T}{a_2 + a_3 \tanh T}\right). \end{cases}$$

b) If $\lambda' = 0$ and $\lambda'' = -1$, the algebra (22) is the direct product of dual and complex algebras, i. e. Sobrero's algebra [3], [7], able to represent simbolically the functions (21_2), with

$$(40) \qquad a_1 = A\cos\alpha, \quad a_2 = A\sin\alpha, \quad a_3 = B\cos\alpha, \quad a_4 = B\sin\alpha, \qquad (a_1 a_4 = a_2 a_3).$$

Now φ', ψ' have the form (14_2) and φ'', ψ'' — the form (14_1). One obtains

$$(41) \qquad e^{X^*} = A, \quad Z^* = \frac{B}{A}, \quad Y^* = \alpha,$$

hence the element (40) can always take the form

(41′) $$w = A\varepsilon_2\, e^{(B/A)\varepsilon_3}\, e^{\alpha\varepsilon_2}.$$

If $a_1 a_4 \neq a_2 a_3$, then (see (27))

(42) $$e^X = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

In view of the form (14_2) of Φ and Ψ, the system (26) as well as (34) results in

(43) $$T = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2}, \quad Z = \frac{a_1 a_3 + a_2 a_4}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \tan Y = \frac{a_2}{a_1},$$

which lead to the exponential form (24).

In the same way can be obtained the exponential form of the Q-polynions [5] ($\lambda' = \lambda'' = 1$), the $\mathcal{R}$-polynions [5] ($\lambda' = 1$, $\lambda'' = -1$) capable to represent the functions (21_3), etc.

5. In [2] was shown that the functions

(44) $$f(t) = [A + B\sin(\omega t + \alpha)]\, e^{\alpha t}$$

are symbolically representable through the elements of the algebra

(45)

	ε_1	ε_2	ε_3
ε_1	ε_1	0	0
ε_2	0	ε_2	ε_3
ε_3	0	ε_3	$-\varepsilon_2$

with

(46) $$a_1 = A, \quad a_2 = B\cos\alpha, \quad a_3 = A\sin\alpha.$$

In view of (1) one obtains easily

(47) $$e^{x\varepsilon_1} = e^x\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad e^{y\varepsilon_2} = \varepsilon_1 + e^y\,\varepsilon_2, \quad e^{z\varepsilon_3} = \varepsilon_1 + \cos z\,\varepsilon_2 + \sin z\,\varepsilon_3,$$

which allows the exponential writing of an element

(48) $$e^{x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3} = e^{x\varepsilon_1}\, e^{y\varepsilon_2}\, e^{z\varepsilon_3} = e^x\,\varepsilon_1 + e^y(\cos z\,\varepsilon_2 + \sin z\,\varepsilon_3)\left(= \sum_{i=1}^{3} a_i\,\varepsilon_i\right),$$

with (see (46))

(49) $$e^x = a_1 = A, \quad e^y = \sqrt{a_2^2 + a_3^2} = B, \quad \tan z = \frac{a_3}{a_2} = \tan\alpha,$$

which requires $a_1 > 0$.

The results (48), (49) are of interest in the symbolic representation of the driving functions $[A + B\sin(\omega t + \alpha)]\, e^{ht}\sin(pt + \beta)$, which we will discuss in the next future.

6. The exponential representation of the elements of algebras capable to represent symbolically various driving functions is most valuable for studying the steady-state response of linear constant-coefficient systems when these excitations act on their input. The symbolic representation of the output results as quotient between that of the driving function and the system function, both elements of the same algebra on the real field [1]...[6]; generally, the lattest satisfies not restrictions like (29) in the case of algebra (23).

Their exponential form simplifies the carry out of the operation, but in the first place underlines the characteristics of the response, because the quantities which occur in the exponential form directly reflect amplitudes, phase angles, etc. (see (21_1) and (6′), or (21_2) and (41′) etc.).

However this requires a distinct detailed study for each important type of driving functions.

Received the 23 XI 1965

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *Sur la représentation par des nombres hypercomplexes des fonctions réeles d'une variable.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV),** *1—2,* pp. 89—96.
2. — *La représentation symbolique des fonctions qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV),** *3—4,* pp. 93—100.
3. — *Représentation symbolique des fonctions.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI),** *3—4,* pp. 63—70.
4. — *A Symbolic Study by Means of Real Algebras of the Response of Linear Systems.* Paper presented in the scientific session of the Polytechnic Institute „Gh. Gheorghiu-Dej" of Bucarest, May 28—30, 1966.
5. Braier A., Rosman H., *Utilizarea polinionilor pentru studiul unor mişcări forţate ale sistemelor liniare.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV),** *1—2,* pp. 309—320.
6. — *Mişcarea forţată a oscilatorului liniar supus la perturbaţii modulate armonic în amplitudine.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI),** *1—2,* pp. 315—325.
7. Enescu I., *Asupra algebrelor polinomiale (II).* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI),** *1—2,* pp. 17—20.

FORMA EXPONENŢIALĂ A ELEMENTELOR UNOR ALGEBRE

(Rezumat)

Se stabileşte o formă exponenţială de scriere a elementelor unor algebre monomiale, asociative şi cu unitate pe corpul real. Aceste algebre permit studiul pe cale simbolică a mişcării forţate a sistemelor liniare cu parametri constanţi, sub acţiunea unui mare număr de clase de perturbaţii modulate [1]...[6].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

Д. К. 513.73; 532.521

ВАРИАЦИЯ НАПРАВЛЕНИЯ СКОРОСТИ В СЛОИСТНО НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НА СЕМЕЙСТВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К. АКЕР

1. *Общие положения*

Мы рассматриваем в трехмерном евклидовом пространстве семейство поверхностей $S(\lambda)$ удовлетворяющих условиям регулярности.

Изучение течения на таком семействе поверхностей проводится при помощи присоединения к каждой поверхности $S(\lambda)$ прямоугольного локального трехгранника $T(\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3)$ такого, чтобы $\mathcal{J}_2$ совпадало с ортом нормали поверхности.

Мы связываем с течением еще один прямоугольный локальный трехгранник $T_1(I_1I_2I_3)$ такой, чтобы в каждой точке какой либо поверхности $S(\lambda)$ трехгранники T и T_1 имели общими элементами начало M и орты $\mathcal{J}_2, I_2, (\mathcal{J}_2 = I_2)$, причем орт I_3 выбирается так, чтобы вектор скорости $\bar{v} = vI_3$. Такой выбор возможен, так как в рассматриваемом течении частица, находящаяся в данном моменте времени на одной из поверхностей, не покидает эту поверхность, так что $\bar{v} \perp \mathcal{J}_2$, $\bar{v} \perp I_2$.

Вариация трехгранника T с началом M дана формулами:

$$\mathrm{d}\bar{M} = \tilde{\omega}^i \mathcal{J}_i,\ \mathrm{d}\mathcal{J}_i = \bar{\Omega} \times \mathcal{J}_i,\ \text{где}\ \bar{\Omega} = \pi\mathcal{J}_1 + \varkappa\mathcal{J}_2 + \varrho\mathcal{J}_3,$$
$$\text{a}\ \pi = \tilde{\pi}_i\omega^i,\ \varkappa = \tilde{\varkappa}_i\omega^i,\ \varrho = \tilde{\varrho}_i\omega^i. \tag{1.1}$$

Вариация трехгранника T_1 с тем же началом M дана формулами:

$$\mathrm{d}\bar{M} = \omega^i I_i,\ \mathrm{d}I_i = \bar{\omega} \times I_i,\ \text{где}\ \bar{\omega} = pI_1 + qI_2 + rI_3,$$
$$\text{a}\quad p = p_i\omega^i + p_t\,\mathrm{d}t,\ q = q_i\omega^i + q_t\,\mathrm{d}t,\ r = r_i\omega^i + r_t\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Обозначая через $\theta(\bar{M}, t)$ угол между I_3 и $\mathcal{J}_3$ имеем

$$(1.3)\qquad I_3 = \mathcal{J}_3\cos\theta + \mathcal{J}_1\sin\theta,\quad I_1 = -\mathcal{J}_3\sin\theta + \mathcal{J}_1\cos\theta,\quad I_2 = \mathcal{J}_2.$$

Связь между формами ω^i, p, q, r и $\tilde{\omega}^i, \pi, \varkappa, \varrho$ получается из

$$\mathrm{d}\bar{M} = \tilde{\omega}^i \mathcal{J}_i = \omega^i I_i \text{ и } \mathrm{d}I_i = \bar{\omega}\times I_i \text{ (или } \mathrm{d}\mathcal{J}_i = \bar{\Omega}\times\mathcal{J}_i),$$

на основании соотношений (1.3):

$$(1.4)\qquad \pi = p\cos\theta + r\sin\theta,\quad \varkappa = q - \mathrm{d}\theta,\quad \varrho = -p\sin\theta + r\cos\theta,$$

$$(1.4')\qquad \omega^1 = \tilde{\omega}^1\cos\theta - \tilde{\omega}^3\sin\theta,\quad \omega^2 = \tilde{\omega}^2,\quad \omega^3 = \tilde{\omega}^1\sin\theta + \tilde{\omega}^3\cos\theta.$$

Решая соотношения (1.4) относительно p, q, r и используя соотношения (1.3) и (1.4′) мы получаем (см. [1]):

$$(1.5)\qquad \begin{cases} r_1 = \varrho_1\cos^2\theta + (\pi_1 - \varrho_3)\sin\theta\cos\theta - \pi_3\sin^2\theta, \\ r_2 = \pi_2\sin\theta + \varrho_2\cos\theta,\quad r_3 = \varrho_3\cos^2\theta + (\pi_3 + \varrho_1)\sin\theta\cos\theta + \pi_1\sin^2\theta, \\ p_1 = \pi_1\cos^2\theta - (\pi_3 + \varrho_1)\sin\theta\cos\theta + \varrho_3\sin^2\theta,\quad p_2 = \pi_2\cos\theta - \varrho_2\sin\theta, \\ p_3 = \pi_3\cos^2\theta + (\pi_1 - \varrho_3)\sin\theta\cos\theta - \varrho_1\sin^2\theta, \\ q_1 = \varkappa_1\cos\theta - \varkappa_3\sin\theta + \theta_1,\ q_2 = \varkappa_2 + \theta_2,\ q_3 = \varkappa_1\sin\theta + \varkappa_3\cos\theta + \theta_3, \\ p_t = 0,\quad q_t = \theta_t,\quad r_t = 0. \end{cases}$$

Если $I = [\omega^2, \omega^3]I_1 + [\omega^3, \omega^1]I_2 + [\omega^1, \omega^2]I_3$, то (см. [1], [2]):

$$(1.6)\qquad \bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla)\bar{v} = v(q_t I_1 - p_t I_2) + v_t I_3 + \frac{1}{\tau}[\bar{v}.I, \mathrm{d}\bar{v}],$$

где $\tau = [\omega^1, \omega^2, \omega^3] \neq 0$ и $\mathrm{d}\bar{v} = v(qI_1 - pI_2) + I_3\mathrm{d}v$, следовательно:

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \bar{a} = v(q_t + vq_3)I_1 - v(p_t + vp_3)I_2 + (v_t + vv_3)I_3; \text{ также} \\ \mathrm{div}\,\bar{v} = \dfrac{1}{\tau}[I.\mathrm{d}\bar{v}] = v_3 + v(q_1 - p_2), \\ \mathrm{rot}\,\bar{v} = \dfrac{1}{\tau}[I\times\mathrm{d}\bar{v}] = (v_2 + vp_3)I_1 + (vq_3 - v_1)I_2 - v(p_1 + q_2)I_3, \\ \mathrm{grad}\,v = \dfrac{1}{\tau}[I, \mathrm{d}v] = v_1 I_1 + v_2 I_2 + v_3 I_3. \end{cases}$$

Наше исследование мы основываем на объединении в одной внешней дифференциальной системе всех условий, при которых имеет место течение.

Геометрические условия:

$$p_t = r_t = 0, \tag{A.1}$$

— из установившегося характера орта I_2.

Если мы изучаем течение на определенном многообразии, находящемся в области течения, то следует добавить и условия, выражающие, что начало M трехгранника T движется исключительно на многообразии.

Например, если мы изучаем течение исключительно на некоторой поверхности семейства, то добавляем $\tilde{\omega}^2 \equiv 0$; если же мы изучаем течение исключительно на ортогональной траектории семейства поверхностей, то добавляем $\tilde{\omega}^1 \equiv 0$, $\tilde{\omega}^3 \equiv 0$, и. т. д.

$$\begin{cases} \mathrm{d}(p_i\omega^i + p_t\,\mathrm{d}t) = [r_i\omega^i + r_t\,\mathrm{d}t,\ q_i\omega^i + q_t\,\mathrm{d}t], \\ \mathrm{d}(q_i\omega^i + q_t\,\mathrm{d}t) = [p_i\omega^i + p_t\,\mathrm{d}t,\ r_i\omega^i + r_t\,\mathrm{d}t], \\ \mathrm{d}(r_i\omega^i + r_t\,\mathrm{d}t) = [q_i\omega^i + q_t\,\mathrm{d}t,\ p_i\omega^i + p_t\,\mathrm{d}t], \end{cases} \tag{A.2}$$

— уравнения структур.

Механические условия:

$$\begin{gathered} vq_t + v^2q_3 - \varphi_1 = -\frac{1}{\varrho}\tilde{p}_1, \quad v(p_t + vp_3) + \varphi_2 = \frac{1}{\varrho}\tilde{p}_2, \\ v_t + vv_3 - \varphi_3 = -\frac{1}{\varrho}\tilde{p}_3, \end{gathered} \tag{A.3}$$

— уравнение (движения) Эйлера, проектированное на оси I_1, I_2, I_3; мы рассматриваем силу, происходящую из функции $\varphi(\bar{M}, t)$.

$$\tilde{\varrho}_t + v\tilde{\varrho}_3 + \tilde{\varrho}[v(q_1 - p_2) + v_3] = 0, \tag{A.4}$$

— уравнение неразрывности.

$$f(\tilde{\varrho}, \tilde{p}) = 0, \tag{A.5}$$

— уравнение состояния; f — известная функция.

$$\mathrm{d}v = v_i\omega^i + v_t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\varphi = \varphi_i\omega^i + \varphi_t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}_i\omega^i + \tilde{\varrho}_t\,\mathrm{d}t, \tag{A.6}$$

$$(\mathrm{d}\tilde{p} = \tilde{p}_i\omega^i + \tilde{p}\,\mathrm{d}t)$$

— уравнение, заключенное в скобки, является алгебраическим следствием предыдущего и последующих ((A.7) и (A.8)).

Добавляем и

$$f_{\varrho}\tilde{\mathrm{d}}\varrho + f_{p}\tilde{\mathrm{d}}p = 0, \tag{A.7}$$

откуда

$$f_{\varrho}\tilde{\varrho}_i + f_{p}\tilde{p}_i = 0, \quad f_{\varrho}\tilde{\varrho}_t + f_{p}\tilde{p}_t = 0. \tag{A.8}$$

Внешняя дифференциальная система (A.1)...(A.8) соответствует течению на семействе голономных поверхностей, если добавляется условие голономности $\tilde{\mathrm{d}}\omega^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \tilde{\omega}^2)$ и соотношения, получающиеся из канонизирования трехгранника $T(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_3)$ (взятые вместе с соотношениями между прежними и новыми, введенными посредством канонизации, переменными величинами — когда это имеет место).

Условия совместности для изучаемого течения — когда оно существует — мы получаем после замыкания внешней дифференциальной системы,

а) заменяя в уравнениях все формы через их выражения в базисе $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \mathrm{d}t$ (формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \mathrm{d}t$ связаны между собой или двумя линейными соотношениями, или одним, или ни одним, смотря по тому, каким является движение: одномерным, двухмерным или трехмерным),

б) приводя подобные члены в уравнениях, полученных после предыдущей замены, и

в) обращая в нуль коэффициенты независимых форм.

Получая таким образом условия совместности из внешней дифференциальной системы, отражающей, с одной стороны, все геометрические условия и, с другой стороны, лишь механические условия общего течения (в рамках исследованного класса течений), мы назовем условиями совместности (α).

Эти условия не содержат всех условий совместности, полученных из продолженной внешней системы, они не содержат также и условий совместности, полученных из уравнений, характеризующих кинематически и динамически частное течение рассматриваемого класса. Но мы замечаем, что эти условия совместности (α) принадлежат всегда совокупности условий совместности существующих течений исследуемого класса, причем эта совокупность может быть более обширной.

2. *Течение в семействе цилиндров*

В изучаемом здесь случае поверхности семейства являются цилиндрами $C(\lambda)$, для которых направление образующей не изменяется при переходе от одного цилиндра к другому. К внешней дифференциальной системе, рассмотренной выше, мы должны добавить и другие уравне-

ния, которые отражают частные геометрические условия, при которых имеет место исследуемое течение. Мы не добавим с самого начала условие голономности и соотношения, полученные из канонизации трехгранника $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3$, так как из специфического способа вариации трехгранника T на семействе голономных цилиндрических поверхностей, мы получим также и условия, выражающие то, что поверхности голономны, что они развертывающиеся и что они цилиндрические, а также и то, что $\mathcal{J}_3$ трехгранника T находится на образующей цилиндра.

В действительности, если вообще $d\mathcal{J}_1 = \varrho\mathcal{J}_2 - \varkappa\mathcal{J}_3$, $d\mathcal{J}_2 = -\varrho\mathcal{J}_1 + \pi\mathcal{J}_3$, $d\mathcal{J}_3 = \varkappa\mathcal{J}_1 - \pi\mathcal{J}_2$, принимая во внимание то, что изменение орта $\mathcal{J}_3$, находящегося на образующей, равно нулю в любом направлении, тогда $d\mathcal{J}_3 = 0$ при произвольных и независимых $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{\omega}^3$, следовательно

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0.$$

При перемещении начала M трехгранника T в направлении образующей, $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ не изменяется, следовательно $d\mathcal{J}_1 = \varrho_3\tilde{\omega}^3\mathcal{J}_2 = 0$ откуда $\varrho_3 = 0$; а при перемещении начала M в направлении $\mathcal{J}_1$, $(\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^3 = 0)$, $d\mathcal{J}_1 = \varrho_1 = \varrho_1\tilde{\omega}_1\mathcal{J}_2$, следовательно $\varrho_1 = \pm 1/R$ (кривизна нормального сечения цилиндра плоскостью, нормаль которой образующая цилиндра); наконец, при перемещении начала M в направлении $\mathcal{J}_2$, $(\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^3 = 0)$, $d\mathcal{J}_2 = -\varrho_2\omega_1\mathcal{J}_1$, следовательно $\varrho_2 = \pm 1/R_n$ (кривизна ортогональной траектории семейства цилиндров).

Из предыдущих условий следует $\pi_i = \varkappa_i = \varrho_3 = 0$, $\varrho_1 = \pm 1/R$, $\varrho_2 = \pm 1/R_n$; тогда из соотношений (1.5) мыпо лучаем:

(B.1) $r_1 = \pm\frac{1}{R}\cos^2\theta$, (B.2) $r_3 = \pm\frac{1}{R}\sin\theta\cos\theta$, (B.3) $p_1 = \mp\frac{1}{R}\sin\theta\cos\theta$,

(B.4) $p_3 = \mp\frac{1}{R}\sin^2\theta$, (B.5) $q_1 = \theta_1$, (B.6) $q_3 = \theta_3$,

(B.7) $r_2 = \pm\frac{1}{R_n}\cos\theta$, (B.8) $p_2 = \mp\frac{1}{R_n}\sin\theta$, (B.9) $q_2 = \theta_2$.

Из (B.1)...(B.6) получаются легко следствия:

а) $r_3 + p_1 = 0 \rightarrow \varrho_3 + \pi_1 = 0$

— условия голономности $(\mathrm{d}\tilde{\omega}^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \tilde{\omega}^2))$;

б) $$r_1 p_3 - r_3 p_1 = 0 \rightarrow \varrho_1 \pi_3 - \varrho_3 \pi_1 = 0$$

— соотношение выражающее равенство нулю гауссовой кривизны поля $(\mathcal{J}_2)$; уравнение, дающее экстремумы нормальной кривизны $1/R$ этого поля, следующее:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}(\varrho_1 - \pi_3) + \varrho_3 \pi_1 - \varrho_1 \pi_3 - \frac{1}{4}(\varrho_3 + \pi_1)^2 = 0;$$

в) $$\varkappa_3 = \pi_3 = 0$$

— достаточное условие для того, чтобы поверхности семейства были линейчатыми $(\mathrm{d}\mathcal{J}_3 = 0)$ в направлении $\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^2 = 0$;

г) $$\varkappa_1 = \pi_1 = 0, \quad (\varkappa_3 = \pi_3 = 0)$$

— равенство нулю вариации в любом направлении на поверхности семейства, что является характерным для цилиндра.

Так как условия (B.1)...(B.9) содержат θ, θ_t, то следует добавить к внешней дифференциальной системе также и уравнения:

(B.10) $\mathrm{d}\theta = \theta_i \omega^i + \theta_t \mathrm{d}t$, (B.11) $q_t = \theta_t$.

Замыкая систему (*), образованную из уравнений, выражающих, что $\mathcal{J}_2$ и I_2 являются ортами нормали цилиндра $C(\lambda)$, из уравнений (B.1)...(B.11), а также из уравнений (A.1)...(A.8) внешней дифференциальной системы, мы можем найти условия совместности (α), относящиеся к течению на семействе цилиндров $C(\lambda)$.

3. *Некоторые выводы, касающиеся вариации направления скорости*

Все условия совместности, полученные из системы (*), могут быть использованы в различных исследованиях рассматриваемого течения (см. [2]). Например, исследуя вариацию направления скорости, мы соберем сведения, даваемыми всеми этими условиями совместности, относительно скалярного поля $\theta(\overline{M}, t)$.

Прежде всего подчеркнем, что: θ_t — скорость вариации направления вектора скорости в какой либо точке; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — скоростями вариации направления вектора скорости в данный момент времени, а именно: θ_3 — вдоль линии тока $(l.c)_3 : \omega^1 = \omega^2 = \mathrm{d}t = 0$, θ_3 — вдоль допустимой линии поля (I_1), $(l.c)_1 : \omega^2 = \omega^3 = \mathrm{d}t = 0$, аналогичной линии тока, θ_2 — вдоль допустимой линии поля (I_2), $(l.c)_2 : \omega^1 = \omega^3 = \mathrm{d}t = 0$, аналогичной линии тока.

Некоторые геометрические истолкования функций p_i, q_i, r_i, $(i = 1, 2, 3)$, как, например, истолкования связанные с кривизной, кру-

чением и с направляющими косинусами главной нормали или бинормали допустимой линии $(l.a)_i$, к которым отчасти добавляются соотношения $q_i = \theta_i$, $q_t = \theta_t$, пополняемые, возможно, и другими, могут дать при посредстве условий совместности более полную картину вариации направления скорости.

Ниже мы даем:

I. Некоторые геометрические истолкования функций p_i, q_i, r_i.

II. Некоторые соотношения (полученные из условий совместности), которые могут быть использованы для изучения вариации направления вектора скорости *во всех существующих течениях* идеальной, баротропной жидкости, находящейся под воздействием некоторых консервативных массовых сил, на семействе цилиндров.

Мы получаем:

$$
(3.1)\qquad \left|\begin{aligned}
&p_3 = \frac{1}{R_{(l.a)_3}} \cos[\widehat{\bar{b}_{(l.a)_3}, I_1}], \quad q_3 = \frac{1}{R_{(l.c)_3}} \cos[\widehat{\bar{b}_{(l.c)_3}, I_2}],\\
&p_1 = \frac{1}{\tau_{(l.c)_1}} - [\widehat{\bar{b}_{(l.c)_1}, I_2}]_1, \quad q_1 = \frac{1}{R_{(l.c)_1}} \cos[\widehat{\bar{b}_{(l.c)_1}, I_2}],\\
&p_2 = \frac{1}{R_{(l.a)_2}} \cos[\widehat{\bar{b}_{(l.a)_2}, I_1}], \quad q_2 = \frac{1}{\tau_{(l.c)_2}} - [\widehat{\bar{b}_{(l.c)_2}, I_3}]_2,\\
&r_3 = \frac{1}{\tau_{(l.c)_3}} - [\widehat{\bar{b}_{(l.c)_3}, I_1}]_3, \quad r_1 = \frac{1}{R_{(l.a)_1}} \cos[\widehat{\bar{b}_{(l.a)_1}, I_3}],\\
&r_2 = \frac{1}{R_{(l.a)_2}} \cos[\widehat{\bar{b}_{(l.a)_2}, I_3}].
\end{aligned}\right.
$$

В соотношениях (3.1) индексы $(l.a)_i$ показывают, что кручение $(1/\tau)$, кривизна $(1/R)$ или орт бинормали $(\bar{b})$ принадлежат линии $(l.a)_i$, уравнения которой нижеследующие:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } i = 1: \ \omega^2 = \omega^3 = \omega^1 - k\,dt = 0,\\
&\text{при } i = 2: \ \omega^3 = \omega^1 = \omega^2 - k\,dt = 0,\\
&\text{при } i = 3: \ \omega^1 = \omega^2 = \omega^3 - k\,dt = 0,
\end{aligned}
$$

где k — некоторая функция точки и времени.

Обращаем внимание на то, что при $1/k = 0$ получаются уравнения линий $(l.c)_i$.

Индексы 1, 2, 3 углов обозначенных выше через $[\widehat{\ }]$, имеют то же значение как и в случае $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Что касается второго вопроса, мы получаем следующие результаты:

$$
(3.2)\qquad d\theta = q,
$$

$$\theta_t = \frac{-p_{1t}}{p_3 + r_1} = \frac{-p_{2t}}{r_2} = \frac{p_{3t}}{p_1 - r_3} = \frac{q_{t1} - q_{1t}}{q_3} = \frac{q_{3t} - q_{t3}}{q_1} = \frac{r_{1t}}{p_1 - r_3} = \frac{r_{2t}}{p_2} =$$

$$= \frac{r_{3t}}{p_3 + r_1} = \frac{\theta_{t1} - \theta_{1t}}{\theta_3} = \frac{\theta_{3t} - \theta_{t3}}{\theta_1} = \frac{v_{t1} - v_{1t}}{v_3} = \frac{v_{3t} - v_{t3}}{v_1} =$$

(3.3)

$$= \frac{\tilde{\varrho}_{t1} - \tilde{\varrho}_{1t}}{\tilde{\varrho}_3} = \frac{\tilde{\varrho}_{3t} - \tilde{\varrho}_{t3}}{\tilde{\varrho}_1} = \frac{\tilde{p}_{t1} - \tilde{p}_{1t}}{\tilde{p}_3} = \frac{\tilde{p}_{3t} - \tilde{p}_{t3}}{\tilde{p}_1} = \frac{\varphi_{t1} - \varphi_{1t}}{\varphi_3} = \frac{\varphi_{3t} - \varphi_{t3}}{\varphi_1} =$$

$$= \frac{1}{v}\left(\varphi_1 - \frac{1}{\tilde{\varrho}}\tilde{p}_1 - v^2 q_3\right) = \frac{1}{v}\left(\varphi_1 + c^2 \frac{d\ln\tilde{\varrho}}{\omega^1} - v^2\theta_3\right),$$

(здесь c — локальная скорость звука).

Мы не написали все выражения, которые можно получить для θ_t из условий совместности, но множество этих выражений может поставить вопрос регулирования значения этой величины посредством физических параметров.

$$(3.4)\quad \begin{cases} \theta_{12} - \theta_{21} - \theta_1 r_1 - \theta_2 r_2 + \theta_3\theta_2 + \theta_3 p_1 = 0, \quad \theta_{1t} - \theta_{t1} + \theta_3\theta_t = 0, \\ \theta_{23} - \theta_{32} + \theta_1 r_3 + \theta_1\theta_2 - \theta_2 p_2 - \theta_3 p_3 = 0, \quad \theta_{2t} - \theta_{t2} = 0, \\ \theta_{31} - \theta_{13} - \theta_1^2 - \theta_3^2 = 0, \quad \theta_{3t} - \theta_{t3} - \theta_1\theta_t = 0. \end{cases}$$

Эти соотношения дают сведения касательно вариации поля — сведения, которые могут быть использованы, как и предыдущие соотношения (3.3), для формулировки многих теорем, относящихся к этому полю.

Поступила 2 XI 1966 г.

Ясский политехнический институт,
Кафедра механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Георгиев Г., *Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности.* An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi 1959, V, *1.*
2. — *Дифференциально-геометрические свойства нестационарных движений в гидродинамике и в магнитной гидродинамике.* An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, 1960, VI, *2.*

VARIAŢIA DIRECŢIEI VITEZEI ÎN CURGEREA LAMINARĂ, NESTAŢIONARĂ, A UNUI FLUID IDEAL, PE O FAMILIE DE SUPRAFEŢE CILINDRICE

(Rezumat)

În curgerea unui fluid ideal pe o familie de cilindri $C(\lambda)$, se obţin informaţii asupra variaţiei direcţiei vectorului viteză (§ 3. II), pe baza condiţiilor de compatibilitate a acestei curgeri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 532.5-4; 530.12

FLUIDES PARFAITS, CHARGÉS, EN THÉORIE RELATIVISTE HEXADIMENSIONNELLE

PAR

ROBERT VALLÉE

1. Fluide parfait, chargé, en relativité generale

L'hydrodynamique d'un *fluide parfait, chargé,* a été étudiée en relativité générale par Lichnerowicz [4]. Le comportement d'un tel fluide est régi par les équations d'Einstein et de Maxwell *(théorie „provisoire" de l'électromagnétisme)*

$$S_{ij} = \frac{\delta^2}{2}(\varrho' u_i u_j - p g_{ij} + \tau_{ij}), \quad \varrho' = \varrho + p, \tag{1.1}$$

$$\nabla_j F^j{}_i = \mu u_i, \qquad \nabla_j (^*F)^j{}_i = 0, \tag{1.2, 1.3}$$

où ∇_j est le symbole de la dérivation covariante, S_{ij} le tenseur d'Einstein sans constante cosmologique, F_{ij} le tenseur champ électromagnétique, $(^*F)_{ij}$ son adjoint, τ_{ij} le tenseur de Maxwell, ϱ', ϱ et p la pseudo-densité, la densité et la pression propres du fluide, μ sa densité de charge propre, u_i son vecteur-vitesse unitaire, g_{ij} les potentiels de gravitation et $\delta^2/2$ la constante de gravitation d'Einstein, ($i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4$, l'indice 4 correspondant à la coordonnée temporelle). L'hypothèse de l'existence d'une équation d'état, de la forme

$$\varrho' = f(p), \tag{1.4}$$

permet d'introduire une fonction F *(indice du fluide)* définie par

$$F(p) = \exp \int_{p_0}^{p} \frac{du}{f(u)}. \tag{1.5}$$

Cette hypothèse permet de montrer que *les lignes de courant d'univers d'un fluide parfait, chargé de façon homogène* $(\mu F/\varrho'$, que l'on peut montrer être constant le long d'une ligne de courant d'univers, est supposé constant dans tout le domaine d'espace-temps considéré) *sont des lignes orientées dans le temps* $(ds^2 > 0)$ *extrémales de*

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{F}{k} ds + \delta \varphi_i dx^i \right) \tag{1.6}$$

avec

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i, \quad k = \frac{1}{\delta} \frac{\mu F}{\varrho'};$$

ce sont donc des *géodésiques d'une métrique finslerienne.*

Le fait que cette variété soit *finslerienne* est un incovénient, que sa *métrique dépende de k* en est un autre, plus grave. Aussi allons-nous, dans ce travail qui précise certains des résultats obtenus dans notre thèse [11] effectuée sous la direction de M. Lichnerowicz, chercher un „fluid parfait" dont les „lignes de courant" soient *géodésiques d'une métrique riemannienne indépendante de tout paramètre caractéristique du fluide* et qui, par un processus de „descente" à l'espace-temps, permette de retrouver les résultats de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

2. La variété V_5 et l'espace-temps V_4

Nous allons tout d'abord essayer de réaliser notre programme avec un *fluide parfait pentadimensionnel.* Considérons la variété v_5, élément primitif de la *théorie de Jordan-Thiry* [1], [8]. v_5 est une variété différentiable, de dimension 5, dont on peut dire schématiquement qu'elle est dotée d'une métrique riemannienne $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, $(\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3, 4)$, susceptible d'être mise, en chaque point, sous la forme $-(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2$ et qu'elle admet un groupe connexe, à un paramètre, d'isométries globales ne laissant invariant aucun point, dont les trajectoires, orientées $d\sigma^2 < 0$, sont homéomorphes au cercle T^1. Soit v_4 *le quotient de* v_5 *par la relation d'équivalence définie par le groupe*; c'est une variété différentiable, de dimension 4, telle que v_5 soit homéomorphe au produit topologique $v_4 \times T^1$. Par la suite on utilisera, dans v_5, des coordonnées locales (x^α) dites *adaptées au groupe* et telles que: les (x^i) soient des coordonnées locales de v_4, les composantes du générateur infinitésimal $\vec{\xi}$ du groupe soient $\xi^i = 0$, $\xi^0 = 1$. Les variétés $x^0 = \text{const.}$ sont alors homéomorphes à v_4, les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont indépendants de x^0 et de plus

$$\vec{\xi}^2 = \gamma_{00}. \tag{2.1}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où

$$\gamma_{00} = -1; \tag{2.2}$$

nous sommes dans le cadre de ce que l'on peut appeler la *théorie de Jordan-Thiry-Kaluza-Klein* [2], [3]. Appelons V_5 et V_4 ce que deviennent les variétés v_5 et v_4 une fois imposée la condition (2.2). V_4 est identifiée à l'espace-temps de la relativité générale après lui avoir attribué la métrique riemannienne de coefficients

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i}\,\gamma_{0j}}{\gamma_{00}}. \tag{2.3}$$

Posant de plus

$$\varphi_i = \frac{1}{\delta}\frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}}, \quad F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i, \tag{2.4}$$

on s'aperçoit que les tenseurs g_{ij}, F_{ij} et le vecteur φ_i sont intrinséquement définis sur V_4; on les identifie respectivement au tenseur de gravitation, au tenseur champ électromagnétique et au potentiel-vecteur de ce dernier.

3. Schéma fluide parfait pentadimensionnel

Nous appellerons *fluide parfait pentadimensionnel* un schéma défini dans V_5 par le tenseur d'„impulsion-énergie"

$$\tau_{\alpha\beta} = r' v_\alpha v_\beta - q\gamma_{\alpha\beta}, \quad r' = r + \varepsilon q, \quad r > 0, \quad q > 0, \tag{3.1}$$

où v_α est un „vecteur-vitesse" tangent aux lignes de courant du fluide et de carré scalaire $\varepsilon = \pm 1$. Nous supposons de plus que r' et q sont liés par une „équation d'état"

$$r' = \varphi(q). \tag{3.2}$$

$S_{\alpha\beta}$ étant le tenseur d'Einstein, sans constante „cosmologique", relatif à V_5, nous écrirons les *équations de champ*

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\delta^2}{2}\tau_{\alpha\beta}, \ \alpha \text{ et } \beta \text{ non simultanément nuls}, \tag{3.3}$$

l'équation en S_{00} étant donc supprimée (le choix des premiers membres des équations conservées est justifié par des considérations variationnelles).

On peut montrer que le fluide pentadimensionnel est holonome au sens où l'on entend ce terme dans V_4 [4, p. 37]. Définissant l'indice du fluide par

$$\Phi(q) = \exp \varepsilon \int_{q_0}^{q} \frac{du}{\varphi(u)}, \tag{3.4}$$

il apparaît que *les lignes de courant du fluide parfait pentadimensionnel sont des lignes, orientées* $d\sigma^2 > 0$ *ou* $d\gamma^2 < 0$, *extrémales de*

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \Phi \, d\sigma, \tag{3.5}$$

donc géodésiques d'une métrique riemannienne (dans (3.5) on peut évidemment remplacer l'indice Φ par

$$\Phi' = \alpha \Phi, \tag{3.6}$$

où α est une constante non nulle).

4. L'indice du fluide pentadimensionnel dépend d'un paramètre caractéristique du fluide spatio-temporel

Le processus de *descente* que nous allons utiliser est décrit, dans le cas général, dans [4, pp. 163—164 et 189—197]. Il permet de passer de V_5 à la variété quotient V_4, des équations (3.3) à des équations équivalentes valables dans V_4, du fluide pentadimensionnel à un fluide spatio-temporel, de certaines des extrémales de (3.5) à celles d'une intégrale définie dans V_4.

Les extrémales de $\int_{\theta_0}^{\theta} \Phi' \, d\sigma$ (identiques à celles de (3.5)), telles que $\Phi' v_0 \sqrt{\varepsilon} = \zeta$, conduisent par descente aux extrémales, orientées dans le temps de l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{\sqrt{\Phi'^2 + \zeta^2}}{\zeta} ds + \delta \varphi_i \, dx^i \right) \tag{4.1}$$

définie dans V_4 (ζ est dit *paramètre de descente*). Si nous voulons que ces extrémales soient identiques à celles de (1.6), ce qui assure *l'obtention, par descente, du fluide parfait chargé de la théorie provisoire de l'électromagnétisme*, nous devons avoir (α^2 pouvant être négatif)

$$\Phi'^2(q) = \alpha^2 \Phi^2(q) = F^2(p) \left(\frac{\zeta}{k} \right)^2 - \zeta^2, \quad q = p, \tag{4.2}$$

(le plus simple étant évidemment de choisir $\zeta = k$). Il en résulte une relation nécessaire entre r' et ϱ' que l'on peut obtenir, d'ailleurs, par une autre voie. *Les équations* (3.3) *conduisent alors, dans* V_4, *aux équations de la théorie provisoire.*

Le point essentiel est de constater que $\Phi'^2 = F^2 (\zeta/k)^2 - \zeta^2$ dépend nécessairement de k. *Il n'existe donc pas de fluide pentadimensionnel dont les lignes de courant soient géodésiques d'une métrique riemannienne indépendante de*

tout paramètre caractéristique du fluide spatio-temporel obtenu par descente (la seule exception est celle, classique, où $F = \text{const.}$, il en est alors de même de Φ', le fluide spatio-temporel est sans pression).

5. La variété V_6

Le but que nous nous étions proposé ne peut être atteint avec un fluide parfait pentadimensionnel, aussi allons-nous considérer une variété différentiable v_6, de dimension 6, dotée d'une métrique riemannienne $d\Sigma^2 = \Gamma_{IJ}\, dx^I dx^J$, $(I, J, \ldots = 5, 0, 1, 2, 3, 4)$, susceptible d'être mise, en chaque point, sous la forme $-(\Omega^5)^2 - (\Omega^0)^2 - (\Omega^1)^2 - (\Omega^2)^2 - (\Omega^3)^2 + (\Omega^4)^2$ (une telle variété, précisée par les brèves indications qui suivent, a été étudiée par Renaudie [6]). v_6 admet un groupe connexe commutatif, à deux paramètres, d'isométries globales ne laissant invariant aucun point, de générateurs $\vec{\eta}$ et $\vec{\xi}'$, à carrés scalaires négatifs, dont les trajectoires associées sont homéomorphes à T^1. On utilise des coordonnées (x^I) *adaptées au groupe* telles que: les (x^i) soient des coordonnées locales du quotient de v_6 par la relation d'équivalence associée au groupe, les composantes des générateurs soient $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ pour $\vec{\eta}$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ pour $\vec{\xi}'$, de sorte qu'en particulier

$$\vec{\eta}^2 = \Gamma_{55} \tag{5.1}$$

et que les Γ_{IJ} sont indépendants de x^5 et de x^0.

La variété quotient de v_6 par la relation d'équivalence, définie par le sous-groupe à un paramètre associée à $\vec{\eta}$, dotée de la métrique riemannienne

$$\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} - \frac{\Gamma_{5\alpha}\Gamma_{5\beta}}{\Gamma_{55}}, \tag{5.2}$$

possède un groupe à un paramètre d'isométries, induit par le sous-groupe associé à $\vec{\xi}'$. Elle est identifiable à v_5 et nous la désignerons par cette notation; de plus il s'y trouve défini, ici, le champ vectoriel $\Gamma_{5\alpha}/\Gamma_{55}$ et le champ scalaire Γ_{55}. Le quotient de v_6 par la relation d'équivalence associée à son groupe d'isométries s'identifie, après qu'on l'ait doté de la métrique riemannienne (2.3), à la variété v_4. On peut aussi passer de v_6 à son quotient v_5' par la relation d'équivalence associée à $\vec{\xi}'$. v_5' possède aussi un groupe à un paramètre d'isométries; le passage au quotient par la relation d'équivalence associée conduit à une variété v_4'. En fait v_4 et v_4' sont identifiables, v_4 apparait ainsi comme *le quotient de v_6 par la relation d'équivalence associée au*

groupe commutatif à deux paramètres (indépendamment du choix des générateurs $\vec{\eta}$ et $\vec{\xi}'$).

Pour passer de v_5 à V_5 et de v_4 à V_4 il faut et suffit que $\gamma_{00} = -1$. Pour que dans la variété quotient V_4 il n'apparaisse pas d'autres champs que les champs gravitationnel et électromagnétique il est nécessaire et suffisant que

$$\Gamma_{5\alpha} = 0, \quad \Gamma_{55} = -1; \tag{5.2}$$

la condition $\gamma_{00} = -1$ donne alors

$$\Gamma_{00} = -1. \tag{5.3}$$

Nous appellerons V_6 la variété v_6 ainsi particularisée.

6. Schéma fluide parfait hexadimensionnel

De façon analogue à ce que nous avons fait au § 3 nous appellerons *fluide parfait hexadimensionnel* un schéma défini dans V_6 par le tenseur d'„impulsion-énergie"

$$\Theta_{I\mathcal{J}} = P' w_I w_{\mathcal{J}} - \pi \Gamma_{I\mathcal{J}}, \quad P' = P + \varepsilon' \pi, \quad P > 0, \quad \pi > 0, \tag{6.1}$$

où w_I est un „vecteur-vitesse" de carré scalaire $\varepsilon' = \pm 1$. Nous supposons de plus que P' et π sont liés par une „équation d'état"

$$P' = \Psi(\pi). \tag{6.2}$$

$\Sigma_{I\mathcal{J}}$ étant le tenseur d'Einstein, sans constante „cosmologique", relatif à V_6, nous écrirons les équations du champ

$$\Sigma_{I\mathcal{J}} = \frac{\delta^2}{2} \Theta_{I\mathcal{J}}, \quad I \neq 5, \ \delta \neq 5, \ I \text{ et } \mathcal{J} \text{ non simultanément nuls}, \tag{6.3}$$

les équations en Σ_{00}, $\Sigma_{5\alpha}$ *et* Σ_{55} *étant donc supprimées.* Le fluide hexadimensionnel est alors holonome, définissant son indice par

$$\Psi(\pi) = \exp \varepsilon' \int_{\pi_0}^{\pi} \frac{du}{\Psi(\pi)}, \tag{6.4}$$

il apparaît que *les lignes de courant du fluide parfait hexadimensionnel sont des lignes, orientées* $d\Sigma^2 > 0$ *ou* $d\Sigma^2 < 0$, *extrémales de l'intégrale*

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \Psi \, d\sigma, \tag{6.5}$$

donc géodésiques d'une métrique riemannienne (dans (6.5) on peut remplacer Ψ par

$$\Psi' = \gamma\Psi) . \tag{6.6}$$

7. L'indice du fluide hexadimensionnel est indépendant de tout paramètre caractéristique du fluide spatio-temporel

Les extrémales de $\int_{0_0}^{0} \Psi' \, d\sigma$ (identiques à celles de (6.5)), telles que $\Psi' w_5 \sqrt{\varepsilon'} = \tau$, conduisent par *descente* de V_6 à V_5, *(paramètre de descente* τ*)*, aux extrémales de

$$\int_{0_0}^{0} \sqrt{\Psi'^2 + \tau^2} \, d\sigma . \tag{7.1}$$

Ces extrémales sont les lignes de courant du fluide pentadimensionnel obtenu par descente à partir du fluide hexadimensionnel; nous pouvons donc écrire avec les notations du § 3, $\Phi' = \alpha \Phi = \sqrt{\Psi'^2 + \tau^2}$. Pour que les lignes de courant d'univers du fluide spatio-temporel, que l'on obtient à partir de ce fluide pentadimensionnel par descente de V_5 à V_4, *(paramètre de descente* ζ*)*, soient *celles auxquelles conduit la „théorie provisoire" de l'électromagnétisme*, il faut et suffit, compte tenu de (4.2), que

$$\Psi'(\pi) = \sqrt{F^2(p) \left(\frac{\zeta}{k}\right)^2 - (\zeta^2 + \tau^2)} , \quad \pi = p , \tag{7.2}$$

ce qui, selon (6.5), définit *l'indice du fluide hexadimensionnel* au facteur constant γ près (γ^2 peut être négatif). Il résulte de la une relation nécessaire entre P' et ϱ'

$$P'(\pi) = \frac{F^2(p)\,(\zeta/k)^2 - (\zeta^2 + \tau^2)}{F^2(p)\,(\zeta/k)^2} \varrho'(p) , \qquad \pi = p . \tag{7.3}$$

Les équations (6.1) *conduisent alors, dans* V_4*, aux équations de la théorie provisoire.*

Contrairement à ce qui se passe dans le cas pentadimensionnel, *il est possible de choisir* ζ *et* τ *de telle sorte que* Ψ' *ne dépende pas de* k. Il suffit pour cela que

$$\tau = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \zeta = k , \tag{7.4}$$

λ *étant une constante* positive (et *non un paramètre dépendant du fluide*). Quelques calculs montrent alors que l'on a $\alpha^2 = 1 - \zeta^2$, $\gamma^2 = 1 - \lambda^2$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - \zeta^2) = \operatorname{sgn}(F^2 - \zeta^2)$, $\varepsilon' = \operatorname{sgn}(1 - \lambda^2) = \operatorname{sgn}(F^2 - \lambda^2)$. Choisissant

$p_0 = q_0 = \pi_0 = 0$ on voit alors que si $0 \leqslant |k| \leqslant 1$ on peut prendre $\lambda = 1$ et $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, que si $1 < |k| < k_0$ on peut prendre $\lambda = k_0$ et $\varepsilon = \varepsilon' = -1$ avec p inférieur à p_1 telle que $F(p_1) = |k|$.

L'équation d'état du fluide hexadimensionnel s'écrit alors

$$P'(\pi) = \varepsilon' \frac{F^2(\pi) - \lambda^2}{F^2(\pi)} f(\pi). \tag{7.5}$$

Le but que nous étions proposé est donc atteint car *les lignes de courant du fluide hexadimensionnel sont des géodésiques de la métrique riemannienne*

$$(F^2(\pi) - \lambda^2)\, d\sigma^2, \tag{7.6}$$

indépendante de tout paramètre caractéristique du fluide spatio-temporel [1]) et par double descente à l'espace-temps, impliquant le paramètre k caractéristique du fluide, nous obtenons alors la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

Reçu le 21 XII 1966

Université de Besançon, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Jordan P., Ann. Physik, 1947, *1*, S. 219.
2. Kaluza, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss., 1921, S. 966.
3. Klein O., Ztschr. für Phys., 1926, **37**, S. 845.
4. Lichnerowicz A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Masson, Paris, 1956.
5. Pigeaud P., *Contribution à l'étude des approximations en théorie unitaire pentadimensionnelle de Jordan-Thiry.* Thèse, Paris, 1962.
6. Renaudie J., *Étude mathématique d'une théorie hexadimensionnelle du champ unifié.* Thèse, Paris, 1956.
7. Surin A., *Étude du schéma fluide parfait et des équations du mouvement dans les théories pentadimensionnelles de Jordan-Thiry et de Kaluza-Klein.* Mémorial des Science. Mathématiques, 1965, *154*.
8. Thiry Y., *Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ.* Thèse, Paris, 1950.
9. Tonnelat M. A., *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation.* Gauthier-Villars, Paris, 1965.
10. Vallée R., C. R. Ac. Sci., Paris, 1959, **248**, p. 1779.
11. — *Sur la représentation relativiste des fluides parfaits chargés.* Thèse, Paris, 1962.

FLUIDE PERFECTE, ÎNCĂRCATE, ÎN TEORIA RELATIVISTĂ HEXADIMENSIONALĂ

(Rezumat)

Autorul, folosind un procedeu clasic de „scoborîre" şi plecînd de la un „fluid" ale cărui linii de curent sînt geodezice ale unei varietăţi riemanniene hexadimensionale independentă de orice parametru, elaborează teoria fluidelor perfecte cu sarcină, în teoria relativistă cu 6 dimensiuni.

[1]) Si l'on accepte d'avoir un fluide hexadimensionnel à lignes de courant imaginaires ($w_5^2 < 0$) il est possible, en posant $\tau = ik$, $\zeta = k$, d'avoir $\lambda = 0$ et $\varepsilon' = +1$. Alors $P'(\pi) = f(\pi)$ et les lignes de courant hexadimensionnelles sont géodésiques de la métrique $F^2(\pi)\, d\sigma^2$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 521.03 ; 538.312

LORENTZ INVARIANT SOLUTION OF LYTTLETON-BONDI EQUATIONS

BY

LL. G. CHAMBERS

1. Introduction

Classically, Maxwell's equations of the electric field assume the conservation of charges. However the hypotheses have been made that the absolute values of the charges of the proton and electron are not equal and that there is creation of hydrogen atoms (and hence charge). In a generalization of Maxwell's equations [2] the fields are given by

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (1.2) \quad \mathbf{B} = \nabla_x \mathbf{A}, \tag{1.1}$$

A and V being vector and scalar potentials which obey the equations [1]

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\mathbf{A}}{l^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{1.3}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t^2} - \frac{V}{l^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}; \tag{1.4}$$

l is of dimension length suggested by Lyttleton and Bondi [2] to be of the order of the radius of the universe. The rate of creation of charge per unit volume, q, is given by

$$q = \nabla . \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 l^2}\left(\nabla . \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right). \tag{1.5}$$

Clearly, if zero fields exist

$$\mathbf{A} = \mu_0 l^2 \mathbf{J}, \qquad (1.6\,b) \quad V = \frac{l^2 \varrho}{\varepsilon_0} \tag{1.6\,a}$$

and

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \qquad (1.7\,b) \quad \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{1.7\,a}$$

2. Application to a spherically symmetrical system

Consider now the applications of these equations to a system having complete spherical symmetry about a point O from which the position vector $\mathbf{r}$ and distance r are measured.

The forms of the potentials must be

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}f(r, t), \quad V = g(r, t). \tag{2.1}$$

From (1.2) $\mathbf{B}$ is zero and from (1.1)

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right). \tag{2.2}$$

Lyttleton and Bondi imply that the only possible solution to the equations which gives ϱ finite at the origin, is given by

$$\mathbf{J} = \varrho_0 \frac{\mathbf{r}}{\tau}, \quad p = \varrho_0, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{A} = \mu_0 l^2 \varrho_0 \frac{\mathbf{r}}{\tau}, \quad V = \frac{l^2}{\varepsilon_0}\varrho, \tag{2.4}$$

where ϱ_0 is constant.

This corresponds to

$$q = \frac{3\varrho_0}{\tau} \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{\tau}, \tag{2.5}$$

the latter being the velocity distance law. This solution however is unsatisfactory in that $(\mathbf{J}, ic\varrho)$ as defined by (2.3) is not a true four vector in that its form is not conserved under a four dimensional transfor n action from space-time $(\mathbf{r}, ict)$ to $(\mathbf{r}', ict')$.

A solution which is a four-vector is the solution defined by

$$\mathbf{J} = \varrho_0 \frac{\mathbf{r}}{\tau}, \quad p = \varrho_0 \frac{t}{\tau}, \tag{2.6}$$

giving

$$\mathbf{A} = \mu_0 l^2 \varrho_0 \frac{\mathbf{r}}{\tau}, \quad V = \frac{l^2}{\varepsilon_0}\varrho_0 \frac{t}{\tau}, \tag{2.7}$$

which generate a zero field.

The corresponding rate is

$$q = \frac{4\varrho_0}{\tau} \tag{2.8}$$

and the velocity distance law is

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{t} \,. \tag{2.9}$$

A number of interpretations may be made in connection with this solution. The density of the universe is proportional to time. If ϱ_0 is the present density, then τ may be taken to be then present time and from equation (2.9) is the present Hubble time. However density is not constant. The velocity distance law (2.9) has been discussed previously [3, p. 73] where the continuity equation is satisfied.

The charge density may be taken as proportional either to the mass density, or the number of particles.

If a photograph be taken at time t of a region of the heavens at apparent distance r, the density of particles $\nu(r, t)$ will not be equal to the actual particle density at time t, $n(r, t)$. At time t and distance r, the number of particles actually within the range r, $r + \delta r$ an inside a solid angle $\delta\omega$ is $n(r, t)\, r^2\, dr\, \delta\omega$.

In a photograph the number of particles in the range of observed distances r_1, $r_1 + \delta r_1$ and the same solid angle $\delta\omega$ is, if the velocity distance law to be given by $V = rF(t)$ given by [3, p. 348]

$$n\left(r_1, t - \frac{r_1}{c}\right)\left[1 + \frac{r_1}{c} F\left(t - \frac{r_1}{c}\right)\right]\left[\exp\left(3 \int_{t - \frac{r_1}{c}}^{t} F(t')\, dt'\right)\right] r_1^2\, dr_1\, d\omega \,. \tag{2.10}$$

Substituting $F(t) = t^{-1}$

$$\nu(r_1, t) = n\left(r_1, t - \frac{r_1}{c}\right) \frac{1}{(1 - r_1/ct)^4} = n_0 \frac{t}{\tau} \frac{1}{(1 - r_1/ct)^3} \,. \tag{2.11}$$

The present is τ and so the observed density will be

$$n_0 \left(1 - \frac{r_1}{c\tau}\right)^{-3} = n_0 (1 + 3\beta) \tag{2.12}$$

if β, the red shift, is small.

Received the 26 X 1966

University College of North Wales, England

REFERENCES

1. Chambers Ll. G., J. Math. Phys., 1963, **4**, p. 1373.
2. Lyttleton R. A., Bondi H., Proc. Roy. Soc. (London), 1959, **A252**, p. 313.
3. Milne R. A., *Relativity, Gravitation and World Structure*. Clarendon Press, Oxford, 1935, p. 73.

SOLUȚIA INVARIANTĂ A LUI LORENTZ PENTRU ECUAȚIILE LUI LYTTLETON-BONDI

(Rezumat)

Se demonstrează posibilitatea existenței soluției invariante a lui Lorentz pentru ecuațiile ui Lyttleton-Bondi [2]. Se discută apoi semnificația cosmologică a acestei soluții.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

D. C. 539.312

NOTE ON THE LONGITUDINAL VIBRATION OF A THIN VISCOELASTIC ROD OF VARIABLE CROSS SECTION

BY

S. K. SARKAR

1. Equations and Method of Solution

In the case of Maxwell material the stress and rate of strain are connected by the relation

$$\left(1 + k\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma = \eta\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \tag{1}$$

where $k = \eta/G$, G and η are the elastic and viscosity constants, σ and ϱ are the stress and strain.

The x-axis has been taken along the axis of the rod which is supposed to be bounded by the faces $x=a$ and $x=b$. The equation of motion is

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\sigma) = \varrho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

where u is the displacement in the direction of the x-axis of a section whose undisturbed position is at a distance x from the origin, A — the area of this section and ϱ — the density of the material.

Again

$$\varrho = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3}$$

For linear variation of the cross section one may write, $A = A_0 x$, where A_0 is constant.

For this value of A, the equation (2) reduces to

$$\sigma + x\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \varrho x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Then the relation deduced from equations (1), (3) and (4) stands as

$$x^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+x\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\sigma+\frac{x^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}+\frac{1}{k}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right), \tag{5}$$

where $c^2=G/\varrho$.

End conditions assumed are

$$\sigma=\begin{cases}-p\delta(t) & \text{at } x=a\\ 0 & \text{at } x=b,\end{cases} \tag{6}$$

where $\delta(t)$ is the impulsive Dirac-Delta function.

Laplace transform of (5) gives

$$x^2\frac{d^2\bar{\sigma}}{dx^2}+x\frac{d\bar{\sigma}}{dx}=\bar{\sigma}+\frac{x^2}{c^2}\left(p^2+\frac{p}{k}\right)\bar{\sigma},$$

or

$$\frac{d^2\bar{\sigma}}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\bar{\sigma}}{dx}-\bar{\sigma}\left(\frac{1}{x^2}+q^2\right)=0, \tag{7}$$

where

$$q^2=\frac{p^2+p/k}{c^2}.$$

Laplace transform of (6) gives

$$\bar{\sigma}=\begin{cases}-p & \text{at } x=a,\\ 0 & \text{at } x=b.\end{cases} \tag{8}$$

The solution of equation (7) is

$$\bar{\sigma}=AI_1(qx)+BK_1(qx). \tag{9}$$

From equations (8) and (9) we get

$$A=-\frac{pK_1(qb)}{K_1(qb)\,I_1(qa)-I_1(qb)\,K_1(qa)},$$

$$B=\frac{p\,I_1(qb)}{K_1(qb)\,I_1(qa)-I_1(qb)\,K_1(qa)}.$$

Thus

$$\bar{\sigma}=-p\frac{I_1(qb)\,K_1(qx)-K_1(qb)\,I_1(qx)}{I_1(qb)\,K_1(qa)-K_1(qb)\,I_1(qa)}. \tag{10}$$

As the general forms of the inverse transforms are complicated, approximate results for small value of time t are only evaluated.

To find σ for small values of the time t we proceed as follows [1]:

$$I_1(qb)\,K_1(qx) - K_1(qb)\,I_1(qx) \cong$$

$$\cong \frac{e^{qb}}{(2\pi qb)^{1/2}}\left(1 - \frac{3}{8qb} + \dots\right)\left(\frac{\pi}{2qx}\right)^{1/2} e^{-qx}\left(1 + \frac{3}{8qx} + \dots\right) -$$

$$(11) \qquad -\left(\frac{\pi}{2qb}\right)^{1/2} e^{-qb}\left(1 + \frac{3}{8qb} + \dots\right)\frac{e^{qx}}{(2\pi qx)^{1/2}}\left(1 - \frac{3}{8qx} + \dots\right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{2q\,(bx)^{1/2}}\, e^{q(b-x)}\left[1 + \frac{3}{8q}\cdot\frac{b-x}{bx} - e^{-2q(b-x)}\left(1 - \frac{b_0 - x}{bx}\cdot\frac{3}{8q}\right)\right].$$

Similarly [1],

$$K_1(qa)\,I_1(qb) - K_1(qb)\,I_1(qa) \cong$$

$$(12) \qquad \cong \frac{1}{2q\,(ba)^{1/2}}\, e^{q(b-a)}\left[1 + \frac{3}{8q}\cdot\frac{b-a}{ba} - e^{-2q(b-a)}\left(1 - \frac{b-a}{ba}\cdot\frac{3}{8q}\right)\right].$$

From equations (10), (11) and (12) we get,

$$(13) \qquad \bar{\sigma} \cong -p\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2} e^{q(a-x)}\left\{1 + \frac{1}{q}\left[\frac{3\,(b-x)}{8bx} - \frac{3\,(b-a)}{8ab}\right]\right\}.$$

Let

$$(14) \qquad a - x = -h_1, \quad \frac{3\,(b-x)}{8bx} - \frac{3\,(b-a)}{8ab} = h_2.$$

Then from (13)

$$(15) \qquad \bar{\sigma} \cong -p\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}\left(e^{-h_1 q} + \frac{h_2}{q}\, e^{-h_1 q}\right).$$

Now

$$e^{-h_1 q} = e^{-\frac{h_1}{c}\sqrt{\left(p + \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2}}}.$$

Using the notation of Van der Pol and Bremmer we write,

$$x(t) \doteqdot e^{-h_1 q}, \quad x_1(t) \doteqdot \frac{h_2}{q}\cdot e^{h_1 q}.$$

Writing $p - 1/2k$ in place of p we get,

$$x(t)\, e^{t/2k} \doteqdot e^{-\frac{h_1}{c}\sqrt{p^2 - \frac{1}{4k^2}}},$$

$$\frac{x_1(t)\, e^{t/2k}}{h_2} \doteqdot \frac{e^{-\frac{h_1}{c}\sqrt{p^2 - \frac{1}{4k^2}}}}{\sqrt{p^2 - 1/4k^2}}$$

Taking the inverse and substituting in (15) we get,

$$\sigma \cong 0 \text{ for } 0 < t < \frac{h_1}{c}.$$

$$\sigma \cong -p\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2} e^{-\frac{t}{2k}}\left[\frac{h_1}{4ck^2\sqrt{t^2-h_1^2/c^2}} I_1\left(\frac{1}{4k^2}\sqrt{t^2-h_1^2/c^2}\right) + \right.$$

$$\left. + h_2 I_0\left(\frac{1}{4k^2}\sqrt{t^2-h_1^2/c^2}\right)\right| \text{ for } t > \frac{h_1}{c}.$$

Substituting the values of h_1 and h_2 we get,

$$(16) \quad \begin{cases} \sigma \cong 0 \text{ for } 0 < t < \dfrac{x-a}{c}, \\ \sigma \cong -p\left(\dfrac{a}{x}\right)^{1/2} e^{-\frac{t}{2k}}\left\{\dfrac{x-a}{4ck^2\sqrt{t^2-[(x-a)/c]^2}} I_1\left[\dfrac{1}{4k^2}\sqrt{t^2-(x-a)^2/c^2}\right] + \right. \\ \left. + \left[\dfrac{3(b-x)}{8bx} - \dfrac{3(b-a)}{8ba}\right] I_0\left[\dfrac{1}{4k^2}\sqrt{t^2-(x-a)^2/c^2}\right]\right\}, \text{ for } t > \dfrac{x-a}{c}. \end{cases}$$

Acknowledgement. The author expresses his sincere gratitude to Prof. B. Sen, F. N. I., for his kind help and guidance in this work.

Received the 7 X 1963

Jadavpur University,
Calcutta, India

REFERENCES

1. Carslaw H. S., Jaeger J. C., *Operational Methods in Applied Mathematics.* 1953, Appendix II (12).

ASUPRA MIŞCĂRII LONGITUDINALE A UNEI BARE SUBŢIRI CU SECŢIUNE TRANSVERSALĂ VARIABILĂ

(Rezumat)

Se studiază problema vibraţiei unei bare subţiri de secţiune variabilă, constituită dintr-un material vîscoelastic de tipul Maxwell, în cazul cînd forţa impulsivă este aplicată la un capăt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

D. C. 530,12

ON THE CONNECTION BETWEEN UNIFORMLY ACCELERATED FRAMES OF REFERENCE AND A GENERAL-RELATIVISTIC HANDLING OF A UNIFORM FIELD

BY

C. CIUBOTARIU, J. GOTTLIEB and G. ZET

1. Starting from Einstein's equations

$$R_{ik} = 0, \tag{1}$$

one of the authors [5] studied a general relativistic treatment of a uniform field. The metric was chosen as

$$ds^2 = F(x)\,dt^2 - G(x)\,dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{2}$$

since from a classical point of view this checks with symmetry as to all the straight lines parallel with the Ox axis, and thus with symmetry of the uniform field. In the case of the metric (2), the equations (1) are reduced to the single equation

$$L = 0, \quad \text{with } 4L \equiv 2F'' - F'(\ln FG)' \text{ and } ' \equiv \frac{d}{dx}. \tag{3}$$

In the above mentioned paper one supposition has been made

$$-|g_{ik}| = FG = c^2 = \text{constant}. \tag{4}$$

Combining (3) with (4), (2) becomes

$$ds^2 = c^2(1-2a)\,dt^2 - (1-2a)^{-1}\,dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{5}$$

As J. E. Romain has pointed out [9, p. 385], the metric (5) is a particular case of a class of metrics associated with uniformly accelerated reference systems.

Taking into account that an uniformly accelerated motion is due to a uniform field, or to an action equivalent with a uniform field action, we undertook studying the cases where the general relativistic handling of a uniform field and the study of uniformly accelerated frames of reference lead to the same metric.

2. In the case of (2), the non vanishing components of Riemann's and Ricci's tensors are

$$GR^1{}_{414} = -GR^1{}_{441} = FR^4{}_{114} = -FR^4{}_{141} = -FR_{11} = GR_{44} = L, \tag{6}$$

where L is defined by (3). The consequence of (6) is that when solving Einstein's equations, the curvature tensor vanishes. But this is precisely in agreement with Einstein's interpretation of the general theory of relativity [4], i. e. a uniform field is a non-permanent one [1, p. 23], which can be eliminated through a finite coordinate transformation.

Giving up condition (4), equation (3) gives

$$G = (4a^2 c^2 F)^{-1} F', \tag{7}$$

where a^2 is a positive constant of integration. The general metric of a uniform field has now the form

$$ds^2 = F dt^2 - (4a^2 c^2 F)^{-1} F'^2 dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{8}$$

As in the case of metric (8) $R^l_{ijk} = 0$, we can find a finite and non-singular transformation of co-ordinates

$$\bar{x} = \bar{x}(x, t), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad t = \bar{t}(x, t), \tag{9}$$

which changes Minkowski's metric

$$ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \tag{10}$$

into metric (8).

(9) are the result of particularizing in J. E. Romain's equations ((5.1) and (5.2) from [9]) and are

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{F}}{ac} \cosh(act), \quad \bar{t} = \frac{\sqrt{F}}{ac^2} \sinh(act). \tag{11}$$

The result of (11) is [9, p. 380] that

$$\frac{ac}{\sqrt{F}} = \frac{A}{c^2}, \tag{12}$$

where A is the rest acceleration. As it appears in (8), the speed γ of the light rays which propagate along Ox, will be

$$\gamma = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{ds=0} = \frac{2acF}{F'} = \frac{2AF^{3/2}}{c^2 F'}. \tag{13}$$

In the following paragraphs we shall deal with some particular cases.

3. On the basis of Dehnen's results [3], based on A. Lichnerowicz's [7], C. Cattaneo's [2] and F. A. E. Pirani's [8] works, the field intensity F_{ik} can be obtained from the observer field $u^i(0, 0, 0, 1/\sqrt{g_{44}})$:

$$F_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{14}$$

For metric (8) we have $u_i(0, 0, 0, \sqrt{F})$ and the only non-zero components of F_{ik} will be

$$F_{14} = -F_{41} = (\sqrt{F})'. \tag{15}$$

For a uniform field we are able to prescribe $F_{14} = \text{const.}$ and hence $F = c^2 (ax + b)^2$ and $G = \text{const.}$ By properly choosing the co-ordinates it is possible to obtain $b = 1$ and $G = 1$ and we have

$$(16) \qquad F = c^2 (ax+1)^2, \quad G = 1, \quad \frac{a}{ax+1} = \frac{A}{c^2}, \quad \gamma = c\,|\,ax+1\,|.$$

From (2) and (16) we have

$$(17) \qquad ds^2 = c^2 (ax+1)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

which is exactly Kottler's metric. To the same metric lead the transformations (s. (11) and (16))

$$(18) \qquad \bar{x} = \frac{ax+1}{a} \cosh(act), \quad \bar{t} = \frac{ax+1}{ac} \sinh(act).$$

As it appears in (16), for $x = 0$, a is the rest acceleration and c^2 ratio, and the light velocity γ coincides with c.

4. Metric (5) is obtained from (10) by the transformations

$$(19) \qquad \bar{x} = \frac{\sqrt{1-2ax}}{a} \cosh(act), \quad \bar{t} = \frac{\sqrt{1-2ax}}{ac} \sinh(act).$$

In this case (12) and (13) are replaced by

$$(20) \qquad \frac{A}{c^2} = \frac{a}{\sqrt{1-2ax}}, \quad |\gamma| = c\,|\,1-2ax\,|.$$

It is worth mentioning that Kottler deduced both metrics (5) and (17) [6, pp. 454—456] from general relativistic considerations, starting from Schwarzschild's metric and finding out its approximate form, valid in a region with small dimensions as compared with the distance between the region and the origin of the co-ordinates.

Metric (5) corresponds to the situation when a uniform field does not alter the form of the quadridimensional elementary volume.

5. If we take the transformation (11) to be conform in the $x O \tau$ ($\tau = ct$) plane, namely to have [9, p. 379] $g_{14} = 0$ and $c^2 g_{11} + g_{44} = 0$ (in the metric (8) the first condition is satisfied), from (7) we have $F' = 2aF$, so that we can put it

$$(21) \qquad F = c^2 e^{2ax}, \quad G = e^{2ax}, \quad \frac{A}{c^2} = a e^{-ax}, \quad \gamma = c,$$

the transformations (11) become

$$(22) \qquad \bar{x} = a^{-1} e^{ax} \cosh(act), \quad t = (ac)^{-1} e^{ax} \sinh(act)$$

and the coresponding metric is

$$(23) \qquad ds^2 = c^2 e^{2ax} dt^2 - e^{2ax} dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

As it was to be expected, the light speed along Ox would be c, independent of the x co-ordinate.

Conclusions

a) Imposing the metric to describe simultaneously a uniformly accelerated motion and a uniform field, and taking into account Einstein's interpretation on the general theory of relativity, the metric must have the form (8), $F(x)$ being an arbitrary function.

b) On the basis of the u^i field formalism developed by H. Dehnen [3], the conditions imposed on the metric to describe the uniform field are in concordance with Kottler's metric (17).

c) The uniform field could alter the form of the element of the quadridimensional volume, but this altering should also be uniform, namely the new element of volume must differ from that of Minkowski only by a constant factor. This condition is achieved for a metric like (5).

d) For (17) the light velocity is constant along Ox.

e) The concordance of all the above mentioned elements cannot be achieved with the classical interpretation of the general theory of relativity.

Received the 17 XI 1966

Polytechnic Institute, Jassy,
Physics Dept.,
University „Al. I. Cuza" of Jassy,
Theoretical Physics Dept.

REFERENCES

1. Arzèlies H., *Relativité généralisée. Gravitation.* Fasc. **I**, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1961.
2. Cattaneo C., *Conservation Laws in General Relativity.* Il Nuovo Cimento, 1959, **XIII**, p. 237.
3. Dehnen H., *Über den Energietensor des Gravitationsfeldes.* Ztschr. f. Phys., 1964, **179**, S. 76.
4. Einstein A.. *Die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. Phys., 1916, **49**, S. 769.
5. Gottlieb I. A., *Direct Consequence arising from the Relativistic Handling of an „Uniform" Field.* Il Nuovo Cimento, 1959, **XIV**, p. 1160.
6. Kottler F., *Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie.* Ann. Phys., 1918, **56**, S. 401.
7. Lichnerowicz A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Ed. Masson, Paris, 1955.
8. Pirani F. A. E., *Gauss's Theorem and Gravitational Energy.* From the volume *Les théories relativistes de la gravitation.* C. N. R. S., Paris, 1962, p. 85.
9. Romain J. E., *Time Measurements in Accelerated Frames of Reference.* Rev. of Mod. Phys., 1963, **35**, p. 376.

ASUPRA LEGĂTURII ÎNTRE SISTEMELE DE REFERINȚĂ UNIFORM ACCELERATE ȘI TRATAREA RELATIVIST-GENERALĂ A CÎMPULUI UNIFORM

(Rezumat)

Se studiază cazurile în care tratarea relativist-generală a cîmpului uniform și studiul sistemelor de referință uniform accelerate conduc la o aceeași metrică. Se obține forma generală a metricii dată de (8), unde $F(x)$ este o funcție arbitrară și care constituie o particularizare a metricilor date de J. E. Romain [9]. Dacă se cere ca metrica (8) să descrie un cîmp uniform în interpretarea lui H. Dehnen [3], se obține metrica lui F. Kottler [6]; dacă se impune invarianța elementului de volum cuadridimensional, (8) se reduce la (5), iar pentru transformări conforme în planul $xO\tau$, ($\tau = ct$), metrica (8) capătă forma (22). Satisfacerea simultană a acestor condiții nu se poate realiza în cadrul interpretării einsteiniene a teoriei relativității generale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

Д. К. 532.51 ; 517.53

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

И. М. БЕЛЕНЬКИЙ

1. Для плоских задач классической механики можно указать класс движений (в консервативных полях), которые будем называть потенциальными, ввиду их сходства с плоскими потенциальными течениями идеальной и несжимаемой жидкости. Эти движения так же как и потенциальные течения жидкости могут быть изучены с помощью аналитических функций.

Рассмотрим функционал W, выражающий действие по Мопертюи:

$$W = \int_A^B v\,ds. \tag{1.1}$$

Этот функционал, согласно принципу наименьшего действия Мопертюи-Лагранжа [1], принимает стационарное значение при движении точки по прямому пути, т. е.

$$\delta \int_A^B v\,ds = 0. \tag{1.2}$$

Может, однако, оказаться, что значение функционала W (1.1) не будет зависеть от вида кривой, соединяющей точки A и B, и, следовательно, условие стационарности рассматриваемого интеграла не будет выполняться. В этом особом случае функция действия W не будет иметь минимума, даже если бы при выборе кривых сравнения, соединяющих точки A и B было выполнено условие относительно расположения ближайшего кинетического фокуса, сопряженного с точкой A [2], [3]. Движения, для которых имеет место независимость W от вида кривой, соединяющей данные точки, будем называть потенциальными движениями.

Для потенциальных движений обычный метод определения траекторий, как нахождение экстремалей вариационной задачи (1.2), неприменим, т. к. соответствующее уравнение Эйлера обращается в тождество [4].

2. С целью нахождения траекторий для потенциальных движений, рассмотрим комплексную функцию вида:

$$\omega = \int_{z_A}^{z_B} v e^{-i\psi}\, dz, \quad (z = x + iy), \tag{2.1}$$

где $v(x, y)$ — величина скорости точки, а $\psi(x, y)$ — угол, образованный вектором скорости $\mathbf{v}$ с положительным направлением оси x-ов.

При движении точки по траектории, действительная часть интеграла (2.1), в силу соотношения $dz = e^{i\psi} ds$ будет совпадать со значением функции действия (1.1), а мнимая часть интеграла (2.1) обратиться в нуль, т. к. вдоль траектории имеем $v_x dy - v_y dx = 0$.

Из формы интеграла (2.1) следует, что для независимости функционала W от вида кривой, соединяющей точки z_A и z_B, необходимо и достаточно, чтобы комплексная скорость точки $\zeta(z) = v e^{-i\psi}$ была аналитической функцией комплексного переменного z. Следовательно, в силу условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}. \tag{2.2}$$

Рассматривая в интеграле (2.1) верхний предел как переменный получим:

$$\omega(z) = W(x, y) + iP(x, y), \tag{2.3}$$

где $W(x, y) = \mathcal{R}e \int \zeta(z)\, dz = \text{const.}$ будет семейство линий равного действия, а $P(x, y) = \mathcal{I}m \int \zeta(z)\, dz = \text{const.}$ будет семейство траекторий, при этом в силу аналитичности функции $\omega(z)$ будут выполняться условия:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Известное свойство [5] об ортогональности траекторий поверхностям равного действия (соответственно линиям равного действия для плоского случая) здесь также выполняется в силу сопряженности гармонических функций $W(x, y)$ и $P(x, y)$.

3. Полученным результатам можно дать простую гидромеханическую трактовку, если только v_x и v_y рассматривать как составляющие вектора скорости $\omega = v_x - iv_y$ частицы жидкости в потенциальном течении с комплексным потенциалом $f(z) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y)$ определяемым с помощью интеграла

$$f(z) = \int \zeta(z)\,dz, \tag{3.1}$$

где $\zeta(z) = ve^{-i\psi}$ соответствует комплексной скорости материальной точки в задаче классической механики.

На основании (2.1), где в интеграле верхний предел будем рассматривать как переменный, а также (2.3) и (3.1) получим:

$$\varphi(x, y) = W(x, y) + \text{const.}, \quad \chi(x, y) = P(x, y) + \text{const.}, \tag{3.2}$$

т. е. семейство эквипотенциальных линий $\varphi(x, y) = \text{const.}$ некоторого плоского потенциального течения идеальной и несжимаемой жидкости, применительно к плоской задаче классической механики, можно рассматривать как линии равного действия $W(x, y) = \text{const.}$, а семейство линий тока $\chi(x, y) = \text{const.}$ как семейство траекторий $P(x, y) = \text{const.}$

Потенциал силового поля $U(x, y)$ для задачи классической механики будет равен:

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}\left|\frac{df}{dz}\right|^2 \tag{3.3}$$

при значении постоянной энергии $E = 0$. Установленная, таким образом, связь (3.2) позволяет при решении задач классической механики использовать методы, развитие в теории плоских потенциальных течений.

В частности задача Гурса [6] о конформном преобразовании траектории, которую он решал, исходя из уравнения Якоби-Гамильтона, здесь сводится к задаче отображения потоков.

Если рассмотреть два потенциальных течения одно на плоскости τ с комплексным потенциалом:

$$f_1(\tau) = \varphi_1(\xi, \eta) + i\chi_1(\xi, \eta), \quad (\tau = \xi + i\eta),$$

а другое на плоскости z с комплексным потенциалом

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y), \quad (z = x + iy),$$

то преобразование с помощью аналитической функции

$$z = g(\tau), \tag{3.4}$$

при котором $f(z) = f(g(\tau)) = f_1(\tau)$, реализует конформное преобразо-

вание траекторий $P(x,y)=\chi(x,y)=\text{const.}$ плоскости z, в траектории $P_1(\xi,\eta)=\chi_1(\xi,\eta)=\text{const.}$ плоскости τ.

При указанном преобразовании траекторий, произойдет также преобразование силовых полей. Потенциал $U(x,y)$ исходного силового поля и потенциал $U_1(\xi,\eta)$ преобразованного силового поля будут связаны соотношением:

$$U_1(\xi,\eta)=D.U(x,y), \quad \left(D\equiv\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right), \tag{3.5}$$

где якобиан D преобразования (3.4) будет отличен от нуля так как, в силу условий Коши-Римана:

$$D=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2.$$

Так, например, потенциальному течению с комплексным потенциалом $f(z)=A\sqrt{z}$ при $A=\sqrt{8GM}$ в классической механике будет соответствовать семейство траекторий, в данном случае это будет семейство парабол $r(1-\cos\alpha)=\text{const.}$, которые описывают точки единичной массы $m=1$, при своем движении в ньютонианском поле силы притяжения, с потенциалом $U(r)=-GM/r$ и постоянной энергии $E=0$.

Взяв отображающую функцию (3.4) в виде $z=\tau^n$ мы перейдем от силового поля с потенциалом $U(r)=-GM/r$ к силовому полю с потенциалом $U_1(r)=-Br^{(n-2)/n}$, $(B>0)$. В частности при $n=2$ получим $U_1(r)=\text{const.}$, а траекториями будут прямые линии, параллельные оси ξ, что соответствует движению точек по инерции.

4. Установим теперь необходимое условие, которому должен удовлетворять потенциал $U(x,y)$ силового поля, чтобы функционал W (1.1) не зависел от вида кривой $y=y(x)$, соединяющей точки A и B. Так как при указанном требовании комплексная скорость точки $\zeta=ve^{-i\psi}$ должна быть функцией аналитической, то аналитической функцией будет и ее логарифм:

$$\ln\zeta(z)=\ln v(x,y)-i\psi(x,y), \tag{4.1}$$

за исключением быть может отдельных критических точек, в которых скорость $v=0$. Из аналитичности функции $\ln\zeta(z)$ следует, что функция:

$$\Phi(x,y)=\ln\sqrt{2(E-U(x,y))}, \quad (\Phi=\ln v), \tag{4.2}$$

где E — значение полной энергии, должна быть функцией гармонической, т. е. $\Delta\Phi=0$. Отсюда получим, как необходимое условие, что потенциал $U(x,y)$ должен удовлетворять уравнению в частных производных вида:

$$U\Delta U=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2, \tag{4.3}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Пользуясь (4.2) и (4.3) можно получить, что:

$$\Delta U = -2\exp(2\varphi)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right].$$

Откуда $\Delta U(x, y)<0$ и, следовательно, функция $U(x, y)$ принадлежит к классу супергармонических функций [7]. В частности уравнению (4.3) будут удовлетворять поля, образованные притягивающими или отталкивающими центрами с потенциалом $U(r)=Br^n$ (при $E=0$ и любых значениях B и n).

5. В качестве примера рассмотрим плоское потенциальное течение, комплексный потенциал которого равен:

$$f(z) = A\left(\sqrt{z}+\frac{B}{\sqrt{z}}\right), \quad (z = re^{i\alpha}). \tag{5.1}$$

Такому течению на отновании (3.1), (3.2) и (3.3) будет соответствовать потенциальное движение материальных точек единичной массы ($m=1$) в консервативном поле, потенциал $U(r, \alpha)$ которого есть результат наложения трех полей: ньютонианского поля силы притяжения $U_1(r) = -a/r$, поля диполя $U_2(r, \alpha) = +(b/r^2)\cos\alpha$ и поля, образованного притягивающим центром $U_3(r) = -c/r^3$. Потенциал результирующего поля будет равен:

$$U(r, \alpha) = -\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}\cos\alpha-\frac{c}{r^3}, \tag{5.2}$$

где

$$a=\frac{A^2}{8}, \quad b=\frac{A^2B}{4}, \quad c=\frac{A^2B^2}{8}.$$

В частности, если положить $A=\sqrt{8GM}$ и $B=\varepsilon$, где ε — малая величина, то $U_1(r) = -GM/r$ будет соответствовать ньютонианскому полю притяжения земли, а остальные слагаемые $U_2 \cong (\varepsilon/r^2)\cos\alpha$ и $U_3 \cong -\varepsilon^2/r^3$ можно рассматривать как наложение малого возмущения.

Функция $U(r, \alpha)$ (5.2) принадлежит к классу супергармонических функций и удовлетворяет уравнению (4.3), которое в случае полярных координат будет иметь вид:

$$U(r, \alpha)\,\Delta U(r, \alpha) = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)^2. \tag{5.3}$$

Пользуясь выражением для df/dz можно найти радиальную и трансверсальную составляющие скорости:

$$v_r = \frac{A}{2r\sqrt{r}}(r-B)\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad v_\alpha = -\frac{A}{2r\sqrt{r}}(r+B)\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{5.4}$$

Траекториями $P(x, y) = \text{const}$. в рассматриваемом потенциальном движении будут служить линии тока:

$$\left(\sqrt{r}-\frac{B}{\sqrt{r}}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \text{const}., \tag{5.5}$$

а линиями равного действия $W(x, y) = \text{const}$. будут эквипотенциальные линии течения:

$$\left(\sqrt{r}+\frac{B}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = \text{const}. \tag{5.6}$$

Временную зависимость движения точки по траектории можно получить если воспользоваться (5.4) и (5.5). Полученное решение удовлетворяет уравнениям движения в консервативном поле с потенциалом $U(r, \alpha)$ (5.2) при постоянной энергии $E = 0$.

Поступила 7 XI 1964 г.

Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., *Аналитическая механика.* Физматгиз, М., 1961.
2. Якоби К., *Лекции по динамике.* ОНТИ, М., 1936, (пер. с франц.).
3. Суслов Г. К., *Теоретическая механика.* Гостехиздат, М., 1944.
4. Курант Р., Гильберт Д., *Методы математической физики.* Т. I, ГТТИ, М—Л., 1933, (пер. с нем.).
5. Аппель П., *Теоретическая механика.* Т. II, Физматгиз, М., 1960, (пер. с франц.).
6. Goursat M. E., *Les transformations isogonalles en Mécanique.* C. R. Ac. Sci Paris, 1889, 108.
7. Привалов И. И., *Субгармонические функции.* ГТТИ, М.—Л., 1937.

ASUPRA UNEI CLASE DE MIŞCĂRI POTENŢIALE

(Rezumat)

Se studiază o clasă de mişcări plane, numite potenţiale, în care metoda obişnuită de determinare a traiectoriilor pe baza principiului acţiunii staţionare a lui Jacobi nu este aplicabilă întrucît ecuaţia corespunzătoare a lui Euler devine o identitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 538.082.74.03

INFLUENŢA CÎMPULUI DE MĂSURĂ ASUPRA DEZACOMODĂRII FERITELOR MANGAN-ZINC

DE

V. PETRESCU, GH. MAXIM şi N. REZLESCU

1. Introducere

Prezenţa imperfecţiunilor (atomi străini, goluri) în reţeaua cristalină a unui material feromagnetic este uneori însoţită de fenomenul de variaţie a permeabilităţii iniţiale cu timpul scurs de la demagnetizare — fenomen cunoscut sub numele de dezacomodare. Acesta constituie cauza de diferenţiere energetică a locurilor ce pot fi ocupate de impurităţi în reţeaua cristalină, introdusă de vectorul magnetizării spontane [1]. Odată cu modificarea direcţiei acestui vector (realizată prin demagnetizare) se schimbă şi locurile preferenţiate energetic, iar impurităţile vor difuza pe noile locuri preferenţiate. Această difuzie măreşte adîncimea văii de potenţial din jurul pereţilor ce separă domeniile de magnetizare spontană, ceea ce duce la micşorarea mobilităţii lor şi deci la micşorarea permeabilităţii.

Difuzia se produce după o lege exponenţială, cu o constantă de timp ce depinde de energia de activare a procesului. Această constantă de timp poate fi determinată experimental din curba de scădere a permeabilităţii. Dar curbele experimentale, atît pentru fierul carbonil cît şi pentru ferite, nu pot fi descrise cu o singură constantă de timp, ci cu un întreg spectru, care este considerat de unii autori [2]...[5] continuu, dispersia fiind pusă pe seama imperfecţiunilor reţelei, sau de alţii [6]...[9] discret, constituit din cîteva constante de timp, fiecare din ele caracterizînd cîte un proces de difuzie distinct.

Într-o lucrare anterioară [10] am arătat că din analiza curbelor de scădere în timp a permeabilităţii unei ferite mangan-zinc rezultă că în procesul de difuzie nu poate exista un spectru continuu de constante de timp. Prelucrînd aceste curbe în ipoteza unui spectru discret, constituit din trei constante de timp distincte, am constatat că energiile de activare corespunzătoare sînt apropiate între ele şi că variaţia dezacomodării cu temperatura este asemănătoare pentru toate cele trei componente. Aceste fapte pun sub semn de întrebare şi ipoteza spectrului discret de constante de timp.

În prezenta lucrare am urmărit influenţa cîmpului de măsură şi a unui cîmp continuu, suprapus peste cel de măsură, asupra formei curbei de scădere a permeabilităţii în timp, iar în interpretarea rezultatelor am ţinut seama de dispersia forţelor elastice ce se aplică pereţilor dintre domeniile de magnetizare spontană.

2. Consideraţii teoretice

Pentru a putea cerceta care este influenţa exercitată de cîmpul magnetic de măsură asupra formei curbei de scădere a permeabilităţii în timp vom utiliza teoria trenajului magnetic de difuzie dată de Néel [1].

Deplasarea $u(t)$ a unui perete, ce separă două domenii cu magnetizările spontane $\mathbf{I}_1$ şi $\mathbf{I}_2$, sub acţiunea unui cîmp magnetic $\mathbf{H}(t)$ se determină din condiţia de echilibru a presiunilor ce se exercită asupra peretelui:

$$-au(t) + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)\,\mathbf{H}(t) + P(u,t) = 0. \tag{1}$$

În această relaţie primul termen reprezintă forţa elastică cu care unitatea de suprafaţă a peretelui este atrasă spre poziţia de echilibru, iar a este constanta elastică pe care o presupunem aceeaşi pentru toţi pereţii. Al doilea termen reprezintă presiunea magnetică aplicată peretelui. Al treilea termen reprezintă presiunea trenajului magnetic, a cărei expresie, în ipoteza unui spectru continuu de constante de timp în procesul de difuzie, este:

$$P(u,t) = -W_0 \int_0^{\infty} p(\theta)\,\frac{d\theta}{\theta} \int_0^{t} e^{-\frac{t-\tau}{\theta}} f(U)\,d\tau; \tag{2}$$

în care: W_0 — o constantă, $p(\theta)$ — probabilitatea ca un proces elementar de difuzie să aibă constanta de timp θ, $f(U)$ — funcţia trenajului magnetic de difuzie şi $U = u(\tau) - u(t)$.

Presupunînd, pentru simplificare, că avem de-a face numai cu pereţi la 90° şi cu un cîmp magnetic sinusoidal relaţia (1) capătă forma:

$$-au + I_s H_m \sin \omega t + P(u,t) = 0, \tag{3}$$

în care I_s este momentul magnetic la saturaţie.

Pentru a calcula presiunea trenajului magnetic vom ţine seama de faptul că $f(U)$ este o funcţie periodică de $\omega\tau$ şi o vom dezvolta în serie Fourier. Coeficienţii seriei vor fi în general funcţii de timpul t şi de deplasarea maximă a peretelui u_m:

$$f[u(\tau) - u(t)] = A_0(t, u_m) + \sum_1^{\infty} A_n(t, u_m) \sin n\omega\tau + \sum_1^{\infty} B_n(t, u_m) \cos n\omega\tau. \tag{4}$$

Introducînd pe (4) în relaţia (2) şi efectuînd integrarea în raport cu τ se obţine:

$$P(u,t) = -W_0 \int_0^{\infty} p(\theta) \left[(1 - e^{-\frac{t}{\theta}})\, A_0(u_m, t) + \sum_1^{\infty} \frac{A_n(u_m, t)}{1 + (n\omega\theta)^2} (\sin n\omega t - \right. \tag{5}$$

$$\left. - n\omega\theta \cos n\omega t + n\omega\theta\, e^{-\frac{t}{\theta}}) + \sum_1^{\infty} \frac{B_n(u_m, t)}{1 + (n\omega\theta)^2} (\cos n\omega t + n\omega\theta \sin n\omega t - e^{-\frac{t}{\theta}}) \right] d\theta.$$

Chiar și pentru cea mai mică constantă de timp din spectru produsul $\omega\theta$ este foarte mare (în cazul experiențelor noaste $\omega\theta \cong 10^5$) și de aceea cele două sume pot fi neglijate în raport cu primul termen de sub semnul integrală. Ținînd seama de acest fapt relația (5) devine:

$$P(u,t) = -W_0 A_0(u_m, t) G(t), \tag{6}$$

unde am introdus notația

$$G(t) = \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{t}{\theta}}) p(\theta)\, d\theta.$$

$A_0(u_m, t)$ reprezintă primul termen din dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(U)$ și are expresia:

$$A_0(u_m, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[u(\tau) - u(t)]\, d\omega\tau. \tag{7}$$

În cazul cîmpurilor slabe, pentru care deplasările pereților sînt mai mici decît grosimea lor (d), se poate face aproximația:

$$f(U) = \frac{2}{3d} U. \tag{8}$$

Cu această aproximație din (7) se deduce:

$$A_0(u_m, t) = \frac{2}{3d} u_m \sin \omega t. \tag{9}$$

Introducînd (9) în (3) se obține o relație ce furnizează variația în timp a deplasării maxime a pereților:

$$-au_m + I_s H_m = \frac{2}{3d} u_m W_0 G(t). \tag{10}$$

Susceptibilitatea magnetică este dată de relația:

$$\chi = \frac{I}{H} = \frac{uSI_s}{H}, \tag{11}$$

unde S este suprafața totală a pereților dintr-un cm³. Pentru $t = 0$ rezultă:

$$\chi_0 = \frac{SI_s^2}{a}. \tag{12}$$

Ținînd seama că la materialele feromagnetice $\chi \approx \mu$ din (10), (11) și (12) rezultă:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} = \frac{G(t)}{\mu_1} \quad \text{sau} \quad \frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_\infty} = \frac{\mu}{\mu_1} G_1(t), \tag{13}$$

în care μ_∞ este permeabilitatea pentru $t = \infty$,

$$\mu_1 = \frac{3dSI_s^2}{2W_0} \quad \text{şi} \quad G_1(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\theta}} p(\theta)\, d\theta.$$

În cîmpuri intense $f(U)$ nu mai este liniară, ci tinde asimptotic spre 1 în cazul pereţilor dintre domenii cu magnetizarea la 90°. Din această cauză calculul lui $A_0(u_m, t)$ este dificil. $A_0(u_m, t)$ va fi o funcţie periodică de valoare maximă $A_{0m}(u_m)$.

Pereţii dintre domenii se deplasează simfazic şi deci trec prin valoarea maximă a deplasării în acelaşi timp în care şi momentul magnetic total trece prin valoarea maximă. Tensiunea ce se măsoară experimental cu voltmetrul electronic la bornele unei înfăşurări de pe torul de studiat, şi care se alege ca măsură a permeabilităţii, este proporţională cu inducţia maximă. Dacă se integrează această tensiune, voltmetrul electronic va da o indicaţie proporţională cu valoarea de vîrf a inducţiei magnetice, indiferent de modul de variaţie în timp al acesteia. Ţinînd seama de aceste observaţii, rezultă că pentru interpretarea curbelor experimentale este suficient să urmărim variaţia în timp a deplasării maxime a pereţilor, care este dată de relaţia:

$$-au_m + H_m I_s - A_{0m}(u_m) W_0 G(t) = 0. \tag{14}$$

Vom rezolva ecuaţia (14) într-un caz extrem, cînd cîmpul este foarte intens. În acest caz

$$f(U) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } \sin \omega\tau > \sin \omega t, \\ +1 \text{ pentru } \sin \omega\tau < \sin \omega t, \end{cases} \tag{15}$$

de unde rezultă $A_{0m}(u_m) = 1$. Introducînd acest rezultat în (14) şi ţinînd seama de faptul că permeabilitatea măsurată experimental este proporţională cu deplasarea maximă a pereţilor rezultă:

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} = \frac{W_0}{I_s H_m} G(t) \quad \text{sau} \quad \frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_\infty} = \frac{W_0}{I_s H_m - W_0} G_1(t). \tag{16}$$

Din (16) rezultă că în cîmpuri de măsură intense permeabilitatea variază în timp după aceeaşi lege ca şi $G(t)$. Comparînd (13) cu (16) se poate constata că în cîmpuri slabe rezultă o viteză de variaţie mai mare. Diferenţa este însă mică, deoarece variaţia totală a permeabilităţii este redusă (în cazul măsurătorilor noastre $\mu_0 \simeq 1{,}4\,\mu_\infty$). Relaţiile (13) şi (16) reprezintă două cazuri extreme; la valori intermediare ale intensităţii cîmpului viteza de variaţie în timp a permeabilităţii este cuprinsă între valorile date de aceste relaţii.

O discuție asemănătoare se poate face și pentru pereții între domenii cu magnetizarea la 180°. În cîmpuri de măsură slabe situația se păstrează neschimbată. În cîmpuri intense A_{0m} nu mai tinde spre 1, ci după ce atinge o valoare maximă scade spre zero. Din acest motiv relația (16) va căpăta pentru acest caz forma:

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} = \frac{W_0}{I_s H_m} A_{0m}(u_m)\, G(t). \tag{17}$$

Factorul $A_{0m}(u_m)$ pentru cîmpuri de măsură intense crește în timp și deci viteza de variație a permeabilității este mai mică decît cea a lui $G(t)$. Dar la cîmpuri de măsură intense u_m și deci și $A_{0m}(u_m)$ variază foarte puțin, încît este posibil să se considere că situația este aceeași ca și în cazul pereților la 90°.

3. Rezultate experimentale și discuții

Studiul experimental al dezacomodării l-am efectuat pe o ferită manganzinc de formă toroidală cu următoarele dimensiuni: $d_i = 13$ mm, $d_e = 22$ mm, $h = 6$ mm. Proba se demagnetiza în cîmp alternativ de amplitudine descrescătoare. Durata unei demagnetizări era de 2...3 sec. Permeabilitatea s-a măsurat în cîmp alternativ cu frecvența de 2 kHz.

Curbele de variație a permeabilității în timp, obținute pentru diverse amplitudini ale cîmpului de măsură, sînt redate în fig. 1.

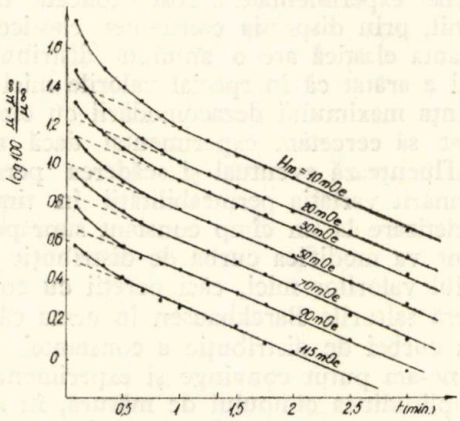


Fig. 1

În cîmpuri slabe permeabilitatea are o viteză de scădere mare la valori mici ale timpului; permeabilitatea scade tinzînd spre o valoare constantă la valori mari ale timpului. Corecția ce trebuie făcută acestei curbe pentru a obține pe $G(t)$ este redusă astfel încît și $G(t)$ va prezenta aceeași variație în timp.

Forma curbei de scădere ar putea indica prezenţa unui întreg spectru (continuu sau discret) de constante de timp în procesul de difuzie. Dar odată cu creşterea amplitudinii cîmpului de măsură forma curbei de scădere se modifică mult mai mult decît ar rezulta din relaţiile (13) şi (16). În cîmpuri de măsură intense curba de scădere se apropie de cea corespunzătoare unei singure constante de timp. În baza relaţiei (16), din care reiese că în cîmpuri intense permeabilitatea variază în timp în acelaşi mod ca şi $G(t)$, putem presupune că procesul de difuzie este caracterizat de o singură constantă de timp şi că scăderea permeabilităţii cu viteză variabilă în timp în cîmpuri de măsură slabe nu este determinată de existenţa unui spectru de constante de timp în procesul de difuzie, ci de alte cauze.

Mărimea dezacomodării prezintă o variaţie cu amplitudinea cîmpului de măsură de tipul indicat în fig. 2 (curba *1*). Ca măsură a dezacomodării s-a considerat raportul:

$$D = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}, \tag{18}$$

în care μ_1 şi μ_2 sînt valorile permeabilităţii la 10 sec respectiv la 5 min după demagnetizare.

Din relaţiile (13) şi (16) rezultă că în cîmpuri slabe dezacomodarea este constantă, iar în cîmpuri intense ea scade monoton cu cîmpul de măsură. Curba experimentală nu are această formă, ci prezintă o creştere în cîmpuri slabe, atinge o valoare maximă, apoi scade spre cîmpurile intense. Această formă a curbei experimentale a fost explicată de Néel [1] pentru cazul fierului carbonil, prin dispersia constantei elastice a din relaţia (1). El a admis că constanta elastică are o anumită distribuţie între zero şi o valoare maximă a_1 şi a arătat că în special valorile mici ale constantei elastice determină existenţa maximului dezacomodării cu cîmpul de măsură.

Noi am încercat să cercetăm experimental dacă această distribuţie a constantei elastice influenţează eventual şi scăderea permeabilităţii în timp. În acest scop am urmărit variaţia permeabilităţii în timp supunînd ferita imediat după demagnetizare la un cîmp constant suprapus peste cel de măsură. Cîmpul constant va modifica curba de distribuţie a constantei elastice în special în domeniul valorilor mici, căci pereţii cu constante elastice mici sînt primii care suferă salturile Barckhausen în urma cărora dispar.

De modificarea curbei de distribuţie a constantei elastice în prezenţa unui cîmp constant ne-am putut convinge şi experimental ridicînd variaţia dezacomodării cu amplitudinea cîmpului de măsură, în această situaţie. În fig. 2 (curbele *2* şi *3*) sînt redate rezultatele obţinute pentru cîmpuri continue de 0,4 respectiv 0,8 Oe. Se observă că maximul dezacomodării scade cu creşterea cîmpului continuu suprapus. Acest aspect nu poate fi cauzat decît de modificarea distribuţiei constantelor elastice.

În fig. 3 este dată curba de variaţie în timp a permeabilităţii la un cîmp constant de 0,8 Oe şi un cîmp de măsură slab. În aceeaşi figură este reprezentată şi curba ce se obţine în absenţa cîmpului constant. Pentru a

putea aprecia diferența dintre vitezele de scădere ale celor două curbe am deplasat-o pe una din ele în așa fel încît părțile lor liniare să coincidă (curba punctată).

Deși diferența dintre cele două curbe este redusă putem trage totuși concluzia că modificarea distribuției constantei elastice are drept consecință modificarea curbei de scădere în timp a permeabilității.

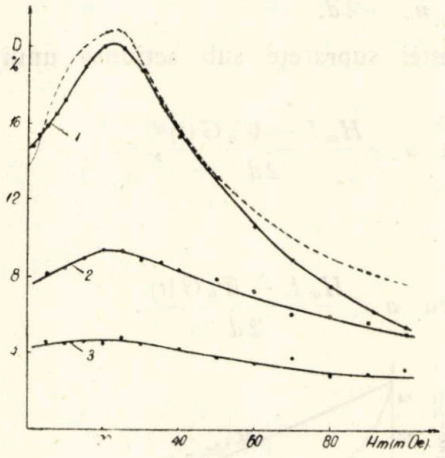


Fig. 2

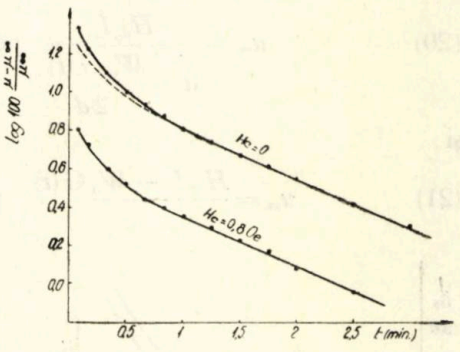


Fig. 3

Pornind de la aceste constatări experimentale vom încerca să luăm în considerare, în teoria trenajului magnetic de difuzie, dispersia constantei elastice și să cercetăm în ce măsură această dispersie poate influența curba de scădere a permeabilității în timp.

Pentru ca rezultatele ce le vom obține să aibă cel puțin un caracter semicantitativ, ar trebui să cunoaștem ponderile care le au în procesul de magnetizare pereții între domenii cu magnetizarea spontană la 90° și la 180°. Néel a arătat că un indiciu pentru aceste ponderi îl constituie variația cîmpului intern echivalent trenajului (H_t) cu cîmpul aplicat din exterior (H), întrucît în cazul pereților la 90° cîmpul de trenaj crește cu cîmpul exterior pînă la o anumită valoare după care rămîne constant, iar în cazul pereților la 180° cîmpul de trenaj crește, de asemenea, pînă la o anumită valoare, apoi scade spre zero.

În fig. 4 sînt reprezentate curbele de primă magnetizare pentru ferita pe care am lucrat, ridicate la 10 sec respectiv 5 min după demagnetizare. Din aceste curbe am calculat cîmpul de trenaj magnetic. Curba de variație a cîmpului de trenaj magnetic cu cîmpul exterior arată că în procesul de magnetizare rolul predominant îl joacă pereții între domenii cu magnetizarea spontană la 90° și de aceea în cele ce urmează vom ține seama numai de aceștia.

Presupunem că forţa elastică cuprinsă între a şi $a + da$ se exercită pe suprafaţa de perete $dS = F(a)\,da$, $F(a)$ fiind funcţia de distribuţie a constantei elastice. Făcînd aproximaţia:

$$A_{0m} = \begin{cases} \dfrac{1}{2d} u_m \text{ pentru } u_m < 2d, \\ 1 \text{ pentru } u_m > 2d, \end{cases} \tag{19}$$

din relaţia (14) rezultă că deplasarea acestei suprafeţe sub acţiunea unui cîmp exterior este:

$$u_m = \frac{H_m I_s}{a + \dfrac{W_0 G(t)}{2d}} \quad \text{pentru} \quad a > \frac{H_m I_s - W_0 G(t)}{2d}, \tag{20}$$

şi

$$u_m = \frac{H_m I_s - W_0 G(t)}{a} \quad \text{pentru} \quad a < \frac{H_m I_s - W_0 G(t)}{2d}. \tag{21}$$

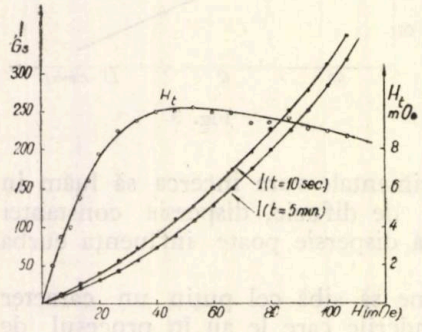


Fig. 4

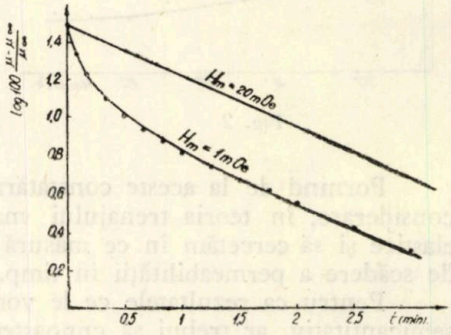


Fig. 5

Din relaţiile (11), (20) şi (21) este determinată legea de variaţie a permeabilităţii în timp:

$$\mu = \frac{I_s}{H_m}\left(\int_0^{\frac{H_m I_s - W_0 G}{2d}} \frac{H_m - W_0 G}{a} F(a)\,da + \int_{\frac{H_m I_s - W_0 G}{2d}}^{\infty} \frac{H I_s}{a + \dfrac{W_0}{2d} G} F(a)\,da \right). \tag{22}$$

Despre funcţia de distribuţie nu ştim decît că ea este diferită de zero într-un anumit interval şi nulă în rest. Existenţa domeniului Rayleigh indică prezenţa unor constante elastice foarte apropiate de zero. Astfel am

putea accepta pentru această funcție o distribuție uniformă între zero și o valoare maximă a_1. Dar cu această distribuție se obține o valoare infinită pentru permeabilitate. De aceea am ales pentru $F(a)$ următoarea expresie:

$$F(a) = K\frac{a}{a_0 + a}, \quad K = \text{const.}, \tag{23}$$

care este nulă pentru $a = 0$ iar pentru valori mici ale constantei a_0 crește repede spre 1, rămînînd apoi constantă. Introducînd (23) în (22) și efectuînd integrarea rezultă următoarea lege de variație a permeabilității în timp:

$$\mu = I_s^2 K\left[\left(1 - \frac{W_0 G(t)}{I_s H_m}\right)\ln\frac{2a_0 d + I_s H_m - W_0 G(t)}{2a_0 d} + \right.$$
$$+ \frac{W_0 G(t)}{W_0 G(t) - 2a_0 d}\ln\frac{2a_1 d + W_0 G(t)}{I_s H_m} -$$
$$\left. - \frac{2a_0 d}{W_0 G(t) - 2a_0 d}\ln\frac{2a_1 d + 2a_0 d}{2a_0 d + I_s H_m - W_0 G(t)}\right]. \tag{24}$$

În cîmpuri de măsură foarte slabe expresia (24) devine ceva mai simplă:

$$\mu = I_s^2 K\left[\frac{W_0 G(t)}{W_0 G(t) - 2a_0 d}\ln\frac{2a_1 d + W_0 G(t)}{W_0 G(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{2a_0 d}{W_0 G(t) - 2a_0 d}\ln\frac{a_1 + a_0}{a_0}\right]. \tag{25}$$

Plecînd de la ipoteza că în $G(t)$ intervine o singură constantă de timp ($\theta = 1{,}7$ min), am încercat să constatăm dacă printr-o alegere convenabilă a constantelor a_0 și a_1 variația permeabilității în timp calculată cu relația (25) se apropie de curba experimentală ridicată în cîmpuri de măsură slabe. Am constatat că pentru $2a_0 d = 0{,}02\, W_0$ și $2a_1 d = 10^5\, W_0$ curba calculată cu relația (25), pe care am trasat-o în fig. 5, aproximează foarte bine curba ridicată experimental.

Pentru cîmpuri de măsură mai intense variația permeabilității am calculat-o cu relația (24). Am constatat că odată cu creșterea cîmpului de măsură curbele calculate se liniarizează mult mai repede decît cele experimentale, devenind practic liniare pentru cîmpuri depășind 20 mOe. Această neconcordanță se datorește ipotezelor simplificatoare pe care le-am admis pentru calcularea mai comodă a curbelor. În primul rînd A_{0m} prezintă o variație însemnată și pentru $u > 2d$, în al doilea rînd în calcule nu s-a putut ține seamă de isterezis, care apare la cîmpuri ce depășesc 30...40 mOe și în al treilea rînd presiunea magnetică nu este aceeași pentru toți pereții, ci depinde de unghiurile dintre vectorii magnetizării spontane și cîmpul magnetic variind între zero și valoarea maximă HI_s. Toate aceste trei aproximații tind să liniarizeze curbele de scădere a permeabilității în

timp la cîmpuri de măsură intense. În cîmpuri slabe A_{0m} variază liniar cu u, fenomenul de isterezis nu apare şi întrucît cîmpul de măsură nu influenţează scăderea permeabilităţii în timp (după cum rezultă din relaţia (25)) şi a treia aproximaţie este satisfăcătoare.

Tot cu ajutorul relaţiilor (24) şi (25) am calculat variaţia dezacomodării, definită de relaţia (18), cu amplitudinea cîmpului de măsură. Curba rezultată am reprezentat-o punctat în fig. 2. Ea se apropie ca formă de curba experimentală şi are un maxim în apropierea cîmpului $H_m = W_0/I_s$.

4. Concluzii

1. Cîmpul de măsură exercită o deosebită influenţă asupra curbei de scădere a permeabilităţii în timp. De aceea este necesar ca dezacomodarea să se măsoare în cîmpuri suficient de slabe, astfel ca chiar şi pereţii cei mai mobili să nu sufere deplasări mai mari decît grosimea lor.

2. Dispersia forţelor elastice poate explica, pe lîngă variaţia dezacomodării cu cîmpul de măsură, şi forma curbei de scădere a permeabilităţii în timp.

3. Deoarece distribuţia forţelor elastice, cu care am putut interpreta curbele experimentale, prezintă o dispersie exagerat de mare, presupunem că această dispersie reprezintă doar unul din factorii de care depinde forma curbei de scădere a permeabilităţii în timp. Există probabil şi o dispersie a constantelor de timp.

Primită la 28 IV 1966

Academia Republicii Socialiste România,
Filiala Iaşi,
Centrul de cercetări fizice

BIBLIOGRAFIE

1. Néel L., J. Phys. Rad., 1952, **13**, *5*, p. 249.
2. Ohta K., J. Phys. Soc. Japan, 1961, **16**, *2*, p. 250.
3. Braginski A., Marais A., Merceron Th., C. R. Acad. Sc. Paris, 1961, **253**, *2*, p. 239.
4. Krupička S., Vilim F., Czech. J. Phys., 1961, **11**, *1*, p. 10.
5. Kuroda Chinji, J. Phys. Soc. Japan, 1960, **15**, *10*, p. 1898.
6. Crapo W. A., J. Appl. Phys., 1960, **31**, p. 267 S.
7. Iida S., Inoue T., J. Phys. Soc. Japan, 1962, **17**, Suppl. B_1, p. 281.
8. Bosman A. J., Brommer P. E., Van Daal H. J., Rathenau G. W., Physica, 1957, **23**, *11*, S. 989.
9. Tsushima K., J. Phys. Soc. Japan, 1962, **17**, Suppl B_1, p. 338.
10. Petrescu V., Maxim Gh., Rezlescu N., St. şi cerc. de Fizică, 1965, **16**, *5*, p. 453.

INFLUENZA DEL CAMPO DI MISURA SUL DESACCOMODAZIONE DELLE FERRITE Mn-Zn

(Sunto)

Gli autori, seguendo l'ordine di idee di un lavoro anteriore proprio [10], studiano l' influenza esercitata nello scorrere del tempo dal campo di misura e da un campo continuo' soprapposto su quello di misura, sulla forma della curva di decrescenza della permeabilità' Nell'interpretazione dei risultati si è tenuto conto dalla dispersione delle forze elastiche che si applicano alle pareti tra i domini di magnetizzazione spontanea.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. K. 538.245

DER EINFLUSS DER TRÄGERPLASTIZITÄT AUF DIE MAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN DÜNNER, CHEMISCH NIEDERGESCHLAGENER KOBALTSCHICHTEN

VON

C. RUSCIOR, G. CĂLUGĂRU und M. SUCIU

1. Einleitung

In den letzten Jahren wurden die magnetischen Eigeschaften der dünnen, chemisch niedergeschlagenen Kobaltschichten studiert [1]...[5] und zwar besonders im Zusammenhang mit der Möglichkeit ihrer Verwendung als Informationsspeicher. Die chemisch abgeschiedenen Kobaltschichten unterscheiden sich von denen durch andere Mittel hergestellten Schichten dadurch, dass sie einen gewissen Phosphorgehalt besitzen (3...5%), welcher Umstand ihnen besondere Eigenschaften verleiht.

Der Einfluss des Trägers auf die magnetischen Eigenschaften dünner, ferromagnetischer Schichten ist eingehend untersucht worden. E. P. Tyndall [6] zeigte, dass die Natur des Trägers die magnetischen Eigenschaften dünner Eisenschichten beeinflusst. Limura und Mitarbeiter [7] und Tomita [9] studierten den Einfluss der Struktur des Trägers auf die magnetischen Eigenschaften von Permalloy-80-Schichten, Kolk und White [10] untersuchten den Einfluss des Trägers auf die 97 Fe-3 Ni-Legierung, Procopiu und Mitarbeiter [11], [12] befassten sich mit dem Studium der elektrolytisch hergestellten Fe-Ni 50- und Kobalt-Schichten.

Wir untersuchten das magnetische Verhalten dünner, chemisch niedergeschlagenen Kolbaltschichten, auf harten und plastischen Platinträgern. Als harten Träger ist ein gewöhnlicher Platindraht, von 1 mm Durchmesser, benutzt worden. Der plastische Träger wurde durch Glühen des Drahtes in der Luft, bei 1 000° C, mittels elektrischen Stromes erhalten.

Die dünnen Kobaltschichten wurden aus einer 50 g/l Kobaltsulphat, 100 g/l Natriumhypophosphit und 80 g/l Natriumzitrat enthaltenden wässerigen Lösung niedergeschlagen [5]. Der pH der Lösung war 9,7 und die Temperatur des Bades 95°C. Die so erhaltene Schichten haften gut auf Platin, besitzen metallischen Glanz und einen ca 5%-gen Phosphorgehalt.

Die magnetischen Messungen sind in einem magnetischen Wechselfeld (50 Hz, Höchstwert 150 Oe), mittels der von Colombani ausgearbeiteten Induktionsmethode durchgeführt worden [13].

Die Schichtdicken wurden durch die Wägemethode gemessen.

2. Ergebnisse

Die magnetischen Eigenschaften der chemisch niedergeschlagenen Kobaltschichten sind für die harten und für die weichgeglühten Platinträger verschieden.

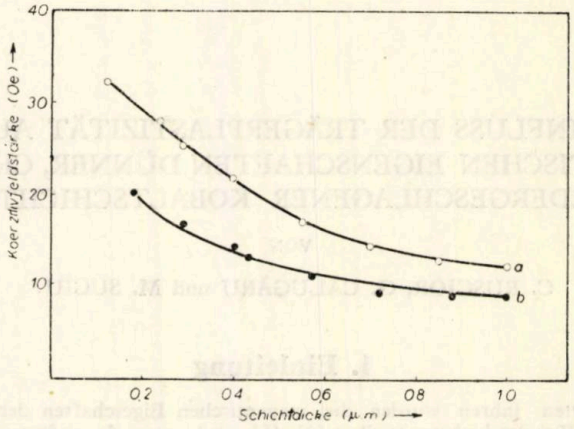


Abb. 1. — Abhängigkeit der Koerzitivfeldstärke von der Schichtdicke ;
a — Schichte auf harten Pt-Träger, *b* — Schichte auf weich geglühten Pt-Träger.

Wie aus Abb. 1 zu ersehen ist, nimmt die Koerzitivfeldstärke (H_c) unterhalb 0,7 μm mit abnehmender Schichtdicke sowohl für die auf harte Träger (Kurve *a*) wie auch für die auf plastische Träger abgeschiedene Schichte (Kurve b) zu. Bei gleicher Schichtdicke aber ist die Koerzitivfeldstärke grösser für die auf harte Träger aufgetragenen Schichten. So z. B. ist für eine 1 μm dicke Schichte $H_c = 12$ Oe im Falle des harten Trägers und $H_c = 8$ Oe für den plastischen Träger. Für eine 0,18 μm dicke Schichte steigen diese Werte auf 30 Oe bzw. 20 Oe an.

Der Träger beeinflusst auch die magnetische Remanenz und die Magnetisierung der Schichten. Für die 1 μm dicken Schichten, sind die entspre-

Tabelle 1

	Starrer Träger	Plastischer Träger
H_c (Oersted)	12	8
$\mathcal{J}_r$ (Gauss)	200	380
$\mathcal{J}_{max}$ (Gauss)	740	850
$\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_{max}$	0,27	0,45

chenden Werte der Remanenz ($\mathcal{J}_r$) und des Magnetisierungsmaximums ($\mathcal{J}_{max}$) mit abnehmender Schichtdicke anfangs zu (Abb. 2). Der weitere Verlauf zeigt dann ein Abfallen unter 0,3 μm für Kurve *a* und 0,4 μm für Kurve *b*. Bei gleicher Dicke ist $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_{max}$ für die auf plastischen Träger aufgetragene Schichte grösser.

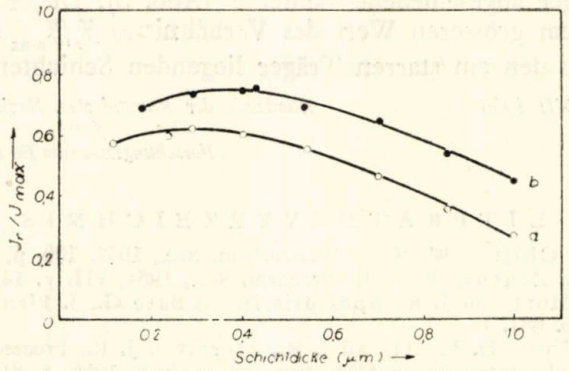


Abb. 2. — Abhängigkeit des Verhältnisses $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_{max}$ von der Schichtdicke;
a — Schichte auf harten Pt-Träger, *b* — Schichte auf weich geglühten Pt-Träger.

Die Hysteresisschleifen der auf harte (*a*) und weiche geglühten (*b*) Platinträger niedergeschlagenen Kobaltschichten sind in Abb. 3 wiedergegeben (Schichtdicke 1 μm, Feldmaximum 150 Oe).

3. Diskussion

Die obenangeführten Ergebnisse können folgendermassen gedeutet werden.

Der auffallende Anstieg der Koerzitivkraft mit abnehmender Schichtdicke, der für unsere chemisch abgeschiedene Kobaltschichten unterhalb 0,7 μm festzustellen ist, wurde auch bei anderen ferromagnetischen Metallen beobachtet und theoretisch von Kittel gedeutet [14]. Er ist den besonders einfachen Bereichstrukturen dieser Schichten zuzuschreiben, bei denen die Magnetisierung mehr durch Drehprozesse erfolgen kann.

Bezüglich dem verschiedenen magnetischen Verhalten der bei gleicher Dicke auf harten, bzw. plastischen Trägern niedergeschlagenden Schichten ist es aber anzunehmen, dass ein solches dem Träger zuzuschreiben ist und von der Magnetostriktion dieser Schichten hervorgerufen wird.

Wie bekannt, weisen die Kobaltschichten eine negative Magnetostriktion auf. Dem magnetischen Felde ausgesetzt, kann sich die am harten Träger haftende Schichte nur wenig zusammenziehen im Vergleich mit der am plastischen Träger liegenden, deren Aufspannung, wegen der Deformierbarkeit des weich geglühten Trägers, geringer ist. Infolgedessen verhält

sich im magnetischen Felde die am starren Träger niedergeschlagene Schichte wie ein aufgespannter ferromagnetischer Körper mit negativer Magnetostriktion: die Remanenz und die Magnetisierung werden kleiner im Vergleich zu der am plastischen Träger liegende Schichte. Die Form der Hysteresisschleife nähert sich also mehr einer rechtwinkligen Form im Falle der am plastischen Träger abgeschiedene Schichte (Abb. 3). Dieser Schluss ist im Einklang mit dem grösseren Wert des Verhältnisses $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_{max}$ dieser Schichten im Vergleich zu den am starren Träger liegenden Schichten.

Eingegangen am 9 XII 1966

Akademie der Rumänischen Sozialistischen Republik,
Jassy,
Forschungszentrum für Physik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Fisher R. D., Chilton W. H., J. Electrochem. Soc., 1962, **109**, p. 485.
2. Ranson L. D.. Zentner V., J. Electrochem. Soc., 1964, **111**, p. 1423.
3. Judge J. D., Morrison J. R., Speliotis D. E., Bate G., J. Electrochem. Soc., 1965, **112**, p. 681.
4. Bate G., Speliotis D. E., Alstad J. K., Morrison J. R., Proceedings of the International Conference on Magnetism. Nottingham, 1965, p. 816.
5. Коренев Ж. А., Марценюк Т. Д., Уваров А. И., Изв. ВУЗ СССР, сер. физ., 1965, *1*, стр. 85.
6. Tyndall E. P., Phys. Rev., 1927, **30**, p. 681.
7. Limura T., Sekiguki, S., Sasaki M., J. Jap. Inst. Metals, 1962, **26**, p. 396.
8. — Trans. Jap. Inst. Metals, 1963, **4**, p. 59.
9. Tomita S., J. Jap. Inst. Metals, 1963, **27**, p. 122.
10. Kolk A., White H., J. Electrochem. Soc., 1963, **110**, p. 98.
11. Procopiu Şt., Viscrian I., Naum C., C. R. Acad. Sci., Paris, 1965, **261**, p. 341.
12. Procopiu Şt., Viscrian I., Călugăru G., C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, **261**, p. 2226.
13. Colombani M. A., *Propriétés magnétiques des lames métalliques minces*. Gauthier-Villars, Paris, 1954, p. 43.
14. Mayer H., *Physik dünner Schichten*. Bd. **II**, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1955, S. 363.

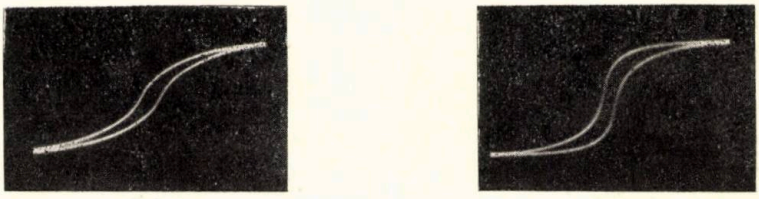
INFLUENŢA PLASTICITĂŢII SUPORTULUI ASUPRA PROPRIETĂŢILOR MAGNETICE ALE STRATURILOR SUBŢIRI DE COBALT PRECIPITATE PE CALE CHIMICĂ

(Rezumat)

Straturi subţiri de cobalt au fost precipitate pe cale chimică, pe tije rigide şi plastice de platină de 1 mm diametru. Plasticitatea tijelor a fost realizată prin încălzire. S-au studiat proprietăţile magnetice ale straturilor subţiri în funcţie de grosime şi s-a pus în evidenţă influenţa plasticităţii suportului.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Dependenţa intensităţii cîmpului coercitiv de grosimea stratului; *a* — straturi depuse pe tije rigide de Pt, *b* — straturi depuse pe tije plastice de Pt.
Fig. 2. — Dependenţa raportului $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_{max}$ de grosimea stratului; *a* — straturi depuse pe tije rigide de Pt, *b* — straturi depuse pe tije plastice de Pt.
Fig. 3. — Ciclurile de isterezis ale straturilor de Co depuse chimic, avînd grosimea de 1 μm (intensitatea maximă a cîmpului magnetic 150 Oe), *a* — straturi depuse pe tije rigide de Pt, *b* — straturi depuse pe tije plastice de Pt.



a *b*

Fig. 3. — Hysteresisschleifen der chemisch niedergeschlagenen Kobaltschichten von 1 μm Dicke (Feldmaximum 150 Oe); *a* — Schichte auf harten Pt-Träger, *b* — Schichte auf weich geglühten Pt-Träger.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 1—2, 1967

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 541.25

SPACE CHEMISTRY (I)

BY

W. F. LIBBY

1. Introduction

Space Chemistry is chemistry under the unusual conditions of outer and inner space. Our sheltered environment here on the surface of the earth has led us to emphasize strongly the chemistry peculiar to our conditions and Space Chemistry is aimed at those areas which are different from our normal environmental conditions. Thus it divides into four areas quite naturally: High Pressure Chemistry, Radiation Chemistry, High Temperature Chemistry, and Vacuum Chemistry.

High Pressure Chemistry is characteristic of the matter inside of the planets, while Radiation Chemistry is the chemical effects of solar radiation and cosmic rays; High Temperature Chemistry arises from the very high solar temperatures reaching into the chemistry of plasma — the solar wind and comet tails; and finally, Vacuum Chemistry, which is the chemical consequences of the extremely low population of molecules in interplanetary space. These are the four aspects of the space environment which have chemical effects.

2. Chemistry of High Pressures

A. INORGANIC MATERIALS

The chemistry of high pressures is largely unknown, but certain general principles apply — atoms are squeezed together by high pressures and solids and liquids which have vacancies or holes in their structures are compressed by the elimination of these vacancies. For example, ice with its very open tetrahedral lattice (considering the oxygen atoms only) collapses progressively through six different forms. The chemical consequences of this may be substantial. For instance, if a Group III element which normally has a tetrahedral lattice corresponding to four neighbors is compressed until it has more neighbors, it is clear that the number of chemical bonds which

can be formed is less than the number of neighbors because the maximum number of bonds to a fourth group atom normally is four. This can be thought of as leading to a fundamental change in chemical properties. Tin is an interesting example of this. Tin, at low temperatures, that is below 13°C, is a non-metallic diamond lattice solid, while at temperatures above 13°C or if compressed at any temperatures turns into ordinary metallic tin with six near neighbors. So, one is inclined to associate an excess of neighbors over the number of valence bonds possible with the occurrence of the metallic state, at least in Group IV elements. In fact, it has been shown

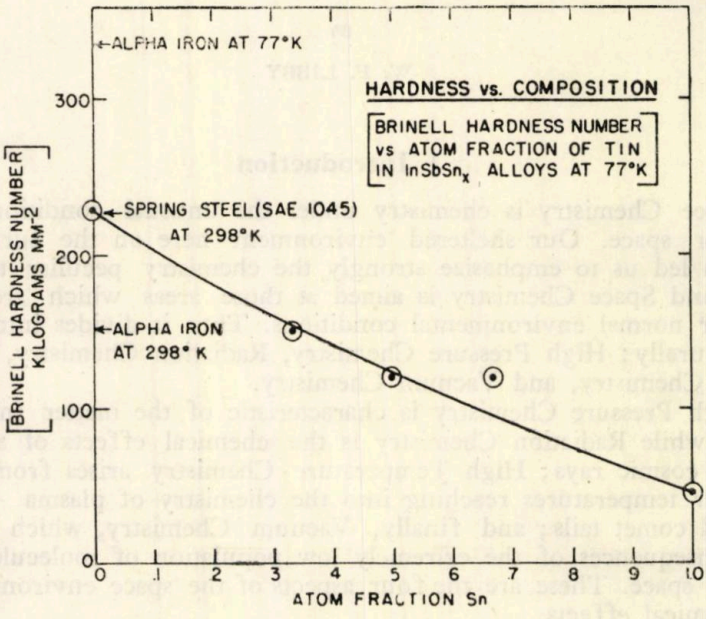


Fig. 1

that in the case of all of the fourth group, except carbon, compression to six or more neighbors causes the formation of a metal. These metals are produced by this application of pressure. They may be called Metallic Diamonds, even though metallic diamond itself has not been made as yet. Other than tin itself the metal indium antimonide in its compressed phase was the first of the family. Indium antimonide, InSb, in its normal low pressure form is tetrahedral with a diamond lattice, but at pressures of 23,000 atmospheres it is converted into the tin-like six neighbor lattice and becomes metallic. The technique used to recover the material was chilling of the press with liquid nitrogen before release of pressure. In this manner the metal was obtained free of the press and its properties below about −60°C studied. As it warmed above −60°C it exploded to form the normal dia-

mond lattice solid in powder form releasing heat. It is a particularly hard material as compared to its sister metal, tin. In Fig. 1 are given the hardnesses versus composition for the alloys of tin with the synthetic metal. Metallic indium antimonide and it tin alloys are indistinguishable from tin with X-rays (Table 1 and 2). This is not surprising considering that indium

Table 1

Lattice Spacings for Sn (β), InSb (II) and for Metallic Alloys $InSbSn_1$, $InSbSn_2$ and $InSbSn_4$

kkl	Sn (β)	$InSbSn_4$	$InSbSn_2$	InSbSn	InSb (II)	Sn (β)
	25°C	25°C	25°C	—197 C	—197°C	—197°C
	d (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)
200	2.912	2.918	2.921	2.897	2.910	2.907
101	2.789	2.793	2.794	2.776	2.788	2.778
220	2.062	2.062	2.064	2.057	2.062	2.055
211	2.015	2.015	2.017	2.012	2.030	2.007
301	1.658	1.658	1.660	1.654	1.654	1.651
112	1.483	1.484	1.487	1.476	1.474	1.474
400	1.458	1.458	1.457	—	1.452	1.453
321	1.442	1.442	1.440	1.438	—	1.436
420	1.304	1.304	1.303	1.301	—	1.300
411	1.292	1.294	1.294	1.290	—	1.287
312	1.205	1.205	1.206	1.201	—	1.198
501	1.0950	1.096	1.096	—	—	1 091
103	1.0437	—	—	—	—	1.037
332	1.0405	1.041	—	—	—	1.035
440	1.039	1.032	—	—	—	1.028
521	1.0251	1.025	—	—	—	1.022

Table 2

Lattice Parameters for Sn (β), InSb (II) and for Metallic Alloys $InSbSn_1$, $InSbSn_2$ and $InSbSn_4$

kkl	Sn (β)	$InSbSn_4$	$InSbSn_2$	InSbSn	InSb (II)	Sn (β)
	25°C	25°C	25°C	—197°C	—197°C	—197°C
	d (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)	*d* (Å)
a_0 (Å)	5.8309 ±0.006	5.8356 ±0.0007	5.8337 ±0.0027	5.8219 ±0.0024	5.833 ±0.019	5.8181 ±0.0007
c_0 (Å)	3.1824 ±0.0005	3.1810 ±0.0013	3.1873 ±0.0029	3.1665 ±0.0022	3.170 ±0.014	3.1634 ±0.0007
c_0/a_0	0.54578	0.54510	0.54636	0.54389	0.5435	0.54372

and antimony are neighboring elements of tin. The extra hardness of indium antimonide metal might be understood in terms of the fact that the valence average of four which is characteristic of tin can be obtained only by indium and antimony averaging together, therefore there may be some tendency to move atoms in groups rather than in single units and this may

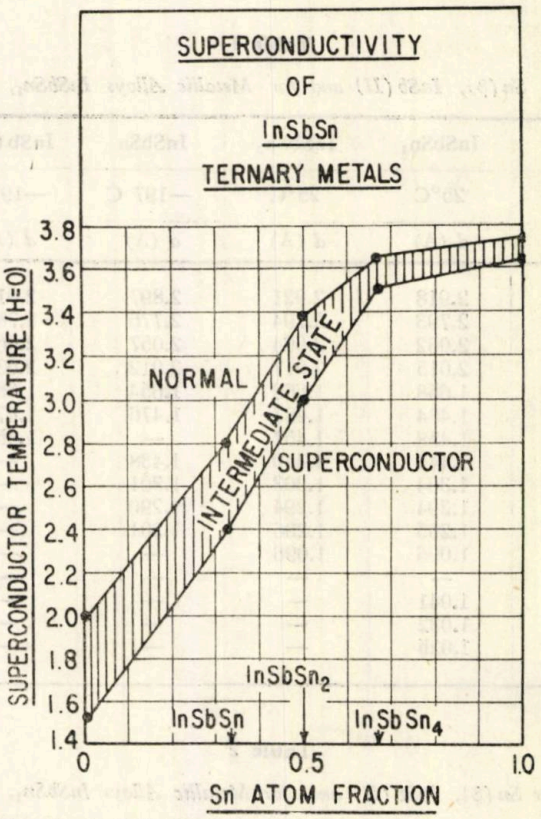


Fig. 2

restrict the number of ways of yielding under stress and make the substance harder. In any case, it is quite clear that indium antimonide metal is harder than tin and that the alloys rich in indium antimonide also are harder. It is interesting that this is also true for the diamond form. Non-metallic indium antimonide has been found to be harder than non-metallic tin. From this we are led to speculate that perhaps non-metallic boron nitride, in the diamond lattice form will prove to be harder than diamond. This seems to be a logical consequence of the high pressure chemical research on Metallic Diamonds.

A regularity comes out of the work on Metallic Diamonds which is very useful in estimating the metallic transition pressure of diamond itself. This relation is that the work of transition (the pressure multiplied by the volume change) is a constant fraction (close to one half) of the work required to lift the highest valence electron in the diamond lattice into the lowest metallic conducting state. This is called the electronic energy gap. Table 3 gives these ratios. The volume change can be calculated (except

Table 3

Comparison of the PΔV Work for the Semiconducting → Metallic Transition with Eg of the Semiconductor

Substance	Transition Pressure kilobars	ΔV cm^{-3}/mole	PΔV/atom ev	ΔEg/2 ev
Sn	— 0.7	4.3	0.003	0.03
InSb	+ 22	7.59	0.09	0.09
Ge	120	2.85	0.32	0.32
Si	200	2.73	0.56	0.54
GaAs	240	5.52	0.69	0.69
C	—	0.72	—	2.80
GaSb	90	5.19	0.22	0.35
AlSb	125	4.97	0.32	0.75
InAs	102	5.82	0.31	0.18
InP	133	5.45	0.38	0.60

for any atomic squeezing to change the atom radius which probably is small) to be 21% of the volume of the diamond solid. Therefore, we can estimate the pressure at which diamond will be converted into the metal. Diamond's molal volume is 3.42 ev and therefore since its energy gap is known to be 5.6 ev we calculate that its pressure for conversion to metal will be about 3.7 million atmospheres. Therefore, we see that diamond probably is the ideal material for high pressure apparatus since it will not suffer a phase collapse under pressures as high as three million atmospheres. The pressure inside the earth is slightly in excess of three million atmospheres at the center.

We believe that structural collapse, i. e. the transformation of low coordination number lattices into closest packed lattices will occur in nearly all other cases below these pressures. Therefore, we can expect that all materials, except possibly diamond, at the pressure at the center of the earth will be in the 12 neighbor closepacked lattice and that many non-metallic materials will have become metallic.

It is interesting that all metallic diamonds tested so far have proved to be superconductors. In Fig. 2 we show the superconducting transition temperature, i. e., the temperature below which the metal is a superconductor for metallic indium antimonide and its alloys with tin. There are many possible metals of this type, for it isn't necessary to work just with Group IV elements but III...V combinations, as in indium antimonide, and even II...VI or I...VII will work also. Thus many new metals can be made by the technique of compression and freezing.

B. ORGANIC COMPOUNDS

Organic compounds when subjected to high pressures undergo a number of interesting changes. High pressures are killing for both bacteria and viruses. In Fig. 3 we show the killing curve for the virus coliphage T_4,

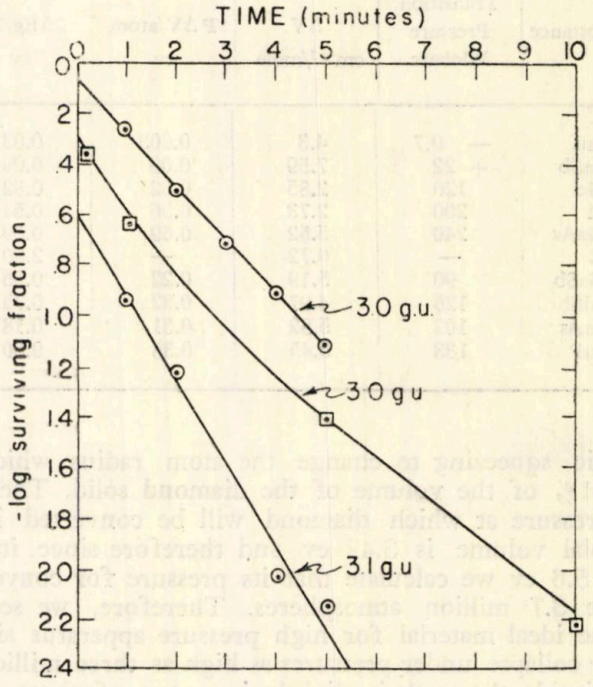


Fig. 3

subjected to pressures of 4...5,000 atmospheres at room temperature. And in Fig. 4 we show the results of the compression — the empty shells of the phage virus being clearly distinguished from those which still are filled with desoxyribonucleic acid. It seems very likely that the pressures used caused the DNA in the virus capsule to uncoil and be extruded. The solution was very viscous when examined after the pressure application.

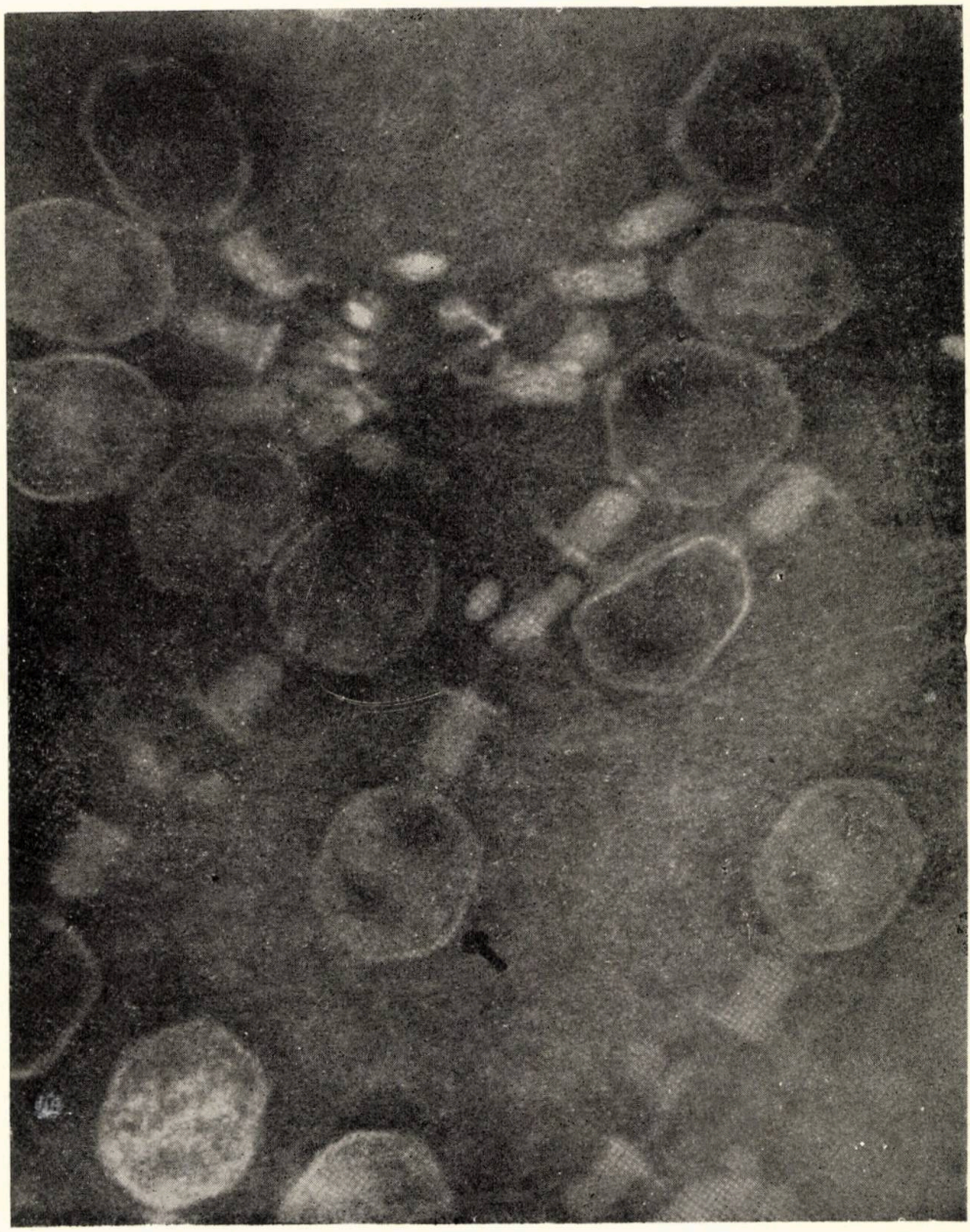


Fig. 4

All food stuffs when subjected to pressures of 10,000 atmospheres or so appear to be cooked. For example, 10,000 atmospheres for 5 minutes at room temperature fully coagulates egg white and egg yolks. The cooked yolk is translucent and has no sulfurous odor in contrast to ordinary cooking with heat. It would appear that the pressure was able to break only the very weakest bonds and could not rupture the sulfur-sulfur bond to free the sulfur from the protein. Since the sulfur-sulfur bonds is one of the weakest known chemical bonds, it is the conclusion that at these pressures the main result has been the rupture of the very weakest chemical attraction, the so-caled hydrogen bond of strength about 8,000 calories per mole. Thus we learn that what we construe to be cooking apparently may be merely the rupture of the hydrogen bonds which hold the protein chains in their double helical coils and thus allow uncoiling. However, this is not proven. The whole field of the effects of high pressures on organic chemicals is one of great opportunity.

C. INDUSTRIAL

The industrial process for making diamonds from graphyte by the use of high pressures and high temperatures is now well established. Graphite is subjected to pressures of the order 40,000 atmospheres and heated simultaneously to temperatures of the order of 2,500°C in the presence of liquid metal. Diamonds are produced economically by thys process. It is to be expected that further development of this process may produce diamonds more cheaply and in larger sizes, perhaps cheaply enough for the million atmosphere press mentioned above to be afforded.

D. ULTRA HIGH PRESSURES

In summary, the whole field of high pressure chemistry is very rich, offering new knowledge and new industrial processes. There are, however, ranges of pressure above those which have been obtained by static methods in the laboratory which have been obtained in transitory manner by explosive shock — pressures in the range of several millions of atmospheres. The results here have been so exciting that the higher pressure ranges with static devices are being strenuously attempted. Perhaps the most interesting observation from the explosive shock work is that graphite can be converted in part into diamond in this way. Diamonds large enough to be recognized by X-rays are formed, when a slab of graphite is placed between two slabs of high explosive which are fired simultaneously. This technique produces small diamonds which nevertheless are clearly recognizable by their X-ray structure as being diamonds. Il is difficult indeed to understand the great speed of this reaction because the explosive pressure wave passes in a very small fraction of a thousandth of a second. Pressures of the order of several million atmospheres are reached at the peak and temperatures

due to the adiabatic heating, are considerable but it is difficult from our knowledge of the chemistry of carbon to imagine that a molecule of some 100,000,000 carbon atoms can be made in less than a thousandth of a second. This fast reaction leads one to speculate that there is perhaps another state of matter which exists at high pressures and into which the explosive shock throws the graphite and out of which the system passes when the shock wave passes. We know from observation of certain stars that matter does exist in the universe at densities of the order of 100,000 or more. The double star, Sirius, has a companion of apparent density of about one million times that of water. There has been much theoretical speculation about the effects of extreme high pressures but there is agreement in general that at pressures somewhere above one million atmospheres the very atoms themselves start collapsing. And the electrons which are nicely arranged in orbits determined by the attractive charge of the atomic nucleus now find their way into new orbits of higher density. It seems likely that at these pressures the existence of an atom as such is not meaningful that the electrons belong to the entire system, a kind of metallic state and it has been agreed for forty years or more that this super metallic state would be reached at pressures, for most kinds of matter, in the general range of several million atmospheres. Therefore, it is interesting to speculate how diamonds are made from graphite by explosive shock. It may be, indeed, that reactions can occur at unbelievable speeds by going into this super state and returning from it as the explosive shock passes.

Received the 28 XII 1966

University of California,
Los Angeles, USA

CHIMIE SPAŢIALĂ

(Rezumat)

Se expun problemele fundamentale ale Chimiei spaţiale, subdivizînd-o în: a) Chimia la presiuni înalte; b) Chimia în cîmpuri de radiaţie intense; c) Chimia la temperaturi înalte şi d) Chimia în condiţiile de vid.

În această primă parte se studiază comportarea substanţelor anorganice şi a compuşilor organici la presiuni înalte precum şi unele procese industriale la astfel de presiuni.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D C. 549.6

ON THE START AND GLIMPSES OF DEVELOPMENT OF THE CHEMISTRY OF SOLIDS (I)

BY

ARVID HEDVALL

1. Introduction

Problems of solid state reactions in ceramics were presented in one of the recent author's research work in the Eighth Conference on the Silicate Industry [12]. In two subsequent Notes we shall exposed various problems concerned with the start and glimpses of development of the Chemistry of Solids.

* * *

Reactions between solids on the one hand and liquids and gases on the other hand, of course, been studied for a long time, but is was commonly believed that no chemical reactions could occur between solid phases only. Metals seemed to constitute an exception. During the last years of the ninteenth century for instance Robert-Austen had shown that gold and lead could form alloys at temperatures where no liquid could be present. W. Spring and W. Cobb can be mentioned. In both cases there were seemingly some hesitation about accepting their results as facts of experiments with salts; the experiments were never pursued.

2. Principal Questions about Factors influencing the Reactivity

When this virtually untouched field of research began to be investigated there were two main questions that had to be answered, first, whether reactions can occur between solely solid phases in general, not only between metals, and, second, what factors influence the reactivity of the solid with solid, liquid and gaseous phases in contact with it. Although the study of reactions of the type *solid-liquid* and *solid-gaseous* was no novelty, it was a new departure to investigate the effect of the state of the solid phase on its reactivity, taking into account for instance, the various types of

structure and changes of structure and their modes of formation. It should be remembered that when these researches were started (*c.* 1910) very little was known about the structure of crystals.

By means of microscopic methods it was shown that a substance, Rinman's Green, was formed at some kind of chemical reaction between an oxide of cobalt and of zinc. The former oxide is black, the latter white. The oxides were mixed and heated at different temperatures up to 900°C in various experiments. The powder mixture was examined by microscope at 1 000 times magnification, after it had been heated to the various temperatures. It was established that very small green crystals were formed already between about 500° and 600°C, but at *c.* 900°C the reactivity of the powder mixture increased and the green substance being formed more rapidly. Later it turned out that this phenomenon was caused by the fact that the Co_3O_4 decomposes at the mentioned temperature forming CoO which in this nascent state has a more or less defect structure and consequently is particularly reactive. Experiments with other oxide powder mixtures gave similar results. The reacting cobalt component was in all cases CoO. Thus the first question if powder reactions were possible was answered. *Reactions can take place between solids and there is no reason to suppose the selected systems being exceptions* [1]. Perhaps it might be mentioned already in this contex, that the experiments became of value some years later due to the importance of spinel structures in various fields of electrical engineering.

The second chief problem, i. e. *the influence of various factors on the reactivity*, was far more complicated and involved lengthy researches which could not be performed without the help of numerous collaborators. It took about ten years and the assistance af about one hundred young collaborators at the Chalmers University of Technology roughly to map the new field.

The following influencing factors had to be investigated: a) deviations from the normal crystallographic or amorphous structure of a substance; b) lattice defects in the form of hereditary structures; c) formation of imperfect structures, for instance, at transitions from one modification to another or at thermal decomposition (reactivity in nascent state); d) presence of guest particles in the lattice; e) differences in the crystallographic formation of different surfaces; f) gases which are dissolved in the lattice but are not themselves chemically reactive in the usual sense of the term; g) corrosion; h) adsorption and catalysis; i) irradiation by absorbable wavelengths; j) changes in the magnetic state; k) changes in the electric state.

Some of these factors of course cannot be completely isolated from each other, e.g. b), c) and d).

At that time, the study of the influence of structural factors on the reactivity was chiefly confined to organic chemistry but there it was problems of a quite different kind (molecular structures). The structure of crystal lattices could, of course, only be in details studied by means of X-ray techniques. Even earlier, however, it was possible to draw some conclusions regarding the conditions of reactivity at certain changes of structure.

3. New Reaction Types. Nascent State Phases. Reaction Mechanisms

Even the first experiments showed that the rapidly formed solid phase at thermal dissociations possessed a particularly high reactivity, e.g. CoO formed at the reaction $Co_3O_4 \rightarrow CoO + O_2$. I should think it was the first time the term *reactivity in nascent state* was used with reference to a solid.

Applying to such effects a mixture of barium oxide and calcium carbonate was heated (1922) and we expected the barium oxide to form mixed crystals with the calcium oxide *in nascent state* at the decomposition of the calcium carbonate. But something quite unexpected happened. The heating curves exhibited a sudden, strong temperature increase at about 350°C. This result could only be interpreted in one way; that the reaction $BaO + CaCO_3 = CaO + BaCO_3$ had occurred. At continued experiments we varied both the oxide (BaO, SrO, CaO) and the salt e.g. carbonates, sulphates, phosphates, silicates obtaining results according to the general formula

$$M'O + M''XO_4 \rightarrow M''O + M'XO_n + Q$$

and it was shown that as a general rule the temperature was chiefly determined by the oxide, while the salts of oxyacids played a subordinate role in this respect. This was quite a new type of reactions which was called *exchange reactions* [2, S. 169]. They have been mentioned here also because they later played a role for the conception of the mechanism of solid reactions. Here is not the place to mention this in details and the lively discussions at that time and the necessity to distinguish between the transport at surfaces and in the lattice interior. Here we also meet the problem about the nature of transporting particles, ions, atoms, preformed molecules in the lattice and surface moleculoids.

C. Wagner [3] found that in mixtures of substances which are ionic conductors there is a close connection between reactivity and conductivity. Qualitatively we demonstrated already 1927 that such connection may exist in suitable mixtures [4].

For the rapidly occurring reactions with substances at temperatures where they are insulators it was necessary to accept the possibility of transport by some sort of surface molecules or „moleculoids". This observation started a series of a great number of experiments with all kinds of substances with some sort of structural changes. The general role was established that *at such temperatures the substances have a relative maximum of physicochemical activity*. The reaction temperatures will coincide if the velocity of heating and that of transformation are adjusted to each other. The same holds good for the results obtained by Tammann in his thermodynamical investigations.

Jagitsch [2, s. References] made a series of investigations at the Göteborg Institute and he was able to show that surface migration can occur at certain reactions, e.g. by complexes resembling P_2O_5 in the case of

phosphates. He determined both the direction of migration and the type of the particles transported along the surface.

Lindner [2, s. References] succeeded, through diffusion measurements using e.g. radio-isotopes to distinguish quantitatively between transports along surfaces and true lattice diffusion and to elucidate the mechanism in a number of additive power reactions and in transformation processes.

At our Institute, Cassier-Bano [2, S. 248] found that cobalt-nickel alloys were formed far easier by reduction of mixed CoO-NiO crystals than by using even the finest-ground mixture of the oxides. These results and further developments on the same lines soon became valuable techniques in the field of powder metallurgy. From the same point of view and especially from that of alloy chemistry it is interesting that f. inst. calcium stannate and copper oxide are more rapidly formed on heating powder mixtures at temperatures where phase changes of bronze alloys take place.

It should among many others also be mentioned that the Philips Research Laboratories (Eindhoven) for a considerable time have been publishing important work concerning the activity of solids and its dependence on structural defects and its relationship with the properties of semiconductors, phosphorescens, catalysis, theoretically and the technical application of the results [5, s. References].

A considerable increase of the reaction rate takes place in mixtures where the transition state temperature of one of the components coincides with the thermal dissociation temperature of the other component.

Also these results have found many applications in industry. Using suitable methods it is posible to lower the reaction temperature at the production e.g. of ceramics and other silicate or spinel products [6].

It was attempting to apply the results in order to synthetize certain minerals, and the experiments with powder mixtures have shown that it is possible to produce many minerals at comparatively low temperatures in this way without influence of liquid phases. These investigations carried out by Jagitsch [2, s. References] were first made because of certain too farreaching suppositions that whole rock formations could be formed through reactions in solid state. Naturally, one must keep in mind that both gases and melts may play an extremely important role in „the laboratory of Terra". Even in mixtures with ions of great mobility the formation of rock minerals is a comparatively slow process. However, as said, gases may in many cases play a role f. inst. for pneumatolytic processes [7].

4. Hereditary Structure Faults

We started 1920 experiments to investigate whether the red pigment from Stora Kopparberg, Falun, could be manufactured directly from pyrite. This proved not to be possible, at least with methods that could be used in large-scale production. Measurements were made with pure ferric oxide, at various temperatures, which had been produced from a large number of

different raw materials. It turned out, first, that the beautiful red colour was formed only it the heated material was a simple or complex sulphate and, second, that the temperature shall not exceed about 850°C. The X-ray diagrams at that time however did not show any difference between this ferric oxide and that which had been obtained either by heating to higher temperature or by using other starting materials, for instance, carbonates, hydroxides, acetates.

Thus the result could only be explained on the assumption that residues of the sulphate *structure* in some specific manner distorted the normal ferric oxide structure, influencing the light absorption and reflexion. The phenomenon was then called „sulphate heritage" and, as far as I know, this result was perhaps the seed from which developed the conception „hereditary structures", as they later came to be called.

If, indeed, there existed a structural disturbance, and the disappearance of the specific properties at higher temperatures indicated such a fact, it might reasonably be expected that the preparations produced from sulphate should possess an enhanced activity. This was later shown. The matters discussed now naturally applies not only to ferric oxide, but to numerous other substances. Anybody who has been in contact with industrial production based on scientific results will be familiar with the multiplicity of applications. The productio of pure ferrites at relatively low temperatures is only a single instance.

Received the 11 XII 1966

Chalmers University of Technology,
Gothenburg, Sweden

REFERENCES

1. Hedvall J. A., Dissert., Upsala, 1915.
2. — *Einführung in die Festkörperchemie.* Vieweg, Braunschweig, 1952, S. 169.
3. Wagner C., Z. Physik. Chem., 1933, **22**, S. 181.
4. Hedvall J. A., Gustafsson E., Z. anorg. Chem., 1928, **170**, S. 71.
5. Hedvall J. A., *Solid State Chemistry.* Elsevier Publ. Co., 1966.
6. — Eigth Confer. Silicate Industry, Acad. Budapest, 1965.
7. — Ark. Mineral. Geolog., 1960, **2**, *43.*
8. — Siliconf 1965, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966, pp. 161–165.

CONSIDERAŢII ASUPRA DEZVOLTĂRII CHIMIEI SOLIDELOR (I)

(Rezumat)

Ca urmare a expunerii consacrate de autor problemelor reacţiilor în stare solidă în ceramică, prezentată la cea de a VIII-a Conferinţă de industria silicaţilor [8], în această primă parte a lucrării referitoare la dezvoltarea chimiei solidelor se expune: a) problematica relativă la factorii ce influenţează reactivitatea, b) noi tipuri de reacţii, faze de stare născîndă, mecanisme ale reacţiilor şi c) erorile structurii ereditare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 546.717.32 ; 542.941

CONSIDERAŢII ASUPRA UNOR REACŢII ÎN FAZĂ SOLIDĂ

DE

TIBERIU GOLGOŢIU, IANCU HÎNCU, JULIETA LINDE şi ILEANA HERŢESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

1. Introducere

Acţiunea oxidantă a permanganatului de potasiu a constituit o preocupare a multor cercetători. Astfel unii autori [1]...[3] au studiat modul în care reacţionează permanganatul de potasiu în soluţii de diferite concentraţii asupra unor reducători ca: ioduri, bromuri, sulfuri şi tiosulfaţi alcalini. Alţii [4]...[7] au studiat acţiunea reducătoare a unor substanţe simple printre care: sulful, fosforul, stibiul, borul, siliciul şi iodul asupra permanganatului.

În lucrarea de faţă ne-am propus să studiem mecanismul reacţiilor ce au loc în timpul încălzirii unor amestecuri de permanganat de potasiu cu diferiţi reducători, folosind ca metodă, analiza termică diferenţială.

2. Procedeul experimental

Pentru studiul termodiferenţial s-a folosit un cuptor tubular cu rezistenţă electrică, care a permis o încălzire uniformă pînă la 900°C. Temperatura de regim a cuptorului a fost indicată de un termocuplu Pt-Pt. Rh, iar variaţiile de temperatură care au avut loc în urma descompunerii probei supuse analizei, au fost sesizate de un termocuplu cromel-alumel şi înregistrate la un potenţiometru electronic tip EPP-09.

În studiul nostru s-au folosit: $KMnO_4$, $Na_2S_2O_3 . 5\,H_2O$, $FeSO_4 . 7\,H_2O$, $(NH_4)_2\,Fe\,(SO_4)_2 . 6\,H_2O$, produse Merck p. a., iar ca probă de referinţă alumină calcinată la 1 400°C. S-a lucrat cu probe bine majorate, tasate în creuzete de porţelan.

Pentru explicarea mecanismului reacţiilor chimice ce au loc în timpul încălzirii, transformări indicate de buclele diferenţiale observate pe termograme, s-au luat probe separat şi s-au încălzit izoterm la diferite temperaturi, timp de 2...3 ore, analizîndu-se produsele obţinute.

3. Interpretarea datelor experimentale

3.1. Studiul în fază solidă a amestecului $KMnO_4$ — $Na_2S_2O_3 . 5\,H_2O$

a) *Analiza termodiferențială a* $KMnO_4$

Descompunerea termică a permanganatului de potasiu a făcut obiectul de studiu a numeroși cercetători [8]...[11] care au ajuns la concluzii diferite în ceea ce privește modul în care decurg aceste reacții. R. Pirisi și Mattu [12] utilizînd analiza termică diferențială au arătat că între 275°C și 300°C reacția este exotermă.

Din studiul întreprins de noi (fig. 1) s-a ajuns la concluzia că la 200°C începe degajarea de oxigen. În jurul temperaturii de 360°C, la care se observă o buclă diferențială, analizînde-se produsul se constată că este format dintr-un amestec de K_2MnO_4 și MnO_2; transformarea decurge după reacția:

$$10\,KMnO_4 = 5\,K_2MnO_4 + 5\,MnO_2 + 5\,O_2 .$$

Askenasy și Solberg [13] au ajuns la aceeași concluzie măsurînd presiunile de disociație termică a permanganatului de potasiu.

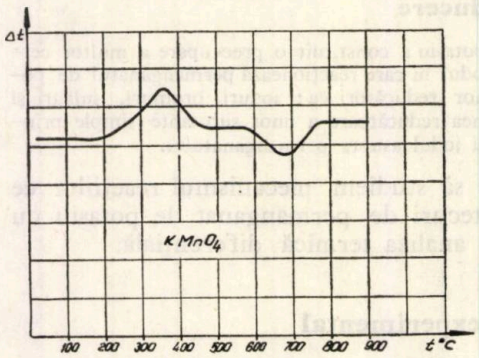


Fig. 1

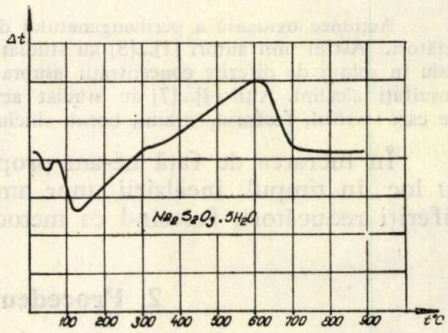


Fig. 2

Continuînd încălzirea, în jurul temperaturii de 600°C, K_2MnO_4 se descompune în MnO_2 și K_2O. Această descompunere fiind un proces endoterm, duce la apariția pe termogramă a unei bucle diferențiale, cu un maxim în jurul temperaturii de 680°C. Peste această temperatură, în prezența oxigenului din aer, MnO_2 se recombină cu K_2O reconstituind K_2MnO_4, fapt dovedit și prin analiza produsului final. Reacția de combinare se încheie în jurul temperaturii de 750°C.

b) *Analiza termodiferențială a* $Na_2S_2O_3 . 5\,H_2O$

Din studiul termogramei tiosulfatului de sodiu (fig. 2) se constată următoarele.

În jurul temperaturii de 48°C apare primul efect endoterm, pus pe seama topirii cristalohidraților, cînd se formează o soluție care începe să fiarbă la 80°C. Această fierbere continuă pînă la 120°C, cînd se obține o masă galbenă. Analizîndu-se produsul obținut la această temperatură, se constată că acesta este format dintr-un amestec de polisulfuri și sulfat de sodiu, ce se formează în urma reacției:

$$4\,Na_2S_2O_3 = 3\,Na_2SO_4 + Na_2S_5.$$

Dacă se lasă acest amestec să se răcească el devine alb, analiza arătînd reconstituirea tiosulfatului.

Continuînd încălzirea, alura curbei se modifică, pentru ca în jurul temperaturii de 330°C sulful care se separă din polisulfuri să se aprindă și să continue să ardă pînă în jurul temperaturii de 700°C. De la această temperatură alura curbei rămîne aceeași pînă la temperatura de 800°C. Produsul rămas în vasul de calcinare, prin analiză, indică prezența sulfatului și a sulfurii de sodiu.

c) *Analiza termodiferențială a amestecului* $KMnO_4 + Na_2S_2O_3 . 5\,H_2O$

Întrucît amestecurile echimolare nu au condus la rezultate satisfăcătoare, în urma analizei produșilor obținuți la diferite temperaturi indicate pe termogramă s-a ajuns la concluzia că raportul de combinare este de 2 moli permanganat de potasiu pentru un mol de tiosulfat de sodiu.

Din termogramă (fig. 3) se constată că pînă la 80°C comportarea amestecului este asemănătoare tiosulfatului. Analizîndu-se amestecul în jurul temperaturii de 100°C s-a constatat prezența MnO_2, S și a Na_2SO_4, ceea ce implică următoarea reacție:

$$3\,Na_2S_2O_3 + 2\,KMnO_4 = 3\,Na_2SO_4 + 3\,S + K_2O + 2\,MnO_2.$$

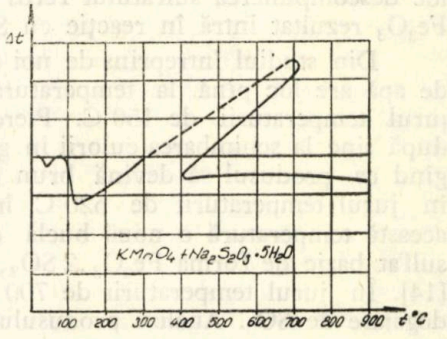


Fig. 3

La temperaturi mai ridicate ca 200°C permanganatul de potasiu neintrat în reacție începe să se descompună, cu punerea în libertate a oxigenului care provoacă arderea sulfului. Reacția fiind exotermă, are loc o creștere bruscă a temperaturii pînă la 700°C, după care aceasta scade treptat. Fenomenul are loc după reacția:

$$3\,S + 4\,KMnO_4 = 3\,SO_2 + 4\,MnO_2 + 2\,K_2O.$$

Ecuația reacției totale este:

$$3\,Na_2S_2O_3 + 6\,KMnO_4 = 3\,Na_2SO_4 + 3\,K_2O + 3\,SO_2 + 6\,MnO_2.$$

Bioxidul de sulf rezultat intră în reacție cu oxidul de potasiu și bioxidul de mangan conform ecuației:

$$3\,K_2O + 3\,SO_2 + 3\,MnO_2 = 3\,K_2SO_4 + 3\,MnO.$$

Analiza produsului final a confirmat prezența oxizilor de mangan și a sulfaților.

3.2. Studiul în fază solidă a amestecului $KMnO_4 + FeSO_4 . 7\,H_2O$

a) *Analiza termodiferențială a* $FeSO_4 7 . H_2O$

În privința descompunerii termice a sulfatului feros hidratat C. Duval [14] a ajuns la concluzia că acesta pierde 3 molecule de apă la o temperatură cuprinsă între 26°C și 96°C, iar alte trei molecule de apă între 110°C și 160°C. La pierderea ultimei molecule de apă are loc concomitent și alterarea profundă a substanței și deci nu se ajunge în nici un caz la sulfat feric anhidru. Între 540°...550°C, la o încălzire liniară de 1° C/min, se formează un sulfat bazic de forma $2\,SO_2.Fe_2O_3$, care la 720°C trece în Fe_3O_4.

M. E. Pozin și colaboratorii [15], [16] arată că între 450°...480°C are loc descompunerea sulfatului feros în Fe_2O_3, SO_2 și SO_3. Între 550°...580°C Fe_2O_3 rezultat intră în reacție cu SO_3 formînd $Fe_2(SO_4)_3$.

Din studiul întreprins de noi (fig. 4) rezultă că pierderea a 3 molecule de apă are loc pînă la temperatura de 85°C, iar cea a altor 3 molecule în jurul temperaturii de 150°C. Pierderea primelor 3 molecule de apă duce după sine la schimbarea culorii în galben, culoare ce se închide treptat ajungînd ca produsul să devină brun la 150°C. Analizîndu-se produsul obținut în jurul temperaturii de 520°C, întrucît pe termogramă s-a observat la această temperatură o nouă buclă diferențială, s-a constatat prezența unui sulfat bazic de forma $Fe_2O_3 .2\,SO_3$, produs indicat și de literatura consultată [14]. În jurul temperaturii de 700°C începe descompunerea sulfatului cu degajare de SO_3. Analiza produsului final indică prezența Fe_2O_3.

b) *Analiza termodiferențială a amestecului* $KMnO_4 + FeSO_4 . 7\,H_2O$

În creuzetul de reacție s-a introdus amestecul în raportul de 2 moli sulfat la 1 mol permanganat, stabilit prin mai multe încercări preliminare.

Din studiul termogramei (fig. 5) și a produșilor obținuți pe faze la diferite temperaturi, se constată că pierderea apei din sulfatul feros are loc la temperaturi mai scăzute, respectiv la 50°C și 110°C. În continuare, în jurul temperaturii de 200°C începe descompunerea permanganatului cu punerea în libertate a oxigenului care acționează asupra unei părți de sulfat feros, oxidîndu-l la o sare bazică avînd compoziția $Fe_2O_3 . 2\,SO_3$. Reacția se încheie în jurul temperaturii de 300°C. Între 300°...380°C manganatul de

potasiu rezultat din descompunerea permanganatului intră în reacție cu restul de sulfat feros după ecuația:

$$2\,FeSO_4 + K_2MO_4 = Fe_2O_3 . 2\,SO_3 + K_2O + MnO_2 .$$

Între 400°...460°C trioxidul de sulf din sulfatul bazic reacționează cu oxidul de potasiu, formînd sulfatul de potasiu. La o încălzire mai înaintată nu se mai observă nici o inflexiune pe termogramă, ceea ce dovedește că nu se mai produce nici un fenomen, fapt verificat și prin analiza produsului obținut prin încălzire izotermă timp de 2 ore, la 700°C.

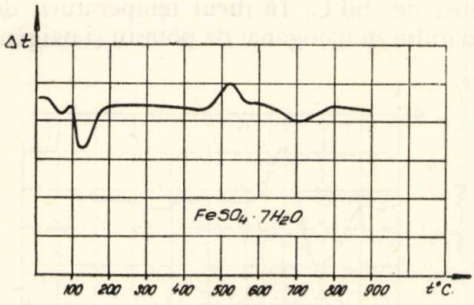


Fig. 4

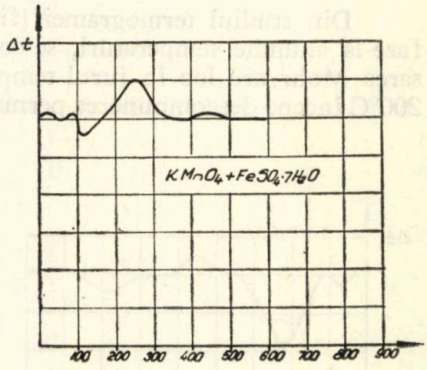


Fig. 5

3.3. Studiul în fază solidă a amestecului $KMnO_4 + (NH_4)_2Fe(SO_4)_2 . 6\,H_2O$

a) *Analiza termodiferențială a* $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2 . 6\,H_2O$.

C. Duval [14] efectuînd termoanaliza sării Mohr arată că pierderea celor 6 molecule de apă este însoțită de degajare de amoniac și oxidarea fierului, astfel că între 192°...310°C se obține un compus de forma $NH_4Fe(SO_4)_2$. Această transformare are loc pînă în jurul temperaturii de 453°C. Între 453°... 511°C are loc transformarea în sulfat feric, care nu este pur, și peste 594°C acesta începe să se descompună în Fe_2O_3.

Supunînd analizei termodiferențiale sarea Mohr se constată (fig. 6) că pierderea celor 6 molecule de apă se produce treptat. Astfel primele 3 molecule de apă părăsesc sarea în jurul temperaturii de 75°C iar celelalte trei în jurul temperaturii de 125°C, cînd se produce și o alterare ușoară a substanței, produsul colorîndu-se în slab brun. Încălzind în continuare, în jurul temperaturii de 220°C începe degajarea amoniacului, care continuă pînă la 320°C. Analizîndu-se produsul obținut în jurul acestei temperaturi, s-a constatat prezența unui compus de forma $NH_4Fe(SO_4)_2$, substanță indicată și de literatură. Între 320°... 450°C apar vapori albi care prezintă miros de amoniac. Aceștia provin din descompunerea sării amintite mai sus după reacția:

$2\,NH_4Fe(SO_4)_2 = (NH_4)_2SO_4 + Fe_2(SO_4)_3$; $(NH_4)_2SO_4 = SO_3 + 2\,NH_3 + H_2O$.

De la 580°C începe o degajare de vapori albi care au un caracter acid. Această degajare se continuă pînă în jurul temperaturii de 750°C, cînd alura curbei nu se mai modifică. În acest interval de temperatură are loc descompunerea sulfatului feric. Analiza produsului obținut la această temperatură indică prezența oxidului feric.

b) *Analiza termodiferențială a amestecului* $KMnO_4 + (NH_4)_2\,Fe(SO_4)_2 \cdot 6\,H_2O$

Din studiul termogramei (fig. 7) și din analiza produșilor obținuți pe faze la anumite temperaturi, se constată că pierderea moleculelor de apă din sarea Mohr are loc în jurul temperaturii de 60°C. În jurul temperaturii de 200°C începe descompunerea permanganatului în manganat de potasiu și oxigen.

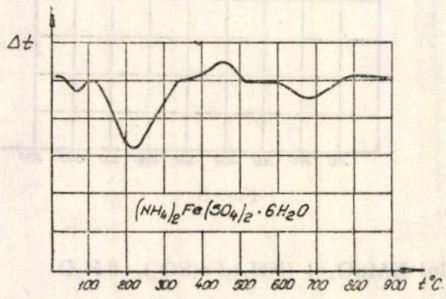


Fig. 6

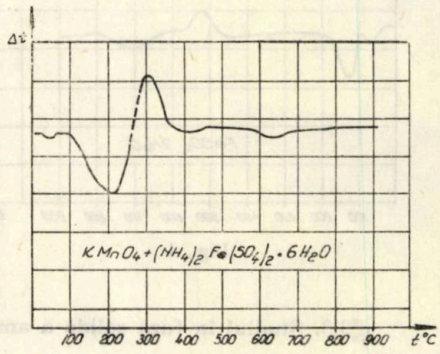


Fig. 7

Oxigenul pus în libertate oxidează sarea Mohr după reacția:

$$2\,(NH_4)_2\,Fe\,(SO_4)_2 + \frac{1}{2}\,O_2 = Fe_2(SO_4)_3 + SO_3 + 4\,NH_3 + 2\,H_2O,$$

fenomen confirmat prin apariția unor vapori albi cu miros de amoniac.

Între 200°...300°C reacția decurge cu punerea în libertate de vapori nitroși, ce duce la apariția pe termogramă a unui salt. Vaporii nitroși provin din oxidarea amoniacului de către manganatul de potasiu rezultat prin descompunerea permanganatului, după reacția:

$$5\,K_2MnO_4 + 2\,NH_3 = 2\,NO + 5\,MnO_2 + 5\,K_2O + 3\,H_2O;\quad 2\,NO + O_2 = 2\,NO_2.$$

După 580°C sulfatul feric se descompune în SO_3 și Fe_2O_3. La temperaturi depășind 600°C trioxidul de sulf intră în reacție cu K_2O formînd sulfat de potasiu, care se găsește prezent în reziduul analizat.

4. Concluzii

1. S-a studiat cu ajutorul analizei termodiferențiale: a) descompunerea termică a $KMnO_4$; b) descompunerea termică a unor reducători ca: $Na_2S_2O_3 . 5\,H_2O$, $FeSO_4 . 7\,H_2O$, $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2 . 6\,H_2O$; c) descompunerea termică a amestecurilor dintre reducătorii amintiți mai sus și permanganatul de potasiu.

2. Din analiza chimică a produșilor obținuți pe faze la diferite temperaturi, indicate pe termograme de buclele diferențiale, s-au putut stabili reacțiile ce au loc în timpul descompunerii.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Gyani B. P., Prassad S. N., Proc. Indian Sci. Congr., 1955, *3*, p. 90.
2. Montignie E., Bull. Soc. Chim., 1939, **6**, p. 1191.
3. Alander, Z. Anal. Chem., 1901, **40**, S. 574.
4. Slater, Chem. Gazette, 1853, **11**, p. 329.
5. Moissan, C. R., 1892, **114**, p. 614.
6. Moissan, Smiles, Bull. Soc. Chem. (3), 1902, **27**, pp. 1197–1198.
7. Péan de Saint-Gilles, Ann. Ch. Phys. (3), 1859, **55**, p. 374.
8. Chevillot, Edwards, Ann. de Chim. et de Phys., 1842, *4*, p. 294.
9. Thénard, C. R., 1856, **42**, p. 382.
10. Rüdorf, Z. Anorg. Chem., 1901, **27**, S. 58.
11. Dolique R., Galino J., Bull. Soc. Chim., 1942, **9**, p. 818.
12. Pirisi R., Mattu F., Rendic. Sem. Ac. Sci. Univ. Cagliari, 1951, **21**, p. 131.
13. Askenasy, Solberg, Nernst, Festschrift, 1912, S. 53.
14. Duval, C. Anal. Chim. Acta, 1959, **20**, p. 20.
15. Позин М. Е., Гистлинг А. М., ЖПХ, 1950, **23**, *11*, стр. 1149.
16 — ЖПХ, 1951, **24**, *2*, стр. 134.

CONSIDÉRATIONS SUR QUELQUES RÉACTIONS EN PHASE SOLIDE

(Résumé)

Les Auteurs ont étudié, en utilisant l'analyse thermodifférentielle, la décomposition thermique des substances suivantes: $KMnO_4$, $Na_2S_2O_5 . H_2O$, $FeSO_4 . 7\,H_2O$, $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2 . 6\,H_2O$ et des mélanges obtenus entre $KMnO_4$ et les réducteurs mentionnés ci-dessus.

Les produits obtenus aux températures indiquées par les boucles différentielles des thermogrammes ont été soumis aus analyses chimiques. Par cette voie on a établi le mécanisme des réactions qui ont lieu pendant le chauffage.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 661.847.2; 546.561.221

STUDIUL REACŢIILOR ÎN FAZĂ SOLIDĂ A UNOR SULFURI METALICE

DE

JULIETA LINDE, IANCU HÎNCU, VIOLETA ROTARU şi ILEANA HERŢESCU

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 26—30 iunie 1966

1. Introducere

Problema prelucrării minereurilor neferoase în scopul valorificării metalelor respective a constituit preocuparea permanentă a multor cercetători, datorită evidentei sale importanţe economice.

Unii cercetători [1]...[9] s-au preocupat de studiul prăjirii oxidante a minereurilor sulfuroase precum şi a sulfurilor precipitate, în diferite condiţii, urmărind mecanismul, cinetica şi termodinamica reacţiilor ce au loc. Procesele oxidării fiind fenomene complexe, mecanismul lor nu a fost nici pînă în prezent elucidat.

Există două teorii mai importante care caută să explice desfăşurarea procesului şi anume:

a) Teoria sulfatizării, susţinută de I. Thompson [10], J. Lemmerling [11] ş. a., admite că procesul oxidării sulfurilor se produce prin formarea sulfatului ca produs primar, oxidul apărînd ca produs secundar în urma disocierii ulterioare a acestuia.

b) Teoria oxidării, susţinută de V. Tafel [12] şi A. Dorsey [13], combate teoria sulfatizării, considerînd că procesul de transformare are loc cu formarea oxidului ca produs primar.

După V. I. Smirnov [8] oxidarea sulfurilor ar avea loc în următoarele etape:

1. Adsorbţia oxigenului molecular pe suprafaţa sulfurilor şi disocierea lui în oxigen atomic.
2. Difuzia oxigenului în reţeaua cristalină a sulfurii.
3. Formarea sulfaţilor primari.
4. Acţiunea sulfurii netransformate asupra sulfatului primar, care accelerează descompunerea sulfatului.
5. Formarea sulfatului secundar prin reacţia dintre stratul superficial de oxid şi gaze, în funcţie de temperatură.

Totuşi nu s-a putut ajunge la o părere unanim acceptată în ceea ce priveşte mecanismul oxidării, deoarece atît condiţiile de lucru cît şi probele supuse analizei nu au fost aceleaşi.

În consecinţă, pentru explicarea fenomenului de oxidare a sulfurilor s-a impus şi un studiu al cineticii reacţiilor. În acest sens trebuie semnalate lucrările lui Cijikov şi colaboratorii săi [16]...[18], care au studiat mecanismul şi cinetica oxidării sulfurilor de cupru, plumb şi cadmiu, efectuînd în acelaşi timp şi un calcul termodinamic, determinînd valoarea energiei libere şi constanta de echilibru pentru reacţiile ce au loc.

De asemenea se pot menţiona şi lucrările lui Al. Lupu [7], K. J. Cannon [19], A. I. Okunev [20], care aduc contribuţii importante la studiul cineticii oxidării sulfurii de zinc.

Wada Tsuquyasu [21] studiază viteza de oxidare a sulfurii de zinc la temperaturi cuprinse între 540°...700°C, în oxigen, la diferite presiuni, calculînd energiile de activare atît la temperaturi joase cît şi la temperaturi mai ridicate.

Alte numeroase lucrări au fost consacrate studiului prelucrării minereurilor sulfuroase prin prăjirea clorurantă.

G. G. Urazov şi colaboratorii [22] studiază clorurarea minereurilor sulfuroase de cupru, fier şi nichel în condiţiile de clor gazos şi protoclorură de sulf. W. J. Kroll [23], [24], V. Tafel [25] şi alţii, studiază prăjirea clorurantă a minereurilor neferoase întrebuinţînd ca agenţi de clorurare NaCl sau $CaCl_2$.

O contribuţie esenţială la fundamentarea teoretică a procesului de clorurare a minereurilor sulfuroase o aduce D. M. Cijikov prin lucrările sale [26], [27].

H. Hohn [28] arată avantajele prelucrării chimice a minereurilor complexe de sulfuri, în special cu cloruri, prezentînd bazele termodinamice ale acestui proces.

Numeroasele patente referitoare la diferitele metode de clorurare cît şi la realizarea practică a acestui procedeu, citate de Denisov [29], arată cît de promiţătoare şi incomplet studiată este această metodă de prelucrare a minereurilor neferoase.

Mai puţin studiată este problema clorurării sulfurilor simple [29], care prezintă o deosebită importanţă pentru elucidarea fenomenelor ce au loc în timpul procesului.

Deoarece din literatura consultată s-a constatat că atît prăjirea cît şi clorurarea cu cloruranţi solizi a fost cercetată în prezenţa unui exces mare de oxigen, în lucrarea de faţă ne-am propus să întreprindem un studiu referitor atît la descompunerea sulfurilor precipitate, cît şi la clorurarea lor, utilizînd ca agenţi de clorurare, clorura de sodiu şi clorura de calciu anhidră, în condiţiile obişnuite de lucru şi fără folosirea unui curent de aer. Ca metodă de lucru s-a ales analiza termică diferenţială.

2. Procedeul experimental

Pentru studiul termodiferenţial s-a folosit un cuptor electric de şamotă, termic bine izolat, care a permis o încălzire uniformă (10°C/min) pînă la temperatura de 900°C. Cuptorul este prevăzut cu trei orificii: unul pentru termocuplul Pt-Pt. Rh, care indică temperatura de regim a cuptorului, alt orificiu pentru proba de referinţă, iar al treilea pentru proba supusă analizei. Ca probă de referinţă s-a folosit Al_2O_3 calcinat la 1 400°C. Variaţiile de temperatură care au loc în urma descompunerii probei supuse la analiză, au fost indicate de un termocuplu cromel-alumel şi înregistrate la un potenţiometru electronic tip EPP-09.

Substanţele folosite în studiu au fost: sulfura de zinc purificată, sulfura cuprică precipitată şi purificată de noi, clorura de sodiu p. a. Sörensen, clorura de calciu p. a. produs Merck, calcinată.

S-a lucrat cu probe de 0,5...1 g, bine majorate şi tasate în creuzete de porţelan, iar amestecurile s-au realizat în proporţie de 1/1, calculate stoichiometric

Pentru explicarea mecanismului reacţiilor chimice sesizate prin analiza termică diferenţială şi indicate pe termograme prin buclele diferenţiale, s-au luat probe separat şi s-au încălzit izoterm pentru diferite temperaturi şi în anumite intervale de timp, funcţie de modul în care decurg aceste reacţii. Ulterior s-au analizat produşii obţinuţi.

3. Datele experimentale și interpretarea lor

a) *Analiza termică diferențială a sulfurii de zinc*

Din studiul termogramei (fig. 1 c) și din analiza compușilor de reacție obținuți la diferite temperaturi se constată că la temperaturi mai ridicate decît 120°C începe descompunerea topochimică a ZnS, sub acțiunea oxigenului din aer cu formare de SO_2 și ZnO după reacția :

$$ZnS + \frac{3}{2} O_2 = ZnO + SO_2,$$

care fiind un proces puternic exoterm duce la apariția pe curba diferențială a unei bucle cu un maxim la 300°C.

Oxidul de zinc ce se formează intră în reacție cu bioxidul de sulf și oxigenul, formînd sulfat de zinc, găsit de noi într-o probă încălzită la 300°...400°C timp de 4 ore :

$$ZnO + \frac{1}{2} O_2 + SO_2 = 4\ ZnO_4.$$

În domeniul de temperaturi 500°...600°C, sulfatul de zinc format reacționează cu ZnS netransformată, după reacția :

$$ZnS + 3\ ZnSO_4 = 4\ ZnO + 4\ SO_2,$$

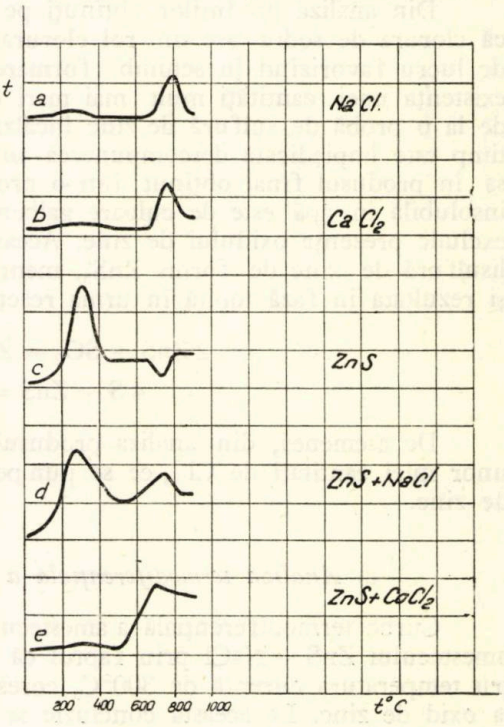


Fig. 1

proces semnalat și de J. Lemmerling și colaboratorii [11], care arată că prezența sulfurii de zinc accelerează descompunerea sulfatului. Concomitent începe și simpla descompunere lentă a sulfatului de zinc, ce trece prin stadiul de sulfat bazic, fapt confirmat de K. Mayer [7] și de noi prin faptul că probele analizate atestă prezența în soluție a unei cantități de Zn^{2+} mai mici decît în proba de la 300°...400°C. Între 660°...750°C se produce o descompunere totală a sulfatului de zinc în oxid și trioxid de sulf. Procesul de descompunere fiind endoterm se pune în evidență pe termogramă cu un maxim la 720°C. Oxigenul care apare la această temperatură în urma disocierii parțiale a trioxidului de sulf, oxidează sulfura de zinc rămasă netransformată și de aceea analiza produsului final arată numai existența oxidului de zinc.

b) *Analiza termică diferenţială a amestecului ZnS + NaCl*

Curba diferenţială (fig. 1 d) prezintă două maxime exoterme, primul maxim fiind asemănător cu cel apărut pe termograma sulfurii de zinc iar ultimul, la 750°C, observat pe curba clorurii de sodiu şi care corespunde procesului de topire a acesteia (fig. 1 a).

Din analiza produşilor obţinuţi pe faze la diferite temperaturi, rezultă că clorura de sodiu are un rol clorurant neînsemnat, în condiţiile noastre de lucru favorizînd în schimb formarea sulfatului. Din analiză se constată existenţa unei cantităţi mult mai mari de sulfat de zinc decît cea obţinută de la o probă de sulfură de zinc încălzită la aceeaşi temperatură. În acelaşi timp este împiedicată descompunerea sulfatului, fapt confirmat de prezenţa sa în produsul final obţinut într-o probă încălzită la 700°...800°C. Partea insolubilă în apă este de culoare galbenă atît la cald cît şi la rece, ceea ce exclude prezenţa oxidului de zinc. Această substanţă se presupune a fi o polisulfură de zinc de forma ZnS_5, menţionată de altfel şi în literatură [28] şi rezultată în fază topită în urma reacţiei de oxidoreducere:

$$2\,ZnS + SO_2 = 2\,ZnO + 3\,S,$$
$$4\,S + ZnS = ZnS_5.$$

De asemenea, din analiza produsului insolubil se constată şi prezenţa unor mici cantităţi de Cl^-, ce se pun pe seama formării unei cloruri bazice de zinc.

c) *Analiza termodiferenţială a amestecului ZnS + $CaCl_2$*

Curba termodiferenţială a amestecului (fig. 1 e) se deosebeşte de curba amestecului ZnS + NaCl prin faptul că nu mai apare valoarea maximă pentru temperatura curentă de 300°C, corespunzătoare oxidării sulfurii de zinc la oxid de zinc. La această concluzie se ajunge cercetînd produsul obţinut prin încălzirea probei la 300°C, care este de culoare albă chiar la cald, iar analiza chimică atestă prezenţa sulfatului de zinc format prin sulfatizarea directă şi a unei cantităţi mari de sulfură de zinc netransformată.

Pe măsură ce temperatura creşte, sulfatul de zinc se descompune, trecînd prin faza de sulfat bazic, sesizat la temperaturi ce depăşesc 500°C. După 600°C, cînd începe descompunerea, bioxidul de sulf intră în reacţie cu sulfura de zinc netransformată, separînd sulf, care ulterior trece în polisulfură. În produsul final, care este galben şi la rece, nu se găsesc în partea solubilă în apă ioni de Zn^{2+}, ceea ce dovedeşte că $CaCl_2$ favorizează descompunerea sulfatului de zinc şi în acelaşi timp formarea polisulfurii.

În concluzie, în condiţiile noastre de lucru nu prezintă interes din punct de vedere tehnic încercarea de clorurare cu agenţii susmenţionaţi. Deci este evidentă necesitatea trecerii unui curent puternic de aer în timpul clorurării.

d) *Analiza termodiferențială a sulfurii de cupru*

Termograma din fig. 2a prezintă o primă buclă diferențială pentru un domeniu larg de temperaturi (100°...560°C), cu un maxim la 450° C, datorită unui mare număr de reacții care se succed și pe care noi le-am sesizat atît prin schimbarea culorii substanței în timpul încălzirii, cît și prin analiza chimică a produșilor obținuți la diferite temperaturi.

Peste 100°C, cînd începe degajarea bioxidului de sulf, are loc oxidarea sulfurii de cupru de la suprafață cu oxigenul din aer, după reacția:

$$CuS + \frac{3}{2}O_2 = CuO + SO_2,$$

urmată de formarea sulfatului de cupru:

$$3\,CuO + SO_2 = CuSO_4 + Cu_2O.$$

Peste 250°C reacția de formare a sulfatului este împiedicată de prezența sulfurii netransformate, care distruge sulfatul în conformitate cu următoarea reacție:

$$5\,CuSO_4 + 3\,CuS = 4\,Cu_2O + 8\,SO_2.$$

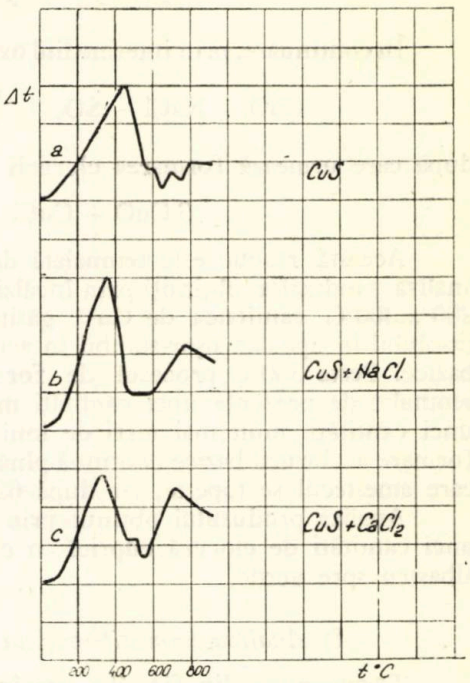


Fig. 2

În continuare are loc transformarea parțială a oxidului cupros în oxid cupric, datorită prezenței căruia se formează noi cantități de sulfat, în jurul temperaturii de 500°C, pe seama bioxidului de sulf format din abundență din reacția de mai sus.

La temperaturi depășind 600°C se observă pe termogramă două bucle endoterme destul de apropiate, prima pusă pe seama descompunerii sulfatului în oxid cupric, fenomen ce se remarcă printr-o degajare puternică de trioxid de sulf și care la această temperatură se disociază parțial, iar a doua buclă pe seama formării oxidului cupros în atmosfera reducătoare a cuptorului. Analiza produsului final indică prezența în întregime a oxidului cupros.

e) *Analiza termodiferențială a amestecului CuS + NaCl*

Termograma din fig. 2b prezintă două bucle diferențiale exoterme, prima cu un maxim la 320°C și a doua cu un maxim la 750°C.

În timp ce în cazul sulfurii de zinc, clorura de sodiu are un rol clorurant neînsemnat (formare de mici cantităţi de clorură bazică), în condiţiile noastre de lucru, în cazul sulfurii de cupru reacţia de clorurare este evidentă. Peste 100°C se simte miros de bioxid de sulf ce apare în urma reacţiei:

$$CuS + \frac{3}{2} O_2 = CuO + SO_2 .$$

În continuare, prin intermediul oxidului cupric are loc reacţia de clorurare:

$$CuO + NaCl + SO_2 + \frac{1}{2} O_2 = CuCl_2 + Na_2SO_4 ,$$

după care urmează formarea clorurii bazice:

$$3\,CuO + CuCl_2 = CuCl_2 . 3\,CuO.$$

Această reacţie este semnalată de Tafel [15] şi confirmată de noi din analiza produşilor obţinuţi prin încălzirea izotermă a numeroase probe. Între 200°...300°C cantitatea de Cu^{2+} găsită în soluţie este maximă, iar produsul insolubil în apă dar uşor solubil în acid azotic diluat, atestă prezenţa clorurii bazice. Peste 300°C procesul de formare al clorurii bazice predomină, fapt semnalat de prezenţa unei cantităţi mai mici de Cu^{2+} trecut în soluţie şi a unei cantităţi mult mai mari de ioni Cl^- în partea insolubilă; procesul de formare a clorurii bazice continuă pînă în jurul temperaturii de 570°C, după care amestecul se topeşte, iar după 620°C începe să se volatilizeze.

Analiza produsului obţinut prin încălzire la 600°C indică în afară de mici cantităţi de clorură cuprică, o clorură bazică care în apă are o culoare albastru spre verde.

f) *Analiza termodiferenţială a amestecului* $CuS + CaCl_2$

Termograma din fig. 2c este în general asemănătoare cu cea a amestecului $CuS + NaCl$ şi din analiza chimică a produşilor obţinuţi pe faze la diferite temperaturi rezultă că pînă la 500°C au loc aceleaşi transformări. Bucla diferenţială endotermă observată pentru temperatura curentă de 580°C se pare că ar fi dată de trecerea la altă varietate de clorură bazică, care în apă este de culoare brun-şocolat, transformare însoţită de o separare de CuO conform reacţiei:

$$CuCl_2 . 3\,CuO = CuCl_2 . CuO + 2\,CuO.$$

În produsul obţinut prin încălzire la 700°...800°C se găseşte oxid cupric alături de clorura bazică de culoare brun-şocolat.

În concluzie, în cazul sulfurii de cupru, atît clorura de sodiu cît şi clorura de calciu au un efect clorurant însemnat, transformarea fiind totală în clorură cuprică alături de cloruri bazice; formarea clorurilor bazice este favorizată de lipsa excesului de oxigen. Randamentul cel mai mare de ioni Cu^{2+} trecuţi în soluţie se obţine la temperaturi cuprinse între 200°...300°C.

Spre deosebire de sulfura de zinc, la care reacțiile se petrec foarte lent (durata de încălzire a unei probe este de 4...5 ore) pentru sulfura cuprică transformările decurg mult mai rapid, fiind totale după o încălzire de aproximativ $\frac{1}{2}$ oră.

4. Concluzii

1. S-a studiat, prin analiză termodiferențială, descompunerea sulfurilor precipitate de zinc și cupru. Prin descompunere, ca produși finali se obțin oxid de zinc, respectiv oxid cupros.

2. S-au întreprins încercări de clorurare în vederea solubilizării acestor produși, folosind ca agenți de clorurare clorura de sodiu și clorura de calciu.

3. Pentru sulfura de zinc se constată că efectul de clorurare este neînsemnat, clorura de sodiu mărind doar randamentul în sulfat de zinc.

4. Sulfura de cupru încălzită în prezența clorurilor de sodiu și de calciu este total clorurată, însă cantitatea insuficientă de aer împiedică formarea unei cantități mai mari de clorură cuprică, în produsul analizat predominînd clorurile bazice. Randamentul optim în clorură de cupru se obține în jurul temperaturii de 200°...300°C.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Van Tiggelen A., Vanreusel L., Neven P., Bull. Soc. Chim. Belg., 1952, **61**, p. 651.
2. Peretti E. A., Disc. Faraday Soc., 1948, *4*, p. 171.
3. Lefevre M., Lemmerling J., Van Tiggelen A., Bull. Chim. Soc. Belg., 1956, **65**, p. 580.
4. Lefevre M., Van Tiggelen A., Bull. Soc. Chim. Belg., 1957, **66**, p. 491.
5. — Chimie et Industrie, 1957, **78**, p. 107.
6. Germain-Lefevre M., Rigaert J., Zazulak W., Van Tiggelen A., Bull. Soc. Chim. Belg., 1958, **67**, p. 717.
7. Lupu Al., St. și cerc. metal., 1958, *4*, p. 477.
8. Смирнов В. И., *Металлургия меди и никеля*. М., 1950.
9. Френт Г. С., Тр. инст. метал. им. Байкова, 1957, **2**, стр. 45.
10. Thompson I., Tilling G., J. Soc. Chem. Ind.. 1924, **43**, p. 235.
11. Lemmerling J., Van Tiggelen A., Bull. Soc. Chim. Belg., 1955, **64**, p. 740.
12. Tafel V., *Lehrbuch der Metallhütten-Kunde*. Bd. **2**, Berlin, 1929.
13. Dorsey A., Bull. Bureau of Mines, 1919, p. 55.
14. Keppeler, Z. Angew. Chem., 1908, **21**, S. 579.
15. Tafel V., Metall u. Erz., 1923, **20**, S. 261.
16. Чижиков Д. М., ИАН СССР, ОТН, 1949, *9*, стр. 1352.
17. — ИАН СССР, ОТН, 1950, *12*, стр. 1815.
18. — ИАН СССР, ОТН, 1953, *4*, стр. 523.
19. Cannon K. I., Denbigh K. G., Chem. Eng. Sci., 1957, **6**, *4/5*, p. 145.
20. Окунев А. И и др., ДАН СССР, 1955, **103**, *5*, стр. 857.
21. Tsuquyasu Wada, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. III, 1957, *5*, p. 8.

22. Уразов Г. Г., Морозов И С., *Изучение процесса хлорирования руды месторождения Сорчюаивенци*. ГИПХ, стр. 5—37.
23. Kroll W. J., Met. Ind. London, 1952, **81**, pp. 243, 252, 269, 284, 325, 341, 365.
24. — Metall u. Erz., 1939, **36**, S. 125, 101.
25. Tafel V., Metallbörse, 1925, **13**, S. 64, 67, 313.
26. Чижиков Д. М., *Хлорный метод переработки полиметаллических руд и концентратов*. ОНТИ, М., 1936.
27. Чижиков Д. М., Балихина Г. С., Цветные металлы, 1935, *4*.
28. Hohn H., *Mineral Dressing*. Trans. Intern. Mineral. Dressing Congr., Stockholm, 1957, p. 663.
29. Denisov S. I., An. rom.-sov., Metal., 1966, *1*, p. 110.
30. Slavinski H. P., *Proprietăţile fizico-chimice ale elementelor*. Ed. Tehn., Buc., 1955, p. 138, (trad. din l. rusă).

ÉTUDE EN PHASE SOLIDE DE QUELQUES SULFURES MÉTALLIQUES

(Résumé)

Les Auteurs ont étudié, en utilisant l'analyse thermodifférentielle, la décomposition thermique des sulfures precipités de zinc et de cuivre.

Les produits finals de la décomposition sont ZnO et Cu_2O. Pour solubiliser les sulfures obtenus par précipitation, on a essayé leurs chloruration à l'aide de NaCl et $CaCl_2$. Pour ZnS on a constaté, dans les conditions expérimentales utilisées, que la chloruration est insignifiante, la présence du NaCl n'ayant que l'effet d'augmenter le rendement en $ZnSO_4$.

Par le chauffage du CuS en présence de NaCl ou de $CaCl_2$ on a obtenu un effet chlorurant total, mais l'absence de l'air a empêché la formation d'une quantité plus grande de $CuCl_2$; dans le produit analysé prédominent les chlorures basiques. Le meil'eur rendement en $CuCl_2$ a été obtenu à des températures d'environ 200°...300° C.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

ДК 546.45; 627

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ БЕРИЛЛИЯ В ПРИРОДНЫХ ВОДАХ

Д. И. ЭРИСТАВИ, Ф. И. БРОУЧЕК и В. Д. ЭРИСТАВИ

1. *Введение*

На основании предыдущих исследований [1]...[3] нами были разработаны методы отделения бериллия от алюминия и железа с помощью фтор-форм сильноосновных анионитов АВ-16 и АВ-17, а также показана перспективность применения этих методов при определении бериллия в синтетических и природных объектах.

Сущность этих методов заключается в предварительной сорбции из водных растворов с pH = 3...3,5 катионов бериллия и алюминия на фтор-форме анионита АВ-16 или катионов бериллия, железа и алюминия на фтор-форме анионита АВ-17 в виде анионных фторидных комплексов ($[BeF_4]^{2-}$, $[FeF_6]^{3-}$, $[AlF_6]^{3-}$) и последующем раздельном элюировании этих комплексов растворами фторида натрия различной концентрации [3].

Выявленные за последние годы возможности использования гидрохимического метода при поисках месторождений бериллия [4]...[6] делают особенно актуальной задачу разработки новых высокочувствительных и точных методов определения микроколичеств этого элемента в природных водах.

Принятый в современном гидрохимическом анализе полуколичественный спектральный метод определения бериллия в сухих остатках природных вод [7] громоздок, требует специальной аппаратуры, исключающей возможность его использования в экспедиционных условиях, и позволяет получать лишь рекогносцировочные данные.

Большинство колориметрических методов, пригодных для определения следовых количеств бериллия в природных водах, требует его предварительного концентрирования и отделения от многих мешающих элементов (железо, алюминий, магний и др.).

Для эффективного количественного определения микрограммовых количеств бериллия в природных водах следует, очевидно, последовательно комбинировать операции его концентрирования, а затем — отделения и конечного определения.

Имеющиеся в литературе данные позволяют сделать заключение о высокой эффективности соосаждения бериллия с гидроокисями алюминия или железа при концентрировании его следовых количеств [8]...[10]. Эти данные в сочетании с установленными нами возможностями отделения бериллия от железа и алюминия на фтор-формах анионитов [3] позволили разработать описанный ниже комбинированный метод определения бериллия в природных водах.

2. *Метод определения бериллия в природных водах*

Сущность метода заключается в соосаждении бериллиа с гидроокисями железа и алюминия, выделении его с помощью фтор-формы анионита АВ-17 из концентрата, полученного после раство ения осадка этих гидроокисей, и конечном фотометрическом определении с бериллоном II ИРЕА. В большинстве случаев в качестве внутр ннего коллектора при соосаждении бериллия могут быть использованы катионы железа и алюминия, входящие в ионно-солевой состав природных вод.

ХОД АНАЛИЗА

а) *Получение бериллий-содержащего аналитического концентрата*

Проба исследуемой воды (1 или 2 л) нагревается в стакане до 60°...80° С, после чего к ней медленно при помешивании добавляется концентрированный раствор аммиака до pH = 8...8,5 (по универсальной индикаторной бумаге).

После коагуляции и отстаивания образовавшегося осадка гидроокисей железа и алюминия, вместе с которыми соосаждается бериллий, маточный раствор отделяется от осадка сифонированием. Осадок гидроокисей с помощью небольших порций сифоната переносится на фильтр, промывается 30...50 мл слегка подщелоченной аммиаком дистиллированной водой, а затем растворяется на фильтре в 7 мл 0,1 N H_2SO_4 (путем многократной обработки осадка одной и той же порцией кислоты). Полученный таким образом концентрат доводится дистиллированной водой до объема 25 мл.

Примечания. 1. При определении бериллия в гидрокарбонатно-кальциевых водах перед проведением аммиачного осаждения гидроокисей железа, алюминия и бериллия из пробы исследуемой воды во избежание выпадения осадка карбоната кальция необходимо удалить гидрокарбонат-ионы путем ее подкисления соляной кислотой (1 : 1) до pH = 2 и последующего 10-минутного кипячения для удаления углекислоты.

2. Если исследуемая вода не содержит минимально необходимых для соосаждения бериллия количеств железа и алюминия (~ 5 мг/л Fe^{3+} и ~ 2 мг/л Al^{3+}), в анализируемую пробу воды перед аммиачным осаждением добавляются растворы сульфатов железа (III) и алюминия в количествах, эквивалентных 5 мг/л Fe^{3+} и 2 мг/л Al^{3+}.

3. В полевых условиях соосаждение бериллия с гидроокисями железа и алюминия может производиться непосредственно у водоисточника в приборе-концентраторе ЛТИ-ВИТР (см. [7, стр. 226, 239]).

Получение концентратов по описанной выше методике возможно как из пресных, так и сильноминерализованных природных вод. При этом основные компоненты ионно-солевого состава природных вод (щелочные металлы, кальций, магний и анионы) в осадок не переходят

б) *Выделение бериллия*

Полученные по описанной выше методике 25 мл бериллий-содержащего концентрата со скоростью фильтрации 1 мл/мин пропускаются через колонку со фтор-формой анионита АВ-17 (диаметр колонки 1,6 см, высота слоя набухшего сорбента 20 см). После промывания этой колонки порцией дистиллированной воды (25 мл) через нее со скоростью 5 мл/мин пропускаются 150 мл 1%-ного раствора NaF, вымывающего железа. Затем для десорбции бериллия через эту колонку с той же скоростью фильтрации пропускают 180 мл 3%-ного раствора NaF. Полученный при этом элюат собирается в отдельный стакан для анализа на бериллий.

в) *Фотометрическое определение бериллия с бериллоном* II *ИРЕА*

Бериллий-содержащая фракция элюата, полученная по описанной выше методике, выпаривается 3...4 раза с 10 мл концентрированной H_2SO_4, для удаления фторид-ионов. Полученный в результате сернокислотной обработки осадок растворяется с 30...40 мл подкисленной серной кислотой дистиллированной воды, полученная смесь переносится в мерную колбу на 100 мл и разбавляется дистиллированной водой до метки.

Аликвотная часть (10...40 мл) полученного раствора переносится в мерную колбу на 50 мл, куда добавляется 10%-ный раствор NaOH до pH = 12...13 (по индикаторной бумаге), а затем 2 мл 0,01%-ного водного раствора бериллона II ИРЕА, после чего содержимое колбы разбавляется до метки дистиллированной водой и тщательно перемешивается.

Через 10...15 минут измерение оптической плотности полученной смеси производится по левому барабану фотоколориметра ФЭК-М с красным светофильтром, в закрытых крышкой кюветах с рабочей длиной 50,0 мм и с использованием в качестве нулевого раствора смеси, полученной в результате проведения холостого опыта.

Количество бериллия во взятой на анализ пробе определяется по предварительно построенной в тех же условиях калибровочной кривой „концентрация бериллия — оптическая плотность" для проведенных через все стадии анализа эталонов с содержанием 0...25 мкг бериллия в 50 мл раствора с интервалами 2...2,5 мкг.

Разработанный нами метод был проверен на искусственных смесях и на пробах минеральных вод Боржомского месторождения Грузинской ССР (см. таблицы 1 и 2).

Как видно из таблицы 1, предлагаемый метод позволяет с достаточно высокой эффективностью определять микрограммовые количества бериллия.

В таблице 2 представлены результаты впервые проведенных нами определений бериллия описанным выше методом в некоторых важней-

Таблица 1

Определение бериллия после его отделения от железа и алюминия с помощью фтор-формы анионита АВ-17

№№ опытов	Взято, мг/25 мл			Определено Be в элюате мг	Относительная ошибка % %
	Be^{++}	Fe^{3+}	Al^{3+}		
1	0,0	5,0	2,0	0,00	0,00
2	1,0	5,0	2,0	0,96	— 4,00
3	0,5	5,0	2,0	0,58	+ 12,00
4	0,1	5,0	2,0	0,108	+ 8,00
5	0,05	5,0	2,0	0,044	— 12,00
6	0,02	5,0	2,0	0,019	— 5,00
7	0,01	5,0	2,0	0,008	— 20,00

Таблица 2

Определение бериллия в пробах минеральных вод Боржомского месторождения

№№ проб	Место взятия пробы	Формула химического состава воды	Содержание Be мкл/л
1	Вашловани, скв. № 9	$CO^2_{0,4}M_{7,16}\frac{HCO^-_3\ 88}{Na^+\ 98}$	18,0
2	Боржоми, скв. № 41а	$CO^2_{0,68}M_{6,55}\frac{HCO^-_3\ 85}{Na^+\ 88}$	16,0
3	Ликани, скв. № 2	$CO^2_{0,8}M_{5,45}\frac{HCO^-_3\ 90}{Na^+\ 75}$	19,0
4	Боржоми, скв. № 1	$CO^2_{0,88}M_{6,14}\frac{HCO^-_3\ 85}{Na^+\ 85}$	14,0

ших водоисточниках минеральной воды Боржомского месторождения. Приведенные в этой таблице величины являются средними из двух параллельных определений, обладавших хорошей сходимостью.

Результаты спектрального анализа сухих остатков, указанных в таблице 2 проб боржомской воды показали тот же порядок содержания в них бериллия.

Простота применяемой аппаратуры, доступность рекомендованного ионита, возможность быстрого и эффективного осуществления операции соосаждения бериллия как в стационарных, так и в полевых условиях (непосредственно у водоисточников), в сочетании с хорошей точностью получаемых результатов позволяют рекомендовать предлагаемый нами комбинированный метод определения бериллия для внедрения в практику гидрохимического анализа.

3. *Выводы*

1. Разработан комбинированный метод определения бериллия в природных водах путем его соосаждения с гидроокисями железа и алюминия, выделения из полученного концентрата с помощью фторформы анионита АВ-17 и последующего фотоколориметрического определения с бериллоном II ИРЕА. Чувствительность метода 2 мг/л Be. Максимальная относительная ошибка $\pm 25\%$.

2. При содержании катионов железа и алюминия в анализируемой воде в количествах соответственно ~ 5 и ~ 2 мг/л последние используются в качестве внутреннего коллектора для концентрирования бериллия путем аммиачного осаждения их гидроокисей.

3. Разработанным методом определено количественное содержание бериллия в важнейших водоисточниках углекислой гидрокарбонатно-натриевой минеральной воды Боржомского месторождения, лежащее в пределах 14...19 мкг/л Be.

4. Результаты проверки предлагаемого метода на чистых солях и пробах природных вод позволяют рекомендовать его для внедрения в практику гидрохимического анализа.

Поступила 25 XII 1965 г.

Грузинский политехнический институт им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Эристави Д. И., Броучек Ф. И., Эристави В. Д., Тр. Груз. полит. инст. им. В. И. Ленина, 1965, *6 (104)*, стр. 23—32.
2. — Тр. Груз. полит. инст. им. В. И. Ленина, 1965, *6 (104)*, стр. 33—40.
3. — Тр. Груз. полит. инст. им. В. И. Ленина, 1966, *3 (108)*, стр. 29—34.
4. Бугельский Ю. Ю., В сб. *Материалы по геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии*. Изд. АН СССР, 1959, стр. 187—190.
5. Питьева К. Е., В сб. *Вопросы формирования химического состава подземных вод*. Моск. ун-т, 1963, стр. 69—76.
6. Лисицын А. И., Мормиль С. И., Разведка и охрана недр, 1963, *3*, стр. 20—23.
7. Соколов И. Ю., (ред.), *Методическое руководство по определению микрокомпонентов в природных водах при поисках рудных месторождений*. Госгеолтехиздат, М., 1961, стр. 191—198.

8. Сендел Е., *Колориметрические методы определения следов металлов*. Изд. Мир, М., 1964, стр. 272, 274, (пер. с англ.).
9. Шарло Г., *Методы аналитической химии*. Изд. Химия, М., 1965, стр. 570, (пер. с франц.).
10. Севастьянов А. И., Руденко Н. П., Вестник Моск. ун-та, Химия, 1965, *1*, стр. 22—24.

METODĂ DE DETERMINARE A BERILIULUI ÎN APELE NATURALE

(Rezumat)

Se expune o metodă combinată de determinare a beriliului din apele naturale bazată pe coprecipitarea sa cu hidroxizii de Al şi Fe şi separarea de concentratul obţinut cu ajutorul anioniţilor *AB*-16 şi *AB*-17; beriliul este determinat apoi pe cale fotocolorimetrică.

Sensibilitatea metodei este de 2 μg/l Be. Eroarea maximă ± 25%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 549.3; 541.135.2; 546.561.226

ROLUL UNOR ELECTROLIŢI ÎN PROCESUL DE ALTERARE A GALENEI SUB ACŢIUNEA SULFATULUI DE CUPRU

DE

AL. NACU, DIDINA NACU şi CORNELIA BOTEZ

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 27—30 iunie 1966

1. Introducere

Pentru elucidarea condiţiilor fizico-chimice de formare a zăcămintelor hidrotermale plumbifere şi cuprifere, o importanţă deosebită o prezintă studiul oxidării şi solvirii sulfurilor sub acţiunea soluţiilor mineralizante $CuSO_4$, $Fe_2(SO_4)_3$, H_2SO_4 etc. Date referitoare la acţiunea acestor soluţii asupra sulfurii de plumb se întîlnesc în literatura de specialitate, iar mecanismul şi cinetica de reacţie dintre PbS şi $CuSO_4$ au fost studiate şi de autori [1]. Dar aceste date se referă de obicei la acţiunea acestor soluţii luate separat, neluînd în consideraţie şi acţiunea altor electroliţi, care pot însoţi soluţiile respective.

Experimental s-a stabilit o solubilitate mărită a sulfurii de plumb, ca rezultat al formării unor complecşi cu plumb. Astfel J. J. Hemley]2] a arătat influenţa complecşilor de hidrosulfit, iar N. I. Hitarov şi A. A. Moskaliuk [3] au indicat o solubilitate mărită a galenei în apele clorocalcitice prin formarea unor complecşi cu clor. Se găsesc de asemenea date referitoare la complecşii plumbului cu carbonaţi şi bicarbonaţi [4].

Pornind de la aceste considerente ne-am propus să studiem modul în care diferiţi electroliţi influenţează intensitatea procesului de solubilizare a PbS sub acţiunea $CuSO_4$, precum şi rolul acestora în migraţia sau depunerea plumbului şi cuprului.

2. Date experimentale şi discuţii

Pentru experimentare s-a folosit PbS sintetică şi galenă de Herja şi Baia Sprie. Atît PbS sintetică cît şi galena au fost aduse în pulbere prin mojarare şi s-au trecut printr-o sită cu mărimea ochiurilor de 0,06 mm. Probele au fost puse să reacţioneze cu soluţia de $CuSO_4$ 0,1*m* şi soluţii de NaCl, KCl, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $NaHCO_3$, $KHCO_3$ sau amestecul acestora. Concentraţia electroliţilor a variat, în funcţie de experienţele efectuate, de la

0,1*m* pînă la 1*m*. Raportul molar PbS : $CuSO_4$ s-a păstrat constant şi anume 1 : 5, iar pH-ul iniţial al soluţiilor s-a variat de la 0,5 pînă la 4, menţinîndu-se constant pentru o serie de experienţe. Timpul de contact al soluţiei cu faza solidă a variat, în funcţie de factorii ce au fost studiaţi, de la 12...120 ore. Temperatura de lucru a fost 25°C.

Variaţia concentraţiei ionilor de cupru în diferite momente ale reacţiei s-a determinat spectrofotometric prin măsurarea extincţiei complexului cuproamoniacal [5], iar la concentraţii mai mici cuprul s-a determinat de asemenea pe cale spectrofotometrică, dar cu ditizonă [6]. Utilizînd acelaşi procedeu s-a determinat şi concentraţia ionilor de plumb din soluţie. Măsurarea pH-ului s-a efectuat cu ajutorul electrodului de sticlă. Pentru determinarea în fază solidă, a plumbului legat ca sulfură, sulfat sau carbonat, s-a folosit analiza raţională [5].

a) *Influenţa naturii, concentraţiei electrolitului şi a regimului acido-bazic asupra reactivităţii PbS cu* $CuSO_4$

Datele obţinute de unii autori arată o solubilitate mărită a sulfurii de plumb în cloruri, solubilitate ce se intensifică cu mărirea concentraţiei în ioni de clor [7]...[11]. Astfel I. M. Korenman [7], [8] a arătat că solubilitatea PbS creşte în soluţii acide şi cu creşterea ionilor de clor. I. P. Kuzmina [9] şi N. Iu. Ikornikov [10] au tras concluzia că la ridicarea presiunii şi temperaturii are loc o intensă solvire a PbS în soluţii de NH_4Cl, NaCl, LiCl. N. T. Hitarov şi T. N. Kozniţev [11] au găsit în soluţii de NaCl o solubilitate a galenei de ordinul sutelor de mg/l.

În compoziţia soluţiilor hidrotermale, în afară de $CuSO_4$ sînt prezente şi clorurile, bicarbonaţii, iar dintre cationi pot avea influenţă în afară de Na, K şi Mg, Ca care se găsesc deseori în compoziţia apelor hidrotermale. De aceea sistemele studiate au cuprins, în afară de cloruri şi bicarbonaţi de sodiu şi potasiu, cloruri de magneziu şi calciu, precum şi amestecul acestora. Compoziţia sistemelor studiate este arătată în tabelul 1.

Tabelul 1

Compoziţia iniţială a sistemelor studiate

Nr. sistemului	Compoziţia sistemului
1	$PbS+CuSO_4$
2	$PbS+CuSO_4+KCl$
3	$PbS+CuSO_4+NaCl$
4	$PbS+CuSO_4+CaCl_2$
5	$PbS+CuSO_4+MgCl_2$
6	$PbS+CuSO_4+KHCO_3$
7	$PbS+CuSO_4+NaHCO_3$
8	$PbS+CuSO_4+MgCl_2+KCl$
9	$PbS+CuSO_4+MgCl_2+CaCl_2$

În fig. 1 și 2 este reprezentată grafic variația concentrației cuprului în funcție de timp pentru sistemele menționate, folosind în determinări PbS sintetică (fig. 1) și galenă de Herja (fig. 2). Se observă că intensitatea

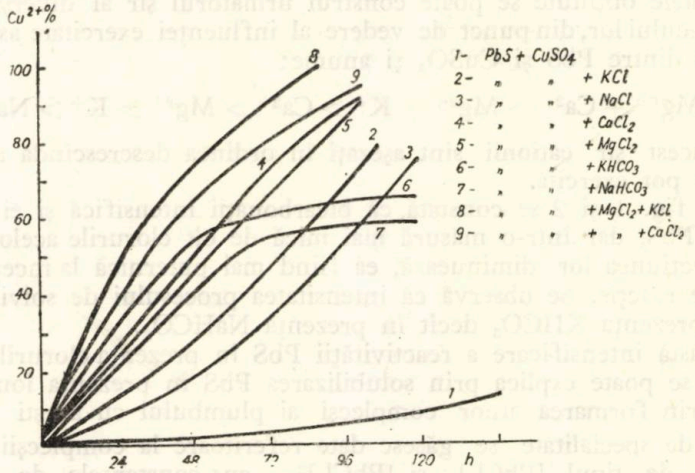


Fig. 1. — Variația concentrației Cu^{2+} trecut în faza solidă, funcție de timpul de reacție, în sisteme PbS — electrolit.

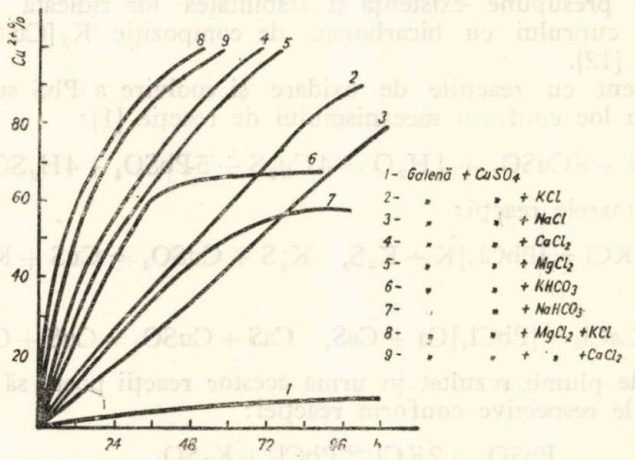


Fig. 2. — Variația concentrației Cu^{2+} trecut în faza solidă, funcție de timpul de reacție, în sisteme galenă-electrolit.

de solvire a PbS, măsurată prin cantitatea de cupru ce trece din soluție în faza solidă, este mărită în prezența electroliților adăugați. În timp ce cantitatea de cupru ce trece din soluție în faza solidă, în decurs de 72 ore,

în cazul sistemului *1*, este de 5%, în aceleaşi condiţii dar în prezenţa clorurilor şi bicarbonaţilor metalelor alcaline şi alcalino-teroase, cantitatea de cupru ce trece în faza solidă este de ordinul 55...100%. Influenţa cea mai mare asupra solvirii PbS o exercită amestecul de $MgCl_2$ şi KCl. Din datele experimentale obţinute se poate construi următorul şir al diverşilor cationi şi al amestecului lor, din punct de vedere al influenţei exercitate asupra vitezei de reacţie dintre PbS şi $CuSO_4$ şi anume:

$$Mg^{2+} + Ca^{2+} > Mg^{2+} + K^{+} > Ca^{2+} > Mg^{2+} > K^{+} > Na^{+}.$$

În acest şir cationii sînt aşezaţi în ordinea descrescîndă a influenţei pe care o pot exercita.

Din fig. 1 şi 2 se constată că bicarbonaţii intensifică şi ei procesul de solvire a PbS, dar într-o măsură mai mică de cît clorurile aceloraşi cationi. În timp acţiunea lor diminuează, ea fiind mai puternică la începutul intervalului de reacţie. Se observă că intensitatea procesului de solvire este mai mare în prezenţa $KHCO_3$ decît în prezenţa $NaHCO_3$.

Această intensificare a reactivităţii PbS în prezenţa clorurilor şi bicarbonaţilor se poate explica prin solubilizarea PbS în prezenţa ionilor Cl^- şi HCO_3^-, prin formarea unor complecşi ai plumbului cu aceşti anioni. În literatura de specialitate se găsesc date referitoare la complecşii plumbului cu clorul, de tipul $[PbCl_3]^-$ şi $[PbCl_4]^{2-}$, cu constantele de instabilitate $1{,}4 \cdot 10^{-2} \ldots 4{,}2 \cdot 10^{-2}$ pentru primul complex şi $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ pentru cel de a doilea [7], [8], [11] ... [15]. Complecşii plumbului cu bicarbonat nu au fost studiaţi deşi se presupune existenţa şi stabilitatea lor ridicată în analogie cu complecşii cuprului cu bicarbonat, de compoziţie $K_2[Cu(HCO_3)_4]$ şi $K = 0{,}3 \cdot 10^{-11}$ [12].

Concomitent cu reacţiile de oxidare şi soolvire a PbS sub acţiunea $CuSO_4$, care au loc conform mecanismului de reacţie [1]:

$$(1) \qquad 5\,PbS + 8\,CuSO_4 + 4\,H_2O = 4\,Cu_2S + 5\,PbSO_4 + 4\,H_2SO_4$$

au loc şi următoarele reacţii:

$$(2) \qquad PbS + 3KCl = [PbCl_3]K + K_2S, \quad K_2S + CuSO_4 = CuS + K_2SO_4$$

sau

$$(2') \qquad PbS + 2\,CaCl_2 = [PbCl_4]Ca + CaS, \quad CaS + CuSO_4 = CuS + CaSO_4.$$

Sulfatul de plumb rezultat în urma acestor reacţii poate să interacţioneze cu clorurile respective conform reacţiei:

$$(3) \qquad PbSO_4 + 2KCl \rightleftarrows PbCl_2 + K_2SO_4.$$

Dovadă că reacţiile decurg după schema (2) este şi faptul că concentraţia în plumb a soluţiei creşte cu scăderea concentraţiei ionilor Cu^{2+}. Această dependenţă este exprimată în graficul din fig. 3. Astfel în prezenţa $CaCl_2$ $0{,}1m$, pentru 40% Cu^{2+} trecut în fază solidă, corespunde $10 \cdot 10^{-3}$ g/l plumb, iar pentru 100% Cu^{2+} corespunde $50 \cdot 10^{-3}$ g/l plumb.

Experimental s-a observat că pH-ul sistemului variază în întregul interval de reacţie, precum şi după terminarea reacţiei principale, adică a trecerii totale a cuprului în faza solidă (fig. 4). Aceasta denotă, după cum s-a arătat într-o lucrare anterioară [1], că reacţiile decurg după mecanismul (1) şi că după sfîrşitul reacţiei principale au loc reacţii secundare. Scăderea pH-ului (fig. 4) se datoreşte apariţiei acidului sulfuric, conform reacţiei (1). Cînd întreaga cantitate de H_2SO_4 este consumată, în urma reacţiei cu PbS rămasă nereacţionată, pH-ul soluţiei creşte. Punctele de inflexiune din fig. 4

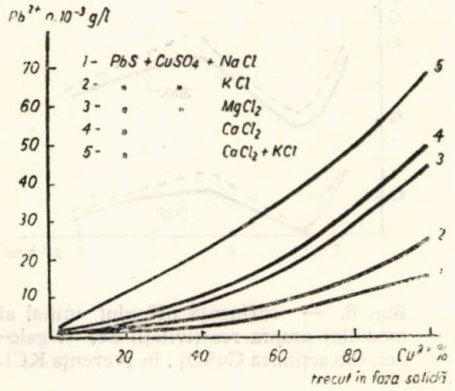


Fig. 3. — Variaţia concentraţiei plumbului trecut în soluţie, funcţie de cantitatea de cupru trecut în faza solidă.

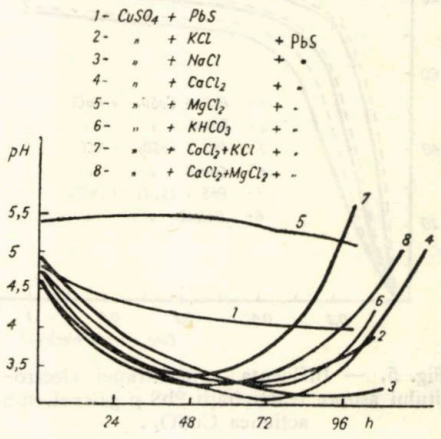


Fig. 4. — Variaţia pH-ului în sistemele PbS — $CuSO_4$ — electrolit.

indică tocmai trecerea totală a ionilor de cupru în faza solidă. Se observă că în sistemele care conţin electroliţi aceste puncte de inflexiune se obţin într-un interval de timp mai mic, deci viteza de reacţie creşte în prezenţa lor. În cazul $KHCO_3$ se constată o scădere a pH-ului mai lentă decît în cel al clorurilor; la început scăderea este mai accentuată, pentru ca apoi să fie mai puţin evidentă. Acest fapt se explică prin combinarea acidului sulfuric, eliberat în urma reacţiilor (1), cu bicarbonatul. De aceea în acest caz viteza de reacţie creşte în timp (fig. 1 şi 2).

Reactivitatea PbS faţă de soluţia de $CuSO_4$ depinde şi de concentraţia electrolitului folosit (fig. 5). După cum se observă din figură, cantitatea de cupru ce trece în faza solidă creşte cu mărirea concentraţiei electrolitului pînă la o anumită limită, pentru ca apoi creşterea să fie mai puţin accentuată, rămînînd practic constantă.

Aciditatea iniţială a mediului poate influenţa mult reactivitatea PbS. În fig. 6 este reprezentată variaţia concentraţiei cuprului ce trece în faza solidă, după un anumit interval de timp, funcţie de pH-ul iniţial al soluţiei.

Cea mai accentuată trecere a cuprului în faza solidă are loc la pH = 0,5 şi 2,25. Se poate totuşi considera că valoarea optimă a pH-ului, corespunzătoare trecerii cuprului în faza solidă, este cuprinsă între 2 ... 4, reprezentînd de fapt pH-ul iniţial al soluţiilor de $CuSO_4$, de concentraţie 0,1*m* (pH = = 3,9 ... 4,1).

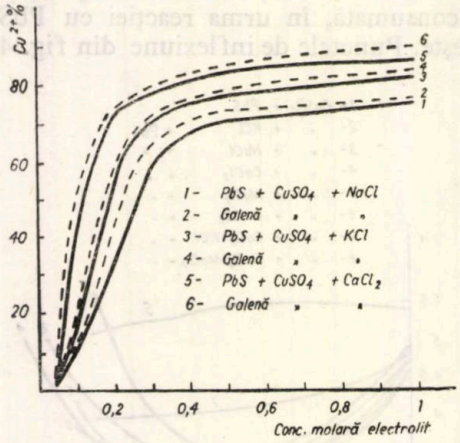


Fig. 5. — Influenţa concentraţiei electrolitului asupra reactivităţii PbS şi galenei, sub acţiunea $CuSO_4$.

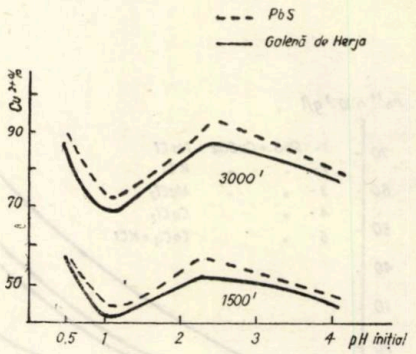


Fig. 6. — Influenţa pH-ului iniţial al mediului asupra reactivităţii PbS şi galenei, sub acţiunea $CuSO_4$, în prezenţa KCl.

Datele experimentale obţinute permit a se trage următoarea concluzie referitoare la reactivitatea galenei faţă de soluţia de $CuSO_4$, în prezenţa diferiţilor electroliţi:

Reactivitatea galenei depinde de natura electroliţilor folosiţi, de concentraţia lor şi de aciditatea iniţială a soluţiei.

b) *Influenţa naturii, concentraţiei electrolitului şi acidităţii mediului asupra trecerii plumbului în soluţie*

Paralel cu determinarea cantităţii de cupru ce trece din soluţie în faza solidă s-a determinat şi concentraţia plumbului ce trece din faza solidă în soluţie, în funcţie de natura şi concentraţia electrolitului folosit. Din fig. 7 se constată că cantitatea de plumb ce trece în soluţie depinde de natura electrolitului folosit precum şi de timpul de contact al fazei lichide cu faza solidă. Cantitatea cea mai mare de plumb s-a găsit în prezenţa amestecului de $CaCl_2 + KCl$; urmează apoi în ordine $CaCl_2$, $MgCl_2$, KCl, NaCl. În prezenţa $KHCO_3$ şi $NaHCO_3$ (fig. 8), se observă de asemenea o trecere însemnată a plumbului în soluţie, concentraţia cea mai ridicată de plumb găsindu-se în prezenţa $KHCO_3$. După cum s-a arătat, trecerea plumbului în soluţie.

în prezența clorurilor și bicarbonaților, are loc sub formă de cloro- și bicarbonato-complecși.

În general stabilitatea complecșilor depinde de o serie de factori și anume: polaritatea moleculelor și ionilor complexului, gradul de hidratare, raza ionilor din sfera exterioară și interioară etc. De obicei influența razei ionilor din sfera exterioară este neglijabilă, cu toate că și acest factor poate exercita o influență deosebită asupra stabilității complexului. Așa de exemplu

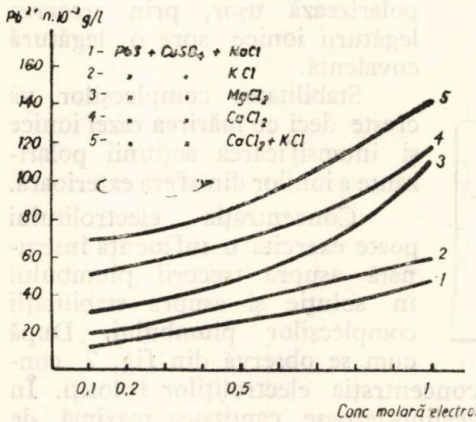


Fig. 7. — Cantitatea de plumb trecut în soluție, funcție de natura și concentrația electrolitului folosit.

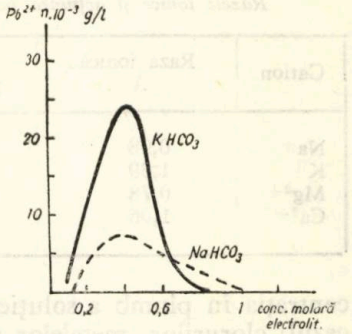


Fig. 8. — Cantitatea de plumb trecut în soluție, funcție de concentrația $KHCO_3$ și $NaHCO_3$, în sistemul PbS — $CuSO_4$.

în cazul complecșilor clorurați ai plumbului s-a arătat că aceștia sînt mult mai stabili în soluții de KCl decît în cele de NaCl [13], [14]. Acest fapt se explică prin aceea că sodiul are o rază ionică mai mică decît potasiul, putîndu-se hidrata mai puțin. Experiențele noastre au confirmat aceasta și au arătat că în seria metalelor alcalino-teroase se observă aceeași regularitate: stabilitatea complecșilor cloroplumbici în soluție de $MgCl_2$ este mai redusă decît în soluție de $CaCl_2$. S-a observat de asemenea o trecere mai intensă a plumbului în soluție în cazul clorurilor metalelor alcalino-teroase, decît în cazul celor alcaline, cu toate că razele ionice ale primelor au o valoare mai mică ($Na^+ = 0{,}98$ Å, $K^+ = 1{,}37$ Å, $Mg^{2+} = 0{,}78$ Å, $Ca^{2+} = 1{,}06$ Å). Se înțelege deci că stabilitatea clorocomplecșilor de plumb depinde și de sarcina cationilor din sfera exterioară. La aceeași sarcină electrică se poate afirma că stabilitatea complecșilor crește cu raza ionică, dar la aceeași mărime a razei ionice stabilitatea este cu atît mai ridicată cu cît sarcina electrică a cationilor din sfera exterioară este mai mare. De exemplu mărimea razei ionice a ionilor de Na^+ și Ca^{2+} este foarte apropiată, dar stabilitatea clorocomplecșilor cu plumb în soluții de $CaCl_2$ este mai ridicată decît în soluții de NaCl.

Faptul că la raze ionice egale şi sarcini electrice diferite ale ionilor din sfera exterioară se obţin stabilităţi diferite se poate explica prin acţiunea polarizantă mai intensă a ionilor cu raze ionice mai mici dar cu sarcină electrică mai mare. În tabelul 2 sînt redate razele ionice şi acţiunea polarizantă a cationilor studiaţi, după datele lui A. A. Grinberg [15].

Din tabelul 2 se observă că ionii Ca^{2+} şi Mg^{2+} prezintă o acţiune polarizantă mai intensă decît ionii Na^{+} şi K^{+}. Această acţiune polarizantă poate conduce la formarea unor combinaţii mai stabile cu anionii ce se polarizează uşor, prin trecerea legăturii ionice spre o legătură covalentă.

Tabelul 2

Razele ionice şi acţiunea polarizantă

Cation	Raza ionică Å	Acţiunea polarizantă
Na^{+}	0,98	1,0
K^{+}	1,39	0,6
Mg^{2+}	0,78	3,3
Ca^{2+}	1,06	1,8

Stabilitatea complecşilor va creşte deci cu mărirea razei ionice şi intensificarea acţiunii polarizante a ionilor din sfera exterioară.

Concentraţia electrolitului poate exercita o influenţă însemnată asupra trecerii plumbului în soluţie şi asupra stabilităţii complecşilor plumbului. După cum se observă din fig. 7, concentraţia în plumb a soluţiei creşte cu concentraţia electroliţilor folosiţi. În cazul clorurilor metalelor alcaline şi alcalino-teroase cantitatea maximă de plumb din soluţie se găseşte la concentraţia 1 *m*, dar şi la concentraţii mai mici de electrolit trece în soluţie o cantitate însemnată de plumb. În cazul bicarbonaţilor cantitatea maximă de plumb în soluţie se obţine în jurul concentraţiei 0,4 *m*, la valori mai mari sau mai mici decît aceasta, fiind mai redusă (fig. 8).

Între complecşii plumbului ce se pot forma în soluţie există un echilibru termodinamic, echilibru ce depinde, în principal, de concentraţia electrolitului adăugat, în cazul complecşilor cu clor de concentraţia în ioni de clor:

$$[PbCl_4]^{2-} \rightleftarrows [PbCl_3]^{-} + Cl^{-}.$$

La o micşorare a concentraţiei ionilor de clor în soluţie, complexul $[PbCl_3]^{-}$ disociază şi mai departe:

$$[PbCl_3]^{-} \rightleftarrows PbCl_2 + Cl^{-}, \quad PbCl_2 \rightleftarrows PbCl^{+} + Cl^{-}, \quad PbCl^{+} \rightleftarrows Pb^{2+} + Cl^{-}.$$

Creşterea concentraţiei în ioni de Cl^{-} conduce la slăbirea disociaţiei şi la formarea unor combinaţii mai stabile ale plumbului, cu compoziţie mai complexă. Micşorarea concentraţiei în ioni de Cl^{-} are drept urmare descompunerea complecşilor şi apariţia de ioni Pb^{2+}. Acest punct de vedere este în deplină concordanţă cu datele experimentale (fig. 7); la o micşorare a concentraţiei electrolitului ionii de plumb care apar în soluţie precipită cu ionii SO_4^{2-} şi formează $PbSO_4$, astfel că concentraţia în plumb a fazei lichide scade.

Aciditatea inițială a mediului are o deosebită importanță în procesul trecerii plumbului în soluție sub forma diferiților complecși. După cum se observă din fig. 9, cea mai mare cantitate de plumb se găsește în soluție la pH < 2. La pH-uri slab acide cantitatea de plumb din soluție se micșorează. Din cele expuse reiese că trecerea plumbului sub formă de complecși solubili depinde de natura și concentrația electrolitrului, precum și de aciditatea inițială a mediului.

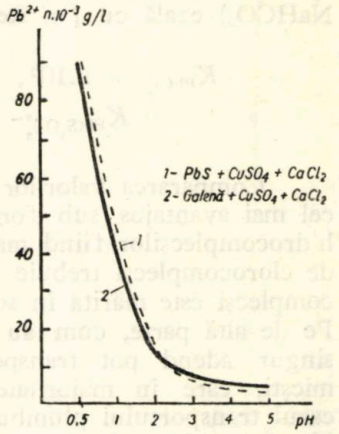


Fig. 9. — Dependența cantității de plumb ce trece în soluție, de pH-ul inițial al mediului.

c) *Cîteva considerații asupra puterii de migrație a plumbului și depunerii cuprului în sistemele studiate*

Plumbul este considerat ca unul din elementele ce migrează cel mai puțin în zona de oxidare a minereurilor de sulfuri [16]. Migrația sa redusă este reflectată în următoarea regulă: „Dacă zona de oxidare include minereuri cu cantități neindustriale de plumb, atunci și zăcămintele de sulfuri vor conține cantități neindustriale de plumb". Desigur această regulă nu se poate generaliza căci enunțarea ei nu se bazează pe considerarea tuturor factorilor ce acționează în zona de oxidare a zăcămintelor de sulfuri. Sărăcirea straturilor superioare ale zăcămintelor de sulfuri, în plumb, este o dovadă a posibilității de migrație a acestui element. Totuși și în straturile mai adînci, la contactul mai îndelungat al apelor mineralizante ce conțin ioni de Cl^- sau HCO_3^-, poate avea loc o migrație a acestui element. Datele experimentale obținute în cazul interacțiunii dintre PbS și $CuSO_4$ în prezența clorurilor și bicarbonaților permit să se aprecieze că transportul plumbului se poate produce în soluții acide în prezența acestor ioni.

În aceleași condiții este accelerat și procesul de depunere a cuprului sub formă de sulfură. În absența clorurilor și bicarbonaților, adică numai în sistemul PbS + $CuSO_4$, este defavorizat atît procesul de depunere a cuprului cît și procesul de migrație a plumbului. Datele obținute (fig. 5 și 9) arată că condițiile optime de transport ale plumbului se realizează la pH-uri acide și la concentrații de electrolit în jur de 1 *m*. Desigur că în condițiile naturale soluțiile mineralizante nu conțin concentrații atît de ridicate de săruri; totuși și la concentrații mai reduse în soluții trec cantități însemnate de plumb (fig. 5).

Reiese deci că, în natură, condiții favorabile de migrație a plumbului și de depunere a cuprului pot apărea și la concentrații reduse de electrolit precum și la pH-uri slab acide. În condițiile hidrotermale există de fapt un sistem electrolitic mult mai complex, migrația plumbului sub diferite combinații complexe avînd o importanță deosebită.

Se poate evalua aproximativ rolul unor complecşi de plumb la migraţia acestui element, luînd în consideraţie constanta de stabilitate a complecşilor şi concentraţia adenzilor. Să considerăm pH-ul iniţial al sistemelor egal cu 4, iar concentraţia soluţiilor de electrolit (KCl, NaCl, $MgCl_2$, $CaCl_2$, $KHCO_3$, $NaHCO_3$) egală cu 1 *n*. Rezultă:

$$K_{PbCl_4^{2-}} = 2.10^2, \quad K_{PbCl_3^-} = 2{,}5.10^2, \quad K_{PbOH^+} = 6{,}3.10^{-3},$$
$$K_{Pb(S_2O_3)_2^{2-}} = 0{,}74.10^5, \quad K_{Pb(HCO_3)_2^{2-}} = 10^8.$$

Compararea valorilor de mai sus arată că migraţia plumbului se produce cel mai avantajos sub formă de bicarbonat şi tiosulfat, rolul clorurilor şi hidrocomplecşilor fiind mai redus. Totuşi transportul plumbului sub formă de clorocomplecşi trebuie luat în consideraţie mai ales că stabilitatea acestor complecşi este mărită în soluţii de $CaCl_2$ şi $MgCl_2$ sau amestec al acestora. Pe de altă parte, cum au arătat unii autori [17], complecşii ce conţin un singur adend pot transporta metalul sub formă de complecşi cu adenzi micşti, care în majoritatea cazurilor posedă o stabilitate mai ridicată. În cazul transportului plumbului, este posibilă migraţia sa sub formă de clorobicarbonato-complecşi de compoziţie:

$$[Pb(HCO_3)_2Cl_2]^{2-}, \quad [Pb(HCO_3)_3Cl]^{2-}, \quad [PbCl_2HCO_3]^-.$$

Dacă admitem că oxidarea sulfului din sulfuri, în mediu acid, se produce după schema:

$$S^{2-} \rightarrow S^0 \rightarrow SO_4^{2-},$$

iar în mediu neutru sau slab alcalin oxidarea poate să decurgă cu formare de combinaţii intermediare

$$S^{2-} \rightarrow S_2O_3^{2-} \rightarrow SO_3^{2-} \rightarrow S_nO_6^{2-} \rightarrow SO_4^{2-},$$

atunci putem admite o migraţie însemnată a plumbului şi sub formă de complecşi de politionaţi $[Pb(S_2O_3)_2]^{2-}$ şi $[Pb(S_2O_3)_3]^{4-}$, care au constantele de stabilitate $K_1 = 1{,}3.10^5$ şi $K_2 = 2{,}23.10^6$ [18]. Această migraţie poate să aibă loc mai ales în mediu alcalin.

Din cele arătate mai sus rezultă că este posibilă migraţia plumbului sub formă de complecşi cu ionii Cl^-, HCO_3^-, $S_2O_3^{2-}$, sau complecşi cu adenzi micşti.

Analiza fazei solide şi lichide a sistemelor, după dispariţia totală a ionilor de cupru din soluţie, a arătat că în condiţiile oxidării şi solvirii PbS sub acţiunea $CuSO_4$, în prezenţa electroliţilor amintiţi, o parte însemnată de plumb trece sub formă de sulfat, o parte sub formă de complecşi solubili, iar o altă parte sub formă de carbonaţi în prezenţa CO_2. Cuprul se depune sub formă de sulfură.

Tabelul 3

Repartiția plumbului între faza solidă și soluție, în absența CO_2

Sistemul studiat	Pb*) %		
	sub formă de complecși	sub formă de sulfat	sub formă de carbonat
$PbS+CuSO_4+KCl$	1,1	14,2	0,60
$PbS+CuSO_4+CaCl_2$	1,7	13,2	0,66
$PbS+CuSO_4+MgCl_2$	1,3	13,5	0,62

*) Fiecare rezultat este media a 4 determinări

Tabelul 4

Repartiția plumbului între faza solidă și soluție, în prezența CO_2

Sistemul studiat	Pb %		
	sub formă de complecși	sub formă de sulfat	sub formă de carbonat
$PbS+CuSO_4+KCl$	0,21	0,80	13,6
$PbS+CuSO_4+CaCl_2$	0,23	0,70	13,7
$PbS+CuSO_4+MgC_2$	0,19	0,65	14,0

În tabelele 3 și 4 sînt reprezentate datele referitoare la repartiția plumbului între faza solidă și soluție pentru cîteva sisteme studiate, în absența și în prezența CO_2.

Se observă că în prezența CO_2 cantitatea de plumb legat sub formă de carbonat crește, iar cantitatea de plumb din soluție scade. În absența CO_2 cantitatea de plumb legat sub formă de sulfat cît și plumbul legat sub formă de complecși solubili se mărește. Deci sulfatul de plumb care se formează, ca urmare a oxidării PbS în prezența CO_2, trece în forma mai stabilă, de carbonat de plumb. În natură oxidarea galenei sub acțiunea soluției de $CuSO_4$, în prezența CO_2 și a electroliților, conduce la formarea cerusitului; în absența CO_2, oxidarea galenei conduce la depunerea plumbului sub formă de anglezit. În acest caz, la un contact mai îndelungat al anglezitului cu soluțiile de cloruri are loc o trecere însemnată a plumbului din anglezit în complecși solubili. Analiza fazei solide a sistemului $PbS + CuSO_4 + CaCl_2$, întreprinsă la anumite intervale de timp după terminarea reacției principale, în prezența și în absența CO_2, a arătat că în prezența CO_2 cantitatea de plumb ce se găsește sub formă de carbonat nu suferă

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

Tabelul 5

Variaţia cantităţii de plumb legat sub formă de sulfat şi carbonat, în timp, pentru sistemul $PbS+CuSO_4+CaCl_2$

Timp ore	Pb %	
	sub formă de sulfat (în absenţa CO_2)	sub formă de carbonat (în prezenţa CO_2)
72	14,0	12,0
96	11,8	11,7
120	9,9	11,4
168	8,7	11,1

modificări esenţiale, în timp ce cantitatea de $PbSO_4$ din soluţie se micşorează, plumbul trecînd sub formă de clorocomplecşi (tabelul 5). Deci transportul plumbului este favorizat de absenţa CO_2.

3. Concluzii

Reactivitatea PbS sintetice şi a galenei sub acţiunea soluţiei de $CuSO_4$ creşte în prezenţa clorurilor şi bicarbonaţilor metalelor alcaline şi alcalinoteroase, clorurile exercitînd o influenţă mai mare decît bicarbonaţii.

Dintre cationii studiaţi (Ca^{2+}, Mg^{2+}, K^{2+}, Na^{2+}) cea mai puternică influenţă asupra reactivităţii o exercită ionul Ca^{2+}, iar cea mai mică ionul Na^{+}.

Reactivitatea PbS sintetice şi a galenei creşte cu mărirea concentraţiei electrolitului pînă la o anumită limită ($1\,m$), pentru ca apoi creşterea să fie mai puţin accentuată.

Intervalul de pH în care s-a observat cea mai mare reactivitate a PbS şi galenei, este cuprins între 2 ... 4, deci mediul slab acid favorizează alterarea galenei sub acţiunea $CuSO_4$, în prezenţa electroliţilor.

Trecerea plumbului sub formă de clorocomplecşi este favorizată de mărirea concentraţiei electrolitului, natura lui, mediul acid şi de prezenţa în soluţie a cationilor cu rază ionică mare şi acţiune polarizantă intensă. Aceleaşi condiţii sînt necesare şi pentru accelerarea procesului de alterare a galenei şi depunerii cuprului sub formă de sulfură. În absenţa clorurilor şi bicarbonaţilor este defavorizat atît procesul de depunere a cuprului cît şi transportul plumbului sub formă de complecşi.

Transportul plumbului se efectuează cel mai bine sub formă de complecşi simpli sau micşti cu adenzi: HCO_3^-, $S_2O_3^{2-}$ şi Cl^-, în absenţa bioxidului de carbon.

Prezența plumbului în apele mineralizante slab acide, cu conținut de Cl^-, HCO_3^-, Mg^{2+}, Ca^{2+}, Cu^{2+}, K^+, Na^+, poate indica existența unor acumulări de sulfuri de cupru și plumb, determinate de procesele de alterare.

Academia Republicii Socialiste România,
Filiala Iași,
Secția de geochimie

BILIOGRAFIE

1. Nacu Al., Botez C., Nacu D., Anal. Șt. Univ. „Al. I. Cuza" Iași, s. I, Chimie, 1966, **XIII**, *1*, p. 33.
2. Hemley J. J., Econ. Geol., 1953, **48**, *2*, p. 113.
3. Хитаров Н. И., Москалюк А. А., Сов. геология, 1955, **43**, стр. 121.
4. Малышев Б. И., Ходаковский И. Л., Геохимя, 1964, **5**, стр. 431.
5. Файнберг С. Ю., *Анализ руд цветных металлов.* Металлургиздат, М., 1953.
6. Sandell E. B., *Colorimetric determination of traces of metals.* Intersc. Publ. Inc., N.-Y., 1950.
7. Коренман И. М., ЖОХ, 1946, **16**, *2*, стр. 58.
8. — ЖОХ, 1946, **16**, *2*, стр. 165.
9. Кузьмина И. П., Геология рудных месторождений, 1961, *5*, стр. 58.
10. Икорникова Н. Ю., Геология рудных месторождений, 1962, *5*, стр. 83.
11. Хитаров Н., Козинцева Т. Н., В сб. *Экспериментальные исследования в области глубинных процессов.* Изд. АН СССР, М., 1952.
12. Meits L., J. Amer. Chem. Soc., 1950, **72**, *1*, p. 180.
13. Василева А. М., Проухина В. И., ЖАХ, 1951, **6**, *4*, стр. 218.
14. Заборенко К. Б., Колосов И. В., Фомин В. В., ДАН СССР, 1958, **123**, *4*, стр. 688.
15. Grimberg A. A., *Introducere în chimia combinațiilor complexe.* Ed. tehn., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).
16. Смирнов С. С., *Эона окисления сульфидных месторождений.* Изд. АН СССР, М., 1951.
17. Фридман Я. Д., *Тезисы докладов 8-го совещания по химии комплексных соединений,* Киев, 1959.
18. Яцимирский К. Б., ЖФХ, 1951, **25**, *4*, стр. 475.

LE ROLE DE QUELQUES ELECTROLYTES DANS LE PROCESSUS DE L'ALTÉRATION DE LA GALÈNE SOUS L'INFLUENCE DU SULFATE DE CUIVRE

(Résumé)

On étudie l'influence de quelques électrolytes (NaCl, KCl, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $NaHCO_3$, $KHCO_3$) sur la réaction entre le sulfure de plomb et la solution de sulfate de cuivre. On discute le rôle des complexes qui peuvent se former dans la solution et celui du régime acido-basique lors de la déposition ou du transport du plomb dans les conditions naturelles.

Les expériences ont été faites avec le sulfure de plomb synthétique et la galène.

Explication des figures

Fig. 1. — Variation de la concentration des ions Cu^{2+} en phase solide, en fonction du temps, dans le système PbS — électrolyte.

Fig. 2. — Variation de la concentration des ions Cu^{2+} en phase solide, en fonction du temps, dans le système galène — électrolyte.

Fig. 3. — Variation de la concentration du Pb en solution, en fonction de la quantité de cuivre qui passe en phase solide.

Fig. 4. — Variation du pH dans les systèmes PbS — $CuSO_4$ — électrolyte.

Fig. 5. — Influence de la concentration de l'électrolyte sur la reactivité du PbS synthétique et de la galène en présence de $CuSO_4$.

Fig. 6. — Influence du pH initial sur la reactivité du PbS synthétique et de la galène en solution du $CuSO_4$ et en présence de KCl.

Fig. 7. — La quantité de plomb qui passe en solution, fonction de la nature et de la concentration de l'électrolyte utilisé.

Fig. 8. — La quantité de plomb qui passe en solution, fonction de la concentration du $KHCO_3$ et du $NaHCO_3$ dans le système PbS — $CuSO_4$.

Fig. 9. — Dépendance de la quantité de plomb qui passe en solution, du pH initial du milieu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 621.357.1 ; 669.833

ASUPRA CINETICII FORMĂRII ELECTROLITICE A AMALGAMULUI DE SODIU

DE

RADU VASILIU şi C. CALISTRU

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 26—30 iunie 1966

1. Introducere

Procesul de formare a amalgamului de sodiu poate fi considerat ca rezultatul mai multor procese parţiale şi anume: a) transferul de ioni din volumul soluţiei în zona de reacţie (limita fazelor); b) neutralizarea sarcinii electrice a ionului, exprimată prin reacţia $Na^+ + \varepsilon \rightarrow Na$; c) dizolvarea în mercur a sodiului descărcat; d) transferul de atomi de sodiu de la suprafaţa amalgamului în volumul său; e) ionizarea sodiului din amalgam, exprimată prin reacţia $Na \rightarrow Na^+ + \varepsilon$.

Cinetica procesului este influenţată de procesele parţiale în măsură mai mare sau mai mică, în funcţie de timpul de formare, condiţiile în care se formează amalgamul, concentraţia soluţiei, concentraţia amalgamului, densitatea de curent, temperatură, condiţiile hidrodinamice etc.

Considerînd formarea electrolitică a amalgamului în condiţii asemănătoare celor ale procesului industrial, cu excepţia condiţiilor hidrodinamice, într-un sistem simplificat se pot considera ca esenţiale numai următoarele procese parţiale: a) neutralizarea sarcinii electrice a ionului (descărcarea ionului); b) transferul de atomi de sodiu de la suprafaţă spre volumul amalgamului; c) ionizarea sodiului din amalgam.

Dacă concentraţia soluţiei de clorură de sodiu este foarte mare (soluţie saturată), influenţa exercitată de transferul de ioni în soluţie asupra vitezei totale a procesului poate fi considerată neglijabilă; de asemenea se poate neglija dizolvarea sodiului în mercur.

2. Partea teoretică

Viteza totală a procesului, rezultată din suprapunerea proceselor parțiale și exprimată prin densitatea de curent, se poate considera pentru regim staționar, ca fiind dată de relația;

$$i_d - i_i = i_t, \tag{1}$$

în care:

$i_d = K_d C^s_{Na^+}$ — curentul de descărcare a sodiului pe mercur, unde $K_d = nFK^0_d \exp\left(-\frac{\beta zF}{RT}e\right)$, $C^s_{Na^+}$ — concentrația ionului de sodiu la suprafața amalgamului;

$i_i = K_i C^s_{Na}$ — curentul de ionizare a sodiului din amalgam, unde $K_i = nFK^0_i \exp\left(\frac{\alpha zF}{RT}e\right)$, C^s_{Na} — concentrația sodiului la suprafața amalgamului;

$i_t = K_t (C^s_{Na} - C^v_{Na})$ — transferul de sodiu în amalgam, unde: C^s_{Na} — concentrația sodiului la suprafața amalgamului, C^v_{Na} — concentrația sodiului în volumul amalgamului.

Relația (1) devine:

$$K_d C^s_{Na^+} - K_i C^s_{Na} = K_t (C^s_{Na} - C^v_{Na}),$$

de unde rezultă

$$C^s_{Na} = \frac{K_d C^s_{Na^+} + K_t C^v_{Na}}{K_t + K_i}.$$

Substituind valoarea lui C^s_{Na} astfel obținută în relația (1) se obține:

$$i_t = \frac{K_t K^0_d \exp\left(-\frac{\beta F}{RT}e\right) C^s_{Na^+}}{K_t + K^0_i \exp\left(\frac{\alpha F}{RT}e\right)} - \frac{1}{1/\left[K^0_i \exp\left(\frac{\alpha F}{RT}e\right)\right] + 1/K_t} C^v_{Na};$$

pentru $C^s_{Na^+} = \text{const.}$, $e = \text{const.}$ rezultă:

$$i_t = \frac{K_t K^{0'}_d}{K_t + K^{0'}_i} - \frac{1}{1/K^{0'}_i + 1/K_t} C^v_{Na}, \tag{2}$$

unde:

$$K^{0'}_d = K^0_d \exp\left(-\frac{\beta F}{RT}e\right) C^s_{Na^+}, \quad K^{0'}_i = K^0_i \exp\left(\frac{\alpha F}{RT}e\right).$$

Relația (2) permite determinarea vitezei totale a procesului în funcție de concentrația amalgamului.

Dacă coeficienţi $K_d^{0'}$, $K_i^{0'}$, K_t ar fi riguros constanţi pe tot domeniul studiat, ecuaţia ar exprima dependenţa liniară a vitezei de formare a amalgamului în funcţie de concentraţia sa.

La începutul formării amalgamului, cînd mercurul este pur, curentul de ionizare este nul ($K_i^{0'} = 0$, $C_{Na}^{v} = 0$) ; viteza procesului este determinată numai de potenţialul electrodului:

$$i_d = K_d^{0'}, \text{ în care } K_d^{0'} = f(e).$$

Cînd amalgamul se îmbogăţeşte în sodiu $K_i^{0'} \neq 0$, dar predomină coeficientul K_t, procesul fiind influenţat de viteza cu care se deplasează atomii de la suprafaţa amalgamului spre volum. La concentraţii ridicate ale amalgamului coeficientul $K_i^{0'}$ capătă un caracter primordial în determinarea vitezei procesului, deoarece creşte tendinţa amalgamului de a se descompune.

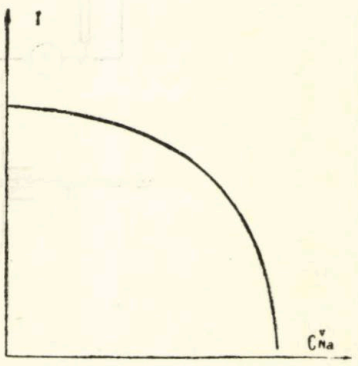


Fig. 1

Conform ecuaţiei (2) curbele taie ordonata în punctul $A = K_t K_d^{0'}/(K_t + K_i^{0'})$, determinat de potenţialul e. La începutul formării amalgamului $K_i^{0'} = 0, A = K_d^{0'}$; dar $K_d^{0'}$ depinde de e şi în consecinţă în acest caz valoarea A va fi determinată de acest potenţial.

Panta curbei $i = f(C_{Na}^{v})_{C_{Na}^{s} = \text{const.}, e = \text{const.}}$ variază odată cu concentraţia amalgamului în sodiu. Panta, dată de expresia $B = K_t K_i^{0'}/(K_t + K_i^{0'})$, depinde de concentraţia sodiului în amalgam. Astfel, la începutul formării amalgamului $K_i^{0'} = 0$, $B = 0$, curba este paralelă la abscisă. Cînd $K_i^{0'} \to \infty$ (amalgam foarte concentrat), $B \to \infty$ deci curbele $i = f(C_{Na}^{v})$ trebuie să fie de forma din fig. 1.

3. Partea experimentală

Studiul cineticii formării amalgamului de sodiu s-a efectuat pe baza curbelor de polarizare, la care s-a măsurat curentul total la diferite potenţiale ale catodului, pentru diferite concentraţii în sodiu ale amalgamului şi o aceeaşi concentraţie a soluţiei de NaCl (soluţie saturată).

Măsurările s-au efectuat cu ajutorul unui dispozitiv de structura indicată în fig. 2, format din vasul V în care se găseşte soluţia de NaCl saturată, anodul de platină Pt cu o suprafaţă de circa 100 ori mai mare decît cea a catodului de mercur, electrodul cu amalgam Am, electrodul de calomel EC ca electrod de referinţă pentru măsurarea potenţialului catodic şi termometrul T.

Electrodul de amalgam este polarizat negativ în raport cu electrodul de platină cu ajutorul unui divizor de tensiune D.

Potenţialul catodului este măsurat în raport cu electrodul de calomel saturat, cu ajutorul unui voltmetru electronic *VE* cu o rezistenţă de intrare de 10^{11} Ω. Pentru a se asigura aceleaşi condiţii de măsurare a polarizării la diferite concentraţii ale amalgamului, amalgamul *Am* este introdus prin tubul *B* cu ajutorul unei pompe cu piston *S* acţionată de şurubul micrometric *M*.

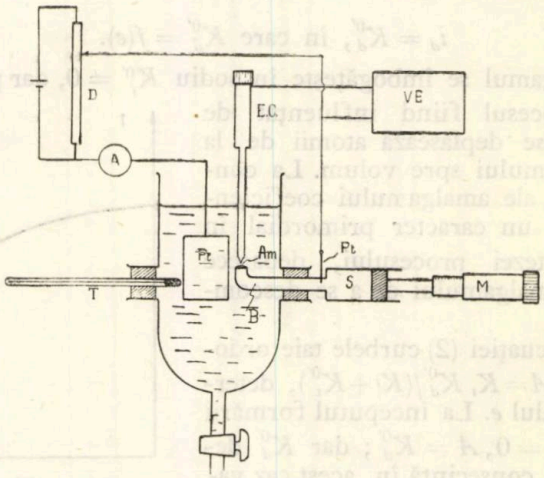


Fig. 2

Acest dispozitiv permite realizarea unor suprafeţe ale amalgamului egale pentru toate măsurările şi reîmprospătarea suprafeţei amalgamului după fiecare măsură de polarizare. Prin pompă se introduc în vasul de măsură amalgame de concentraţii cunoscute, preparate prin topirea sodiului, peste care se toarnă mercurul, în absenţa aerului.

Suprafaţa amalgamului a fost menţinută constantă (10 mm²) pentru toate determinările şi după fiecare măsurare a fost reîmprospătată prin evacuarea cîtorva picături de amalgam cu ajutorul pompei cu piston, prin acţionarea şurubului micrometric.

Timpul necesar măsurărilor a fost scurt, limitat la cel necesar citirii indicaţiei instrumentelor de măsură, pentru a evita variaţii mari ale concentraţiei amalgamului, după care soluţia şi amalgamul au fost reîmprospătate în vederea unei noi măsurări.

Sifonul electrodului de calomel este plasat în apropierea amalgamului pentru evitarea măsurării căderii de tensiune prin soluţie.

Măsurările s-au efectuat pînă la densităţi de curent de 15 000 A/m² pentru amalgame cu concentraţiile: 0,01; 0,1; 0,25; 0,5; 1 *M*. Literatura de specialitate furnizează puţine informaţii relative la densităţi de curent de acest ordin de mărime.

4. Rezultate şi discuţii

Curbele de polarizare sînt reprezentate în fig. 3 pentru concentraţiile amintite şi completate pe baza unor curbe de interpolare, pentru concentraţiile 0,4; 0,6; 0,8 *M*.

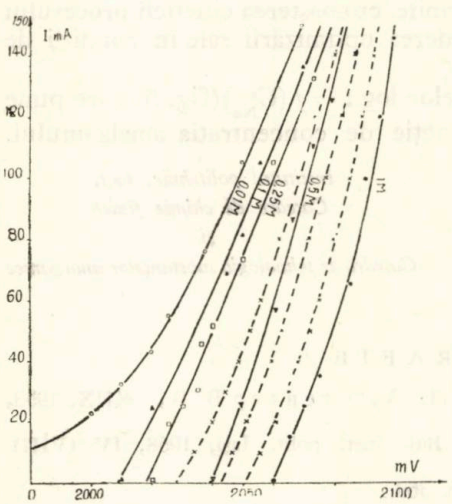


Fig. 3

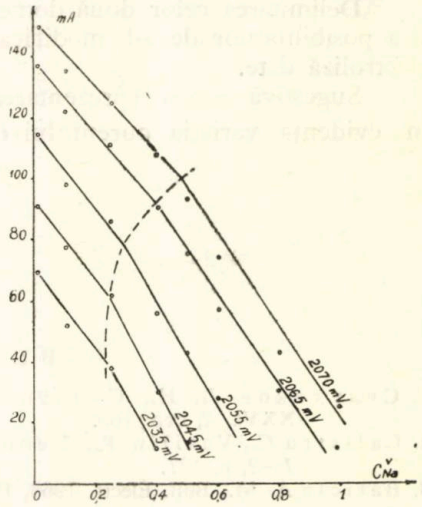


Fig. 4

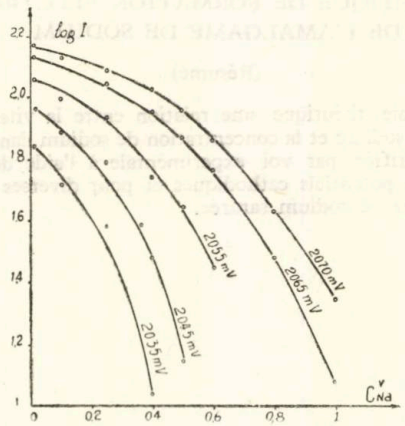


Fig. 5

Făcînd secţiuni la potenţiale constante prin curbele de polarizare şi transpunînd valorile într-o diagramă $i = f(C^v_{Na})$ rezultă curbele din fig. 4, corespunzătoare formei determinate pe baza considerentelor teoretice. Aceste

curbe ar putea fi aproximate ca fiind compuse din două segmente de dreaptă prin intersecţia cărora se pot delimita două domenii în care are loc procesul şi anume: un domeniu în care are un rol preponderent constanta K_t (transferul sodiului în amalgam) şi un al doilea domeniu în care este determinantă constanta K_i (ionizarea amalgamului).

Delimitarea celor două domenii permite cunoaşterea cineticii procesului şi a posibilităţilor de a-l modifica în vederea optimizării sale în condiţii de electroliză date.

Sugestivă este şi reprezentarea curbelor $\log i = f(C^v_{Na})$ (fig. 5) care pune în evidenţă variaţia curentului i în funcţie de concentraţia amalgamului.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie fizică
şi
Catedra de tehnologia substanţelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Селудяков Л. Н., Сальтовская Л. А., Стендер В. В., ЖПХ, 1953, **XXVI**, *2*, стр. 160.
2. Calistru C., Vasiliu R., Leonte C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, p. 187.
3. Baticle A. M., Bull. Électr. 1963, **IV**, *43*, p. 369.

SUR LA CINÉTIQUE DE FORMATION ÉLECTROLYTIQUE DE L'AMALGAME DE SODIUM

(Résumé)

On determine par voie théorique une relation entre la vitesse totale du processus de formation de l'amalgame de sodium et la concentration de sodium dans le volume de l'amalgame.

La relation a été vérifiée par voi experimentale à l'aide des courbes de polarisation $i = f(e)$, pour des différents potentiels cathodiques et pour diverses concentrations de l'amalgame, en solution de chlorure de sodium saturée.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C.D. 542.61

PROCESSUS DE TRANSFERT ENTRE LIQUIDES NONMISCIBLES

Note II

EXTRACTION PELLICULAIRE

PAR

THEODOR SĂVEANU, RADU TUDOSE et GH. CRISTIAN

1. Introduction

L'extraction pelliculaire est utilisée dans nombre d'appareils d'extraction liquide-liquide [1]...[3]. Compte tenu des forces comparables des deux liquides — force active et force résistante — l'écoulement pelliculaire d'un liquide en présence d'un autre liquide, avec lequel celui-ci est partiellement ou totalement nonmiscible, diffère essentiellement de l'écoulement d'un liquide en présence d'un gaz [4]. Par conséquent le transfert de matière présente des particularités spécifiques.

Ratcliff et Reid [5], [6] ont travaillé avec deux liquides nonmiscibles, dont un s'écoulait comme pellicule sur une ligne de sphères. Ils ont étudié la diffusion des liquides et l'effet du mélange au passage du liquide d'une sphère à l'autre.

Le but de cette Note est d'étudier le transfert de matière lors de l'écoulement pelliculaire avec deux liquides nonmiscibles. On a étudié l'influence des deux liquides, la longueur du support sur lequel s'écoule la pellicule et la variation de l'intensité du transfert de matière le long de la pellicule.

2. Appareillage utilisé et méthode de travail

L'installation utilisée est constituée par une colonne d'extraction en verre *1* de 47,4 mm diamètre et 850 mm longeur (fig. 1). Dans l'axe de la colonne on a fixé une baguette de bois *2* de 11 mm diamètre et 620 mm de longueur. La colonne *1* a été munie par cinq tubulures latérales permettant à prélever des épreuves.

C'est le système benzène-acide acétique-eau qui a été soumis par nous aux expériences.

L'eau du vase *7* passe par le vase *5* de niveau constant et par le rotamètre *3* arrive au sommet de la colonne d'extraction, d'où elle s'écoule sous forme de film sur la baguette de bois.

Du vase *8* le benzène, avec une concentration de 2% en acide acétique, passe par le vase de niveau constant *6* et par le rotamètre *4* à la base de la colonne d'extraction. C'est le benzène qui constitue la phase continue.

Avant d'admètre la solution d'acide acétique en benzène, on a bien humecté avec de l'eau toute la surface de la baguette. Après au moins 15 minutes de la mise en fonction de l'installation on a commencé à prélever les épreuves.

Les épreuves ont été prélevées de chaque liquide à l'entrée, à la sortie et toutefois de l'eau du film par les cinq tubulurès.

Les épreuves du film ont été prélevées à l'aide des capillares fines de verre pour éviter les turbulences locales. Le prélevement des épreuves a été fait très lentement sous forme de gouttes.

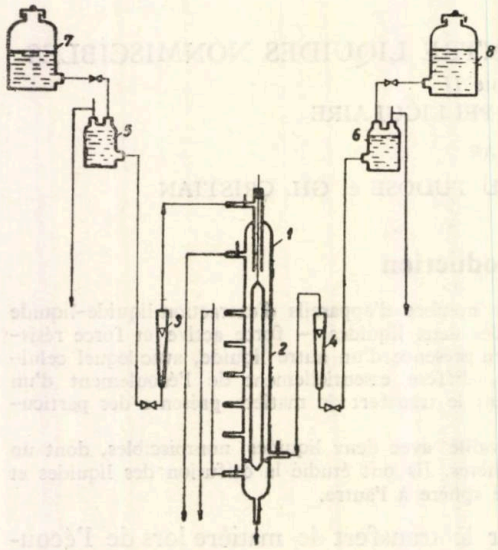


Fig. 1. — Schéma de l'installation.

La teneur en acide acétique a été déterminée par titrage avec de l'acide sulfurique $n/10$ ou $n/50$, en présence de phenolphtaléine.

Le débit de l'eau a varié de 6000 à 24 000 kg/m^2.h et le débit du benzène de 2400 à 8000 kg/m^2.h.

Les résultats ont été exprimés sous forme d'hauteur équivalente à un plateau théorique (HEPT). Dans ce but on a déterminé par voie graphique le nombre des plateaux théoriques.

Dans le domaine des concentrations utilisées dans cette Note le benzène peut être considéré totalement nonmiscible avec l'eau, lorsque la ligne d'opération devient une droite.

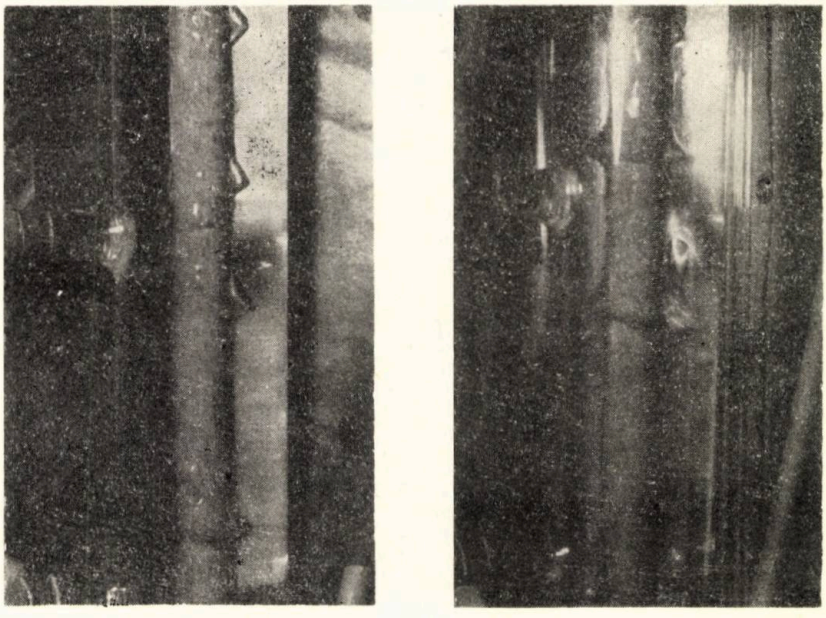
2. Résultats obtenus

L'intensité du transfert de matière dans l'extraction pelliculaire est fonction du débit des deux phases. Pour des valeurs petites du débit du liquide pelliculaire, l'HEPT diminue fortement au fur et à mesure que le débit augmente, puis tend à rester indépendante de celui-ci (fig. 2). En fonction du débit du benzène l'HEPT augmente, donc l'intensité du transfert de matière diminue.

On a mentionné ci-dessus qu'on a prélevé des épreuves de 100 à 100 mm distance dans la direction de l'écoulement du film. À l'aide des concentrations on a déterminé par voie graphique l'HEPT d'extraction. L'hauteur équivalente a été calculée pour six longueurs différentes contenues entre le sommet de la baguette et le point de prélevement.

De la fig. 3 il en résulte que l'HEPT dépend essentiellement de la longueur dans la direction de l'écoulement.

Pour nos conditions, à une augmentation de la longueur de 6 fois, l'HEPT d'extraction augmente aproximativement de 2,3 fois.



a *b*

Fig. 5. — Ecoulement pelliculaire à ondes dans le voisinage d'un phase liquide.
a — ondes simples ; *b* — ondes annulaires.

En fonction des concentrations initiales, finales et intermédiaires, on a déterminé par voie graphique les HEPT locales, c'est-à-dire pour zones d'une longueur de 100 mm chacune.

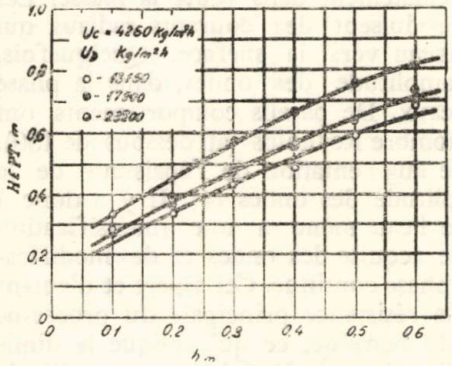


Fig. 2. — Dépendance de l'hauteur équivalente d'un plateau théorique avec le débit de l'eau et du benzène.

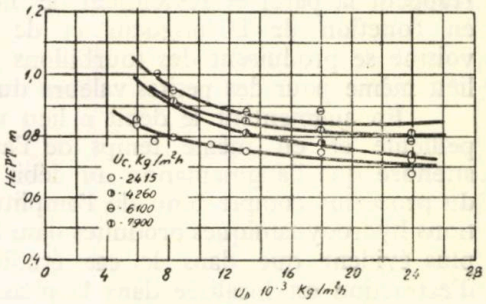


Fig. 3. — Dépendance de l'hauteur équivalente d'un plateau théorique avec la distance dans la direction de l'écoulement.

Dans la fig. 4 on a représenté la variation de l'HEPT dans les six zones. Le numérotage des zones a été effectué de haut en bas.

L'HEPT augmente dans la direction de l'écoulement du film. Cette augmentation présente des „discontinuités" caractérisées par un maximum et un minimum. Avec l'augmentation du débit le maximum et le minimum se déplacent par rapport au niveau de la formation du film.

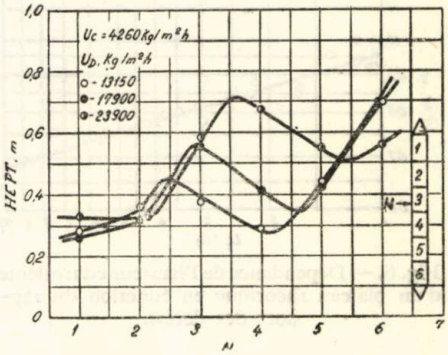


Fig. 4. — Variation locale de l'hauteur équivalente d'un plateau théorique.

3. Interprétation des résultats

Les ondes de la surface libre d'un film exercent une action de mélange pour une certaine profondeur. Compte tenu de ce fait on peut expliquer l'augmentation de l'intensité des processus de transfert de matière et de chaleur dans l'écoulement pelliculaire à ondes.

Les ondes de la surface actionnent aussi sur la phase voisine, en produisant des modifications hydrodynamiques. Dans le cas de l'écoulement pelliculaire dans l'atmosphère d'un liquide, à la surface du film se produisent des ondes de grande amplitude, qui peut attendre la valeur de 8...10 mm, lorsque la force active et la force résistante sont comparables quant à leur ordre de grandeur (fig. 5). Les ondes créent une turbulence dans la phase

voisine et les courants formés actionnent sur le film. À l'aide d'une technique utilisant un colorant on a mis en évidence la turbulence créée par l'interaction des phases. Un filament de colorant injecté dans la phase continue (dans le benzène) se dissipe immédiatement dans toute la masse. Les ondes de la surface de la pellicule produisent des courants radiaux qui frappent la paroi et reviennent de nouveau vers la surface. Quelquefois, en fonction de la longueur et de l'amplitude des ondes, dans la phase voisine se produisent des tourbillons locaux. De pareils comportements ont lieu même pour des petites valeurs du nombre Reynolds (au dessous de 150).

En augmentant le débit a lieu une augmentation de l'épaisseur de la pellicule et en même temps de l'amplitude des ondes [4]. Il y a donc à attendre que l'augmentation du débit de l'eau mène à une intensification du processus compte tenu de l'amplitude acquise des ondes et des modifications hydrodynamiques produites dans la phase continue. Cet aspect et d'autant plus évident que dans le cas étudié la résistance principale du processus d'extraction est localisée dans la phase du benzène, ce qu'explique la diminution de l'HEPT lorsque le débit du liquide qui s'écoule comme pellicule augmente (v. fig. 2).

L'influence du débit de la phase constituant la pellicule peut être mise en évidence d'une façon plus nette si l'on représente la dépendance de l'HEPT en fonction du rapport des deux débits (fig. 6). À une augmentation des débits de 1 à 10, la HEPT diminue de 0,91 à 0,67 m. En coordonnées logarithmiques la dépendance est linéaire et donnée par l'équation:

$$\text{HEPT} = 0{,}965\ (U_C/U_D)^{0{,}153}.$$

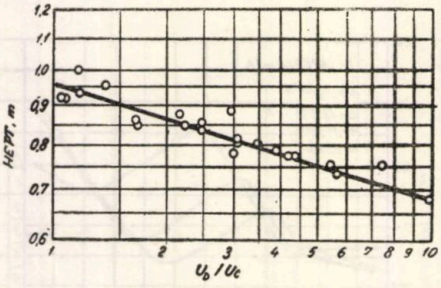


Fig. 6. — Dépendance de l'hauteur équivalente d'un plateau théorique en fonction du rapport des débits.

L'HEPT locale (fig. 4) varie le long de la direction de l'écoulement. Dans les premières zones du niveau de la formation de la pellicule, l'HEPT augmente jusqu'à un aximum puis elle diminue et augmente de nouveau. On n'a pas pu donner une explication à ce comportement particulier. On pourrait considérer que ces résultats sont dûs au fait que les épreuves de la pellicule sont prélevées à des distances différentes de la paroi. Dans la pellicule il y a vraiment un gradient transversal de concentration, mais l'on peut considérer qu'il n'est pas trop grand, compte tenu que l'épaisseur minima de la pellicule est de 0,8 mm, que l'amplitude des ondes est de 8...10 mm et que toutes les épreuves ont été prélevées au voisinage de la paroi à une distance d'approximativement 0,5 mm.

Un problème très difficile, inhérent pour les expériences de transfert de matière entre deux liquides nonmiscibles, c'est la réproductibilité des dates. On a signalé dans la littérature le fait que même de très petites

quantités d'impuretées ou de substances tensioactives [7], [8] ont pour effet une diminution considérable du transfert de matière. Le mécanisme de cettes interactions peut être expliqué par deux voies distinctes.

Le comportement hydrodynamique d'un système à deux phases liquides nonmiscibles est modifié par la présence des impuretés ou par l'addition des agents actives de surface, ce qu'on peut considérer comme une interaction indirecte. Un des plus simples et des plus évidents exemples étudiés ce sont les anneaux d'Hadamard d'une goutte. Il est connu le fait que dans une goutte qui se déplace dans un liquide, ils paraissent des courants annulairs dûs aux forces tangentielles qui actionnent à l'interface. La présence des impuretés à la surface reduit considérablement la circulation interne et diminue le transfert de matière.

D'autre part les impuretés peuvent actionner sur le transfert de matière par un mécanisme de blocage moléculaire. Les molécules du composant qui se transfère d'une phase à l'autre recontrent à l'interface une nouvelle barrière constituée par une couche d'impuretés. Cette résistence interfaciale peut être considérée comme une interaction directe.

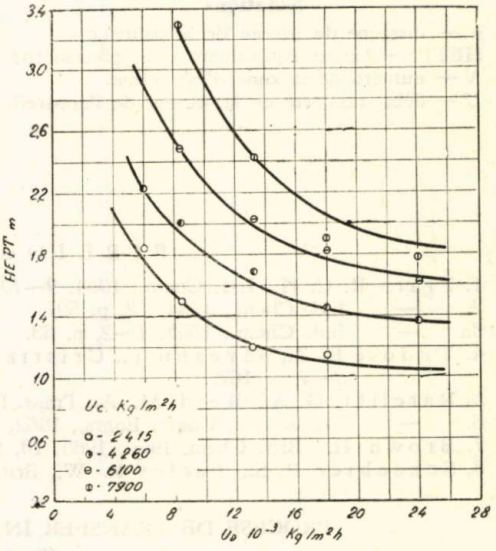


Fig. 7. — Dépendence de l'hauteur equivalente d'un plateau théorique en fonction du débit lorsqu'on réutilise le benzène nondistillé.

Dans nos recherches nous avons réussi à obtenir des résultats reproductibles seulement en utilisant des liquides très purs, obtenus par une distillation soignée. Si l'on utilise de nouveau le benzène résulté d'une expérience antérieure, sans l'ayant redistillé, l'intensité du transfert de matière diminue à peu prés de 2,5 fois (fig. 7).

La diminution est dûe aux impuretés introduites par le contact entre les phases et les éléments constructifs de l'appareil.

Après la troisième reprise du benzène, le contenu en impuretés augmente dans une telle mesure que les ondes de la surface libre de la pellicule disparaissent et le transfert de matière est encore diminué.

4. Conclusions

Les recherches expérimentales quant à l'extraction pellicu1aire à l'aide du système benzène-acide acetique-eau conduisent aux conclusions suivantes :

1. Les ondes de la surface libre de la pellicule produisent des modification hydrodynamiques dans la phase voisine, accompagnées par des augmenta ions importantes du transfert de matière.

2. L'intensité du transfert de matière augmente au fur et à mesure que le rapport des débits augmente en accusant une discontinuité dans la direction de l'écoulement de la pellicule.

3. La réproductibilité des résultats peut être assurée seulement en utilisant des liquides très purs.

Notations

h — distance du niveau de la pellicule,
HETP — hateur équivalente à un plateau théorique,
N — numéro de la zone d'extraction,
U — débit rapporté de la section de l'appareil.

Indices

C — phase continue (benzène),
D — phase disperse (eau).

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Technologie Chimique,
Laboratoire d'Opérations et
d'Outillages de l'Industrie Chimique

BIBLIOGRAPHIE

1. Pratt R. C. H., Ind. Chem., 1954, *9—10*, p. 1475.
2. — Ind. Chem., 1954, *12*, p. 597.
3. — Ind. Chem., 1955, *1—2*, p. 63.
4. Tudose R. Z., Săveanu T., Cristian Gh., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, p. 167.
5. Ratcliff G. A., Reid M. A., Trans. Inst. Chem. Engres., 1961, **39**, *6*, p. 423.
6. — Trans. Inst. Chem. Engrs., 1962, **40**, *2*, p. 69.
7. Brown H., Brit. Chem. Eng., 1965, **10**, *9*, p. 622.
8. Schechter R. S., Farley R. W., Brit. Chem. Eng., 1963, **8**, *1*, p. 37.

PROCESE DE TRANSFER ÎNTRE LICHIDE NEMISCIBLE

(Rezumat)

Au fost întreprinse cercetări experimentale privind extracţia peliculară cu sistemul benzen-acid acetic-apă stabilindu-se următoarele concluzii:

1. Undele suprafeţei libere a peliculei produc modificări hidrodinamice în faza vecină, însoţite de creşteri importante ale transferului de masă.

2. Intensitatea procesului de transfer creşte o dată cu raportul debitelor, prezentînd o discontinuitate în direcţia scurgerii peliculei.

3. Reproductibilitatea rezultatelor poate fi asigurată utilizînd numai lichide cu grad mare de puritate.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema instalaţiei.
Fig. 2. — Dependenţa înălţimii echivalente a unui taler teoretic de debitul de apă şi benzen.
Fig. 3. — Dependenţa înălţimii echivalente a unui taler teoretic de distanţa în sensul curgerii.
Fig. 4. — Variaţia locală a înălţimii echivalente a unui taler teoretic.
Fig. 5. — Scurgerea peliculară cu unde în vecinătatea unei faze lichide; *a* — unde simple, *b* — unde inelare.
Fig. 6. — Dependenţa înălţimii echivalente a unui taler teoretic în funcţie de raportul debitelor.
Fig. 7. — Dependenţa înălţimii echivalente a unui taler teoretic în funcţie de debit, la reutilizarea benzenului nedistilat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 678.76

POLIMERI DEL CLORURO DI VINILE INNESTATI SU ELASTOMERI OLEFINICI, DOTATI DI ELEVATA RESISTENZA ALL'URTO

Nota I
PARTE SPERIMENTALE

DI

G. NATTA, F. SEVERINI, M. PEGORARO, E. BEATI,
G. AURELLO e S. TOFFANO

I. Introduzione

1. In una serie dei nostri lavori del tutto recenti consacrati al meccanismo di polimerizzazione stereospecifica delle α-olefine a polimeri isostatici in presenza di sistemi catalitici bimetallici, alla sintesi di alcune poliacrilammidi *N, N*-disostituite di natura basica e di diversa struttura steria, all'esame termodinamico della transizione polimorfa del polibutadiene 1,4 *trans*, si è studiata la cinetica di propagazione di catena nella polimerizzazione del butene-1 a polimero isostatico, si è effettuato uno studio comparativo della stereospecificità di alcuni sistemi catalitici eterogenei Ziegler-Natta nella polimerizzazione del propilene, si son preparati polimeri di acrilamidi *N, N*-disostituite, nelle quali il primo sostituente è il gruppo metilico, etilico o isopropilico ed il secondo sostituente il gruppo (4-morfolin) etilico e si è esaminata, per una fibra ideale, la possibilità di trasformare energia termica in lavoro meccanico in modo ciclico [1]...[4], mentre, nel quadro della chimica biologica macromolecolare, si è studiata, nell'ambito della prevenzione della silicosi, l'azione citoprotettiva di alcune classi di polimeri sintetici [5].

In ciò che segue, riproducendo da vicino l'ordine di idee del nostro lavoro pubblicato nella rivista *La Chimica e l'Industria* [6], si descrive un metodo di preparazione di cloruro di polivinile innestato su un copolimero elastomerico etilene-propilene, mediante polimerizzazione in sospensione, ed il frazionamento delle miscele polimeriche ottenute. Si studiano poscià le proprietà meccaniche dei grezzi di polimerizzazione e delle loro miscele con CPV commerciale, confrontando i risultati con quelli ottenuti impiegando miscele meccaniche elastomero-CPV. Nella nostra Nota susseguente si discuteranno i risultati sperimentali della presente.

2. Alcune resine termoplastiche di uso comune hanno delle limitazioni nelle loro applicazioni, a causa delle loro inadeguate proprietà meccaniche, in particolare della loro fragilità. Il cloruro di polivinile (CPV), che è una

delle resine più usate in pratica, ha una temperatura di transizione vetrosa di circa 80°C e si trova perciò ordinariamente allo stato vetroso; presenta quindi, alla temperatura ambiente, l'inconveniente di essere caratterizzato da non troppo alti valori della resilienza e di perdere ogni capacità di resistenza all'urto, a temperature inferiori, come appare dalla letteratura sull'argomento [7], [8].

Ciò porta a gravi limitazioni nell'impiego del CPV rigido, specie sotto forma di tubi da impiegare nel campo dell'edilizia, dell'irrigazione, del trasporto di gas o di acqua, a temperature inferiori a 20°...25°C.

Le tecniche impiegate per la preparazione di manufatti di CPV dotati di alta resistenza all'urto alla temperatura ambiente e alle basse temperature, si fondano sulla modificazione della temperatura di transizione vetrosa del polimero che viene convenientemente abbassata mediante plastificazione esterna o interna, oppure sulla addizione al CPV di elastomeri così da ottenere mescole bifasiche, caratterizzate dalle temperature di transizione vetrosa proprie dei due omopolimeri.

E' interessante osservare che tutti i polimeri lineari amorfi aventi una praticamente identica distribuzione dei pesi molecolari sono quasi equivalenti dal punto di vista delle proprietà meccaniche purchè esse siano confrontate a temperature corrispondenti [9], cioè con riferimento a una variabile ridotta, spesso assunta uguale al rapporto tra la temperatura considerata e quella di transizione vetrosa T_g del polimero.

In particolare si osserva che nella grande maggioranza dei casi il modulo elastico diminuisce nell'intervallo di una trentina di gradi centigradi sopra T_g da circa $10^{10,5}$ dine/cm^2 (stato vetroso) sino a 10^7...$10^{6,5}$ dine/cm^2 circa (stato gommoso elastico).

Per molti usi e in particolare per ottenere buoni materiali antiurto è desiderabile che i moduli elastici siano relativamente elevati e che il materiale sia abbastanza flessibile: in generale ciò si verifica per temperature comprese tra T_g e $T_g + 20$°C; per temperature sopra $T_g + 20$°C il modulo è troppo basso; per temperature sotto T_g il polimero diventa fragile [10]. La temperatura di transizione vetrosa del CPV può essere convenientemente abbassata anche al di sotto della temperatura ambiente mediante l'impiego della plastificazione esterna, ma la relativa ristrettezza del campo di temperatura entro cui il polimero plastificato può mantenere buone caratteristiche antiurto (che peraltro non si mantiene così critica come nel caso di un omopolimero e di un copolimero) e numerosi altri inconvenienti, quali per es. la possibile migrazione per diffusione del plastificante, seguita dalla sua evaporazione, fanno sì che questa tecnica sia meno efficace di quella che impiega mescole di CPV e di elastomeri amorfi.

La plastificazione interna (copolimerizzazione) pur consentendo di abbassare T_g, non modifica in genere l'ampiezza dell'intervallo di temperatura entro cui il copolimero mantiene buone caratteristiche antiurto. Per es. è stata usata la copolimerizzazione del cloruro di vinile con esteri vinilici, esteri acrilici, esteri dell'acido maleico ecc.; essa permette di ottenere

copolimeri plastificati internamente, dotati di buona resistenza all'urto, ma in genere caratterizzati da scarsa stabilità termica e da bassa resistenza rispetto ai solventi e ai reattivi chimici [11].

La tecnologia più recente prepara invece miscele del CPV con elastomeri; in tal caso si osservano elevati moduli elastici e buone flessibilità delle miscele; esse presentano due temperature di transizione vetrosa, purchè i due omopolimeri siano incompatibili. Una eccessiva incompatibilità non è però desiderabile poichè favorisce lo smistamento delle fasi costituite dai due omopolimeri che invece debbono essere pseudoomogenei aventi le stesse caratteristiche in ogni zona del materiale.

La scarsa compatibilità del CPV con sostanze apolari non consente l'impiego del caucciù o di altri elastomeri idrocarburici come sostanze utili per migliorare la resilienza del prodotto, qualora essi siano usati in miscela meccanica, mentre buoni risultati sono stati ottenuti mescolando al polimero convenzionale sostanze elastomeriche contenenti gruppi polari come ad esempio gomme butadiene-acrilonitrile [12], policloroprene, polietileni clorurati o solfoclorurati [7] o polimeri acrilici modificati [13].

Noi abbiamo pensato di utilizzare elastopolimeri idrocarburici come il copolimero etilene-propilene, nonostante la loro notevole incompatibilità con il CPV, ricorrendo però a reazioni di innesto. Tale sistema consente di legare tra di loro per mezzo di legami covalenti macromolecole incompatibili, migliorandone la disperdibilità interfasica. Il polimero innestato risulta facilmente e omogeneamente disperdibile nel CPV omopolimero formatosi durante la medesima reazione di innesto o addizionato successivamente al grezzo di innesto. I sistemi così ottenuti presentano ottime caratteristiche meccaniche e notevole stabilità di struttura nel tempo.

Come si è già accennato cui sopra, in questo lavoro ed in quello successivo esponiamo, seguendo [6], i risultati ottenuti studiando miscele di reazione preparate polimerizzando il cloruro di vinile in presenza di piccole quantità (5...15 % rispetto al monomero iniziale) di un copolimero etilene-propilene avente proprietà elastomeriche. I risultati ottenuti sono confrontati con quelli delle miscele meccaniche corrispondenti preparate per precipitazione di soluzioni contenenti il copolimero e il CPV.

II. Parte sperimentale

3. *Materiali.* Copolimero etilene-propilene, prodotto „Monteshell" avente viscosità intrinseca (toluene, 30°C) di $1{,}65 \times 100$ cm³/g e % C_3 67,5 (molare).

CPV commerciale: *Vipla KHO,* prodotto „Montecatini", avente una viscosità intrinseca di $0{,}69 \times 10^2$ cm³/g (cicloesanone, 30°C).

Cloruro di vinile „Montecatini".

Alcool polivinilico *Elvanol 50-42* della „Du Pont".

Acqua deionizzata e bollita.

n-Eptano „Phillips".

Cicloesanone RP „Carlo Erba".
Tetraidrofurano „Du Pont".
Perossido di benzoile purificato per cristallizzazione del prodotto commerciale „Carlo Erba" da una soluzione cloroformica.

4. *Reazione di innesto.* La reazione è stata eseguita ponendo in un'autoclave di acciaio inossidabile munito di agitatore a palette i reagenti nelle quantità indicate nella tabella 1. Si è posto inizialmente nell'autoclave un terzo del volume totale di acqua impiegato contenente disciolto l'alcool polivinilico e quindi il copolimero ridotto in granuli di 15...20 mm^3. Si è eliminata l'aria presente nell'autoclave lavando ripetutamente con azoto puro e quindi si è introdotta la quantità voluta di cloruro di vinile. Si è lasciata la massa a riposo per quattro ore a temperatura ambiente; quindi tenendo la massa in agitazione si è portata la temperatura a 70°C.

In questo trattamento preliminare l'elastomero viene rigonfiato e parzialmente disciolto dal cloruro di vinile. Dopo due ore si è introdotta con una pompa nell'autoclave una sospensione dell'iniziatore (perossido di benzoile) in un volume di acqua distillata e bollita rappresentante i restanti due terzi dell'acqua totale impiegata. Si è riportata la temperatura della massa a 70°C e sempre tenendo la massa in agitazione si è lasciata procedere la reazione di polimerizzazione.

Dopo 16 ore il riscaldamento è stato interrotto e quando la temperatura si è abbassata a 25°...30°C l'autoclave è stata scaricata.

Il polimero sotto forma di perle (aventi dimensioni comprese tra 20...70 μ) è stato separato per centrifugazione dal liquido sospendente, lavato con acqua abbondante per eliminare le piccole quantità di alcoole polivinilico trattenute dalla massa e successivamente essiccato. Il prodotto ottenuto è costituito da una miscela di omopolimero del cloruro di vinile, da copolimero ad innesto elastomero CPV e da copolimero etilene-propilene che non ha partecipato alla reazione di innesto.

5. *Frazionamento.* La parte del grezzo di reazione solubile in cicloesanone è costituita da CPV quasi esente da elastomero, mentre il residuo insolubile in cicloesanone è costituito dall'elastomero innestato e da quella parte di copolimero che non ha partecipato alla reazione di innesto.

Il contenuto in cloruro di vinile innestato presente nel residuo insolubile in cicloesanone non supera il 20% ma è già sufficiente per garantire la dispersione della gomma nella matrice di CPV. Il materiale estraibile dal grezzo di polimerizzazione con *n*-eptano è costituito dal copolimero che non ha partecipato alla reazione di innesto; è praticamente esente da cloruro di vinile e rappresenta in genere solo il 10...40% del materiale inizialmente posto a reagire (tabella 1).

La separazione del copolimero $C_2 - C_3$ non innestato dal grezzo di reazione è stata effettuata estraendo 1 g del grezzo di reazione accuratamente seccato, con 100 g di *n*-eptano a 30°C in fiale disposte su un tamburo rotante immerso in un bagno di olio di vasellina termostatato. La

Tabella 1

Polimerizzazione a innesto del cloruro di vinile in sospensione acquosa a 70°C in presenza di perossido di benzoile come iniziatore

Composizione miscela di reazione				Grezzo di polimerizzazione								
iniziatore g	copolimero C_2—C_3 g	cloruro di vinile g	alcool polivinilico g	acqua g	polimero grezzo ottenutto g	% cloruro di vinile nel grezzo	% estratto eptanico	% cloruro di vinile nell'estr. eptanico	% estratto cicloesanonico	% cloruro di vinile nell'estr. cicloesanonico	% cloruro di vinile nel residuo cicloesanonico	η in cicloesanone a 30°C dell'estratto cicloesanonico $\frac{cm^3}{g} 10^2$
1,67	33	340	4,4	900	330	90	4	1,5	88,3	98,0	18,2	0,67
0,75	15	320	3,0	810	215	93	1	n.d.	93,0	100	20,4	0,64

Tabella 2

Proprietà meccaniche di grezzi di innesto e di miscele del grezzo b *con* CPV

Composizione % C_2—C_3	Carico di snervamento (*c*) a trazione kg/cm² ASTM D 638-61 T	Carico di rottura a trazione kg/cm² ASTM D 638-61 T	Carico di rottura a flessione kg/cm² ASTM D 790-63	Modulo elastico a flessione ASTM D 790-63 kg/cm²	Resilienza Izod ASTM D 256-56 kg cm/cm intaglio	Durezza ASTM D 785-62 (*d*)	Temp. di rammollimento Vicat (*e*) ASTM D 1525-58 T °C
16 (*a*)	225	225	375	15 000	35,7	45	70,5
10 (*b*)	400	310	590	21 500	36	79	78,5
8	490	390	735	25 500	11	81	81,2
5	460	380	660	25 500	9	91	79,0
2,5	540	402	780	24 700	5,2	96	80,5
0	560	420	720	29 500	4,4	100	81

(*a*, *b*) Grezzi di polimerizzazione. (*c*) Velocità di prova 9 mm per minuto primo. (*d*) Durezza Rockwell misurata in unità della scala (*L*). (*e*) Eseguito con un carico di 5 kg in aria.

Tabella 3

Proprietà meccaniche di miscele meccaniche di CPV e di C_2—C_3

Composizione % C_2—C_3	Carico di snervamento (*a*) a trazione kg/cm² ASTM D 638-61 T	Carico di rottura a trazione kg/cm² ASTM D 638-61 T (*a*)	Carico di rottura a flessione kg/cm² ASTM D 790-63	Modulo elastico a flessione ASTM D 790-63 kg/cm²	Resilienza Izod ASTM D 256-56 kg cm/cm intaglio	Durezza ASTM D 785-62 (*b*)	Temp. di rammolimento Vicat (*c*) ASTM D 1525-58 T °C
25	142	140	210	8 500	3,3	50 (R)	58,2
18	235	235	355	13 000	3,3	78 (R)	69,0
12	360	305	495	n. d.	7,2	74 (L)	76,5
5	465	390	600	23 500	5,7	86 (L)	81,6
0	560	420	720	29 500	4,4	100 (L)	81,0

(*a*) Velocità di prova 9 mm per minuto primo. (*b*) Durezza Rockwell misurata in unità (*R*) ed (*L*). (*c*) Eseguito con carico di 5 kg in aria.

Tabella 4

Resilienza Izod (ASTM D 256/56) kg cm/cm di intaglio di diverse composizioni polimere a base di CPV in funzione della temperatura

Temperatura °C	CPV	Grezzo di innesto 10% C_2—C_3	Grezzo di innesto +CPV 5% C_2—C_3
23	2,8	35,5	6
0	2,7	11	4,6
—40	2,4	6,4	3,5

differenza di peso fra il materiale impiegato inizialmente e quello residuo all'estrazione separato per filtrazione e lavaggio con *n*-eptano su crogiolo di Gooch dalla soluzione, serve per calcolare il copolimero che non ha partecipato alla reazione di innesto. La determinazione del cloro nell'estratto eptanico ha indicato che il materiale è praticamente esente da cloruro di vinile o ne contiene tenori trascurabili.

La separazione cel CPV e di prodotti ad altissimo contenuto in cloruro di vinile dal grezzo di reazione viene effettuata secondo le modalità descritte per le estrazioni con *n*-eptano impiegando però come solvente selettivo il cicloesanone. Il polimero disciolto nel cicloesanone può essere recuperato per precipitazione della soluzione in metanolo freddo.

III. Determinazione del contenuto di unità monomeriche di cloruro di vinile nei prodotti polimerici ottenuti

6. Viene effettuata riscaldando lentamente fino a 700°C 0,1...1 g della sostanza da analizzare mescolata con un forte eccesso di miscela di Eschka. Dopo raffreddamento la massa viene ripresa con acido nitrico 6*N* e nella soluzione si determina il cloro presente per via volumetrica con nitrato di argento.

7. *Prove meccaniche.* Sono state eseguite secondo le norme ASTM indicate nelle tabelle 2, 3 e 4. Per la preparazione dei provini il materiale grezzo ottenuto in perle dalla reazione di innesto o la miscela preparata per aggiunta di polivinilcloruro commerciale *(Vipla)* al grezzo di innesto, è stata stabilizzata per aggiunta di 1% di stagno dibutillaurato e del 2% di stearato bibasico di piombo in un mescolatore meccanico operante a temperatura ambiente. Si è quindi omogeneizzato il materiale in un mescolatore a rulli alla temperatura di 170°C. Il materiale ottenuto sotto forma di fogli è stato successivamente stampato in lastre con una pressa idraulica operante a 170°...180°C e con una pressione di 50 kg/cm^2. Dopo raffredamento le lastre sono state utilizzate per ricavarne i provini necessari per le prove meccaniche.

Le prove di confronto eseguite su miscele meccaniche di CPV e di $C_2 - C_3$ sono state eseguite su materiali ottenuti sciogliendo separatamente i due polimeri in tetraidrofurano, mescolando le due soluzioni e precipitando rapidamente la miscela in metanolo. Il materiale precipitato è stato seccato, stabilizzato, omogeneizzato e stampato secondo le modalità già sopra indicate.

Pervenuta il 28 XI 1966

Istituto di Chimica industriale del Politecnico, Milano, Italia

BIBLIOGRAFIA

1. Natta G., Zambelli A., Pasquon I., La Chimica e l'Industria, 1966, **48**, *12*, pp. 1298—1306.
2. — La chimica e l'Industria, 1966, **48**, *12*, pp. 1307—1315.

3. Danusso F., Ferruti P., Peruzzo G., Natta G., La Chimica e l'Industria, 1966, **48,** *5,* pp. 466—470.
4. Natta G., Pegorara M., Szilàgyi L., La Chimica e l'Industria (in stampa).
5. Natta G., Vigliani E. C., Danusso F., Pernis B., Ferruti P., Marchisio M. A., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. VIII, 1966, **XL,** *1,* pp. 11—19.
6. Natta G., Severini F., Pegoraro M., Beati E., Aurello G., Toffano S., La Chimica e l'Industria, 1965, **47,** *9,* pp. 960—965.
7. Toole J. S., Reventas A. A., Von Toerne T. R., Modern Plastics, 1964, **3,** p. 149.
8. Musso P., Ronzoni I., Materie Plastiche ed Elastomeri, 1965, p. 173.
9. Tobolsky A. B., Rubber Chem. Techn., 1957, **30,** p. 437.
10. — *Properties and Structure of Polymers.* J. Wiley, New York, 1960, p. 81.
11. Frey H. H., Kunststoffe, 1959, **49,** *2,* S. 50.
12. Sharp J. J., British Plastics, 1959, **9,** p. 431.
13. Hopkins R. P., SPE Journal, 1960, **3,** p. 304.

POLIMERI DIN CLORURĂ DE VINIL GREFAŢI PE ELASTOMERI OLEFINICI CU REZISTENŢĂ ÎNALTĂ LA ŞOC

Nota I

Partea experimentală

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare, paralel cu seria de lucrări cu totul recente proprii [1]...[6], literatura universală din domeniul polimerilor din clorură de vinil, prezintă partea experimentală a problemei indicată în titlu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 578.08; 547.962.4

SUR QUELQUES ASPECTS ACTUELS DE LA BIOCHIMIE DE LA THYROGLOBULINE ET DE SA BIOSYNTHÈSE

PAR

JEAN ROCHE

Membre de l'Institut,
Membre d'honneur de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

La formation des hormones thyroïdiennes (*L*-thyroxine et 3, 5, 3′-triiodo-*L*-thyronine) présente une particularité biochimique exceptionnelle. Ces hormones prennent naissance au sein d'une protéine spécifique, la thyroglobuline, à partir d'un acide aminé compris dans celles-ci, la tyrosine et demeurent partie intégrante de la structure primaire de cette protéine. Une protéolyse de la thyroglobuline au sein de la glande endocrine qui l'élabore est nécessaire à la mise en liberté des hormones, lesquelles peuvent alors seulement être secrétées dans le plasma. Aussi, la biosynthèse et la fonction de la thyroglobuline en tant que molécule dans l'intimité de laquelle s'élaborent les hormones iodées ont-elles sollicité l'attention des biochimistes.

On peut considérer que l'étape moderne de l'étude de la thyroglobuline a été ouverte par sa préparation à un haut degré de pureté, que j'ai réalisé avec MM. Y. Derrien et Michel en 1947. Grâce à notre travail, il a été possible de disposer d'une glycoprotéine de poids moléculaire égal à 660 000, de composition en acides aminés bien définie, sauf toutefois sur un point important, à savoir sa teneur en acides aminés iodés précurseurs des hormones (3-monoiodo-*L*-tyrosine, 3, 5-diiodo-*L*-tyrosine) et en hormones elles-mêmes. En effet, il s'est avéré que le degré d'iodation des thyroglobulines est susceptible de présenter des écarts très importants, en sorte que la formation des acides aminés iodés est, depuis vingt ans déjà, considérée comme un processus indépendant de la biosynthèse de la protéine qui les renferme. La taille moléculaire de celle-ci a constitué une gêne pour son étude, et ceci d'autant plus qu'elle apparaissait dès 1947 comme présentant une certaine hétérogénéité, à la vérité assez mal définie alors.

Au cours des dernières années, un groupe de chercheurs du National Institute of Health de Bethesda, en particulier Robbins et Rall, et un groupe de travail que je dirige à Naples avec G. Salvatore, ont fait faire

à notre connaissance de la thyroglobuline des progrès décisifs en étudiant son ultracentrifugation, pendant que se développaient par ailleurs les travaux de Spiro sur la partie glucidique de cette protéine. Les préparations de thyroglobuline hautement purifiées renferment, en effet, en majeure partie des particules dont la constante de sédimentation est de 19 *S*, dans des conditions bien déterminées, mais peuvent en renfermer d'autres, plus lourdes (27 *S* et 32 *S*) ou plus légères (12 *S*). Les particules de 19 *S* ont un poids moléculaire égal à 660 000, celles de 27 *S* pourraient être un dimère et celles de 37 *S*, éventuellement, un tétramère. La protéine véritablement spécifique, celle dont l'existence traduit la différenciation cellulaire thyroïdienne est caractérisée par un coefficient de sédimentation de 19 *S*. Elle est toujours iodée et riche en hormones, mais son existence même a posé le problème de ses précurseurs.

Plusieurs types de recherches se sont proposés d'aborder ce problème. Les unes reposent sur l'étude systématique des fractions de thyroglobuline existant chez diverses espèces. Les autres sur les étapes de la biosynthèse et d'autres enfin sur la dissociation de la protéine 19 *S*. Un large examen de la répartition de la thyroglobuline entre diverses fractions a été réalisé par deux équipes, d'une part celle dans laquelle je suis associé à G. Salvatore et à Covelli à Naples, et par Lachiver et Fontaine à Paris. Il a été établi que, dans certaines espèces, en particulier le cobaye, la fraction 12 *S*, précurseur éventuel de la fraction 19 *S*, peut constituer jusqu'à 15 ... 20 % de la protéine totale, alors qu'elle est absente chez la plupart des Mammifères. Chez les Lamproies, elle est le principal constituant thyroglobulinique.

Des faits d'un autre ordre permettent plus directement d'envisager une relation de précurseur à polymère. Après les importantes recherches initiales de Syd et Goldberg poursuivies *in vitro* sur des coupes de glandes, celles de Vecchio, Salvatore et Aloj ont établi que le premier précurseur de la protéine 19 *S* *in vivo* est dans tous les cas le monomère 6 *S*, puis le dimère 12 *S*. Ni l'une, ni l'autre de ces protéines ne sont notablement iodées. Des essais poursuivis au Collège de France avec Nunez et Mauchamp, ont confirmé et étendu ces observations et montré que le précurseur le plus important de la protéine 19 *S* iodée était une protéine pratiquement non iodée, de coefficient de sédimentation 17 *S*. Celle-ci est le véritable substrat de l'iodation aboutissant à l'hormonogenèse. Son halogénation conduit à des modifications conformationelles qui font passer *S* de 17 à 19, ces polymérisations successives permettant la biosynthèse des fractions minoritaires 27 *S* et 32 *S*, dont le taux maximum ne dépasse en général pas 5 %. Le processus biologiquement important est donc la formation du produit spécifique 19 *S* à partir de ses précurseurs 12 *S* et 6 *S* et du dimère non halogéné ou très faiblement iodé 17 *S* bien étudié par Mauchamp. Ajoutons que la dissociation du produit 19 *S*, réalisée par Edelhoch, par Mme Pitt-Rivers et de Cromburghe, a conduit par rupture de ponts —S—S— au moyen du nuscaptoéthanol à un monomère 6 *S*, que l'on peut partiellement réassocier en 12 *S* et en 19 S.

Les faits présentés jusqu'ici ne rendent compte que des aspects biophysique et biochimique du problème envisagé ; il convient d'aborder son aspect biologique, à la vérité beaucoup moins avancé. En effet, toute biosynthèse protéique implique l'existence d'un mécanisme à partir duquel un messager ARN transmet à un moule nucléique l'ordre de synthèse, mais les résultats obtenus dans ce domaine, tant par mes collaborateurs et moi que par d'autres sont trop fragmentaires et trop incertains pour qu'il y ait lieu de les résumer ici. En revanche, il me paraît légitime de signaler que Nunez, Macchia et moi avons, dès 1965, obtenu la biosynthèse et l'iodation acellulaires de la protéine spécifique 19 *S* au contact de ribosomes thyroïdiens, ce qu'ont confirmé divers auteurs ; de ce fait, on dispose déjà d'un matériel de travail à partir duquel une étude de ce processus est possible. Enfin, la relation entre la différenciation des cellules thyroïdiennes et leur aptitude à synthétiser et à ioder la thyroglobuline a été récemment illustrée par Nunez, Mme Pavlovic-Hournac et moi dans les essais suivants. D'une part, des cellules thyroïdiennes isolées mises en culture voient disparaître en quelques jours leur aptitude à synthétiser la thyroglobuline 19 *S*, sans que nous ayons jusqu'ici réussi à faire reparaître cette propriété. En revanche, des fragments de glande de rat mis en culture se dédifférencient de la même manière, mais il suffit de les greffer dans la chambre antérieure de rats pour les rendre à nouveau aptes à synthétiser et à ioder la protéine 19 *S*.

De pareils faits constituent une première approche de l'étude du mécanisme de la biosynthèse de la protéine thyroïdienne, objectif vers lequel il est maintenant nécessaire d'orienter les efforts.

Ce bref exposé rend compte des principaux progrès accomplis dans l'étude de la thyroglobuline et des voies qui paraissent s'ouvrir aux recherches dans ce domaine. Il est remarquable que celles-ci relient des problèmes apparemment très limités posés par la biochimie d'hormones iodées de structure très particulières à certains des problèmes biologiques les plus fondamentaux. C'est là sans doute une illustration nouvelle du fait qu'aucune question posée par la biochimie endocrinienne ne saurait être résolue en dehors des concepts biochimiques généraux de la vie cellulaire et en dehors de la biologie moléculaire.

Reçu le 29 XII 1966

Université de Paris, France

UNELE ASPECTE ACTUALE ALE BIOCHIMIEI TIROGLOBULINEI ŞI ALE BIOSINTEZEI SALE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare rezultatele studiilor proprii în domeniul biochimiei tiroglobulinei, expune cîteva aspecte actuale în special în legătură cu biosinteza acesteia.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 547.678.2; 542.951.5

CONDENSAREA ACENAFTENCHINONEI CU AMINE PRIMARE AROMATICE ÎN PREZENŢA SĂRURILOR METALICE. COMPLECŞI METALICI

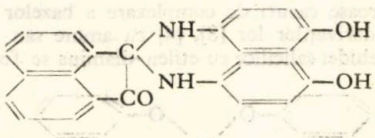
DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
ŞI
TATIANA LIXANDRU

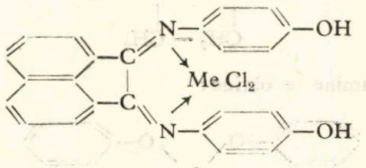
Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5 — 7 februarie 1965

1. Introducere

În cercetări anterioare [1] am arătat că la condensarea acenaftenchinonei cu *p*-aminofenol în toluen se formează di-*p*-oxifenil-acenaftenona:



Dacă reacţia are loc în mediu de acid acetic glacial în prezenţa sărurilor metalice [2], se formează săruri complexe ale unei duble baze Schiff cu structura:



(Me = Zn, Cd, Co, Ni)

În lucrarea de faţă ne-am propus extinderea acestei reacţii în cazul condensării acenaftenchinonei cu alte amine aromatice în prezenţa sărurilor metalice.

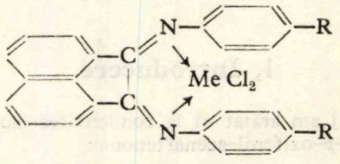
Am efectuat *condensarea acenaftenchinonei* cu *m-* şi *p-nitroanilină, acid m-* şi *p-amino-benzoic, anestezină, o-* şi *p-toluidină, m-xilidină, p-clor-anilină, p-anisidină* şi *benzidină*, în mediu de acid acetic glacial, în prezenţa diferitelor săruri metalice. În general s-a lucrat cu halogenuri ale metalelor bivalente.

2. Partea teoretică

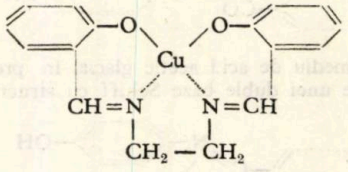
Acenaftenchinona şi amina respectivă se solvă în acid acetic glacial cu culorarea soluţiei în roşu închis. Se adaugă apoi sarea metalică şi se încălzeşte sub reflux. La adăugarea sării metalice sau puţin timp după aceea, separă chiar la cald un produs colorat diferit, după natura sării metalice utilizate. Produsul separă din ce în ce mai abundent pe măsura încălzirii. După răcire, filtrare şi spălare cu acid acetic glacial, produsele se purifică din solvenţii potriviţi.

În toate cazurile, afară de cel al condensării cu α- şi β-naftil-amină, rezultatele analitice indică reacţia între o moleculă de acenaftenchinonă, două molecule de amină şi o moleculă de sare metalică, cu eliminare de două molecule de apă.

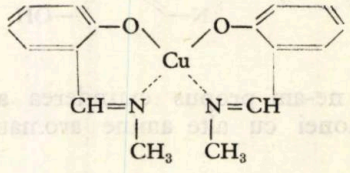
Prin urmare dintr-o moleculă de acenaftenchinonă şi două molecule de amină se formează o dublă bază Schiff, care prin legături chelatice fixează sarea metalică, formînd un complex de forma generală:



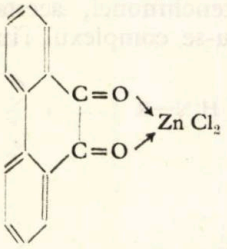
Literatura indică numeroase cazuri de complexare a bazelor Schiff a aldehidei salicilice sau a α-oxinaftaldehidei şi a derivaţilor lor [3], [4] cu amine sau diamine şi săruri metalice În cazul azometinei aldehidei salicilice cu etilen-diamina se formează complecşi de forma.



sau dacă se lucrează cu monoamine se obţine:



Literatura indică de asemenea cazul de complexare a fenantrenchinonei cu $ZnCl_2$, cînd se formează o combinaţie roşie-violetă de forma [5]:



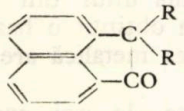
Ţinînd seama de datele din literatură cu privire la posibilitatea complexării bazelor Schiff cu săruri metalice, considerăm că şi în cazurile cercetate de noi este vorba de o complexare a unei duble baze Schiff cu sarea metalică.

În condiţiile noastre de lucru acenaftenchinona nu formează complecşi coloraţi cu sărurile metalice.

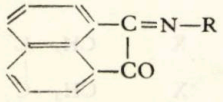
Pe de altă parte, unele amine utilizate de noi în aceleaşi condiţii, nu formează complecşi cu sărurile metalice folosite decît în prezenţa acenaftenchinonei ; este cazul *m*- şi *p*-nitroanilinei şi a *p*-aminofenolului [2].

Unele amine însă complexează cu o parte din sărurile metalice luate de noi în lucru. În unele cazuri complecşii aminei reacţionează apoi cu acenaftenchinona dînd aceleaşi produse care s-au obţinut şi prin reacţia concomitentă a chinonei cu amina şi sarea metalică. Astfel se comportă acidul *p*-amino-benzoic cu $CoCl_2$, *p*-toluidina cu $MnCl_2$, *p*-clor-anilina cu $CdCl_2$, *p*-anisidina cu $CoCl_2$.

Pe de altă parte în nici unul din cazurile studiate de noi nu s-a obţinut baza Schiff dublă a acenaftenchinonei, dacă reacţia era condusă în absenţa sărurilor metalice. Astfel *o*-toluidina, *p*-toluidina şi *p*-anisidina formează cu acenaftenchinona în absenţa sărurilor metalice, acenaftenone disubstituite de forma generală:

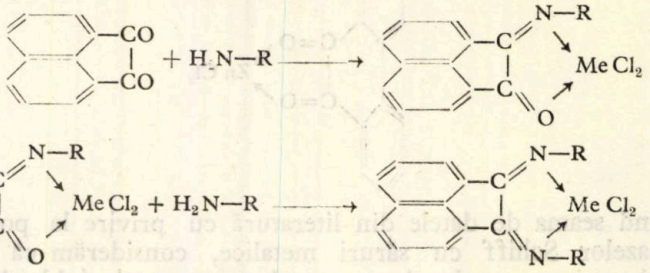


iar *m*- şi *p*-nitro-anilina, acidul *p*-amino-benzoic, α- şi β-naftilamina şi benzidina cu acenaftenchinona, în absenţa sărurilor metalice, formează baze Schiff corespunzătoare unei singure grupe carbonilice a acenaftenchinonei:



Unele azometine, ca de exemplu cea cu *p*-nitro-anilina împreună cu sarea metalică, formează complexul dublei baze Schiff a acenaftenchinonei.

Presupunem că este posibil ca reacţia să decurgă în două etape. Mai întîi s-ar forma un complex coordinat al sării metalice la azotul şi oxigenul bazei Schiff simple a acenaftenchinonei, acesta reacţionînd apoi cu a doua moleculă de amină, formîndu-se complexul final:



Reacţia celei de a doua molecule de amină este uşurată datorită pozitivării carbonului carbonilic, prin complexarea sării metalice la azot şi oxigen în fază intermediară.

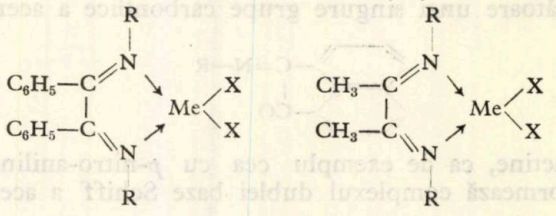
În cazul utilizării benzidinei drept componentă aminică, se pot urmări bine cele două faze ale reacţiei. Se formează mai întîi azometina corespunzătoare unei singure grupe carbonilice, de culoare roşie, care apoi la adăugarea sării metalice formează imediat complexul dublei baze Schiff a acenaftenchinonei.

În unele cazuri, ca de exemplu al reacţiei acidului *p*-amino-benzoic cu $CoCl_2$, se obţine un complex albastru, care la adaos de acenaftenchinonă trece în complexul dublei baze Schiff a acenaftenchinonei. Acest fapt sugerează posibilitatea unui alte desfăşurări a reacţiei; ar putea fi posibil ca în aceste cazuri mai întîi să se formeze complexul aminei cu sarea metalică şi apoi acesta să reacţioneze cu ambele grupe carbonilice ale acenaftenchinonei, ducînd la complecşi ai bazei Schiff duble a acenaftenchinonei.

Literatura indică de altfel formarea de complecşi ai aminelor cu săruri metalice, de exemplu: $(p\text{-nitro-anilina})_2BeCl_2$ [6], $(\text{acidul } p\text{-amino-benzoic})_2CoX_2$ [7], $(\text{toluidina})_2MeCl_2$ [8] ... [13], $(p\text{-anisidina})_2CuCl_2$ [14], $(\text{naftil-amina})_2\,MeCl_2$ [15], [16], $(\text{benzidina})\,MeX_2$ [17], [18].

Avînd în vedere că în nici unul din cazurile studiate de noi, în absenţa sărurilor metalice nu s-a obţinut o bază Schiff dublă a acenaftenchinonei, putem conchide că sarea metalică are un rol bine definit în formarea acesteia.

În sprijinul formulării date de noi complecşilor obţinuţi, amintim complecşii asemănători ai benzilului [19] şi ai diacetilului [20], de forma generală:



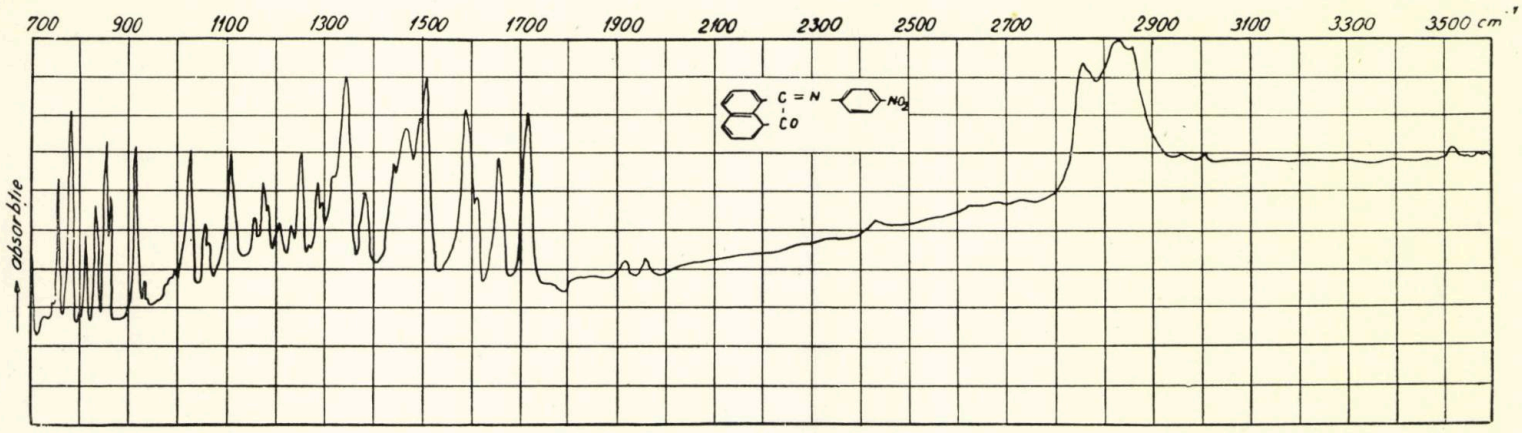


Fig. 1. — Spectrul IR al acenaftenchinon–*p*–nitro–fenil–iminei.

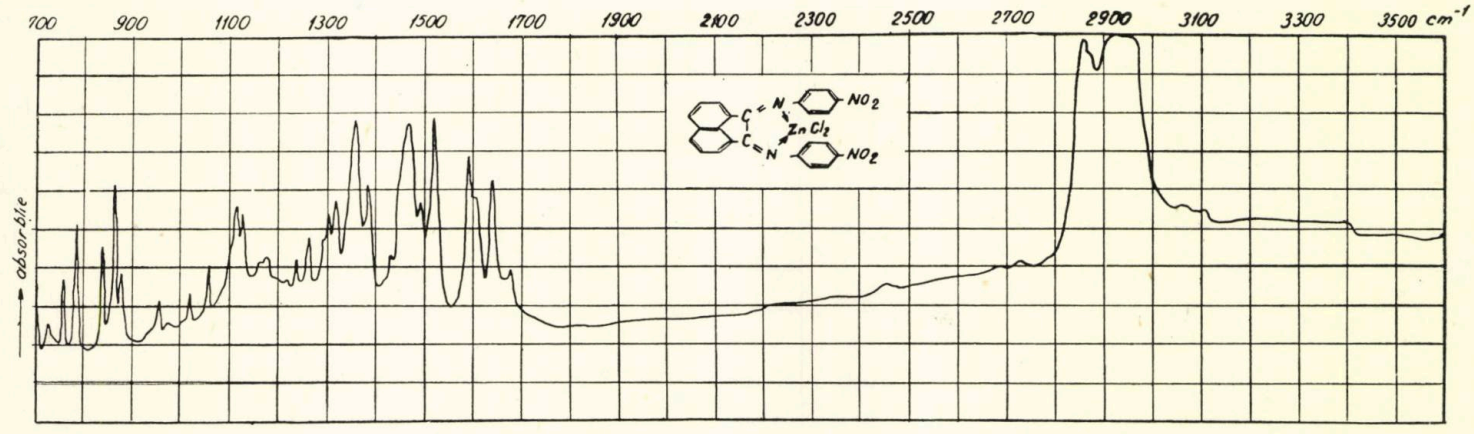


Fig. 2. — Spectrul IR al acenaftenchinon–di–(*p*–nitro–fenil–imino). $ZnCl_2$.

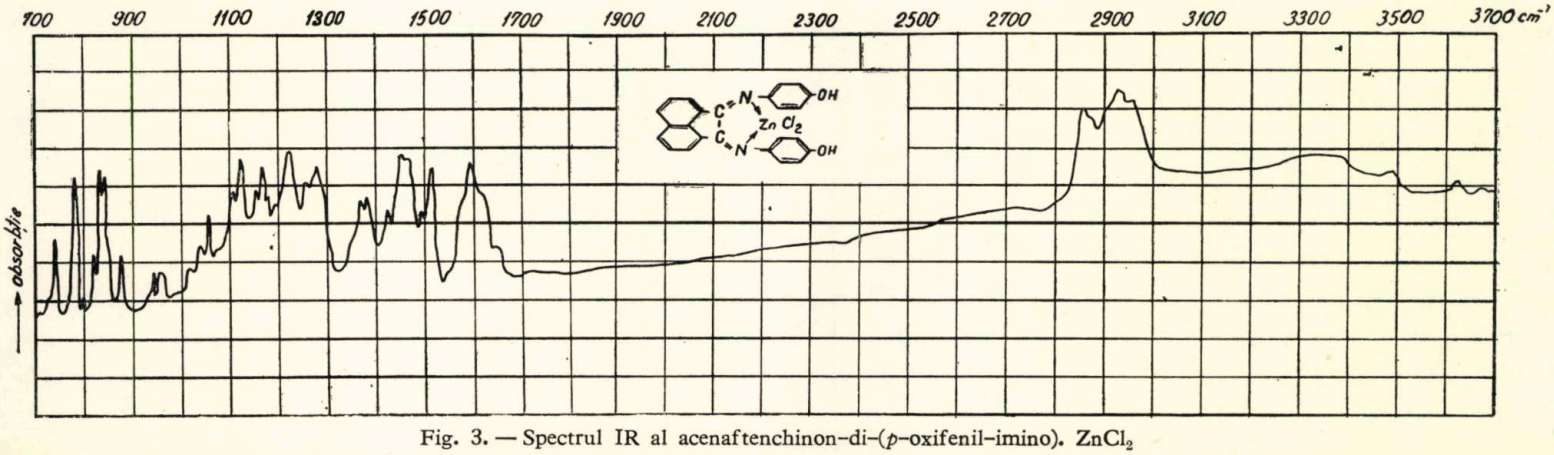
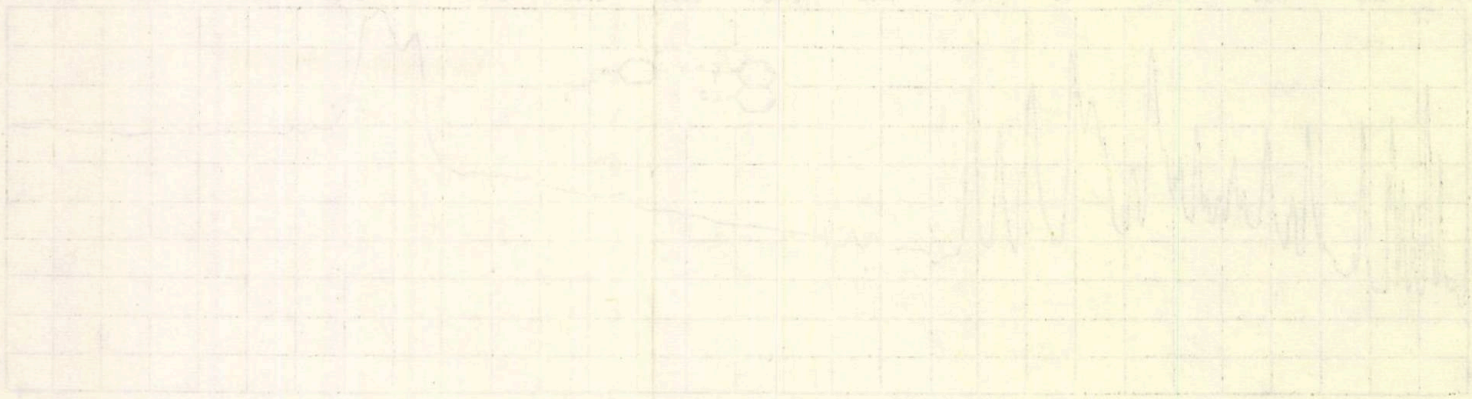
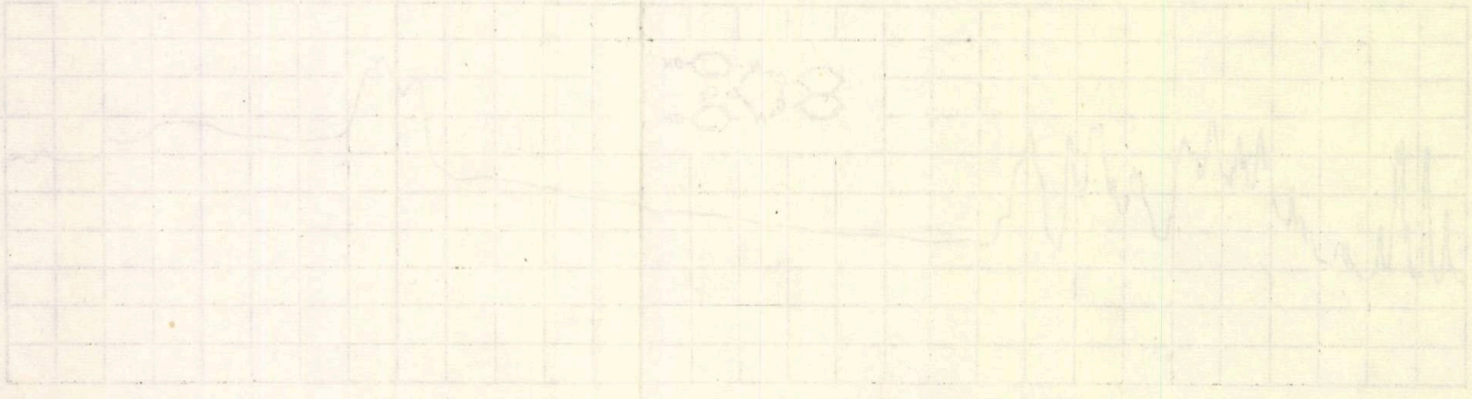
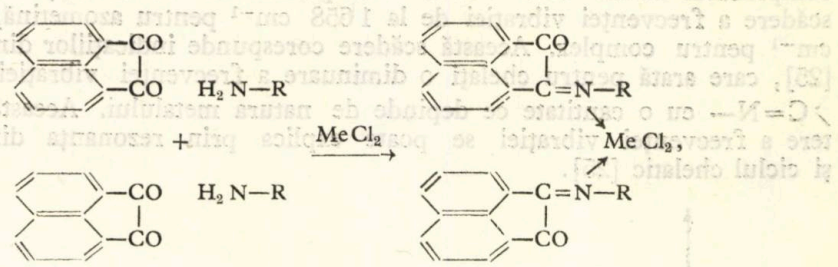


Fig. 3. — Spectrul IR al acenaftenchinon–di–(*p*–oxifenil–imino). $ZnCl_2$





Dacă se utilizează α- sau β-naftil-amina drept componentă aminică, datele analitice indică compoziţia elementară $C_{44}H_{26}N_2O_2 . MeCl_2$, ceea ce presupune că au complexat două molecule de azometină cu o moleculă de sare metalică:



(Me=Zn, Co, Ni, Cu)

În acest caz nu se formează complexul dublei baze Schiff a acenaftenchinonei nici chiar în prezenţa sărurilor metalice, probabil din cauza împiedicărilor sterice.

Toţi complecşii obţinuţi de noi la condensarea acenaftenchinonei cu diverse amine aromatice, în prezenţa sărurilor metalice, sînt substanţe cristalizate sau amorfe, colorate diferit după natura sării metalice utilizate. Sînt substanţe sensibile la acţiunea apei chiar la temperatura ordinară; ridicarea temperaturii accelerează descompunerea complecşilor. Acizii diluaţi descompun complecşii, cu punerea în libertate a produselor iniţiale. S-au identificat în produsele de descompunere acenaftenchinona şi sarea metalică, care s-a putut doza cantitativ din soluţie.

Produsele obţinute de noi sînt stabile în mediu alcalin, ceea ce concordă cu indicaţiile date de Pfeiffer [21] în privinţa stabilităţii complecşilor de speţa II-a, în sensul clasificării sale, la care pentru închiderea ciclului chelatic prin metal participă două valenţe secundare de la atomii de azot.

Pfeiffer şi colaboratorii [22] indică cea mai mare stabilitate pentru complecşii ce conţin cupru. Proprietăţile complecşilor depind de structura bazelor Schiff, de natura atomului central şi de interacţiunea bazei Schiff cu atomul central [23], [24].

Structura complecşilor sintetizaţi rezultă din datele analizei chimice şi spectrale.

Spectrele în infraroşu (IR) au fost înregistrate la un spectrofotometru UR-10 şi la un spectrofotometru UNICAM SP-100. S-a lucrat în pastilă de KBr, suspensie de Nujol sau în solvent nepolar după cum a necesitat fiecare substanţă în parte.

Spectrele IR ale complecşilor prezintă benzi caracteristice pentru 3 H şi 2 H liberi între 782 şi 842 cm^{-1}, benzi pentru substituţia în poziţia *para* între 1 020 şi 1 218 cm^{-1}, bandă pentru legătura $>C=N-$ la 1 620...1 660 cm^{-1} şi benzile caracteristice fiecărui substituent din restul de amină.

Comparînd absorbţia pentru legătura $\rangle C=N-$ a azometinei acenaftenchinonei cu *p*-nitro-anilina, cu absorbţia pentru legătura $\rangle C=N-$ a complexului dublei baze Schiff corespunzătoare cu $ZnCl_2$, se observă o scădere a frecvenţei vibraţiei de la 1 658 cm^{-1} pentru azometină, la 1 640 cm^{-1} pentru complex. Această scădere corespunde indicaţiilor din literatură [25], care arată pentru chelaţi o diminuare a frecvenţei vibraţiei legăturii $\rangle C=N-$ cu o cantitate ce depinde de natura metalului. Această descreştere a frecvenţei vibraţiei se poate explica prin rezonanţa dintre metal şi ciclul chelatic [25].

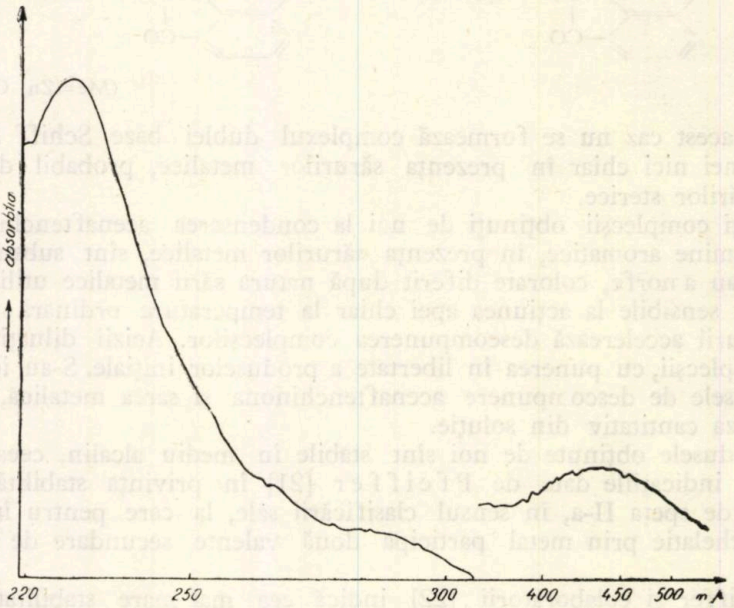


Fig. 4. — Spectrul UV al acenaftenchinon-di-(*p*-oxifenil-imino). $ZnCl_2$.

Spectrele în ultraviolet (UV) s-au înregistrat la un spectrofotometru Optica Milano CF-4, utilizînd ca solvent alcoolul etilic la o concentraţie de $10^{-6/3}$ moli/l, sau clorură de metilen.

De remarcat este faptul că în cazul unor complecşi apare un nou maxim de absorbţie în domeniul vizibil datorită închiderii ciclului chelatic prin metal.

Pentru toate cazurile studiate, spectrele confirmă formularea atribuită produselor noi sintetizate.

În unele cazuri am obţinut randamente aproape cantitative şi aceasta ne-a făcut să ne gîndim la posibilitatea utilizării reacţiilor noastre în chimia analitică cantitativă. S-a putut astfel doza cantitativ zincul şi cobaltul prin

complexare cu *p*-anisidină, acid *m*- şi *p*-amino-benzoic şi acenaftenchinonă în soluţie de acid acetic glacial.

Reacţiile de complexare se pot extinde şi în cazul altor amine sau săruri metalice.

3. Partea experimentală

1. *Acenaftenchinon-di-(p-nitrofenil-imino). $ZnCl_2$*

2 g acenaftenchinonă se solvă la cald în 30 ml acid acetic glacial şi se adaugă apoi 4 g *p*-nitro-anilină (mic exces faţă de cantitatea teoretică). Se adaugă 4 g clorură metalică şi se încălzeşte 30 min sub reflux. La adăugarea sării metalice sau puţin timp după aceea, separă chiar la cald un produs colorat, care pe măsura încălzirii separă mai abundent din soluţie. După răcire şi filtrare se purifică prin spălări repetate la cald cu acid acetic glacial. Produsul este de culoare galben închis, insolubil în solvenţii organici obişnuiţi. P. t. $>$ 300°C.

$C_{24}H_{14}N_4O_4 . ZnCl_2$ (558,4)

	C%	H%	N%	Zn%	Cl%
Calculat	51,57	2,50	10,02	11,71	12,71
Găsit	51,35	3,08	10,03	11,60	13,08
	51,20	3,00			13,19

Analog se prepară şi complecşii cu $CoCl_2$, $NiCl_2$, $CuCl_2$.

2. *Acenaftenchinon-di-(m-nitrofenil-imino). $ZnCl_2$*

Preparat analog cu produsul 1. Galben deschis. Insolubil în solvenţii organici obişnuiţi. P. t. $>$ 330°C.

$C_{24}H_{14}N_4O_4 . ZnCl_2$ (558,4)

	C%	H%	N%	Zn%	Cl%
Calculat	51,57	2,50	10,02	11,71	12,71
Găsit	51,69	3,04	10,18	11,34	12,90
	51,50	2,80			13,04

La fel s-au preparat şi complecşii cu $CoCl_2$, $NiCl_2$, $CuCl_2$.

3. *Acenaftenchinon-di-(p-carboxifenil-imino). $ZnCl_2$*

Preparat analog cu produsul 1. De culoare galben închis. Insolubil în solvenţii organici obişnuiţi.

$C_{26}H_{16}N_2O_4 . ZnCl_2$ (556,4)

	C%	H%	N%
Calculat	56,07	2,87	5,03
Găsit	55,95	3,30	5,37
	55,80	3,42	5,28

Utilizînd un procedeu asemănător s-a preparat şi complexul cu $CoCl_2$.

4. *Acenaftenchinon-di-(m-carboxifenil-imino). $ZnCl_2$*

Preparat analog cu produsul 1. Amorf, de culoare galbenă.

$C_{26}H_{16}N_2O_4 . ZnCl_2$ (556,4)

	C%	H%	N%
Calculat	56,07	2,87	5,03
Găsit	55,82	3,10	5,51
	55,70	3,05	5,33

S-a preparat pe o cale asemănătoare şi complexul cu $CoCl_2$.

5. *Acenaftenchinon-di-(p-etilcarboxifenil-imino). $ZnCl_2$*

1 g acenaftenchinonă şi 2 g anestezină se solvă la cald în 15 ml acid acetic glacial. Se adaugă 2 g $ZnCl_2$ şi se încălzeşte 30 min sub reflux. La rece separă un produs galben, care se purifică prin spălare la cald cu acetat de etil. P. t. = 259°C.

$C_{30}H_{24}N_2O_4 . ZnCl_2$ (612,4)

	C%	H%	N%
Calculat	58,78	3,91	4,57
Găsit	58,82	3,62	4,52

S-au preparat analog şi complecşii cu $CoCl_2$ şi $NiCl_2$.

6. *Di-(acenaftenchinon-α-naftil-imino). $ZnCl_2$*

1 g acenaftenchinonă şi 2 g α-naftil-amină se solvă la cald în 10 ml acid acetic glacial Se adaugă 2 g $ZnCl_2$ şi se încălzeşte 30 min. Se purifică prin spălare cu acid acetic glacial. De culoare maro. P. t. > 300°C.

$C_{44}H_{26}N_2O_2 . ZnCl_2$ (750,4)

	C%	H%	N%
Calculat	70,36	3,46	3,73
Găsit	69,89	3,60	3,56
	69,95	3,68	3,80

Utilizînd procedee asemănătoare s-au preparat şi complecşii cu $CoCl_2$, $NiCl_2$, $CuCl_2$.

7. *Di-(acenaftenchinon-β-naftil-imino). $ZnCl_2$*

Obţinut analog cu produsul 6. Solvent 20 ml acid acetic glacial. Timp de încălzire 1 oră. Purificat prin spălări la cald cu acid acetic glacial. P. t. > 350°C.

$C_{44}H_{26}N_2O_2 . ZnCl_2$ (750,4)

	C%	H%	N%
Calculat	70,36	3,46	3,73
Găsit	69,85	3,60	3,59
	69,90	3,58	

La fel s-au preparat şi complecşii cu $CoCl_2$, $NiCl_2$ şi $CuCl_2$.

8. *Acenaftenchinon-di-(p-tolil-imino). $ZnCl_2$*

1 g acenaftenchinonă şi 1 g *p*-toluidină se solvă la cald în 10 ml acid acetic glacial. Se adaugă 1 g sare metalică şi se încălzeşte 30 min. Cristalizează din acid acetic glacial, cristalin, galben portocaliu. P. t. > 310°C.

$C_{26}H_{20}N_2 . ZnCl_2$ (496,4)

	C%	H%	N%
Calculat	62,83	4,02	5,64
Găsit	62,88	4,20	5,87

S-au preparat pe o cale analogă şi complecşii cu $CoCl_2$, $CuCl_2$, $MnCl_2$.

9. *Acenaftenchinon-di-(o-tolil-imino). $ZnCl_2$*

Preparat analog cu produsul 8. Purificat prin spălări cu acid acetic glacial; cristalin galben.

$C_{26}H_{20}N_2 . ZnCl_2$ (496,4)

	N%
Calculat	5,64
Găs.t	5,80

Pe aceeaşi cale s-a preparat şi complexul cu $CuCl_2$.

10. *Acenaftenchinon-di-(m-xilil-imino). $ZnCl_2$*

1,5 g acenaftenchinonă se solvă în 15 ml acid acetic glacial la cald. Se adaugă 3 g *m*-xilidină şi apoi 1,5 g $ZnCl_2$. Se încălzeşte 30 min sub reflux. Se purifică prin spălare la cald cu acid acetic glacial. Cristalin, galben portocaliu. P. t. > 300°C.

$C_{28}H_{24}N_2 . ZnCl_2$ (524,4)

	N%
Calculat	5,33
Găsit	5,60; 5,75

S-a preparat în mod asemănător şi complexul cu $CoCl_2$.

11. *Acenaftenchinon-di-(p-clorfenil-imino). $ZnCl_2$*

Preparat analog cu produsul 10. Purificat prin spălare la cald cu toluen. Cristalin, galben portocaliu. P. t. > 300°C.

$C_{24}H_{14}N_2Cl_2 . ZnCl_2$ (537,4)

	N%
Calculat	5,21
Găsit	5,80; 5,45

S-au preparat analog şi complecşii cu $CoCl_2$ şi $CdCl_2$.

12. *Acenaftenchinon-di-(p-metoxifenil-imino). $ZnCl_2$*

Preparat analog cu produsul 8. Cristalizează din acid acetic glacial, cristalin roşu. P. t. = 300°C.

$C_{26}H_{20}N_2O_2 . ZnCl_2$ (528,4)

	C%	H%	N%
Calculat	59,04	3,78	5,29
Găsit	59,16	4,01	5,46

S-au preparat cu procedee asemănătoare şi complecşii cu $CoCl_2$, $CuCl_2$, $MnCl_2$.

13. *Acenaftenchinon-di-(p-aminobifenil-imino). $ZnCl_2$*

1 g acenaftenchinonă şi 2 g benzidină se solvă la cald în 20 ml acid acetic glacial. Se formează imediat azometina roşie, care iese din soluţie. Se adaugă 2 g $ZnCl_2$ şi se încălzeşte 15 min. Purificat prin spălare la cald cu acid acetic glacial. P. t. > 300°C.

$C_{36}H_{26}N_4 . ZnCl_2$ (650,4)

	C%	H%	N%
Calculat	66,42	3,99	8,61
Găsit	66,00	4,20	8,55

În acelaşi mod s-au preparat şi compuşii cu $CoCl_2$, $NiCl_3$, $(CH_3COO)_3Cr$, $FeCl_3$.

S-au preparat 43 compuşi care au fost purificaţi şi analizaţi, dar nu s-au dat caracteristicile decît pentru primii termeni din serie.

4. Concluzii

1. La condensarea acenaftenchinonei cu amine aromatice în mediu de acid acetic glacial, în prezenţa sărurilor metalice se formează produse complexe corespunzătoare dublei baze Schiff a acenaftenchinonei. Baza Schiff dublă a acenaftenchinonei se formează numai în prezenţa sărurilor metalice, care au rol bine definit în această reacţie.

Mecanismul de formare al complexului dublei baze Schiff a acenaftenchinonei ar putea avea loc în două sensuri; a) fie se formează mai întîi complexul bazei Schiff simple a acenaftenchinonei cu sarea metalică şi apoi acesta reacţionează cu a doua moleculă de amină; b) fie se formează mai întîi complexul aminei cu sarea metalică şi apoi acesta reacţionează cu acenaftenchinona.

2. Factorul steric influenţează reacţia cu α- şi β-naftilamina, în sensul că este împiedicată formarea bazei Schiff duble a acenaftenchinonei.

3. Produsele obţinute sînt complecşi de speţa II-a în sensul clasificării lui Pfeiffer, la închiderea ciclului chelatic prin metal participînd valenţe secundare de la ambii atomi de azot. Acest mod de complexare contribuie la stabilitatea produselor în mediu alcalin.

4. Unele reacţii de complexare decurg cu randament cantitativ şi pe această bază s-a putut determina cantitativ zincul şi cobaltul cu *p*-anisidină, acid *m*- şi *p*-amino-benzoic şi acenaftenchinonă, în soluţie de acid acetic glacial.

Spectrele IR şi UV au fost executate de Maria Mocanu-Paraschiv cercetător la Institutul de fizică atomică, Bucureşti, Iulian Gabe, cercetător principal la Institutul de chimie „P. Poni" Iaşi şi Elena Harnagea, chimist la Combinatul chimic Borzeşti, cărora le aducem pe această cale multe mulţumiri.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Matei I., Lixandru T., Comaniţă E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960 **VI (X)**, *1 — 2*, p. 171.
2. — St. şi cerc. chim., 1960, **XI**, p. 281.
3. Pfeiffer P., Breith E., Lübbe E., Tsumaki T., Liebigs Ann., 1933, **503**, S. 48.
4. Pfeiffer P., Glaser H., J. prakt. Chem., 1939, **153**, S. 265.
5. Hein F., *Chemische Koordinations Lehre*. S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1954, S. 532, 464.
6. Prasad S., Srivastava K., J. Ind. Chem. Soc., 1958, **35**, p. 653.
7. Хакимов Х., Азизов М. А., Тр. Ташкент. фарм. ин-та, 1960, *2*, стр. 279, (citat după Chem. Abstr., 1962, **56**, p. 4657).
8. Lachowicz B., Monatsh., 1889, **10**, S. 858.
9. Lachowicz B., Bandrowski Fr., Monatsh., 1889, **9**, S. 513.
10. Prasad S., Krishnan V., J. Ind. Chem. Soc., 1958, **35**, p. 352.
11. Voyatzakis Em., Bull. Soc. chim. France, (4), 1932, **51**, p. 670, (citat după Chem., Zentr., 1932, **II**, S. 1605).
12. Lippmann B., Vortmann G., Ber. dtsch. chem. Ges., 1879, **12**, S. 80.
13. Pomey M. E., C. R. Ac. Sci., Paris, 1887, **104**, p. 300.
14. Молодых Л. И., Бородулина А. Г., Изв. Томск. полит. ин-та, *102*, стр. 81, (citat după Chem. Abstr., 1963, **57**, p. 5240).
15. Prasad S., Sharma P. D., J. Proc. Inst. Chemist, 1958, **30**, p. 245, (citat după Chem. Abstr., 1959, **53**, p. 11086).
16. Меншюткин Б., Бутков Н., Уч. зап. анал. физ. хим., 1926, **3**, стр. 405, (citat după Chem. Zentr., 1927, **I**, p. 2650).
17. Spacu Gh. Voichescu P., Z. anorg. Chem., 1941, **245**, S. 341, (citat după Chem. Zentr., 1941, **I**, S. 2367).

18. Spacu Gh., Bul. Soc. Şt. Cluj, 1926, **2**, p. 187.
19. Böhr G., Z. anorg. Chem., 1951. **267**, S. 137, (citat după Chem. Zentr., 1953, S. 161),
20. Böhr G., Kretzer A., Z. anorg. Chem., 1951, **267**, S. 161, (citat după Chem. Zentr., 1953, S. 1613).
21. Pfeiffer P., Ann., 1933, **503**, S. 84.
22. Pfeiffer P., Thielert H., Glaser H., J. prakt. Chem., 1938, **152**, S. 145,
23. Кудрявцев А. С., Савич И. А., Вест. Моск. унив., сер. II, Химия, 1963, *4*, стр. 61.
24. — ЖОХ, 1963, **33**, стр. 3763.
25. Teyssie P., Charette J., J. Spectrochim. Acta, 1963, **19**, p. 1407.

CONDENSATION DE L'ACÉNAPHTENQUINONE AVEC DES AMINES AROMATIQUES EN PRÉSENCE DES SELS MÉTALLIQUES.

Complexes métalliques

(Résumé)

La condensation de l'acénaphtenquinone avec des amines aromatiques en solution d'acide acétique glacial et en présence des sels métalliques, fournit des produits complexes correspondant à une double base Schiff.

Le rôle joué par les sels métalliques lors de la formation de la double base Schiff a été bien précisé, leur présence étant indispensable.

C'est par l'empêchement de la formation d'une double base Schiff de l'acénaphtenquinone qu'on peut justifier l'influence exercée par le facteur stérique sur la réaction de condensation avec l'α- et la β-naphtylamine.

Les produits obtenus sont des complexes de la II-ème espèce selon la classification de Pfeiffer, formés par cyclisation chélatique avec le métal, les deux atomes d'azote fournissant les valences secondaires. Cette manière de former des complexes peut contribuer à la stabilité des produits en présence d'alcalis.

Il est assez remarquable de signaler que certaines réactions ont lieu avec des rendements quantitatif ce qui a permis aux Auteurs d'élaborer des méthodes de dosage quantitatif du zinc et du cobalt avec *p*-anisidine, acide *m*- et *p*-amino-benzoïque et acénaphtenquinone.

Explication des figures

Fig. 1. — Spectre IR de l'acénaphtenquinon-*p*-nitrophénil-imine.
Fig. 2. — Spectre IR de l'acénaphtenquinon-di-(*p*-nitrophénil-imino). $ZnCl_2$.
Fig. 3. — Spectre IR de l'acénaphtenquinon-di-(*p*-oxiphénil-imino). $ZnCl_2$.
Fig. 4. — Spectre UV de l'acénaphtenquinon-di-(*p*-oxiphénil-imino). $ZnCl_2$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 547.541.521

SULFAMIDELE ACIZILOR FENOXIACETICI ŞI FENOXIPROPIONICI

Nota VI

DERIVAŢI SULFAMIDAŢI AI ACIZILOR CLOR-CREZOXIACETICI ŞI CLOR-CREZOXIPROPIONICI

DE

GH. BOTEZ, CORNELIU ONISCU, ECATERINA MERICĂ şi CAMELIA GOREA

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 27—30 iunie 1966

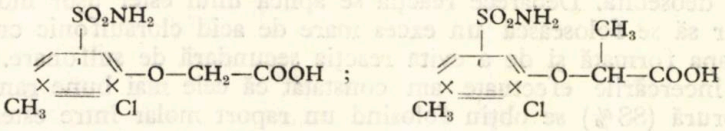
1. Introducere

În ultimele decenii au început să se folosească pe scară largă în agricultură produse cu acţiune ierbicidă şi stimulatoare de creştere din grupa acizilor clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici. Descoperirea proprietăţilor fiziologice ale acestor compuşi este de dată relativ recentă.

Astfel acţiunea ierbicidă sistemică a acidului 2-metil-4-clor-fenoxiacetic (2-M-4-Cl) a fost pusă în evidenţă în anul 1945 de C. Templeman [1]. În anul 1956 B. Lush [2] menţionează că acidul α-(2-metil-4-clor-fenoxi)-propionic (M.C.P.P.) distruge plantele parazite rezistente faţă de alte ierbicide fiind utilizat în multe ţări pentru protecţia culturilor de cereale.

Concomitent s-au studiat şi o serie de derivaţi ai acizilor aril-oxi-alchil-carboxilici care conţin sulf în moleculă [3]...[6]. Astfel de compuşi au proprietăţi sistematice remarcabile şi sînt puţin toxici [7].

Cercetările noastre s-au îndreptat asupra sintezei derivaţilor sulfamidaţi ai acizilor clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici, care au structura generală :



Compuşii cu această structură pot fi consideraţi ca derivaţi ai acidului sulfamic, produs cu bune proprietăţi ierbicide.

Studiile efectuate au ca scop găsirea unor noi stimulatori de creştere cu acţiune sistemică şi toxicitate mică faţă de plantele utile.

În vederea obţinerii lor am aplicat metoda de sinteză elaborată într-o lucrare anterioară [8], care se bazează pe reacţia de clorosulfonare a esterilor etilici ai acizilor clor-crezoxiacetici (sau clor-crezoxipropionici), obţinînd esterii sulfocloruraţi respectivi. Prin amidarea acestora cu exces de amoniac rezultă sulfonamido-clor-crezoxiacetamidele corespunzătoare, din care, prin hidroliză alcalină, se obţin acizii clor-crezoxiacetici-sulfonamidaţi.

Pe de altă parte, esterii sulfocloruraţi la tratare cu 2 mol de amoniac se transformă în esteri sulfonamidaţi, care reacţionează cu hidrazina rezultînd hidrazidele acizilor clor-crezoxiacetici-sulfonamidaţi.

Prin analogie cu hidrazida acidului maleic, care este un stimulator de creştere selectiv [9], se poate prevedea o acţiune asemănătoare şi pentru hidrazidele sintetizate de noi.

2. Rezultatele cercetării

Folosind metoda de sinteză menţionată mai sus, am preparat o serie de derivaţi sulfamidaţi din următoarele grupe:

1. Compuşi sulfamidaţi ai acizilor clor-crezoxiacetici

a) *Derivaţi sulfamidaţi proveniţi din acidul 2-metil-4-clor-fenoxiacetic*

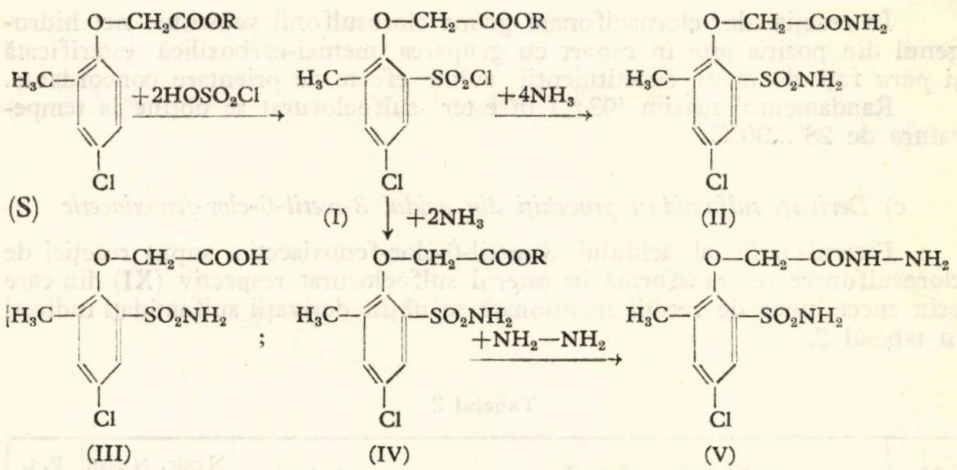
Plecînd de la esterul etilic al acidului 2-metil-4-clor-fenoxiacetic, prin clorosulfonare cu un exces de acid clorsulfonic se obţine 2-metil-4-clor-6-clorosulfonil-fenoxiacetatul de etil (I), din care prin dublă amidare cu amoniac (4 mol) rezultă 2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetamida (II). Aceasta, prin hidroliză alcalină, conduce la acidul 2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic (III).

Pe de altă parte, esterul sulfoclorurat (I) la tratare cu amoniac (2 mol) se amidează numai la grupa clorosulfonil obţinîndu-se 2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetatul de etil (IV), din care prin condensare cu hidratul de hidrazină rezultă hidrazida acidului 2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic (V).

Reacţiile au loc după schema (S).

Pentru sinteza acestor derivaţi reacţia de clorosulfonare prezintă o importanţă deosebită. Deoarece reacţia se aplică unui ester uşor hidrolizabil este necesar să se folosească un exces mare de acid clorsulfonic cu scopul de a lega apa formată şi de a evita reacţia secundară de sulfonare.

Din încercările efectuate am constatat că cele mai bune randamente în sulfoclorură (88%) se obţin folosind un raport molar între ester şi acid de 1/7, conducînd reacţia la temperatura de 40°C, sub agitare bună. Efectuînd reacţia de clorosulfonare la temperaturi mai ridicate randamentul scade datorită hidrolizei grupării esterice.



În aceste condiţii grupa clorosulfonil (SO_2Cl) substituie de preferinţă hidrogenul din poziţia *orto* faţă de gruparea metoxicarboxilică esterificată, al cărei efect în conjugare predomină faţă de clor, deoarece electronii neparticipanţi ai atomului de oxigen sînt mai mobili decît electronii neparticipanţi ai clorului.

Substituţia hidrogenului în poziţia *6* a fost dovedită prin studiul spectrelor în infraroşu (IR), problemă de care ne vom ocupa ulterior.

b) *Derivaţi sulfamidaţi proveniţi din acidul 3-metil-4-clor-fenoxiacetic*

Prin clorosulfonarea esterului etilic al acidului 3-metil-4-clor-fenoxiacetic, urmînd aceeaşi succesiune a reacţiilor ca şi în cazul precedent, s-au sintetizat derivaţii cuprinşi în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr.	Denumirea chimică	Formula brută	N calc. %	N găsit %	P. t. °C
VI	3-metil-4-clor-6-clorosulfonil-fenoxiacetat de etil	$C_{11}H_{12}O_5SCl_2$	—	—	101
VII	3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetamidă	$C_9H_{11}O_4N_2SCl$	10,04	10,23	227
VIII	Acidul 3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic	$C_9H_{10}O_5NSCl$	5,00	4,96	175
IX	3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetat de etil	$C_{11}H_{14}O_5NSCl$	4,54	4,69	143
X	Hidrazida acidului 3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic	$C_9H_{12}O_4N_3SCl$	14,29	14,35	199

În reacţia de clorosulfonare grupa clorosulfonil substituie net hidrogenul din poziţia *orto* în raport cu gruparea metoxi-carboxilică esterificată şi *para* faţă de metil, substituienţii avînd efecte de orientare concordante.

Randamentul maxim (93%) în ester sulfoclorurat se obţine la temperatura de 28°...30°C.

c) *Derivaţi sulfamidaţi proveniţi din acidul 3-metil-6-clor-fenoxiacetic*

Esterul etilic al acidului 3-metil-6-clor-fenoxiacetic supus reacţiei de clorosulfonare se transformă în esterul sulfoclorurat respectiv (XI) din care prin succesiunea de reacţii menţionată se obţin derivaţii sulfamidaţi indicaţi în tabelul 2.

Tabelul 2

Nr.	Denumirea chimică	Formula brută	N calc. %	N găsit %	P. t. °C
XI	3-metil-6-clor-4-clorosulfonil-fenoxi-acetat de etil	$C_{11}H_{12}O_5SCl_2$	—	—	83
XII	3-metil-6-clor-4-amidosulfonil-fenoxi-acetamida	$C_9H_{11}O_4N_2SCl$	10,04	9,88	194
XIII	Acidul 3-metil-6-clor-4-amidosulfonil--fenoxiacetic	$C_9H_{10}O_5NSCl$	5,00	5,12	180
XIV	3-metil-6-clor-4-amidosulfonil-fenoxi-acetat de etil	$C_{11}H_{14}O_5NSCl$	4,54	4,48	134
XV	Hidrazida acidului 3-metil-6-clor-4--amidosulfonil-fenoxiacetic	$C_9H_{12}O_4N_3SCl$	14,29	14,40	205

În reacţia de clorosulfonare a 3-metil-6-clor-fenoxiacetatului de etil grupa clorosulfonil substituie net hidrogenul din poziţia *para* faţă de gruparea metoxi-carboxilică esterificată şi *orto* faţă de metil (orientare concordantă).

Clorosulfonarea se efectuează la temperatura de 33°...35°C, cu un randament de circa 95%.

d) *Derivaţi sulfamidaţi proveniţi din acidul 4-metil-2-clor-fenoxiacetic*

Plecînd de la esterul etilic al acidului 4-metil-2-clor-fenoxiacetic, prin clorosulfonare cu un exces de acid clorosulfonic (la 35°C), aplicînd aceeaşi schemă de reacţie s-au sintetizat compuşii sulfamidaţi cuprinşi în tabelul 3.

În reacţia de clorosulfonare a 4-metil-2-clor-fenoxiacetatului de etil restul clorosulfonil se substituie în cea mai mare parte în poziţia *6*, deci predomină efectul de orientare al grupei metoxi-carboxilice esterificate. Concomitent în această reacţie se formează şi derivatul care are grupa clo-

Tabelul 3

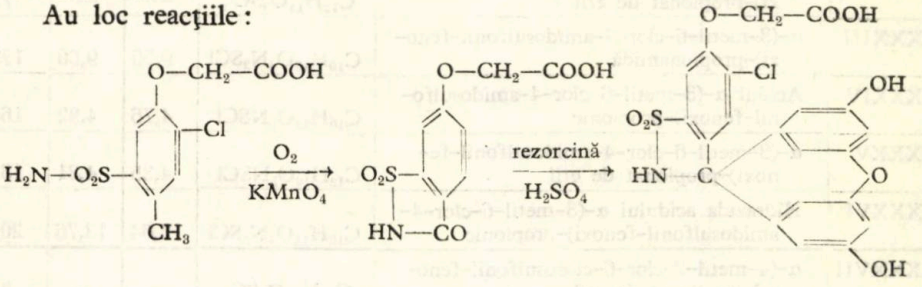
Nr.	Denumirea chimică	Formula brută	N calc. %	N găsit %	P.t. °C
XVI	4-metil-2-clor-6-clorosulfonil-fenoxi-acetat de etil	$C_{11}H_{12}O_5SCl_2$	—	—	73
XVII	4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi-acetamidă	$C_9H_{11}O_4N_2SCl$	10,04	10,22	230
XVIII	Acidul 4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic	$C_9H_{10}O_5NSCl$	5,00	5,10	190
XIX	4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi-acetat de etil	$C_{11}H_{14}O_5NSCl$	4,54	4,63	121
XX	Hidrazida acidului 4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic	$C_9H_{12}O_4N_3SCl$	14,29	14,08	223

rosulfonil substituită în poziția 5, după cum rezultă din studiul spectrelor de absorbție în IR.

Prezența acestui derivat a fost pusă în evidență pe cale chimică în modul următor.

Acidul 4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic (XVIII) în amestec cu acidul 4-metil-2-clor-5-amidosulfonil-fenoxiacetic (așa cum rezultă din reacție) s-a supus oxidării cu permanganat de potasiu, în soluție alcalină diluată, iar după acidulare s-a separat imida sulfobenzoică corespunzătoare (XXI). Aceasta, prin încălzire cu rezorcină în prezența acidului sulfuric concentrat, formează un produs de condensare colorat în roșu, similar zahareinei, care prin alcalinizare cu amoniac diluat dă o fluorescență verde foarte intensă.

Au loc reacțiile:



Reacția zahareinelor este extrem de sensibilă [10] fiind indicată pentru caracterizarea compușilor rezultați prin oxidarea derivaților care conțin în moleculă grupe metil vecine cu grupări sulfonamidice.

2. Compuși sulfamidați ai acizilor α-(clor-crezoxi)-propionici

După cum s-a arătat, acizii α-crezoxi-propionici cloruraţi se folosesc ca ierbicide selective pentru distrugerea plantelor parazite rezistente față de acizii fenoxiacetici cloruraţi.

Tabelul 4

Nr.	Denumirea chimică	Formula brută	N calc. %	N găsit %	P. t. °C
XXII	α-(2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{14}O_5SCl_2$	—	—	58
XXIII	α-(2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionamidă	$C_{10}H_{13}O_4N_2SCl$	9,56	9,62	138
XXIV	Acidul α-(2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{12}O_5NSCl$	4,76	4,50	156
XXV	α-(2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{16}O_5NSCl$	4,35	4,16	92
XXVI	Hidrazida acidului α-(2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{14}O_4N_3SCl$	13,64	13,80	195
XXVII	α-(3-metil-4-clor-6-clorosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{14}O_5SCl_2$	—	—	73
XXVIII	α-(3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionamidă	$C_{10}H_{13}O_4N_2SCl$	9,56	9,43	195
XXIX	Acidul α-(3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{12}O_5NSCl$	4,76	4,67	156
XXX	α-(3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{16}O_5NSCl$	4,35	4,26	114
XXXI	Hidrazida acidului α-(3-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{14}O_4N_3SCl$	13,64	13,85	215
XXXII	α-(3-metil-6-clor-4-clorosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{14}O_5SCl_2$	—	—	77
XXXIII	α-(3-metil-6-clor-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionamidă	$C_{10}H_{13}O_4N_2SCl$	9,56	9,60	198
XXXIV	Acidul α-(3-metil-6-clor-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{12}O_5NSCl$	4,76	4,82	160
XXXV	α-(3-metil-6-clor-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{16}O_5NSCl$	4,35	4,31	139
XXXVI	Hidrazida acidului α-(3-metil-6-clor-4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{14}O_4N_3SCl$	13,64	13,76	202
XXXVII	α-(4-metil-2-clor-6-clorosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{14}O_5SCl_2$	—	—	56
XXXVIII	α-(4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionamidă	$C_{10}H_{13}O_4N_2SCl$	9,56	9,72	180
XXXIX	Acidul α-(4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{12}O_5NSCl$	4,76	4,74	130
XL	α-(4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{12}H_{16}O_5NSCl$	4,35	4,43	99
XLI	Hidrazida acidului α-(4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{10}H_{14}O_4N_3SCl$	13,64	13,71	193

Aceşti compuşi avînd un atom de carbon asimetric apar sub două forme optic active, dextrogiră şi levogiră. Deoarece acţiunea fiziologică este în strînsă dependenţă de izomeria optică studiul lor prezintă importanţă şi sub acest aspect.

Folosind metoda de sinteză menţionată anterior am preparat derivaţii sulfamidaţi ai acizilor α-(clor-crezoxi)-propionici cuprinşi în tabelul 4.

Derivaţii sulfamidaţi ai acizilor clor-crezoxi-propionici sînt substanţe cristalizate, albe, cu puncte de topire caracteristice. Esterii sulfocloruraţi se solvă uşor în acetonă, mai greu în etanol.

Acizii sulfamidaţi se dizolvă la cald în apă şi în alcool diluat (50%). Cu hidroxizii şi carbonaţii alcalini formează sărurile corespunzătoare, solubile în apă.

3. Spectrele în infraroşu ale derivaţilor sulfamidaţi proveniţi din acizii clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici

Pentru a preciza structura chimică s-au studiat spectrele în IR ale unora dintre compuşii sintetizaţi. Aparatul folosit pentru înregistrarea spectrelor a fost un spectrofotometru U.R.-10, Karl Zeiss-Jena, utilizîndu-se prisme de KBr, NaCl şi LiCl. Substanţele au fost examinate în emulsie de nujol.

Principalul indiciu care arată poziţia substituienţilor în nucleul aromatic îl constituie vibraţiile de deformaţie în afara planului, a legăturilor C—H [11].

Frecvenţa acestor vibraţii depinde de numărul şi poziţia substituienţilor din nucleu şi este independentă de natura substituienţilor [12].

La compuşii tetrasubstituiţi se poate face o diferenţiere prin compararea spectrelor de absorbţie a izomerilor substituiţi în poziţiile *1, 2, 3, 4*; *1, 2, 4, 5* şi *1, 2, 3, 5* (singurii posibili). Vibraţiile de deformaţie caracteristice tetrasubstituţiei apar în regiunea 800...900 cm^{-1}.

Deoarece în toate sintezele efectuate am plecat de la substanţe cunoscute avînd trei substituienţi izolaţi în nucleu nu este posibilă obţinerea derivaţilor substituiţi în poziţiile *1, 2, 3, 4.*

Se pune astfel problema stabilirii poziţiei grupei sulfonamidice în molecula derivaţilor în care cei trei substituienţi preexistenţi în nucleu sînt fixaţi în poziţiile *1, 2, 4.*

În fig. 1 şi 2 se redau spectrele IR ale acizilor α-(2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (XXIV) şi α-(4-metil-2-clor-6-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (XXXIX), pe care le vom analiza comparativ.

În spectrele ambilor compuşi apar benzile caracteristice vibraţiilor de deformaţie ν_{C-H} la 808 cm^{-1} şi la 850 cm^{-1}, fapt ce indică tetrasubstituţia în poziţiile *1, 2, 3, 5.* Aceste valori ale numerelor de undă concordă perfect cu cele găsite de R. Royer, care a studiat spectrele IR ale unor derivaţi fenolici tetrasubstituiţi [13].

Pe această bază se poate afirma că în molecula compuşilor (XXIV) şi (XXXIX) grupa sulfonamidică este substituită în poziţia *6* în nucleul aromatic.

Se observă însă că în spectrul derivatului (XXXIX) apare în plus o bandă de intensitate medie la 885 cm^{-1}, caracteristică substituţiei în poziţiile *1, 2, 4, 5*. În acest caz avem de-a face cu un amestec de izomeri în care se găseşte şi derivatul cu grupa sulfonamidică în poziţia *5*.

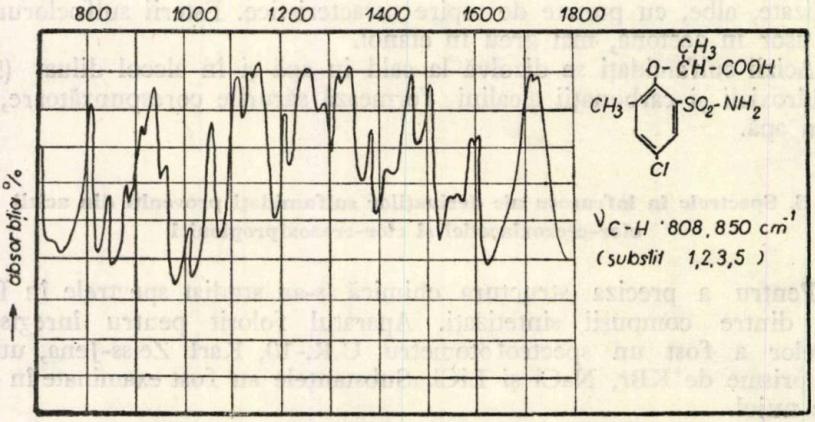


Fig. 1

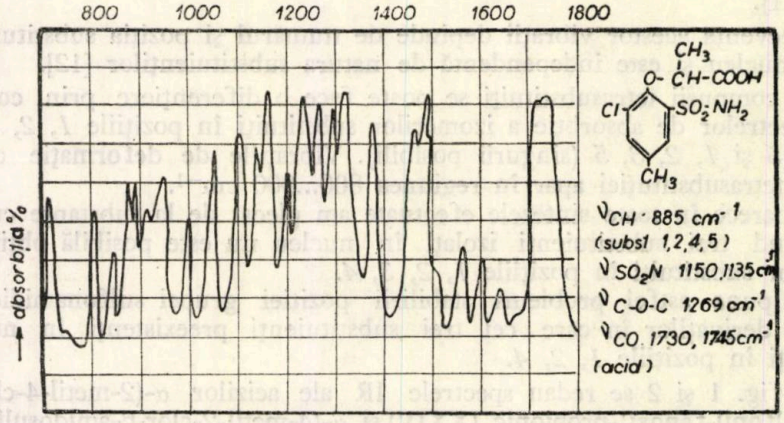


Fig. 2

Se confirmă astfel că în reacţia de clorosulfonare a 4-metil-2-clor-fenoxipropionatului de etil, grupa clorosulfonil se substituie în nucleu atît în poziţia *6* cît şi în poziţia *5*, rezultînd un amestec de sulfocloruri izomere, fapt dovedit de noi şi pe cale chimică.

Această comportare în reacția de clorosulfonare se poate explica prin efectul $+I$ al grupei metil din poziția *4*.

În continuarea spectrelor apar benzile caracteristice vibrațiilor grupelor $SO_2-N=$ la 1 150 cm^{-1} și 1 345 cm^{-1}, urmează $-O-$ eteric la 1 269 cm^{-1} iar apoi carbonilul acid ($C=O$) la 1 730 și 1 745 cm^{-1}; din analiza acestora rezultă că structura compușilor este cea prevăzută.

4. Acțiunea fiziologică

Compușii sintetizați de noi pot fi considerați derivați ai acidului 2M-4C (sau 2M-4CP) în care un hidrogen din nucleu este înlocuit cu un rest al acidului sulfamic. Deoarece ambele componente au acțiune stimulatoare de creștere era de așteptat ca substanțele cu această structură să fie dotate cu proprietăți asemănătoare.

Avînd în vedere și faptul că acțiunea stimulatoare de creștere a celor două componente se poate cumula printr-un efect sinergic molecular, studiul acțiunii fiziologice al acestor compuși este deosebit de promițător.

Cercetările preliminare asupra proprietăților fiziologice ale compușilor sintetizați s-au efectuat prin testul de creștere a secțiunilor de plante, pe un mediu nutritiv agarizat, la care s-au adăugat sărurile de sodiu ale acizilor clor-crezoxiacetici sulfamidați, în cantități extrem de mici.

S-a constatat că unii dintre produșii menționați posedă o acțiune stimulatoare de creștere remarcabilă, nu sînt toxici și pot fi utilizați cu succes în acest scop.

Cercetările continuă și vor face obiectul unei alte lucrări.

3. Partea experimentală

a) *2-Metil-4-clor-6-clorosulfonil-fenoxiacetatul de etil (I)*

Peste 80 g acid clorsulfonic (0,7 mol), răcit la 8°...10°C, se adaugă sub agitare 22 g 2-metil-4-clor-fenoxiacetat de etil. Se ridică apoi temperatura la 40°C și se menține agitarea timp de 30 min, pentru perfectarea reacției.

Masa de reacție se răcește (10°...15°C) și se picură sub agitare peste 200 g gheață pisată în vederea descompunerii excesului de acid clorsulfonic și precipitării esterului sulfoclorurat. Precipitatul filtrat se spală cu apă rece pînă la reacție neutră și se usucă pe hîrtie de filtru în aer liber. Produsul se purifică din etanol (1 g la 10 ml). Randament = 88%.

Se prezintă sub formă de cristale albe cu p. t. = 61,5°C; ușor solubil în acetonă la rece și în alcooli la ușoară încălzire.

$C_{11}H_{12}O_5SCl_2$ (327,08)	Cl %*)
Calculat	10,80
Găsit	10,85

b) *2-Metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetamida (II)*

10 g ester sulfoclorurat se tratează cu 25 ml amoniac (25%), se amestecă intim și se fierbe sub reflux, pe baie marină, timp de o oră. Se filtrează părțile insolubile, iar soluția amoniacală se ține la rece 12 ore. Produsul cristalizat se filtrează și se spală cu apă pentru îndepărtarea clorurii de amoniu. Randament = 97%.

*) clor hidrolizabil.

Produsul se purifică din etanol diluat (20%), obţinînd cristali albi, prismatici, cu p. t. = 234°C.

$C_9H_{11}O_4N_2SCl$ (278,68)

	N %
Calculat	10,04
Găsit	10,11 ; 9,94

c) *Acidul 2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic (III)*

5,5 g din produsul (II) se supun hidrolizei prin încălzire sub reflux cu 60 ml soluţie hidro-alcoolică (50%) de NaOH (3% concentraţie), timp de o oră. Soluţia obţinută se purifică cu cărbune activ, se recuperează alcoolul şi se acidulează cu HCl la pH = 2. Produsul filtrat se purifică prin recristalizare din apă; cristali prismatici, cu p. t. = 189°C, solubili în etanol şi alcalii.

$C_9H_{10}O_5NSCl$ (279,8)

	N %
Calculat	5,00
Găsit	5,03

d) *2-Metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetatul de etil (IV)*

10 g ester sulfoclorurat se solvă în 20 ml acetonă şi se tratează sub agitare cu cantitatea necesară de amoniac (25%). Reacţia fiind exotermă se răceşte sub 30°C, pentru a evita amidarea grupei esterice. După 20 min de agitare masa de reacţie se diluează cu 100 ml apă iar produsul precipitat se filtrează şi se recristalizează din alcool (90%). Se prezintă sub forma unor cristale aciculare, cu p. t. = 151°C; solubilă la cald în acetonă, esteri, etanol.

$C_{11}H_{14}O_5NSCl$ (307,73)

	N %
Calculat	4,54
Găsit	4,51; 4,53

e) *Hidrazida acidului 2-metil-4-clor-6-amidosulfonil-fenoxiacetic (V)*

3 g ester sulfonamidat (IV) se solvă în 15 ml etanol, se tratează cu 1 g hidrat de hidrazină şi se încălzeşte sub reflux timp de 20 min. La răcire produsul cristalizează; se filtrează şi se purifică din etanol (50%). Cristale prismatice, cu p. t. = 213°C, insolubile în apă şi solvenţi la rece, puţin solubili la cald în apă (2%). Reacţionează cu aldehidele şi cetonele formînd hidrazonele corespunzătoare; cu HCl formează clorhidratul, solubil în apă.

$C_9H_{12}O_4N_3SCl$ (293,70)

	N %
Calculat	14,30
Găsit	14,22

Toţi derivaţii sulfamidaţi ai acizilor clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici se prepară în condiţiile arătate la primii cinci compuşi; în tabelele 1...4 se dau punctele de topire şi analizele substanţelor sintetizate.

4. Concluzii

Din cercetările efectuate referitoare la sinteza unor derivaţi ai acizilor clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici se desprind următoarele concluzii:

1. Esterii acizilor clor-crezoxiacetici şi clor-crezoxipropionici se pot clorosulfona la temperaturi moderate (30°...40°C) cu un exces de acid clorsulfonic, rezultînd derivaţii sulfocloruraţi ai esterilor respectivi, cu randamente bune (93...98%).

2. Esterii sulfoclorurați reacționează ușor cu amoniacul rezultînd esterii sulfonamidați corespunzători, care pot fi transformați prin reacții cunoscute în amide, hidrazide și acizi sulfonamidați.

3. Din studiul spectrelor în IR s-a constatat că esterul acidului 2M-4C se clorosulfonează în poziția *6*, deci gruparea metoxi-carboxilică esterificată orientează grupa clorosulfonil în poziția *orto*.

4. În reacția de clorosulfonare a 4-metil-2-clor-fenoxiacetatului de etil grupa clorosulfonil se substituie atît în poziția *6* cît și în poziția *5*, fapt ce se constată atît din studiul spectrelor în IR cît și pe cale chimică.

5. Cercetările preliminare asupra proprietăților fitohormonale ale compușilor sintetizați au arătat că unii dintre aceștia posedă acțiune stimulatoare de creștere remarcabilă.

6. S-au sintetizat 41 de compuși noi, care pot găsi utilizări practice ca stimulatori de creștere ai plantelor.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de industrii organice

BIBLIOGRAFIE

1. Popa C., Drimuș R., *Chimia produselor fitofarmaceutice*. Buc., 1965, p. 328.
2. Lush B. G., Proc. British Weed Control, 1956, **1**, p. 625.
3. Veldstra H., Kruyt W., Rec. trav. Chim., 1954, **73**, p. 23.
4. *** Brevet S.U.A., 274819, (cf. C. A, 1956, **50**, p. 11600).
5. *** Brevet suedez, 158352, (cf. C. A, 1956, **50**, p. 18454).
6. *** Brevet italian, 529529, (cf. C. A., 1958, **52**, p. 4291).
7. Harris W. D., Zukel J. W., Agr. Food Chem., 1954, **2**, p. 140.
8. Botez Gh., Oniscu C., Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIII)**, *3—4*, p. 139.
9. Donald E. H., *Chemistry of the Pesticides*. London, 1955, p. 386.
10. Lebeau P., Janot M., *Traité de pharmacie chimique*. T. **III**, Paris, 1956, p. 1755.
11. Bellamy J. L., *Ultrarot-Spektrum und chemische Konstitution*. Darmstadt, 1955, S. 63.
12. Avram M., Mateescu Gh. D., *Spectroscopia în infraroșu aplicată în chimia organică*. Ed. Tehn., Buc., 1966, p. 271.
13. Royer R., Bisagni E., Hudry Cl., Bull. Soc. Chim., 1963, *179*, p. 1006.

SULFAMIDES OF THE PHENOXYACETIC AND PHENOXYPROPYONIC ACIDS
Note VI

Sulfamidated Derivatives of the Chloro-crezoxyacetic and Chloro-crezoxy α-propyonic acids

(Summary)

In order to discover new compounds with plant-growth stimulating capacity the authors synthetised a row of sulfamidated derivatives resulting from chloro-crezoxyacetic and chloro-crezoxypropyonic acids.

For the preparation of these compounds the authors started from ethylic esters of the chloro-crezoxyacetic and chloro-crezoxypropyonic acids which were submitted to the chloro-sulfonation with an excess of the chlorosulfonic acid (7 : 1 by wt) at a moderate temperature, obtaining in this way esters of the respective chlorosulfonyl acids.

By amidating these compounds with 25% NH_4OH or the primary and secondary amines are obtained the respective sulfamidated esters, which can be changed by known reactions into amides, hydrazides and sulfamoyil acids.

Studying the infrared spectra it was established that in the chlorosulfonation of the ester of 2M–4C acid the chlorosulfonyl group was fixed in the *6*–th position, therefore the esterified carbomethoxy group orientates the chlorosulfonyl group in the *ortho* position with respect to it.

On the other hand, in the chlorosulfonation of the Et–4–methyl–2–chlorophenoxypropyonat the chlorosulfonyl group replaced the H both in the *6*–th position and in the *5*–th position, fact which results from the study of the infrared spectra as well as in the chemical way.

The authors synthetised 41 new compounds out of which some have plantgrowth stimulating properties.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 547.497.1

TIOSEMICARBAZIDE ALE ACIZILOR BIBAZICI ŞI PRODUŞI DE CICLIZARE (III)

DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
EUGENIA COMANIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară am realizat sinteza unei serii de acil-tiosemicarbazide-4-substituite, plecînd de la hidrazidele unor acizi monobazici, prin reacţia cu izosulfocianaţi [1].

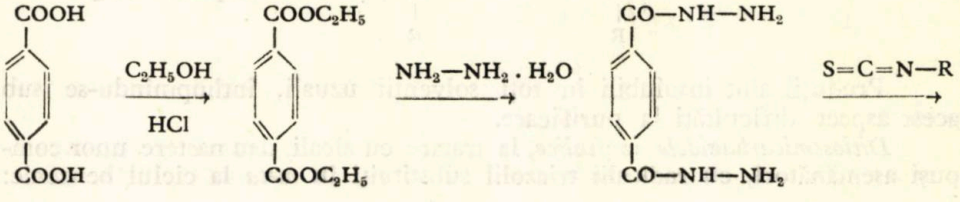
Lucrarea de faţă cuprinde cercetările noastre legate de comportarea hidrazidelor acizilor bibazici aromatici faţă de aceiaşi reactanţi.

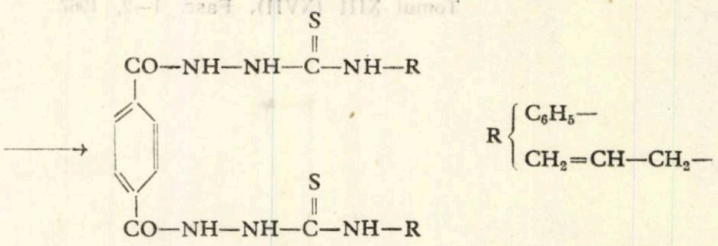
2. Partea teoretică

Literatura conţine indicaţii asupra preparării unor tiosemicarbazide obţinute din dihidrazidele acizilor alifatici cu catenă lungă [2], [3].

Noi am cercetat *reacţia hidrazidei acidului tereftalic şi izoftalic* cu izosulfocianatul de fenil, *p*-tolil şi alil.

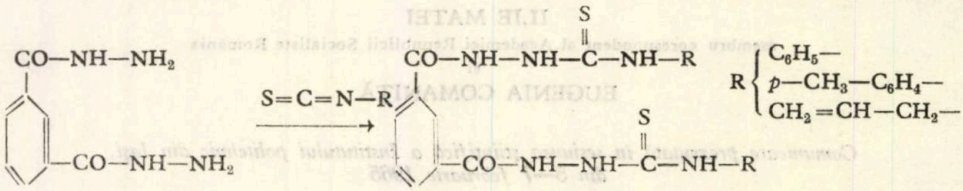
Acidul tereftalic, esterificat şi apoi *transformat în dihidrazidă,* reacţionează cu izosulfocianatul de fenil şi alil, obţinîndu-se ditiosemicarbazide 4-substituite cu structura:





Produşii rezultaţi sînt insolubili în aproape toţi solvenţii uzuali, cu excepţia dimetilformamidei, care îi solvă la încălzire.

În mod analog, *dihidrazida izoftalică* conduce la alte trei ditiosemicarbazide conform reacţiei:

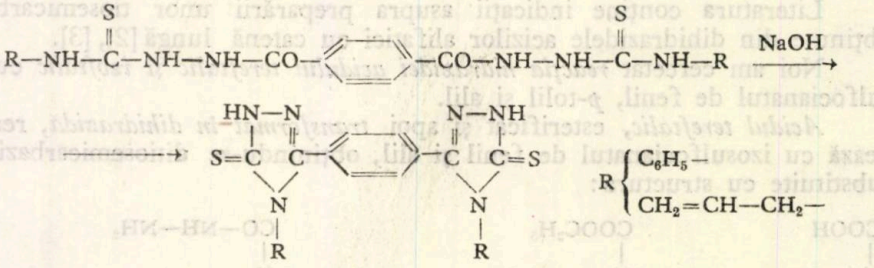


Produşii se purifică mai uşor decît derivaţii de acid tereftalic, prin folosirea alcoolului etilic ca solvent.

Aplicînd acestor tiosemicarbazide derivate din acizi bibazici *metoda de ciclizare cu alcali* am obţinut *compuşi* cu structură mai deosebită, *avînd două cicluri triazolice* separate printr-un nucleu benzenic.

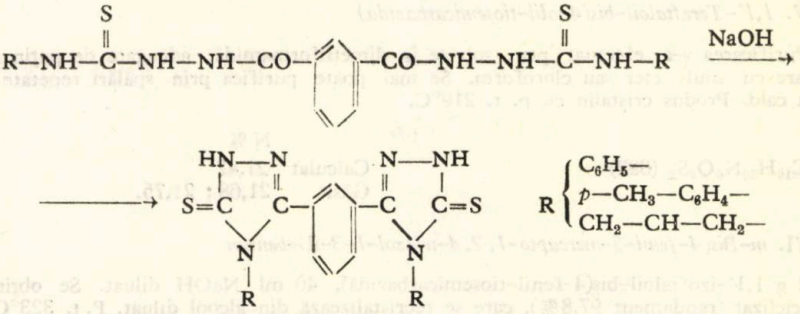
Sînt cunoscuţi în literatură ditriazoli, care sînt constituiţi din două nuclee triazolice legate direct între ele [4]...[6] sau alţi ditriazoli uniţi prin C_3 [7].

De la *tiosemicarbazidele tereftalice, prin ciclizare cu alcali* se formează compuşi în care două cicluri triazolice apar ca substituenţi în *para* la nucleul benzenic:



Produşii sînt insolubili în toţi solvenţii uzuali, întîmpinîndu-se sub acest aspect dificultăţi la purificare.

Ditiosemicarbazidele izoftalice, la tratare cu alcali, dau naştere unor compuşi asemănători, cu radicalii triazolil substituiţi în *meta* la ciclul benzenic:



Derivaţii *m*-ditriazolil-benzenului, spre deosebire de compuşii *p*-substituiţi, sînt substanţe solubile în alcool, din care se pot şi recristaliza.

3. Partea experimentală

I. *1,1'-Izoftaloil-bis(4-fenil-tiosemicarbazida)*

2,1 g dihidrazidă izoftalică, 2,92 g izosulfocianat de fenil, 50 ml alcool etilic. La începutul încălzirii se obţine o soluţie clară, din care tiosemicarbazida se separă sub formă cristalină. Se obţin 4,9 g (randament 97,6%). Se recristalizează din alcool diluat. P. t. 207°C.

		N%
$C_{22}H_{20}N_6O_2S_2$ (464)	Calculat	18,10
	Găsit	18,21; 18,27.

II. *1,1'-Izoftaloil-bis(4-p-tolil-tiosemicarbazida)*

Se procedează ca la compusul anterior. Se purifică prin solvire în alcool şi adăugare de apă pînă cînd soluţia se tulbură. Produs cristalin cu p. t. 180°C.

		N %
$C_{24}H_{24}N_6O_2S_2$ (492)	Calculat	17,07
	Găsit	17,31; 17,42.

III. *1,1'-Izoftaloil-bis(4-alil-tiosemicarbazida)*

Se recristalizează din alcool diluat. P. t. 210°C.

		N %
$C_{16}H_{20}N_6O_2S_2$ (392)	Calculat	21,42
	Găsit	21,62; 21,77.

IV. *1,1'-Tereftaloil-bis-(4-alil-tiosemicarbazida)*

Se purifică prin solvire în dimetilformamidă la uşoară încălzire pe baie de apă şi precipitare cu alcool metilic. P. t. 212°C.

		N %
$C_{22}H_{20}N_6O_2S_2$ (464)	Calculat	18,10
	Găsit	18,31; 18,45.

V. *1,1'-Tereftaloil-bis(4-alil-tiosemicarbazida)*

Purificarea s-a efectuat prin solvire în dimetilformamidă, adăugare de puţin alcool şi precipitare cu mult eter sau cloroform. Se mai poate purifica prin spălări repetate cu acid acetic la cald. Produs cristalin cu p. t. 219°C.

		N%
$C_{16}H_{20}N_6O_2S_2$ (392)	Calculat	21,42
	Găsit	21,68; 21,75.

VI. *m-Bis(4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol-1-3-il)-benzen*

2 g 1,1'-izoftaloil-bis(4-fenil-tiosemicarbazidă), 40 ml NaOH diluat. Se obţine 1,8 g produs ciclizat (randament 97,8%), care se recristalizează din alcool diluat. P. t. 323°C.

		C%	H%	N%
$C_{22}H_{16}N_6S_2$ (428)	Calculat	61,68	3,73	19,62
	Găsit	61,49	3,85	19,83
		61,42	3,91	19,89.

VII. *m-Bis(4-p-tolil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol-3-il)-benzen*

Produsul recristalizat din alcool etilic; are p. t. 284°C.

		N%
$C_{24}H_{20}N_6S_2$ (456)	Calculat	18,42
	Găsit	18,47; 18,68.

VIII. *m-Bis(4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol-3-il)-benzen*

Se purifică prin solvire în alcool, adăugare de apă şi resolvirea precipitatului obţinut la cald. Cristali aciculari, lucioşi, cu p. t. 227°C.

		C%	H%	N%
$C_{16}H_{16}N_6S_2$ (356)	Calculat	53,93	4,49	23,59
	Găsit	53,73	4,54	23,68
		53,86	4,66	23,75.

IX. *p-Bis(4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol-3-il)-benzen*

Produsul se purifică prin solvire în dimetilformamidă, la care se adaugă puţin metanol şi mult eter. P. t. 305°C.

		C%	H%	N%
$C_{22}H_{16}N_6S_2$ (428)	Calculat	61,68	3,73	19,62
	Găsit	61,12	3,97	19,88
		61,09	4,12	19,94.

X. *p-Bis(4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol-3-il)-benzen*

Purificarea s-a efectuat ca la compusul anterior. Cristali cu p. t. 300°C.

		C%	H%	N%
$C_{16}H_{16}N_6S_2$ (356)	Calculat	53,93	4,49	23,59
	Găsit	53,28	4,75	23,38
		53,34	4,82	23,78.

4. Concluzii

1. S-a studiat comportarea unor dihidrazide aromatice în reacţia cu izosulfocianaţi. S-au preparat pentru prima oară ditiosemicarbazide aromatice plecînd de la dihidrazida izoftalică şi tereftalică.

2. Aplicînd acestor tiosemicarbazide metoda de ciclizare cu alcali s-au obţinut compuşi cu structură deosebită, avînd cicluri triazolice separate printr-un nucleu benzenic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Matei I., Comaniţă E., Bul., Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3–4*, p. 175.
2. Buu-Hoi N. P., Xuong N. D., Gazave J. M., Schembri L., Nam N. H., Long C. T., Bull. Soc. chim. France, 1956, p. 363.
3. Buu-Hoi N. P., Xuong N. D., Nam N. H., C. r., Ac. Sci., Paris, 1954, **238**, p. 295.
4. Bladin J. A., Ber. dtsch. chem. Ges., 1889, **22**, S. 3114.
5. Fischer E., Müller F., Ber. dtsch. chem. Ges., 1894, **27**, S. 185.
6. Rinman E., Ber. dtsch. chem. Ges., 1897, **30**, S. 1193.
7. Klingsberg E., J. Amer. Chem. Soc., 1958, **80**, p. 5786.

THIOSEMICARBAZIDES DES ACIDES BIBASIQUES ET PRODUITS DE CYCLISATION

(Résumé)

On a étudié le comportement de certains hydrazides aromatiques dans la réaction avec des isothiocyanates. C'est pour la première fois qu'on a préparé des dithiosemicarbazides aromatiques à partir des dihydrazides isophtalique et téréphtalique.

En appliquant aux thiosemicarbazides ainsi préparées la méthode de cyclisation avec des alcalis, on a obtenu des composés avec une structure remarquable, contenant deux cycles triazoliques séparés par un noyau benzénique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 66.093.6 ; 675.03

CERCETĂRI PRIVIND CINETICA USCĂRII PIEILOR

Nota III

USCAREA PRIN CONVECŢIE

DE

M. MARINESCU şi EMIL MATEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

C. FOLOSIREA DATELOR EXPERIMENTALE LA CALCULUL PROCESULUI DE USCARE A PIEILOR [1])

1. Calculul procesului de uscare

Deoarece dintre pieile studiate boxul cu faţa corectată este mai valoros şi se fabrică în cantitate mai mare, în cele ce urmează ne referim la uscarea lui, întins pe rame într-un uscător tunel cu opt zone şi recircularea aerului pe zone.

Conform [1, fig. 6, curba *3*], la un regim constant de uscare, am avut: $t_{us} = 40°C$, $t_{um} = 26°C$, $\varphi = 30{,}6\,\%$, $v = 1$ m/s şi $\gamma_{aer} = 1{,}09$ kg/m^3. Aplicînd formula (4) [2] umiditatea de echilibru a pielii va fi $w_e = 14{,}3\,\%$.

După aceeaşi curbă se constată că $N = 1{,}18\,\%$/min, $w_1 = 155{,}6\,\%$, $w_c = 50\,\%$, $w_2 = 15\,\%$ şi $\tau = 200$ min. Pentru prima perioadă de uscare $w_2 = w_c$ şi $\tau = 90$ min. Din ecuaţia dreptei (13) [2] pentru $x^m = 0$, în cazul datelor obţinute experimental se determină coeficientul $b = 0{,}85$.

Aplicînd relaţia (14) [2] se obţine valoarea coeficientului de schimb de umiditate $\beta = 1{,}003$ m/h.

Deoarece x^m reprezintă expresia convenţională a mărimilor integralelor din ecuaţia (12) [2] împărţite la $w_1 - w_2$, atunci cînd $m = 1$, rezultă:

$$x = \frac{2{,}3}{w_1 - w_2} \log \frac{w_1 - w_e}{w_2 - w_e},$$

[1]) Partea experimentală a fost publicată în [1] iar partea teoretică în [2].

şi deci valoarea coeficientului a din ecuaţia (13) [2], pentru $\tau = 200$ min, este $a = 18{,}68 \cong 19$.

Cu valorile lui a şi N cunoscute se determină coeficientul $A = 22$.

Suprafaţa medie a pieilor fiind $S = 109{,}4$ cm², rezultă pentru greutatea probei uscate $G_s = 11{,}73$ g. Potenţialul de uscare este $\varepsilon = t_{us} - t_{um} = 14°C$, viteza de uscare în prima perioadă fiind 1,18 %/min sau $N = 70{,}8$ %/h, iar eliminarea umidităţii făcîndu-se pe ambele feţe ale probei atunci valoarea lui k din ecuaţia (19) [2] este $k = 16$.

Înlocuind valoarea lui N în ecuaţia (12) [2] se obţine:

$$\tau = 0{,}85\left[50{,}6 \log\frac{w_1 - w_e}{w_2 - w_e} + 1{,}003\,(w_1 - w_2)\right].$$

Deci:

$$\frac{1}{N} = \frac{100\,G_s}{kS\varepsilon\sqrt{\vartheta\gamma}}.$$

Pentru o piele tip 20 kg tăbăcită în crom, în medie $G_s/S = 0{,}9$ şi deci, în aceste condiţii

$$\frac{1}{N} = \frac{5{,}6}{\varepsilon\sqrt{\vartheta\gamma}}.$$

În acest caz ecuaţia generală a timpului de uscare este:

$$\tau = \frac{5{,}6}{\varepsilon\sqrt{\vartheta\gamma}}\left[50{,}6 \log\frac{w_1 - w_e}{w_2 - w_e} + 1{,}003\,(w_1 - w_2)\right] \text{ [min]}.$$

Pentru o partidă oarecare de piei de box ce trebuie uscată, considerăm umiditatea iniţială a pielei $w_0 = 160$ % iar cea finală o admitem $w_2 = 15$ %; temperatura pielei ce intră în uscător $\vartheta = 15°C$ şi greutatea pielei uscate $G_s = 1{,}170$ kg/buc. $\left(\frac{1}{2}\text{ dintr-o piele aşa cum intră în uscător}\right)$. În baza determinărilor experimentale efectuate recomandăm următoarele temperaturi ale agentului de uscare: $t_{us} = 60°C$ şi $t_{um} = 51°C$, care pot scădea treptat pînă la $t_{us} = 45°C$ şi $t_{um} = 29°C$.

Conform relaţiei (12) din [2] şi a datelor obţinute, timpul de uscare rezultă $\tau = 225$ min.

Temperaturile termometrului umed trebuie considerate adiabatice, dar deoarece corecţia este prea mică (0,358°C), o vom neglija. Perioada de încălzire a pielei, scurtă, la $t_{um} = 51°C$, o vom lua în considerare prin introducerea temperaturii iniţiale convenţionale ω_1, determinată prin:

$$\omega_1 = \omega_0 + \eta\,(100\,c_s + \omega_0)\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{i_v - \vartheta_1} = 164{,}31\ \%,$$

unde: $\eta = 0{,}4$ — căldura specifică a pielii uscate, $c_s = 0{,}33$ kcal/kg °C, $\vartheta_1 = t_{um} = 51°C$, $\vartheta_0 = 15°C$, $i_v = 595 + 0{,}47\,t = 628$ kcal/kg.

După regimul recomandat, potențialul de uscare al aerului ce intră în prima zonă este $\varepsilon_1^{I} = 9°C$ și a aerului ce intră în ultima zonă $\varepsilon_1^{VIII} = 16°C$. Admitem pentru aerul ce iese din prima zonă $\varepsilon_2^{I} = 2°C$, deci potențialul mediu de uscare pentru prima zonă este $\varepsilon_m^{I} = 5{,}5°C$.

Pentru următoarele zone, potențialul se mărește treptat. Admitem inițial următoarele potențiale medii de uscare preliminarii, pe zone: 5°C, 5°C, 5°C, 6°C, 8°C, 9°C, 11°C și 14°C. În acest caz potențialul mediu va fi $\varepsilon_{med}^{I...VIII} = 6{,}8\,°C$.

Cunoscînd w_1, w_2, $\varepsilon_{med}^{I...VIII}$, v, $\gamma = 1{,}09$ kg/m² h și înlocuindu-le în ecuația generală a timpului de uscare pentru diferite valori ale lui w_2 (pînă la $w_2 = 15\,\%$), obținem date cu ajutorul cărora construim curba de uscare teoretică *1* (fig. 1). Durata uscării fiind 210 min, împărțind axa absciselor în opt părți egale obținem timpul de ședere al pielei într-o zonă, egal cu 26 min și 20 sec. În conformitate cu această curbă se obține o repartiție a umidității valabilă pentru cazul cînd potențialele sînt egale ($\varepsilon_m^{I...VIII} = 6{,}8°C$). Pentru potențialele medii de uscare admise preliminar, timpul de ședere al pielei în zone va varia proporțional cu $\varepsilon_m^{I...VIII}$.

Deci:

$$\tau = 26{,}2\,\frac{\varepsilon_m^{I...VIII}}{\varepsilon_{preliminar}}.$$

Cu timpul de uscare calculat corespunzător umidităților obținute după prima curbă se construiește curba *2* (fig. 1), cu ajutorul căreia se determină umiditatea pielii la ieșirea din zonă. Pentru o repartiție mai uniformă a umidității alegem la $\tau = 157$ min, $w = 44\,\%$ și prin acest punct trasăm curba *3* (fig. 1), pentru care se obține o nouă variație a umidității.

Proporțional cu micșorarea umidității pielii se va mări conținutul de umiditate al aerului în zonele respective. În conformitate cu repartiția adoptată a umidității materialului, trebuie determinate exact și potențialele medii de uscare pentru a asigura timpul de uscare τ pentru fiecare zonă. Folosind ecuația generală a timpului de uscare, în care permutăm pe τ și ε, se obține relația de calcul:

$$\varepsilon_m^{zonă} = \frac{5{,}6}{\tau\sqrt{\vartheta\,\gamma}}\left[50{,}6\,\log\frac{w_1 - w_e}{w_2 - w_e} + 1{,}003\,(w_1 - w_2)\right],$$

rezultatele fiind prezentate în tabelul 1.

În calcule s-a considerat umiditatea de echilibru finală a pielei; în celelalte zone ea va fi mai ridicată și va influența timpul de uscare. În acest scop mărim puțin potențialele medii pe zone ε_m. Anume, vom avea pe zone: 5°C, 5°C, 5°C, 5°C, 6°C, 7°C, 9°C și 14°C.

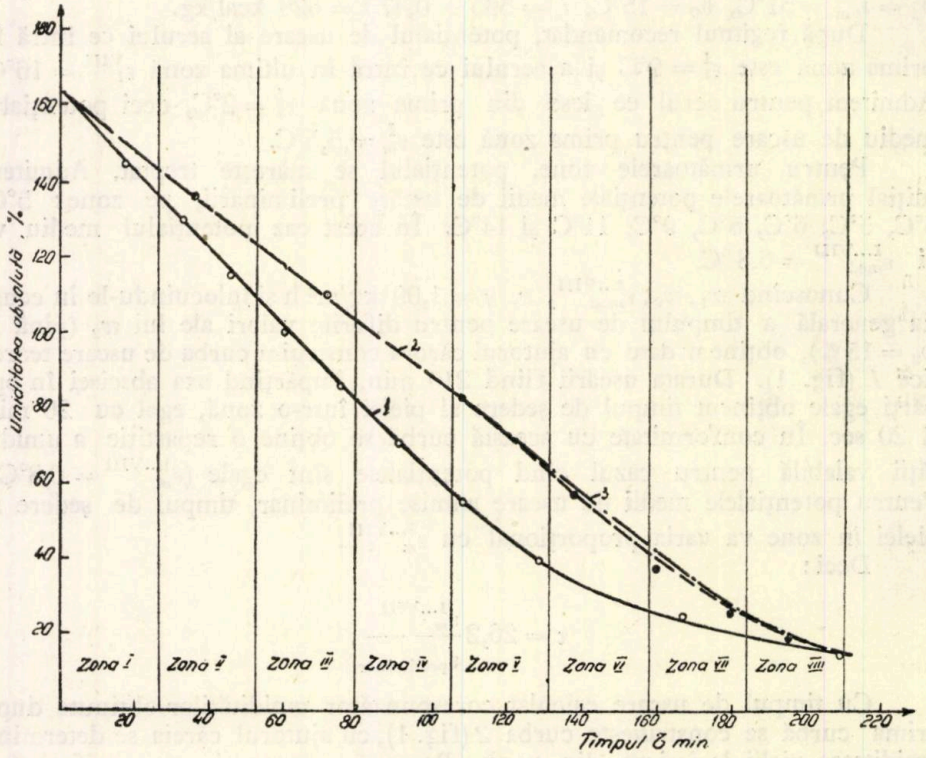


Fig. 1

Tabelul 1

Zona	$w_1 - w_e$	$w_2 - w_e$	$\log \frac{w_1 - w_e}{w_2 - w_e}$	$50{,}6 \log \frac{w_1 - w_e}{w_2 - w_e}$	$w_1 - w_2$	$4+5$	$\frac{5{,}6}{26{,}2\sqrt{\vartheta\gamma}}$	$\varepsilon_m^{\text{zonă}}$ (6×7)
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
I	150,0	129,7	0,064	3 24	20	23,24	0,245	4,75
II	129,7	109,7	0,073	3,70	20	23,70	0,245	4,85
III	109,7	89,7	0,087	4,41	20	24,41	0,245	5,00
IV	89,7	69,7	0,110	5,56	20	25,36	0,245	5,22
V	69,7	49,7	0,147	7,45	20	27,45	0,245	5,63
VI	49,7	29,7	0,224	11,33	20	31,33	0,245	6,40
VII	29,7	10,7	0,444	22,50	19	41,50	0,245	8,50
VIII	10,7	0,7	1,185	57,50	10	67,50	0,245	13,70

2. Parametrii agentului de uscare

Întrucît temperatura materialului variază puţin pe zone, se poate considera că procesul de uscare are loc după linia $t_a = \text{const}$. Parametrii aerului pentru prima zonă de intrare a aerului sînt: $t_{us} = 60°C$ şi $t_{um} = 51°C$, deci $\varepsilon_1^I = 9°C$. În aceste condiţii se determină din diagrama ε-d conţinutul de umiditate $d_1^I = 88{,}5$ g/kg aer uscat. Pentru $\varepsilon_2^I = 2{,}5°C$ şi $t_a^{um} = 51°C$, din aceeaşi diagramă se determină $d_2^I = 92{,}5$ g/kg aer uscat.

Notînd cu $d_1^{zonă}$ şi $d_{am}^{zonă}$ conţinutul în umiditate al aerului la intrarea în zonă, creşterea conţinutului în umiditate al aerului de recirculare din prima zonă este $d_2^I - d_{am}^I = 4$ g/kg. În zona VIII, la $t_{us} = 45°C$ şi $t_{um} = 29°C$ şi deci $\varepsilon_1^{VIII} = 16°C$, din diagrama ε-d determinăm $d_{am}^{VIII} = 20$ g/kg.

Zonele se calculează pentru aceeaşi cantitate de aer de circulaţie şi de aceea creşterea conţinutului de umiditate va fi proporţională cu diferenţa dintre umidităţile materialului în diferite zone.

Astfel pentru zona VIII creşterea conţinutului de umiditate este:

$$d_2^{VIII} - d_{am}^{VIII} = (d_2^I - d_{am}^I)\frac{\Delta w^{VIII}}{\Delta w^{VII}} = 2{,}11 \text{ g/kg},$$

deci:

$$d_2^{VIII} = d_{am}^{VIII} + (d_2^{VIII} - d_{am}^{VIII}) = 22{,}11 \text{ g/kg}.$$

Pentru $t_{um} = 29°C$ şi $d = 22{,}1$ g/kg se determină pe diagrama ε-d valoarea $\varepsilon_2^{VIII} = 14°C$ şi deci $\varepsilon_m^{VIII} = 15°C$.

În primele şapte zone se elimină 135% din umiditatea pielei.

Conţinutul de umiditate 92,5 — 22,1 g/kg se va repartiza în primele şapte zone unde se pierde 135% din umiditatea pielei. Pentru prima zonă conţinutul de umiditate este:

$$d_2^I - d_1^I = (d_1^I - d_2^{VIII})\frac{\Delta w_I}{w_1^I - w_2^{VIII}} = 7{,}87 \text{ g/kg}.$$

Cantitatea n de aer utilizat ce se amestecă cu 1 kg aer proaspăt este dată de

$$n = \frac{d_{am} - d_1}{d_2 - d_{am}},$$

iar factorul de recirculaţie $n + 1$ care indică de cîte ori cantitatea de aer de recirculaţie este mai mare decît cea de aer proaspăt este dat de:

$$n + 1 = \frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_{am}}.$$

Pentru prima zonă $n + 1 = 1{,}97$ iar pentru zona VIII, $d_2^{VIII} - d_1^{VIII} = (d_2^{VIII} - d_{am}^{VIII})(n + 1) = 4{,}16$, de unde rezultă $d_1^{VIII} = d_2^{VIII} - 4{,}16 = 18$ g/kg.

Acest coeficient de umiditate se poate obţine prin amestecarea aerului proaspăt cu aerul evacuat din uscător care are $d_2^{I} = 92{,}5$ g/kg. Aerul din mediul înconjurător are $t = 20°C$, $\varphi = 50\,\%$ şi $d_0 = 7{,}3$ g/kg aer uscat. În aceste condiţii cantitatea de aer utilizat la un kg aer proaspăt este:

$$n = \frac{d_{am} - d_1}{d_2 - d_{am}} = 0{,}1425.$$

Aerul de recirculaţie ce trebuie adăugat asigură posibilitatea menţinerii unui regim de uscare dorit, independent de variaţiile parametrilor aerului proaspăt.

Diferenţa dintre conţinuturile de umiditate $d_2^{I} - d_2^{VIII} = 70{,}4$ g/kg aer uscat, se repartizează pe zone proporţional cu diferenţa dintre umidităţile materialului la intrarea şi ieşirea din fiecare zonă, echivalentă cu cantitatea de apă eliminată în aceste zone. În tabelul 2 sînt date pentru fiecare zonă: în rîndul *1* — umiditatea pielei (w_1) la intrarea în zonă, în rîndul *2* — umiditatea pielei (w_2) la ieşirea din zonă, în rîndul *3* — diferenţa de umiditate Δw în fiecare zonă, (în acest caz $\Sigma \Delta w = 145\,\%$), în rîndul *4* — creşterea conţinutului de umiditate în fiecare zonă, determinată de raportul $70{,}4 \times \times \Delta w/145$, în rîndul *5* — conţinutul de umiditate al aerului care iese din zona respectivă, egal cu conţinutul de umiditate al aerului care intră în zona următoare şi anume: în zona I $d_2^{I} = d_1^{II} = 92{,}5$ g/kg; în zona II $d_2^{II} = d_2^{I} - (d_2^{I} - d_1^{I}) = 84{,}74$ g/kg etc.

Diferenţa dintre conţinuturile de umiditate în zonă (rîndul *4*), împărţită prin factorul de recirculaţie $n + 1 = 1{,}97$, furnizează $d_2 - d_{am}$ (rîndul *6*), adică creşterea conţinutului de umiditate în zona respectivă în raport cu aerul de circulaţie.

Din diferenţa valorilor din rîndurile *5* şi *6* se obţine valoarea consemnată în rîndul, *7* adică $d_2 - (d_2 - d_{am}) = d_{am}$.

În rîndul *8* se dă conţinutul mediu de umiditatea al aerului de circulaţie pentru fiecare zonă, care se obţine cu valorile din rîndurile *5* şi *6*:

$$d_2 - \frac{d_2 - d_{am}}{2} = \frac{d_2 - d_{am}}{2} \text{ [g/kg]}.$$

În rîndul *9* sînt date potenţialele medii de uscare ε_m [°C] luate pentru fiecare zonă. În rîndul *10* sînt date valorile t_a^{um} obţinute din diagrama ε-d [3] pentru valorile d_{am} şi ε_m. Valorile ε_2 indicate în rîndul *11* se determină cu aceeaşi diagramă ε-d în funcţie de t_a^{um} şi d_2. În rîndul *12* sînt date temperaturile t_2 ale aerului care iese din zona respectivă şi care se obţin din egalitatea $t_2 = t_a^{um} + \varepsilon_2$, deoarece $\varepsilon = t_{us} - t_{um}$. Valorile lui ε_1, indicate în rîndul *13*, se obţin din egalitatea $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_m - \varepsilon_2$. În rîndul *14* sînt date valorile $t_1 = t_a^{um} + \varepsilon_1$ [°C], unde t_1 — temperatura amestecului de aer încălzit înainte de începutul uscării, în zona respectivă, exprimată în °C. În rîndul *15* se dau valorile gradului de saturaţie al aerului φ_1 care se determină în

funcţie de t_1 şi d_{am} cu ajutorul diagramei φ-d [3]; d_{am} [g/kg], t [°C] şi φ_1 [%] sînt parametrii la intrarea aerului respectiv la ieşirea lui din zonă.

După aceste date, cu ajutorul formulei (4) [2] se determină umiditatea de echilibru a pielei, indicată în rîndul *16*.

În rîndul *17* este dată viteza redusă de uscare calculată cu formula (9) [2], pentru valorile corespunzătoare ale lui w_2 (rîndul *2*) şi w_e (rîndul *16*).

În rîndul *18* este dată temperatura pielei la ieşirea din zonă, determinată cu relaţia:

$$\vartheta_2 = t_a^{um} + \varepsilon_1 (1 - \psi) \ [°C].$$

Punctul de rouă al aerului pentru $d = 92{,}5$ g/kg va fi la 51°C. Prin urmare nu va avea loc condensarea umidităţii din aer pe pielea care intră în uscător cu $\vartheta_0 = 15°C$.

Tabelul 2

Rîndul	Zona / Notaţia	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	w_1	160	144	124	104	84	64	44	25
2	w_2	144	124	104	84	64	44	25	15
3	Δw	16	20	20	20	20	20	19	10
4	$d_2 - d_1$	7,76	9,71	9,71	9,71	9,71	9,71	9,23	4,85
5	d_2	92,50	84,74	75,03	65,32	55,61	45,90	36,19	26,96
6	$d_2 - d_{am}$	3,94	4,94	4,94	4,94	4,94	4,94	4,68	2,46
7	d_{am}	88,56	79,80	70,09	60,38	50,67	40,96	31,51	24,50
8	d_m	90,53	82,27	72,56	62,85	53,14	43,43	33,85	25,73
9	ε_m	5	5	5	5	6	7	9	14
10	t_a^{um}	51	49,30	47,50	44,80	42,20	39	35,50	32,20
11	ε_2	3	3	3	3	4	5	8	10
12	t_2	54	52,3	50,5	47,8	46,2	44	43,50	42,20
13	ε_1	7	7	7	7	8	9	10	12
14	t_1	58	56,3	54,5	51,8	50,2	48	45,5	44,2
15	φ_1	67	66	65	64	59	54	47	41
16	w_e	24,65	24,47	24,43	24,40	22,50	21,80	18,15	17
17	ψ	0,844	0,820	0,784	0,740	0,654	0,514	0,245	0,08
18	ϑ_2	50,092	50,560	49,01	46,69	44,97	43,38	43,08	44,20

Comportarea materialelor la uscare într-un mediu stabilit constituie baza reală de calcul a uscătoarelor industriale. Această comportare nu se poate determina decît experimental, deoarece factorii care influenţează evaporarea umidităţii superficiale şi deplasarea umidităţii din profunzime la su-

prafaţă, variază în spaţiu şi timp şi chiar materialul supus uscării îşi schimbă caracteristicile în timpul uscării. Astfel, atmosfera din uscător îşi modifică conţinutul de umiditate şi temperatura; volumele şi deci vitezele de circulaţie variază iar materialul supus uscării îşi modifică conductibilitatea termică pe măsura eliminării umidităţii. Coeficienţii de transfer de material şi de căldură, tensiunea superficială, vîscozitatea, aderenţa superficială, variază în timpul procesului, astfel că oricît s-ar încerca să se cuprindă în relaţii analitice fenomenele legate de uscare, complexitatea procesului împiedică să se obţină mai mult decît cîteva relaţii simple, influenţate de numeroşi factori experimentali, care pot da în unele cazuri o orientare justă în dimensionarea uscătorului [4].

În calculul prezentat, intenţia autorilor a fost de a folosi datele obţinute pe cale experimentală în relaţiile de calcul citate, cu scopul de a încerca recomandarea unui regim de uscare pentru sortul de piele cercetat.

Relaţiile de calcul folosite nu pot ţine seama de toţi factorii care influenţează şi complică procesul de uscare, mai ales a materialelor de tipul pielei, de aceea rezultatele obţinute au un caracter orientativ.

În cazul uscării pieilor în tuneluri „pasting", durata uscării va fi mai mare, datorită faptului că umiditatea se elimină pe o singură faţă a pielei.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia pielei,
înlocuitorilor de piele şi a tananţilor

BIBLIOGRAFIE

1. Marinescu M., Matei E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *3—4*, pp. 193—204.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, pp. 187—196.
3. Filonenko G. K., Lebedev P. D., *Instalaţii de uscare*. EES, Buc., 1954, (trad. din l. rusă).
4. Dăscălescu A., *Uscarea şi aplicaţiile ei industriale*. Ed. Tehn., Buc., 1964.

ÉTUDES SUR LA CINÉTIQUE DU SÉCHAGE DES CUIRS

Note III

Le séchage par convection (C. Utilisation des résultats expérimentaux au calcul du processus de séchage des peaux)

(Résumé)

En utilisant les données théoriques de la première Note [1] et les données expérimentales de la deuxième [2], on expose les principes de calcul du processus de séchage dans un séchoir tunel à 8 zones avec la récirculation de l'agent de séchage sur zones lorsque les cuirs sont étendus sur des cadres.

Ce model de calcul du processus de séchage peut être appliqué à tout sorte de cuir que l'on sèche dans des séchoirs tunel tant étendu sur cadres que collé d'après le système pasting.

Lorsque le séchage est réalisé d'après le système pasting on doit tenir compte que l'humidité s'élimine seulement d'une seule partie du cuir, ce qui augmente la durée du séchage.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 66; 665.5; 665.511.3; 661.42

CONTRIBUŢIA INDUSTRIEI CHIMICE LA VALORIFICAREA SUPERIOARĂ A UNOR RESURSE MINERALE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

DE

EUGEN POPA, I. ADUMITRĂCESEI, MARIA PONTA şi VALERIU RĂUŢU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi din 5—7 februarie 1965 [1])

1. Prin înfăptuirea cu consecvenţă a politicii leniniste de industrializare socialistă, P.C.R. a asigurat atragerea în circuitul economic şi valorificarea la un nivel tot mai înalt a bogatelor resurse de materii prime de care dispune ţara noastră. Pe măsura dezvoltării industriei şi mai ales a ramurilor industriei grele, s-au obţinut din fiecare unitate de materie primă produse tot mai variate, de calitate superioară şi cu cheltuieli de muncă tot mai mici. Activitatea desfăşurată în direcţia lărgirii bazei proprii de materii prime şi a valorificării lor superioare va atinge o nouă treaptă în perioada planului cincinal 1966—1970.

In acest sens, în raportul prezentat de tovarăşul Nicolae Ceauşescu la Congresul al IX-lea al partidului, se subliniază că „un obiectiv important al viitorului plan cincinal va fi crearea unor condiţii tot mai bune pentru introducerea în circuitul economic a noi materii prime, valorificarea superioară, eficientă, a resurselor ţării" [10, p. 25].

Un rol deosebit în valorificarea superioară a resurselor naturale ale ţării noastre revine industriei chimice. Această ramură oferă posibilităţi nelimitate pentru valorificarea complexă a numeroase materii prime şi transformarea acestora în produse necesare tuturor ramurilor economiei naţionale şi pentru consumul populaţiei. Tocmai acest fapt explică dezvoltarea deosebit de rapidă pe care o cunoaşte industria chimică în ţara noastră.

In această lucrare ne propunem să prezentăm unele aspecte ale contribuţiei pe care o aduce industria chimică la valorificarea superioară a unor importante resurse minerale ale ţării noastre — petrolul, gazul metan şi sarea.

2. Ţara noastră a dispus întotdeauna de importante resurse naturale care se pretează la o prelucrare superioară pe cale chimică, printre care un loc important îl ocupă petrolul, gazul metan şi sarea. In trecut, în legătură cu aceste resurse naturale a cunoscut o oarecare dezvoltare doar industria extractivă şi partial prelucrarea pri-

[1]) Revăzută şi adăugită.

mară. Existenţa unei industrii prelucrătoare insuficient dezvoltate a făcut ca însemnate cantităţi de produse petroliere şi de sare să constituie materii prime ieftine pentru monopolurile străine.

Necesitatea unor cantităţi mereu crescînde de carburanţi pentru motoarele cu ardere internă, precum şi preţul scăzut la care era obţinut ţiţeiul în ţara noastră, au contribuit la creşterea însemnată a producţiei, îndeosebi în perioada dintre cele două războaie mondiale. Producţia de ţiţei a crescut de la 1 109 000 t în 1920, la 8 703 000 t în 1936, cînd se atinge nivelul maxim realizat în regimul trecut.

Gazul metan era folosit în trecut aproape exclusiv drept combustibil, ceea ce a făcut ca producţia să nu crească pe măsura posibilităţilor existente în ţara noastră. In anul 1938, producţia de gaz metan era de 301 milioane m^3.

Sarea fiind folosită pe scară largă în alimentaţie, parţial ca materie primă în industria chimică, şi în acelaşi timp solicitată şi la export, producţia ei a crescut mereu, atingînd, în 1938, 368 000 t.

In trecut, creşterea producţiei de ţiţei, gaz metan şi sare s-a realizat printr-o folosire neraţională a zăcămintelor ca urmare a tendinţei capitaliştilor de a obţine profituri cît mai mari cu cheltuieli minime. Astfel, în industria extractivă a ţiţeiului se folosea pe scară largă metoda erupţiei libere, cu pierderea completă a gazelor asociate şi scăderea rapidă a presiunii din zăcămînt, ceea ce a făcut ca să se extragă numai 15...20% din rezerva zăcămîntului. Paralel cu exploatarea neraţională a zăcămintelor, sub regimul trecut forajul de explorare pentru descoperirea unor noi rezerve de petrol şi gaz metan era redus. In 1938, în industria petrolieră forajul de explorare reprezenta numai 13,2% din totalul forajului. Ca urmare, pînă în anul 1937 s-a prospectat numai 1/4 din suprafaţa petroliferă probabilă a ţării. Tocmai exploatarea neraţională a zăcămintelor şi nivelul scăzut al forajului de explorare au determinat declinul producţiei româneşti de petrol în preajma şi în timpul celui de al doilea război mondial.

Prelucrarea ţiţeiului a început în România prin distilarea lui sumară în vederea obţinerii petrolului lampant, iar de la începutul secolului XX s-a extins prelucrarea primară a ţiţeiului pentru obţinerea benzinei, motorinei, uleiurilor. In 1938 existau peste 30 de rafinării mici, cu o capacitate sub 150 000 t/an. Sub regimul trecut petrolul nu a fost valorificat de loc pe cale chimică. In ceea ce priveşte gazul metan, în anul 1938, în industria chimică se folosea doar 0,5% din producţia anului respectiv. In trecut o parte din producţia de sare se prelucra pe cale chimică la fabricile din Ocna Mureşului, Turda şi Tîrnăveni, dominate de trustul mondial „Solvay". Acesta a împiedicat înfiinţarea unor fabrici de produse sodice la Slănic şi în alte localităţi bogate în zăcăminte de sare, pentru a-şi asigura astfel piaţa de desfacere pentru produsele proprii.

Rezultă că deşi resursele bogate în petrol, gaz metan şi sare de care dispune ţara noastră au fost exploatate în trecut într-o măsură însemnată, prelucrarea lor pe cale chimică a fost aproape inexistentă.

3. In anii construirii şi desăvîrşirii socialismului, prin politica economică înfăptuită de P.C.R., au fost create condiţii din ce în ce mai favorabile atît pentru dezvoltarea extracţiei de petrol, gaz metan şi sare, cît şi pentru valorificarea la un nivel tot mai ridicat a acestor importante resurse naturale. Incă în raportul prezentat la Congresul al VI-lea al P.C.R. (din februarie 1948), se sublinia: „Condiţiile naturale pentru dezvoltarea industriei sînt foarte favorabile în ţara noastră. Ele ne permit crearea unei puternice industrii chimice, bazată pe gazul metan, ţiţei, cărbuni şi sare" [5].

Partidul şi statul nostru au acordat şi acordă o mare atenţie sporirii rezervelor de ţiţei şi gaz metan, astfel încît să fie asigurată satisfacerea necesităţilor economiei naţionale pentru o perioadă de perspectivă cît mai îndelungată. In acest scop, în perioada 1951—1963, cheltuielile anuale de ţiţei şi gaz metan au crescut de la 397,4 milioane la 1 444 milioane lei (de 3,6 ori). Ca urmare, ponderea forajului de explorare a crescut continuu, atingînd în anul 1963 52% din totalul forajului efec-

tuat în industria petrolieră și peste 70% din totalul forajului pentru gaz metan. Aceste eforturi au dus la o sporire însemnată a rezervelor industriale. Astfel, încă în anul 1958 rezervele industriale de gaze erau de aproape 2 ori mai mari față de cele dinainte de război, iar rezervele industriale de țiței erau, în anul 1961, de 3 ori mai mari decît în 1950.

Pe baza sporirii rezervelor industriale și a folosirii lor raționale, producția de țiței, gaz metan și sare a crescut continuu, după cum rezultă din tabelul 1.

Tabelul 1

Produsul	U/M	1948	1964	1964/1948
Țiței	mii tone	4 149	12 395	2,98 ori
Gaz metan	mil. m²	1 266	11 417	9,02 ori
Sare	mii tone	352	1 809	5,14 ori

Aceste creșteri importante de producție s-au realizat prin introducerea tehnicii și tehnologiei noi. Astfel, la extracția țițeiului și gazului metan s-au introdus pe scară largă instalații moderne, fabricate în țară, ceea ce a permis mărirea vitezei de foraj și realizarea de foraje la mari adîncimi. Pentru exploatarea rațională a sondelor se folosește injectarea cu apă și gaze, recuperarea secundară a rezervelor din sondele vechi, fisurarea hidraulică a straturilor. In industria sării se extinde metoda de extracție pe cale umedă.

Prin construirea unor noi rafinării, dotate cu instalații moderne, s-a adîncit gradul de prelucrare secundară a țițeiului. In felul acesta se obțin o serie de produse valoroase pentru chimizare. Astfel, la rafinăria din orașul Gh. Gheorghiu-Dej s-au construit o instalație de reformare catalitică de 500 000 t/an, două instalații de cracare catalitică a 500 000 t/an fiecare și o instalație de cocsare întîrziată de 300 000 t/an, iar la rafinăria Brazi s-au construit: un complex de reformare catalitică a benzinelor primare de 1 milion t/an, o instalație de cocsare întîrziată de 500 000 t/an și o instalație de absorbție și fracționare a gazelor de rafinărie de 250 000 t/an, o instalație de distilare atmosferică și în vid cu o capacitate de prelucrare de 3 milioane t/an. Pentru obținerea materiilor prime necesare industriei chimice prezintă o mare însemnătate extinderea proceselor catalitice în rafinării. Dacă în 1959 asemenea procese nu erau folosite, în anul 1965 ponderea lor reprezenta peste 22,0% față de distilația primară. Valorificarea chimică a gazelor naturale a fost mult înlesnită prin construcția de noi conducte pentru transportul acestora.

Ca urmare a condițiilor create în anii construirii și desăvîrșirii socialismului, a crescut ponderea producției de petrol, gaz metan și sare prelucrată în cadrul industriei chimice. Incă în anul 1958, din producția de gaze naturale s-a prelucrat pe cale chimică aproximativ 14%, față de numai 0,5% în 1938.

Orientarea spre valorificarea superioară a țițeiului pe calea chimizării rezultă din scăderea ponderii petrolului în cadrul resurselor energetice ale țării noastre de la 57,3% în 1938 la 38,0% în 1965, urmînd ca în actualul cincinal să scadă în continuare. In felul acesta o parte tot mai mare a produselor petroliere devine disponibilă pentru a fi prelucrate în cadrul industriei chimice.

4. In vederea valorificării superioare a petrolului și gazului metan, Congresele al VII-lea și al VIII-lea ale P.C.R. au orientat dezvoltarea industriei chimice în special spre petrochimie. Ca urmare a înfăptuirii cu consecvență a acestei linii, în perioada 1956—1965 în țara noastră a fost creată o puternică industrie petrochimică — ramură modernă și de mare viitor a industriei chimice. Congresul al IX-lea al partidului a stabilit noi sarcini pentru dezvoltarea în mod susținut a industriei petrochimice. „Un

accent puternic — se arată în raportul C. C. prezentat la Congres de tovarășul N. Ceaușescu — se pune în continuare pe dezvoltarea petrochimiei, asigurîndu-se prelucrarea superioară a gazelor naturale și a produselor petroliere" [10, p. 29].

Industria petrochimică este acea ramură a industriei chimice de sinteză care folosește în procesele de fabricație, materii prime petroliere și gaze ntaurale, asigurînd o gamă largă de materiale chimice necesare atît pentru consumul productiv în toate ramurile economiei cît și pentru consumul individual al populației. Petrochimia permite valorificarea complexă și rațională a unor importante resurse naturale de care dispune țara noastră, obținerea unor produse de calitate superioară și la un preț de cost scăzut.

Astfel, valoarea obținută prin prelucrarea chimică a produselor petroliere crește de 15...20 ori. Prin chimizare, dintr-o tonă de gaze petroliere se pot obține 3 000 m^2 țesături sau 400...500 kg cauciuc sintetic sau 300...500 kg mase plastice. In cursul planului cincinal 1966 — 1970, valoarea produselor obținute pe cale petrochimică din gaz metan va crește de 3,2 ori iar cea obținută din petrol de 5,2 ori.

Numeroasele avantaje pe care le oferă petrochimia, determină dezvoltarea în ritm rapid a acestei subramuri a industriei chimice în țara noastră.

In perioada planului șesenal, industria petrochimică s-a dezvoltat într-un ritm mai ridicat decît celelalte sectoare ale industriei chimice. Față de creșterea producției întregii industrii chimice de 3,6 ori, în cadrul industriei petrochimice, producția de îngrășăminte cu azot a sporit de 5,8 ori, producția de fire și fibre chimice — de 6,7 ori, producția de materiale plastice — de circa 7 ori. In cursul cincinalului 1966—1970, producția industriei petrochimice va crește de 4 ori, față de 2,3 ori cît va reprezenta creșterea întregii producții chimice.

Ca urmare a acestei dezvoltări deosebit de rapide, crește continuu ponderea petrochimiei în producția industriei chimice. In anul 1965 industria petrochimică a reprezentat 21% din producția industriei noastre chimice, iar în 1970 va deține o pondere de 36%.

Valorificarea superioară a petrolului și gazului metan pe cale chimică se oglindește, în primul rînd, în creșterea deosebit de rapidă a producției de produse petrochimice primare. Față de anul 1938, producția de produse petrochimice primare, exprimate în conținut de carbon, a fost în 1955 de 11 ori, iar în 1960 de 50,6 ori mai mare. In timp ce în trecut s-au fabricat numai 2 produse petrochimice primare (amoniacul și negrul de fum), astăzi industria petrochimică din țara noastră produce o gamă largă de astfel de produse și în cantități mereu crescînde. Un loc important în cadrul produselor petrochimice primare îl ocupă acetilena, obținută din gaz metan prin două procedee originale românești — cracarea metanului în arc electric și oxidarea parțială.

Acetilena obținută la un preț de cost redus, prin procedeul arcului electric, în instalațiile de la Săvinești și Borzești, constituie o materie primă valoroasă, îndeosebi pentru fabricarea maselor plastice și fibrelor sintetice. Alte materii prime petrochimice primare sînt metanolul și formaldehida, obținute din gaz metan la combinatul chimic Victoria, produse cu largă întrebuințare în industria maselor plastice și cleiurilor sintetice. De asemenea din gaz metan se obține acid cianhidric (la fabrica de fire și fibre sintetice, Săvinești, și uzina „Carbosin", Copșa Mică), precum și solvenți clorurați (la Combinatul chimic, Borzești și Uzinele chimice, Turda).

Dezvoltarea industriei petrochimice necesită folosirea unor cantități importante de produse primare, obținute prin valorificarea superioară a sării pe cale chimică. Prin reutilarea secțiilor de electroliză de la Uzinele chimice, Turda și Combinatul chimic, Tîrnăveni, precum și prin construirea unei fabrici moderne de electroliză în cadrul Combinatului Chimic, Borzești, se asigură obținerea clorului, produs primar necesar pentru producerea maselor plastice, insectofungicidelor, solvenților clorurați etc.

Extinderea valorificării sării pe cale chimică s-a realizat și prin dezvoltarea industriei de produse sodice — carbonat de sodiu și sodă caustică, produse primare folosite pentru fabricarea sticlei, fibrelor artificiale, săpunului, la prelucrarea petro-

lului. In acest scop a fost mărită capacitatea de producție a Uzinelor de produse sodice, Ocna Mureș și a fost construită Uzina de sodă de la Govora.

In industria chimică de sinteză produsele industriei petrochimice devin preponderente. Acest aspect rezultă din creșterea ponderii produselor petrochimice primare în producția totală de produse primare de sinteză (exprimate în conținut de carbon) în perioada șesenalului (tabelul 2).

Tabelul 2

Produse primare de sinteză = 100, din care :	1959	1965 (plan)
pe bază de cărbune	57	5
pe bază petrochimică	43	95

Obținerea de produse primare de sinteză prin prelucrarea chimică a petrolului și a gazului metan este deosebit de avantajoasă din punct de vedere economic. Prețul de cost al produselor petrochimice primare este cu mult mai scăzut decît cel al produselor primare obținute prin procedeele clasice, mai ales datorită realizării unor însemnate economii de materii prime și energie electrică. Astfel, prin producerea acetilenei din gaz metan, cheltuielile de materii prime și energie electrică se reduc în cazul procedeului cu arc electric cu 52% față de aceleași costuri realizate prin procedeul cu carbid, iar în cazul procedeului oxidării parțiale, cu 74%. O reducere asemănătoare a prețului de cost, comparativ cu cel al produselor obținute prin procedee clasice (=100), se realizează și la celelalte produse petrochimice primare, după cum rezultă din tabelul 3.

Tabelul 3

Produsul petrochimic	Prețul de cost
Metanol	52
Formol	15
Acetonă, față de procedeul :	
a) distilarea lemnului	20
b) fermentarea porumbului	34
Fenol	49
Butanol	17
Benzen	48

Valorificarea superioară a petrolului, gazului metan și sării pe cale chimică se realizează prin folosirea produselor petrochimice primare și a produselor primare obținute din sare, în vederea producerii de îngrășăminte chimice și antidăunători, fire și fibre sintetice, mase plastice și rășini sintetice, cauciuc sintetic, detergenți sintetici, coloranți și pigmenți organici, cerneluri, lacuri și vopsele, tananți sintetici, medicamente și altele.

Paralel cu valorificarea complexă și rațională a resurselor naturale, prin obținerea acestor produse valoroase industria chimică asigură lărgirea considerabilă a

bazei de materii prime a economiei naţionale şi permite realizarea progresului tehnic în toate ramurile producţiei materiale.

Pe baza eforturilor întreprinse în anii construirii şi desăvîrşirii socialismului, producţia de produse petrochimice finite cunoaşte o dezvoltare deosebit de rapidă, după cum rezultă din tabelul 4.

Tabelul 4

Produsul	U/M	1959	1965 plan	1970 plan	1965/1959	1970/1965
Îngrăşăminte 100%	mii t	52,1	340	1 300	6,6 ori	3,8 ori
Cauciuc sintetic	mii t 1963	5,9	35	60	5,9 ori	1,7 ori
Mase plastice şi răşini sintetice	mii t	6,6	87,3	180...200	13,2 ori	2...2,3 ori
Fibre şi fire chimice	mii t	3,4	31,3	70...80	9,2 ori	2...2,6 ori
Anvelope	mii buc.	689	1 300	1 900	1,9 ori	1,5 ori

Din datele prezentate în tabelul 4 rezultă creşteri foarte rapide ale producţiei în în acele subramuri ale industriei chimice care deţin un rol hotărîtor în înfăptuirea progresului tehnic (îngrăşăminte chimice, mase plastice, fibre şi fire chimice).

Ca urmare a valorificării chimice a petrolului şi gazului metan, creşte continuu ponderea produselor petrochimice în totalul produselor finite furnizate de industria chimică. Astfel, în anul 1965 s-a realizat pe bază petrochimică 100% din producţia de îngrăşăminte azotoase şi cauciuc sintetic, 77% din producţia de fire şi fibre sintetice şi 68% din producţia de mase plastice.

Prin prelucrarea complexă a produselor petroliere şi a gazelor naturale, în vederea obţinerii de produse finite, se realizează o creştere considerabilă a valorii materiilor prime folosite. De exemplu, prin producerea fibrelor sintetice de tip melană se obţine o valoare de 34 ori mai mare decît cea a gazului metan folosit, iar prin producerea cauciucului sintetic, se realizează o valoare de 20...40 ori mai mare decît cea a gazelor petroliere întrebuinţate.

După unele calcule, valoarea obţinută prin prelucrarea pe cale chimică a unei cantităţi de petrol în valoare de 1 leu, creşte la 20 lei în cazul producerii de alcool etilic, acetonă şi benzen; la 40 lei prin producerea cauciucului sintetic şi a maselor plastice şi la 100 lei în cazul producerii firelor şi fibrelor sintetice.

Aceste exemple sînt concludente pentru posibilităţile foarte mari pe care le oferă industria petrochimică în vederea valorificării superioare a resurselor naturale.

Folosirea pe scară largă a produselor finite, obţinute pe cale petrochimică, este deosebit de avantajoasă datorită preţului de cost scăzut la care se produc. Nivelul scăzut al preţului de cost la unele produse finite obţinute pe cale petrochimică, comparativ cu preţul de cost al aceloraşi produse fabricate din materii prime clasice (= 100), rezultă din tabelul 5.

Tabelul 5

Produsul	Preţul de cost
Clorură de polivinil	63
Fibre melană, în comparaţie cu lîna spălată	33
Detergenţi sintetici, în comparaţie cu săpun	40...50

Avînd în vedere marile avantaje economice pe care le prezintă valorificarea superioară a țițeiului și gazului metan, în anii construirii și desăvîrșirii socialismului s-au construit și continuă să se construiască mari și moderne obiective ale industriei petrochimice. Printre aceste unități se numără: unitățile de la Făgăraș și Victoria, Piatra Neamț, Craiova, Tîrgu Mureș și Turnu Măgurele pentru producerea îngrășămintelor azotoase, unitatea de la Borzești pentru antidăunători, unitatea de la Săvinești pentru fire și fibre sintetice (relon și melană), unitățile de la Turda, Borzești, Craiova și Brazi pentru obținerea maselor plastice (policlorură de vinil, acetat de polivinil, polietilenă și polistiren), unitatea din orașul Gh. Gheorghiu-Dej pentru cauciuc sintetic. Toate acestea sînt unități de mare capacitate, înzestrate cu tehnica cea mai avansată, care asigură valorificarea la un nivel superior a resurselor naturale, creșterea productivității muncii și a rentabilității. Directivele Congresului al IX-lea al partidului prevăd construirea, în perioada 1966—1970, a unor noi obiective pentru producția de îngrășăminte cu azot și fosfor, de fibre și fire chimice, de mase plastice și de alte produse obținute pe cale petrochimică.

5. Valorificarea superioară, pe cale chimică, a țițeiului, a gazului metan, a sării, prezintă numeroase consecințe favorabile pentru economia națională.

Prin producerea de produse petrochimice primare se asigură realizarea unor importante economii de materii prime naturale, care pot fi folosite pentru acoperirea altor nevoi. Astfel, prin fabricarea acidului acetic, acetonei și butanolului pe cale petrochimică, consumul anual de lemn de fag se reduce cu 4 milioane m^3, iar consumul de cereale cu peste 70 000 t. Prin fabricarea detergenților sintetici se economisesc anual 25 000 t grăsimi animale și vegetale.

Folosirea îngrășămintelor chimice, în special a celor azotoase, precum și a antidăunătorilor, obținute prin chimizarea țițeiului, a gazului metan și a sării, contribuie la realizarea unor importante sporuri de recoltă. În condițiile folosirii agrotehnicii moderne, folosind 1 kg de îngrășăminte se obține un spor de recoltă de 2...3 kg cereale.

După unele calcule, pierderile provocate de dăunători se ridica la circa 25% din recolta de cereale, fructe și legume. Prin folosirea antidăunătorilor se evită pierderea unei cantități de recoltă în valoare de 100 ori mai mare decît cea a antidăunătorilor consumați.

Ca urmare a dezvoltării producției de fire și fibre sintetice se lărgește considerabil baza de materii prime a industriei textile; se prevede ca în 1966 producția de fire și fibre chimice să acopere circa 35% din consumul total de fire și fibre ale industriei noastre textile. Aceasta va permite atît lărgirea sortimentelor de țesături cît și reducerea importului de materii prime textile. În același timp producerea firelor și fibrelor sintetice asigură o uriașă economisire de muncă socială. Potrivit unor calcule, pentru obținerea acestor materii prime sintetice sînt necesare cheltuieli de muncă (exprimate în zile-om) de peste 10 ori mai mici decît la producerea materiilor prime naturale folosite în industria textilă.

Producția maselor plastice și a rășinilor sintetice contribuie la înfăptuirea progresului tehnic în economia națională și la realizarea unor importante economii de metale feroase și neferoase, precum și de materiale lemnoase. Masele plastice se folosesc pe scară largă în construcția de mașini, în electrotehnică, în industria prelucrării lemnului, în construcții, în agricultură și la producerea a numeroase bunuri de larg consum. De exemplu prin folosirea materialelor plastice (a polietilenei și policarbonatului) la fabricarea rotorilor și statorilor pentru turbinele de foraj, se obține anual o economie de circa 90 t oțel la un consum de 170 000 perechi rotor-stator.

Producția cauciucului sintetic asigură dezvoltarea transporturilor, mecanizarea agriculturii, obținerea unor articole tehnice și bunuri de consum, precum și reducerea importului de cauciuc.

Prin valorificarea superioară a țițeiului, gazului metan și sării pe cale chimică, țara noastră se situează între țările cu o industrie petrochimică dezvoltată. Pentru anul 1965 era prevăzut ca în Republica Socialistă România să revină pe locuitor o

capacitate de produse petrochimice primare (exprimate în conţinut de carbon) de 24 kg, faţă de 20 kg cît au prevăzut Anglia, R.F.G., Italia şi 13,5 kg prevăzute de Franţa.

Valorificarea superioară a ţiţeiului, gazului metan şi sării prin dezvoltarea petrochimiei, lărgeşte continuu posibilităţile de export ale ţării noastre. Astăzi exportăm peste 200 de produse chimice în circa 65 de ţări, iar aproximativ jumătate din totalul acestui export revine produselor petrochimice. În cadrul creşterii de circa 3 ori a exportului de produse chimice, în perioada cincinalului 1966—1970, va continua să sporească într-un ritm mai rapid exportul ţării noastre de produse petrochimice.

6. Din cele prezentate mai sus se desprind următoarele concluzii:

1⁰ Deşi sub regimul burghezo-moşieresc România dispunea de aceleaşi bogate resurse de petrol, gaz metan şi sare, acestea nu erau valorificate pe cale chimică decît într-o măsură foarte mică.

2⁰ În anii puterii populare s-au creat condiţii din ce în ce mai favorabile pentru sporirea rezervelor şi dezvoltarea industriei şi prelucrării chimice a acestor materii prime, prin înfăptuirea industrializării socialiste a ţării.

3⁰ Orientarea spre schimbarea bazei de materii prime a industriei organice de sinteză de la cărbune la petrol şi gaz metan contribuie la valorificarea superioară a acestor resurse naturale.

4⁰ Prin crearea şi dezvoltarea unei puternice industrii petrochimice în ţara noastră se realizează cel mai înalt grad de valorificare a produselor petroliere, a gazului metan şi parţial a sării, obţinîndu-se o gamă foarte variată de produse primare şi finite necesare economiei naţionale.

5⁰ Valorificarea pe cale chimică a acestor resurse naturale contribuie la realizarea unor însemnate economii de materii prime naturale, înfăptuirea progresului tehnic în economia naţională, ceea ce se repercutează în creşterea producţiei şi ridicarea nivelului de trai al populaţiei.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de organizare şi planificare,
Catedra de economie politică

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Directivele Congresului al VIII-lea al P.C.R.* Ed. polit., Buc., pp. 23—25.
2. * * * *Rezoluţia Congresului al IX-lea al P.C.R.* Ed. polit., Buc., 1965, pp. 11—12.
3. * * * *Directivele Congresului al IX-lea al Partidului Comunist Român cu privire la dezvoltarea economiei naţionale în perioada 1966—1970.* Ed. polit., Buc., 1965, pp. 15, 22.
4. * * * *Declaraţia P.C.R. din aprilie 1964.* Ed. polit., Buc., 1964, pp. 31.
5. Gheorghiu-Dej Gh., *Raportul la Congresul al VI-lea al P.C.R. Articole şi Cuvîntări.* Ed polit., Buc., 1955, pp. 148—149.
6. — *Raportul la Congresul al VII-lea al P.C.R.* Ed. polit., Buc., 1955, pp. 81—85.
7. — *Raportul la Congresul al VIII-lea al P.C.R.* Ed. polit., Buc., 1955, pp. 10—11, 40—42, 80—81.
8. — *Cuvîntarea la Conferinţa organizaţiei de partid a oraşului Bucureşti.* Ed. polit., Buc., 1964, pp. 6—7.
9. — *A XX-a aniversare a eliberării României de sub jugul fascist.* Ed. polit., Buc., 1964, p. 17.
10. Ceauşescu N., *Raport la cel de al IX-lea Congres al P.C.R.* Ed. polit., Buc., 1965, pp. 25, 28—29.

11. Maurer I. Gh., *Raport asupra Directivelor Congresului al IX-lea al P.C.R. privind planul de dezvoltare a economiei naționale pe perioada 1966—1970.* Ed. Polit., Buc., 1965, pp. 19—21.
12. * * * *Anuarul statistic al Republicii Socialiste România pe anul 1964,* Ed. șt., Buc., 1964.
13. * * * *Anuarul statistic al Republicii Socialiste România pe anul 1965.* Ed. șt., Buc., 1965.
14. * * * *Dezvoltarea industriei Republicii Socialiste România.* D.C.S., Buc., 1964. 1964.
15. Florescu M., *Perspectivele industriei chimice în etapa desăvîrșirii socialismului.* Lupta de clasă, 1960, 9.
16. * * * *Dezvoltarea industriei de fibre sintetice în Republica Socialistă România.* Rev. de chimie, 1960, *1.*
17. Moldoveanu A., Butaciu I., *Industria cauciucului sintetic în următorii 6 ani în țara noastră.* Rev. de chimie, 1960, *8.*
18. Goldenberg M., *Perspectivele industriei materialelor plastice în cadrul planului de dezvoltare economică de 6 ani și rolul lor în economia națională.* Rev. de chimie, 1960, *10.*
19. Glük A., *Dezvoltarea industriei petrochimice în planul șesenal.* Pobl. econ., 1961, 9.
20. Florescu M., *Contribuția industriei chimice la progresul tehnic în țara noastră,* Lupta de clasă, 1963, *4.*
21. Ionescu N., *Valorificarea superioară a țițeiului.* Probl. econ., 1963, *11.*
22. Florescu M., *Dezvoltarea industriei chimice românești.* Lupta de clasă, 1964, *4.*
23. Puiu A., *Valorificarea superioară a resurselor naturale în scopul ridicării potențialului economic al țării.* Probl. econ., 1964, 5.
24. Florescu M., *Cuvîntarea la Congresul al IX-lea al P.C.R.* Culegerea *Congresul al IX-lea al P.C.R.* Ed. polit., Buc., 1965. pp. 451—454.
25. Ionescu N., *Progresul tehnic în industria petrolului.* Lupta de clasă, 1965, 5.
26. Florescu M., *Dezvoltarea impetuoasă a chimiei.* Lupta de clasă, 1965, *8.*
27. — *Avîntul industriei chimice în anii cincinalului.* Probl. econ., 1965, 9.
28. * * * *Economia României 1944—1959. Ed. Acad. Republicii Socialiste România,* 1959, pp. 219—242.
29. * * * *Probleme ale creării și dezvoltării bazei tehnice, materiale a socialismului în R.S.R.* Ed. Acad. Republicii Socialiste România, 1963, pp. 157—22.
30. * * * *Industria României 1944—1964.* Ed. Acad. Republicii Socialiste România, pp. 272—317, 509—576.
31. * * * *Economia României 1944—1959.* Ed. Acad. Republicii Socialiste România, 1959, pp. 219—242.

APPORTO DELL'INDUSTRIA CHIMICA ALLA VALORIFICAZIONE DI VARI RISORSE MINERARIE NELLA REPUBBLICA SOCIALISTA ROMANIA

(Sunto)

Gli autori additano, prendendo le mosse dalla documentazione esistente, all' apporto dell'industria chimica alla valorificazione del petrolio gregio, del metano e del sale nella Repubblica Socialista Romania.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 1—2, 1967

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 538.56

ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN AN HOMOGENEOUS TRANSVERSELY ANISOTROPIC MEDIUM [1])

BY

G. S. S. AVILA

1. Introduction

In this paper we consider two-dimensional propagation problems in a special case of anisotropic medium. This assumption lends itself naturally to reduction of Maxwell's equations to a single equation by way of a scalar potential. A method of doing this in the case of a general symmetric hyperbolic system has been developed in [1]. The reduction performed here is similar, and it leads to a treatment of two-dimensional problems much in the same way as in the isotropic case, inasmuch as it is then possible to interpret the total electromagnetic field as the superposition of two distinct polarizations. A similar splitting of the propagation problem and its further reduction to a single equation has been tacitly used by some writers on wave propagation in a plasma (see for example [2]) but the general validity of this fact for a larger class of anisotropic media does not seem to have been clearly recognized. The author is indebted to P. Werner for criticism and informative discussions.

2. Maxwell's Equations and their Reduction

We write Maxwell's equations in the form

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\underline{\mu}\mathbf{H}_t + \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \underline{\varepsilon}\mathbf{E}_t + \mathbf{G},$$

where the index t denotes derivative with respect to t. We assume that $\mathbf{F}$ and $\mathbf{G}$ are independent of x_3, that $\underline{\varepsilon}$ and $\underline{\mu}$ are constant tensors of the form

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

[1]) Sponsored by the Mathematics Research Center, United States Army, Madison Wisconsin, under Contract No. DA-11-022-ORD-2059.

and that

$$\varepsilon' = \varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\,\varepsilon_{21} > 0, \quad \mu' = \mu_{11}\,\mu_{22} - \mu_{12}\,\mu_{21} > 0. \tag{2}$$

Let D_i denote $\partial/\partial x_i$, $(i = 1, 2, 3)$. Then assuming that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ do not depend on x_3, equations (1) yeld

$$\begin{cases} D_2 E_3 = -D_t(\mu_{11} H_1 + \mu_{12} H_2) + F_1, \\ D_1 E_3 = D_t(\mu_{21} H_1 + \mu_{22} H_2) - F_2, \\ D_1 H_2 - D_2 H_1 = \varepsilon_{33} D_t E_3 + G_3, \end{cases} \tag{3}$$

and similar equations obtained from (3) by interchanging ε and μ, replacing $\mathbf{E}$ by $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}$ by $-\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ by $\mathbf{G}$, and $\mathbf{G}$ by $-\mathbf{F}$. So the assumption of independence from x_3 leads to a separation of Maxwell's equations into two sets, one relating H_1 and H_2 to E_3, and the other relating E_1 and E_2 to H_3. This means that two polarizations coexist independently of each other, namely, $\mathbf{E} = (0, 0, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, 0)$, and $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H_3)$.

The reduction of (3) to a single scalar equation is easily accomplished. From the first two equations in (3) we obtain

$$\begin{cases} \mu' D_t H_1 = -(\mu_{12} D_1 + \mu_{22} D_2) E_3 + \mu_{22} F_1 - \mu_{12} F_2, \\ \mu' D_t H_2 = (\mu_{11} D_1 + \mu_{21} D_2) E_3 - \mu_{21} F_1 + \mu_{11} F_2, \end{cases} \tag{4}$$

where we have used the notation introduced in (2). We now use these expressions (4) to eliminate H_1 and H_2 in the third equation of (3). The result is the equation

$$\begin{aligned} &[\mu_{11} D_1^2 + (\mu_{12} + \mu_{21}) D_1 D_2 + \mu_{22} D_2^2 - \mu' \varepsilon_{33} D_{tt}] E_3 = \\ &= \mu' D_t G_3 + (\mu_{21} D_1 + \mu_{22} D_2) F_1 - (\mu_{11} D_1 + \mu_{12} D_2) F_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Of course, a completely analogous scheme holds for the other polarization, namely, E_1, E_2, H_3. This is also given by equations obtained from (4) and (5) with the replacements indicated above.

In the antisymmetric case one has $\mu_{12} + \mu_{21} = 0$, and the cross-derivative term in equation (5) disappears. Otherwise, it can be eliminated through the linear transformation

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad y_2 = \frac{-(\mu_{12} + \mu_{21}) x_1 + 2\mu_{11} x_2}{\sqrt{\mu_{11}}\,\sqrt{4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{22})^2}}. \tag{6}$$

Then equation (5) takes on the form

$$\begin{aligned} (D_{y_1 y_1} + D_{y_2 y_2} - \mu' \varepsilon_{33} D_{tt}) E_3 = \mu' D_t G_3 + D_{y_1} \frac{\mu_{21} F_1 - \mu_{11} F_2}{\sqrt{\mu_{11}}} + \\ + D_{y_2} \frac{\mu_{11}(\mu_{21} - \mu_{12}) F_2 + [2\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{21}(\mu_{12} + \mu_{21})] F_1}{\sqrt{\mu_{11}}\,\sqrt{4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

3. The Field produced by Sources and the Limiting Amplitude Principle

We shall consider next the case of a source distribution given by

$$F = 0, \quad G_1 = G_2 = 0, \quad \frac{\partial G_3}{\partial t} = f(x,t),$$

which starts acting at time $t = 0$, so that $f(x,t) = 0$ for $t \leqslant 0$. We also suppose that the sources are confined to a bounded domain in x-space, and hence $f(x,t) = 0$ for all t and $|x|$ greater than a certain constant. Then the quantity E_3 is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{aligned} &(D_{y_1 y_1} + D_{y_2 y_2} - \mu' \varepsilon_{33} D_{tt}) E_3 = \mu' f(x(y),t) \text{ for } t > 0, \\ &E_3 = \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0 \text{ for } t = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

and vanishes for $t \leqslant 0$. Here, and in what follows, $x(y)$ is the function obtained through the transformation (6). The quantity E_3 is given by the formula of retarded potentials [3, p. 206]:

$$E_3 = -\frac{\mu'}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{\sqrt{\mu' \varepsilon_{33}}\,|x-z| \leq \tau} \frac{f(x(z),\tau)\, dz_1\, dz_2}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \mu' \varepsilon_{33} |y-z|^2}}. \tag{9}$$

Let us apply (9) in the case of a source with harmonic time dependence, $f(x,t) = e^{-i\omega t} g(x)$. By inserting this in (9), and making a change of variable ($t - \tau$ as a new τ), we obtain

$$E_3 = -\frac{\mu' e^{-i\omega\tau}}{2\pi} \int_0^t e^{i\omega\tau} d\tau \iint_{\sqrt{\mu' \varepsilon_{33}}\,|y-z| \leq \tau} \frac{g(x(z))\, dz_1\, dz_2}{\sqrt{z^2 - \mu' \varepsilon_{33} |y-z|^2}}. \tag{10}$$

This form of E_3 is suitable to prove, in the present case, the so-called limiting amplitude principle, namely, that E_3 approaches the steady state as time grows large. This can be stated precisely in the form: E_3 has a (unique) decomposition

$$E_3 = e^{-i\omega t} u(y) + v(y,t), \tag{11}$$

where $v(y,t) = O(t^{-1/2})$ as $t \to \infty$, and $u(y)$ is the (unique) solution of the problem

$$\begin{aligned} &(\Delta + \mu' \varepsilon_{33} \omega^2) u(y) = \mu' g(x(y)), \\ &|y|^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial |y|} - i\omega \sqrt{\mu' \varepsilon_{33}}\, u \right) \to 0 \text{ as } |y| \to \infty. \end{aligned} \tag{12}$$

For the proof we break up the τ-integration in (10) into two parts, one from 0 to ∞, the other from ∞ to t. The part of E_3 associated with this latter integral has the behavior appropriate to v in (11). It remains to show that

$$u(y) = -\frac{\mu'}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{i\omega\tau}\,d\tau \iint\limits_{\sqrt{\mu'\varepsilon_{33}}\,|y-z|\le\tau} \frac{g(x(z))\,dz_1\,dz_2}{\sqrt{z^2-\mu'\varepsilon_{33}|y-z|^2}}$$

is the solution of (12). This can also be written as

$$u(y) = -\frac{\mu'}{2\pi}\iint_{R^2} g(x(z))\,dz_1\,dz_2 \int_{\sqrt{\mu'\varepsilon_{33}}\,|y-z|}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}\,d\tau}{\sqrt{z^2-\mu'\varepsilon_{33}|y-z|^2}} =$$

$$= -\frac{\mu'}{2\pi}\iint_{R^2} g(x(z))\,dz_1\,dz_2 \int_1^{\infty} \frac{e^{i\omega\sqrt{\mu'\varepsilon_{33}}\,|y-z|\,v}\,dv}{\sqrt{v^2-1}}\,.$$

This last integral is a form of the Hankel function of the first kind and order zero [4, sec. 7.12, formula (28)], and in view of this we have

$$u(y) = \frac{\mu'}{4i}\iint_{R^2} H_0^{(1)}(\omega\sqrt{\mu'\varepsilon_{33}}\,|y-z|)\,g(x(z))\,dz_1\,dz_2\,. \tag{13}$$

This ist the solution of the problem (12). In fact (13) expresses the convoluti›n of the fundamental solution of (12) with $\mu' g(x(y))$, and hence solves the differential equation. Moreover, it satisfies the radiation condition in (12), since the Hankel function does.

It is the limiting amplitude principle that makes it justifiable to neglect the quantity $v(y,t)$ in (11). Thus E_3 is taken to be time-harmonic, and consequently H_1 and H_2 will also be time-harmonic. Discarding the time factor $e^{-i\omega t}$ in all quantities, introducing $\underline{\mu}_0 = \begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{pmatrix}$, and making use of (4), (11), and (13), we find that

$$E_3 = \frac{\mu'}{2\pi}\iint_{R^2} H_0^{(1)}(\omega\sqrt{\mu'\varepsilon_{33}}\,|y-z|)\,g(x(z))\,dz_1\,dz_2\,, \tag{14}$$

$$i\omega\mu'\begin{pmatrix}-H_2\\ H_1\end{pmatrix} = \underline{\mu}_0^{*}\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\end{pmatrix}E_3\,. \tag{15}$$

Let us express (14) as an integral in terms of the original co-ordinates. From (6) we obtain

$$|y| = \sqrt{\mu'\,\mu''^{-1}(x\mu_0^{-1}x^{*})}\,, \quad \mu'' = \mu_{11}\mu_{22} - \left(\frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2}\right)^2, \quad dz_1\,dz_2 = \frac{dw_1\,dw_2}{\sqrt{\mu''}}\,,$$

so that

$$(16)\quad E_3 = \frac{\mu'}{2\pi\sqrt{\mu''}} \iint_{R^2} H_0^{(1)}\left(\omega\mu'\sqrt{\varepsilon_{33}\mu''^{-1}\left[(x-w)\underline{\mu}_0^{-1}(x-w)^*\right]}\right) g(w)\, dw_1\, dw_2 ,$$

and then the field is given by (15) and (16).

Expression (16) displays the way in which the anisotropy of the medium affects E_3. An approximate expression for it, valid for large $|x|$, can be obtained by making use of the asymptotic form for the Hankel function [4, sec. 7.13.1]. It is found that

$$(17)\quad E_3 \cong G(\theta)\frac{e^{i\omega\mu'\sqrt{\mu''^{-1}\varepsilon_{33}(x\underline{\mu}_0^{-1}x^*)}}}{(x\underline{\mu}_0 x^*)^{1/4}} \quad \text{as } |x| \to \infty .$$

Here θ is the polar angle that refers to x, and

$$G(\theta) = \frac{\sqrt{\mu'}\, e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\omega}\ \pi(\mu''\varepsilon_{33})^{1/4}} \times$$

$$\times \iint_{R^2} g(w)\ \exp\left(-i\omega\mu'\sqrt{\mu''^{-1}\varepsilon_{33}}\ \frac{x\underline{\mu}_0^{-1}w^* + w\underline{\mu}_0^{-1}x^*}{2}\right) dw_2\, dw_1 .$$

In the case of a point source of delta-function type $G(\theta)$ reduces to a constant K, and then from (15) and (17) we obtain

$$\begin{pmatrix} -H_2 \\ H_1 \end{pmatrix} \cong \frac{K e^{i\omega\mu'\sqrt{\mu''^{-1}\varepsilon_{33}(x\underline{\mu}_0^{-1}x^*)}}}{2\mu'\sqrt{\mu''\varepsilon_{33}^{-1}}\,(x\underline{\mu}_0^{-1}x^*)^{3/4}} \begin{pmatrix} \mu' + \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{21}^2 & \mu_{11}(\mu_{21}-\mu_{12}) \\ \mu_{22}(\mu_{12}-\mu_{21})\,\mu' & +\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$E_3 \cong \frac{K e^{i\omega\mu'\sqrt{\mu''^{-1}\varepsilon_{33}(x\underline{\mu}_0^{-1}x^*)}}}{(x\underline{\mu}_0^{-1}x^*)^{1/4}}, \quad |x| \to \infty .$$

These expressions simplify further if there is symmetry, for $\mu' = \mu''$ if $\mu_{12} = \mu_{21}$. In particular, the last matrix above reduced to a diagonal matrix.

A study of the field near the source can be made by a procedure similar to the one above.

4. Perfectly Conducting Boundaries

The reduction of § 2 is useful even when boundaries are present, as long as they do not couple the two distinct polarizations. This is indeed what happens in the case of a perfectly conducting boundary, which we shall consider here.

Let C be the boundary of a domain in (x_1, x_2)-space, seat of the electromagnetic field that we are considering. Denoting by $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ the unit vector normal to C, the condition that this boundary be perfectly conducting is that, on C,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0. \tag{18}$$

The condition $(\mu \mathbf{H}) . \mathbf{n} = 0$ follows from (1) and (18) in the case of harmonic time dependence; it also holds in the general case provided we make the plausible assumption that all quantities are zero at some interval of time.

It is easy to see that the boundary condition (18) does not couple the two polarizations, H_1, H_2, H_3, and E_1, E_2, H_3. For in the first case (18) leads to

$$E_3 = 0 \text{ on } C, \tag{19}$$

and in the second case it yields, by the analogue of (4),

$$[n_1 (\varepsilon_{11} D_1 + \varepsilon_{21} D_2) + n_2 (\varepsilon_{12} D_1 + \varepsilon_{22} D_2)] H_3 = 0. \tag{20}$$

We note that (19) is unaffected by the transformation (6). On the other hand, by using the analogue of (6) (μ_{ij} replaced by ε_{ij}) we obtain, for condition (20),

$$\{\sqrt{4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2}\,(n_1 \varepsilon_{11} + n_2 \varepsilon_{12})\, D_{y_1} + \\ + (n_1 [2\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})] + n_2 [2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})]) D_{y_2}\} H_3 = 0 \text{ on } C. \tag{21}$$

In terms of the co-ordinates y_1, y_2, the normal to C is in the direction

$$(2\varepsilon_{11} n_1 + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) n_2, \quad n_2 \sqrt{4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})^2}), \tag{22}$$

and so we see that (21) expresses the vanishing of a skew derivative of H_3. This condition, however, reduces to the Neumann boundary condition in the symmetric case, that is, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, as is easily seen from (21) and (22).

Received the 18 X 1965

Georgetown University,
Washington, D. C.,
U. S. A.

REFERENCES

1. Avila G. S. S., Wilcox C. H., *On the Propagation of Time-harmonic Waves in an Homogeneous Anisotropic Medium* (forthcoming MRC report).
2. Samaddar S. N., *Two-dimensional Diffraction in Homogeneous Anisotropic Medium.* I.R.E. Trans., 1962, **AP-10,** pp. 621-624.
3. Courant-Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.* Vol. **II,** Interscience, 1962.
4. Erdelyi A., *Higher Transcendental Functions.* McGraw-Hill, 1953.

PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE ÎNTR-UN MEDIU OMOGEN TRANSVERSAL ANIZOTROP

(Rezumat)

Se consideră problema de propagare bidimensională într-un caz special a mediului anizotrop. Cu ajutorul potențialului scalar, ecuațiile lui Maxwell se reduc la una singură extinderile făcute fiind similare celor utilizate în [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. K. 621.3016.2

IM ZUSAMMENHANG MIT DEM AUSDRUCK DER KOMPLEXEN AUGENBLICKSSCHEINLEISTUNG

VON
V. N. NEDELCU

1. In [1] ist der Begriff der komplexen Augenblicksscheinleistung eines synusförmigen Einphasensystems mittels des Begriffes der Augenblickswirkleistung eingeführt worden.

Angenommen die elektrische Augenblicksspannung (u) an den Klemmen eines passiven Zweipols und der Augenblicksstrom (i) der durch diesen fliesst seien:

$$u = \hat{U}\cos(\omega t + \varepsilon), \quad i = \hat{I}\cos(\omega t + \beta), \tag{1}$$

so wird die durch die Klemmen mit dem Netz ausgetauschte Leistung abhängig von den Grössen u, i und den, diesen Grössen entsprechenden Fresnel-Zeigern ($\underline{u}$, $\underline{u}^*$, $\underline{i}$, $\underline{i}^*$):

$$u = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{u}^*), \quad i = \frac{1}{2}(\underline{i} + \underline{i}^*) \tag{2}$$

den Ausdruck:

$$p = ui = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{s}^*) \tag{3}$$

haben, worin

$$\underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t+\varepsilon)} = u + ju', \quad \underline{u}^* = \hat{U}e^{-j(\omega t+\varepsilon)} = u - ju', \tag{4}$$

$$\underline{i} = \hat{I}e^{j(\omega t+\beta)} = i + ji', \quad \underline{i}^* = \hat{I}e^{-j(\omega t+\beta)} = i - i', \tag{5}$$

$$u' = \hat{U}\sin(\omega t + \varepsilon), \quad i' = \hat{I}\sin(\omega t + \beta). \tag{6}$$

$\underline{s}$ stellt die komplexe Augenblicksscheinleistung:

$$\underline{s} = ui = \frac{1}{2}u(\underline{i} + \underline{i}^*) = p + jq \tag{7}$$

dar, und $\underline{s}^*$ ist die der Grösse $\underline{s}$ komplex konjungierte Grösse:

(8) $$\underline{s}^* = \underline{u}^* \underline{i} = \frac{1}{2}(\underline{i} + \underline{i}^*)\underline{u}^* = p - jq,$$

worin q die Augenblicksblindleistung:

(9) $$q = u'i = \hat{U}\hat{I} \sin(\omega t + \varepsilon) \cos(\omega t + \beta)$$

ist.

Führt man in (7) die Beziehungen (4), (5) ein so erhält man:

(10) $$\underline{s} = \underline{S} + \underline{s}_2,$$

worin $\underline{S}$ — die mittlere komplexe Scheinleistung:

(11) $$\underline{S} = UIe^{j(\varepsilon-\beta)} = P + jQ,$$

$\underline{s}_2$ — die pulsierende komplexe Augenblicksscheinleistung:

(12) $$\underline{s}_2 = \frac{1}{2}\underline{ui} = p_2 + jq_2,$$

P, Q — die mittleren Wirk- und Blindleistungen

(11′) $$P = UI \cos(\varepsilon - \beta),$$

(11″) $$Q = UI \sin(\varepsilon - \beta),$$

p_2, q_2 — die pulsierenden Augenblickswirk- und Blindleistungen

(12′) $$p_2 = UI \cos(2\omega t + \varepsilon + \beta),$$

(12″) $$q_2 = UI \sin(2\omega t + \varepsilon + \beta),$$

sind, so dass die Augenblickswirk- und Blindleistungen mit:

(13) $$p = P + p_2,$$

(14) $$q = Q + q_2,$$

ausgedrückt werden können.

2. Von demselben Ausdruck der Augenblickswirkleistung ausgehend, kann ein neuer Ausdruck für die komplexe Augenblicksscheinleistung gegeben werden:

(3′) $$p = ui = \frac{1}{2}(\underline{s}' + \underline{s}'^*)$$

worin:

(7′) $$\underline{s}' = \underline{ui} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{u}^*)\underline{i} = p + jq',$$

(8′) $$\underline{s}'^* = \underline{ui}^* = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{u}^*)\underline{i}^* = p - jq'.$$

Hier q' den Ausdruck

(9′) $$q' = ui' = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \varepsilon)\sin(\omega t + \beta)$$

hat.

Vergleicht man (7) mit (7′) so kann festgestellt werden, dass die Realteile der zwei komplexen Grössen $\underline{s}$, $\underline{s}'$ identisch, die imaginären Teile jedoch verschieden sind (s. (9), (9′)).

Um den erwähnten Unterschied hervorzuheben, werden in (7′) die Ausdrücke der Fresnel-Zeiger (4), (5), (6) eingeführt; man erhält:

(10′) $$\underline{s}' = \underline{S}' + \underline{s}_2',$$

worin $\underline{S}'$ der mittlere Wert der Grösse $\underline{s}'$, zwar

(11′) $$\underline{S}' = UIe^{j(\beta-\varepsilon)} = UIe^{-j(\varepsilon-\beta)} = P - jQ = \underline{S}^*$$

und $\underline{s}_2'$ die pulsierende komplexe Augenblicksscheinleistung:

(12′) $$\underline{s}_2' = \underline{s}_2$$

sind.

Aus der Betrachtung der Ausdrücke (10), (10′) ergibt sich, dass die vorgeschlagene neue Formel für die komplexe Augenblicksscheinleistung (7′) im Vergleich zu der vom Verfasser früher vorgeschlagenen (7), nur das Zeichen der mittleren Blindleistung beeinflusst, während der Ausdruck der pulsierenden Augenblicksblindleistung unverändert bleibt.

Dieser Umstand kann zur Messung der Blindleistung der Ein- oder Mehrphasensysteme ausgenützt werden.

Schlussfolgerungen

1. Der in der Arbeit vorgeschlagene Ausdruck der komplexen Augenblicksscheinleistung $\underline{s}'$ (7′) stellt im Verhältnis zu dem, für die gleiche Grösse von mittlerem Wert $\underline{S}$ (10) früher in [1] vom Verfasser vorgeschlagenen Ausdruck (7), eine komplexe Grösse dar, deren mittlerer Wert $\underline{S}'$ (11′) dem mittleren Wert $\underline{S}$ (11) komplex konjugiert ist.

2. Dieser Umstand kann zur Messung der Blindleistung der Ein- oder Mehrphasensysteme ausgenützt werden.

Eingegangen am 19 I 1967

Technische Hochschule „Gh. Gheorghiu-Dej", Bukarest

LITERATURVERZEICHNIS

1. Nedelcu V. N., *Die einheitliche Leistungstheorie der unsymmetrischen und mehrwelligen Mehrphasensysteme.* ETZ — A, 1965, **84**, *5*, S. 153–157.

ÎN LEGĂTURĂ CU DEFINIȚIA PUTERII APARENTE COMPLEXE INSTANTANEE

(Rezumat)

Valoarea medie $\underline{S}'$ a puterii aparente complexe instantanee $\underline{s}'$, definită de relația (7'), se dovedește a fi conjugata complexă a valorii medii $\underline{S}$ a puterii aparente complexe instantanee $\underline{s}$, definită de relația (7) [1].

Această observație poate fi utilizată la măsurarea puterii reactive în sisteme mono- sau polifazate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 537.742.5; 537.228.4

VOLTMETRE CU EFECT KERR

DE

RADU CRAMARIUC şi V. PETRESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

1. Introducere

Lucrarea constituie un studiu referitor la posibilităţile de a utiliza efectul Kerr electro-optic, la CO_2 sub presiune, pentru construcţia de voltmetre destinate măsurării tensiunilor continue înalte. Efectul Kerr la CO_2 a mai fost studiat şi de alţi autori [2]...[8], [11], care au urmărit în special stabilirea constantei Kerr şi dependenţa acesteia de densitate. În lucrarea de faţă s-a urmărit în primul rînd studiul caracteristicilor de cîmp şi influenţa diverselor elemente asupra acestora. Sînt expuse de asemenea rezultatele analizei teoretice şi experimentale referitoare la dependenţa constantei Kerr de temperatură şi densitate şi se furnizează o serie de date privind construcţia de voltmetre bazate pe efectul Kerr electro-optic, folosind ca dielectric CO_2 sub presiune.

2. Consideraţii generale asupra efectului Kerr

Cînd un dielectric transparent, izotrop, este supus unui cîmp electric intens **E**, devine anizotrop, comportîndu-se ca un cristal uniax cu o singură axă optică paralelă la direcţia cîmpului electric aplicat. Trimiţînd un fascicol de lumină polarizat liniar, care se propagă perpendicular pe direcţia cîmpului de intensitate **F**, apare o diferenţă de fază între cele două componente ale luminii polarizate, perpendicular şi paralel pe această direcţie, fascicolul de lumină devenind polarizat eliptic. Corpul a devenit în prezenţa cîmpului electric birefringent. Acest efect, cunoscut sub denumirea de efect Kerr, este maxim cînd unda luminoasă se propagă perpendicular pe direcţia cîmpului electric aplicat, iar planul de transmisie al polarizorului face un unghi de 45° cu această direcţie.

Dacă n_p şi n_s sînt indicii de refracţie ai componentelor vibraţiilor luminoase, una paralelă şi alta perpendiculară la liniile de forţă ale cîmpului electric aplicat, diferenţa lor de fază δ exprimată în radiani, după trecerea prin substanţa considerată, va fi dată de expresia:

$$\delta = \frac{2\pi l (n_p - n_s)}{\lambda} = 2\pi B l E^2 = 2\beta, \tag{1}$$

unde:

(2) $$B = \frac{(\varepsilon + 2)^2 (n^2 + 2)^2 \varrho}{n\lambda T} \left(g_1 + \frac{g_2}{T}\right)$$

— constanta Kerr pe unitatea de volum, l — lungimea drumului optic, λ — lungimea de undă a luminii monocromatice utilizate, β — unghiul de birefringenţă :

(3) $\beta = BlE^2$ (în lungimi de undă), (4) $\beta = \pi BlE^2$ (în radiani),

ϱ — densitatea, n — indicele de refracţie, ε — permitivitatea, T — temperatura absolută, g_1, g_2 — constante practic independente de temperatură şi densitate [5], ($g_2 = 0$ la substanţele nepolare).

3. Analiza caracteristicilor efectului Kerr la CO_2 sub presiune

Instalaţia experimentală este redată în fig. 1. Ca metodă de măsurare a birefringenţei s-a folosit metoda fotoelectrică [9], cu ambele procedee de detectare a fenomenului: detecţia pătratică şi detecţia liniară.

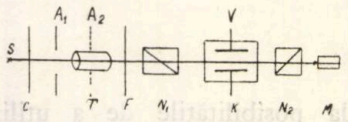


Fig. 1. — Schema de montaj ; S — sursa de lumină, C — colimatorul, A_1, A_2 — fante dreptunghiulare de 1×8 mm^2, T — teleobiectiv, F — filtru optic, N_1, N_2 — polarizor şi analizor, M — fotomultiplicator.

3.1. Caracteristicile de cîmp

3.1.1. ÎN DETECŢIA PĂTRATICĂ

În detecţia pătratică curentul fotoelectric determinat de fenomen este dat de relaţia :

(5) $$I_1 = I - k_i I_0 - I_{\text{obsc.}} = k_p I_0 \beta^2 = A_1 \beta^2 = A_2 E^4,$$

unde : I_0 — curentul fotoelectric în absenţa fenomenului, polaroizii fiind consideraţi paraleli, k_i — o constantă ce caracterizează imperfecţiunea montajului optic ($k_i = k_i I_0 / I_0$), k_p — un coeficient ce depinde de natura fenomenului, $I_{\text{obsc.}}$ — curentul de obscuritate al fotomultiplicatorului, I_1 — curentul fotoelectric determinat de fenomen, polaroizii fiind încrucişaţi.

Cel mai mic fenomen detectabil în cazul detecţiei pătratice este dat de expresia :

(6) $$\beta_m \doteq \left(\frac{k_B k_i \Delta f}{k_p^2 I_0}\right)^{1/4},$$

unde : Δf — banda de trecere a dispozitivului de măsurare al curentului, A_1, A_2 — constante.

În cazul instalaţiei experimentale utilizate de noi

$$\beta_m = 1{,}31.10^{-4} \lambda \text{ (sau } 20{,}16 \text{ kV/cm)}.$$

Din teoria transmisiei luminii prin cristale rezultă :

(7) $$I_1 = I_0 [\cos^2 (\alpha - \gamma) - \sin 2\alpha \sin 2\gamma \sin^2 \beta],$$

unde: α, γ — unghiurile pe care le fac planele de vibraţie ale luminii transmise de polaroizii N_1 şi N_2 cu liniile cîmpului electric aplicat.

Caracteristica $I_1 = f(E^4)$ este o dreaptă care trece prin origine. Se observă din fig. 2 şi 3 că această lege ca şi legile $\beta = f(E^2)$ şi $I_1 = f(\beta^2)$ se verifică experimental cu o precizie bună.

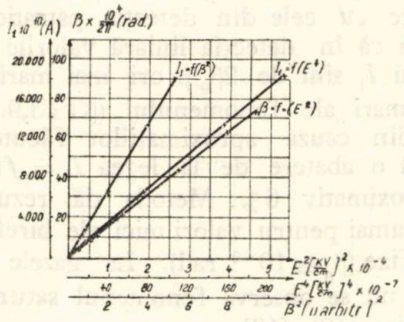


Fig. 2. — Caracteristica de cîmp în detecţia pătratică ($\alpha = 45°$, $\varrho = 77{,}8$ g/cm^3, $t = 26°$C).

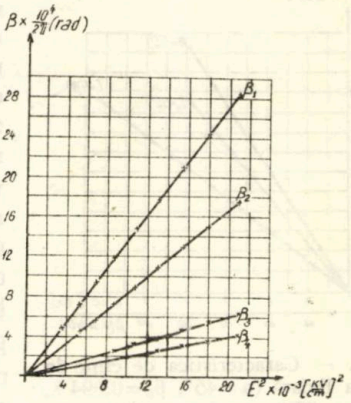


Fig. 3. — Caracteristica $\beta = f(E^2)$ în detecţia pătratică ($\alpha = 45°$, $\varrho = 77{,}8$ g/cm^3, $t = 26°$C).

În cazul inversării polarităţii tensiunii aplicate toate caracteristicile rămîn neschimbate.

Impurităţile gazului reprezintă elemente de depolarizare variabilă producînd oscilaţii întîmplătoare destul de importante. Acest fapt face imposibilă o citire corectă.

Reproductibilitatea datelor este bună.

3.1.2. ÎN DETECŢIA LINIARĂ

În detecţia liniară se introduce între polarizor şi analizor (fig. 1) o birefringenţă fixă şi mare în raport cu fenomenul ($\beta_0 \gg \beta$) [9], [10]. În acest caz curentul fotoelectric determinat de fenomen va fi dat de expresia:

$$I_1 = I - k_i I_0 - k_p I_0 \beta_0^2 - I_{\text{obsc.}} = 2k_p I_0 \beta_0 \beta, \tag{8}$$

deci de forma:

$$I_1 = A_3 \beta = A_4 E^2,$$

cu A_3, A_4 — constante.

Cel mai mic fenomen detectabil este dat de

$$\beta_m = \frac{1}{2}\left(\frac{k_B \Delta_f}{k_p I_0}\right). \tag{9}$$

În cazul instalaţiei experimentale utilizate

$$\beta_0 = 0{,}295 \text{ rad}, \quad \beta_m = 6.10^{-6}\lambda \text{ (sau 4,29 kV/cm)}.$$

I_1 este proporţional cu β — fapt ce caracterizează detecţia liniară — în consecinţă şi cu E^2. Întrucît curentul de zero ($k_p I_0 \beta_0^2 + k_i I_0 + I_{obsc.}$) este important măsurarea curentului determinat de fenomen s-a efectuat printr-o metodă de compensaţie. Rezultatele experimentale sînt date în fig. 4. Comparînd datele obţinute cu cele din detecţia pătratică se observă că în detecţia liniară valorile curentului I_1 sînt de $2\beta_0/\beta$ ori mai mari. La valori mari ale fenomenului ($\beta \cong 3{,}9.10^{-2}$ rad), din cauza aproximaţiilor făcute se observă o abatere de la legea $I_1 = f(E^2)$, de aproximativ 6%. Metoda dă rezultate bune numai pentru valori mici ale birefringenţei fixe ($\beta_0 \cong 10^{-2}$ rad). La gazele nepolare nu se observă fenomenul saturaţiei dielectrice [12], [13].

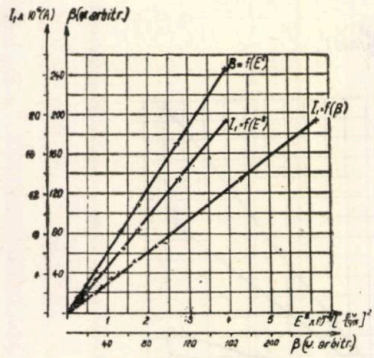


Fig. 4. — Caracteristica de cîmp în detecţia liniară ($\alpha = 45°$, $\beta_0 = 0{,}094\ \lambda$, $\varrho = 77{,}8$ g/cm³, $t = 26°$C).

3.2. Caracteristica de temperatură

Caracteristica teoretică şi cea experimentală de temperatură sînt date în fig. 5. Valorile teoretice sînt calculate folosind formula (2), formule de reducere [14] şi tabele [15]...[20], [22]. Analiza experimentală este efectuată în intervalul 0...30°C. În fig. 6 este redată şi familia de drepte $I_1 = f(E^4)$ pentru diverse temperaturi.

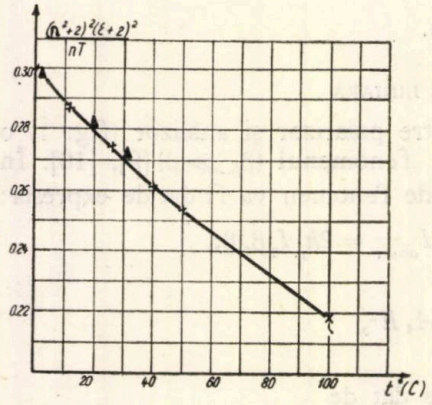


Fig. 5. — Caracteristica de temperatură($\lambda = 5852$Å, $\varrho = 77{,}8$g/cm³): × — caracteristica teoretică, ▲ — caracteristica experimentală.

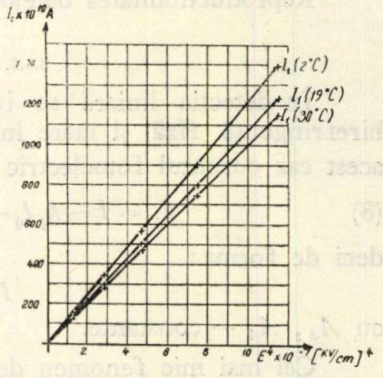


Fig. 6. — Dependenţa experimentală de temperatură a caracteristicii $I_1 = f(E^4)$, ($\varrho = 77{,}8$ g/cm³, $\lambda = 5\,460{,}7$Å).

Se constată o concordanţă bună între valorile teoretice şi experimentale. Din valorile obţinute se observă o variaţie destul de puternică cu temperatura. Pentru o variaţie a temperaturii de la 19° la 30°C se obţine o variaţie a curentului fotoelectric de 6,9 %.

3.3. Caracteristica de densitate

Dependenţa constantei Kerr de densitate, dedusă atît pe cale teoretică cît şi prin procedee experimentale, este redată în fig. 7. Valorile teoretice sînt determinate folosind formula (2). Dependenţa dintre presiune şi densitate (fig. 8) s-a calculat cu ajutorul ecuaţiei Beattie-Bridgeman [20]. Experimental s-a studiat dependenţa constantei Kerr de densitate în domeniul 15...40 at, constatînd o concordanţă bună cu valorile teoretice. Dependenţa este liniară şi dreapta care o reprezintă trece prin origine. Se constată de asemenea că efectul de temperatură şi cel de densitate se compensează mutual, fapt important în construcţia de instrumente precise.

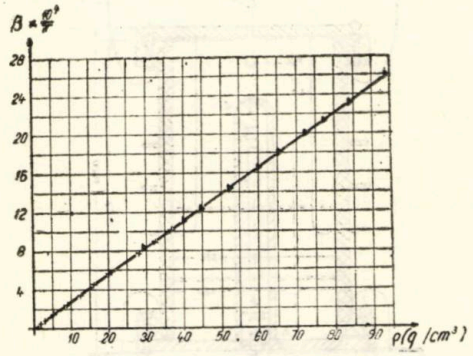


Fig. 7. — Caracteristica de densitate ($\lambda = 5\,460{,}7$ Å, $t = 2$ °C); × — caracteristica teoretică, ▲ — caracteristica experimentală.

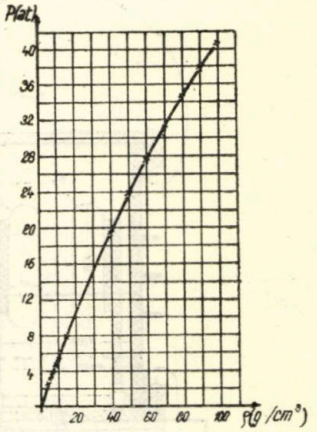


Fig. 8. — Dependenţa densităţii de presiune ($\varrho = f(p)$, $t = 26$°C).

4. Construcţia voltmetrelor cu efect Kerr

4.1. Generalităţi

Caracteristicile stabilite mai sus ($I_1 = f(E^4)$, $I_1 = f(E^2)$, $\beta = f(E^2)$) pot constitui legile de etalonare ale unor instrumente pentru măsurarea tensiunilor, legi analoge expresiei $F = f(U^2)$ ce stă la baza construcţiei voltmetrelor electrostatice [23]...[26], [31]. Limita minimă de tensiune ce poate fi măsurată depinde de cel mai mic fenomen detectabil în timp ce limita maximă nu depinde decît de construcţie. Izolantul cel mai potrivit este gazul dielectric nepolar sub presiune.

În fig. 9 şi 10 sînt redate schiţele principiale a două modele de aparate: voltmetrul cu cîmp uniform (simetrie plană) şi voltmetrul cu cîmp neuniform (simetrie cilindrică). Dimensiunile geometrice sînt alese prin analogie cu alte aparate cu gaze sub presiune [1], [23]...[25]. Traseul fascicolului de lumină este indicat cu linii întrerupte. Lampa S (cu Hg, $I_0 = 7\text{mA}$, $k_i = 2.10^{-5}$) este fixată în exteriorul incintei; lumina trece printr-o fereastră optică Z şi intră într-un colimator format din colectorul C şi teleobiectivul T. Dimensiunea fascicolului (25×5 mm^2) este dată de fante (A_1, A_2—fig. 1), neindicate în figură. Fascicolul de lumină paralelă trece apoi prin filtrul F, este polarizat cu ajutorul polaroidului N_1 şi trimis cu ajutorul a două prisme cu reflexie totală O' şi O'' între electrozii celului Kerr. Este trecut apoi prin analizorul N_2 şi printr-o fereastră optică Z iese în exterior unde este detectat cu un fotomultiplicator M. Folosirea prismelor ne permite să utilizăm şi detecţia liniară fără a fin ecesară introducerea altor elemente.

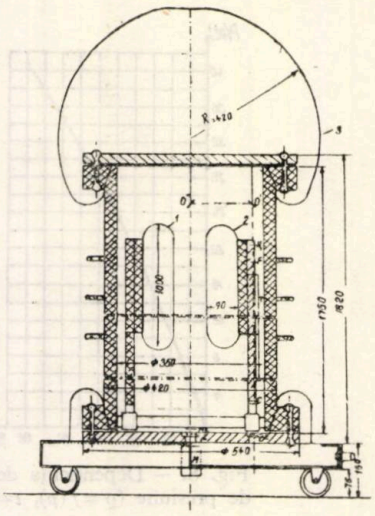


Fig. 9. — Model de voltmetru cu efect Kerr pentru 1 MV, cu simetrie plană.

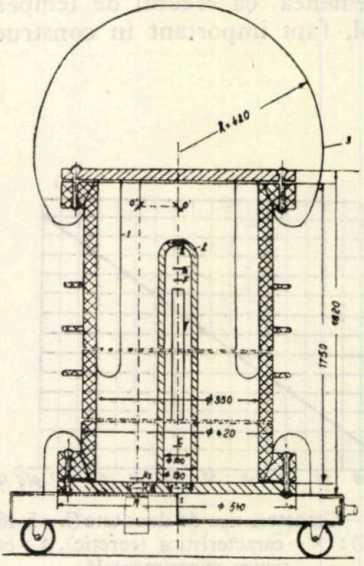


Fig. 10. — Model de voltmetru cu efect Kerr pentru 1 MV cu simetrie cilindrică.

În fig. 9 şi fig. 10, *1* şi *2* reprezintă electrozii celului Kerr iar *3* un electrod metalic pentru înlăturarea pierderilor corona. La primul model distanţa dintre electrozi este variabilă (1; 2; 3; 4 cm) în timp ce la cel de al doilea model distanţa este fixă ($R_1/R_2 = 5$ cm/10 cm).

4.2. Procedeul de măsurare a tensiunii înalte

Se pot imagina două procedee de măsurare şi anume:

1° Prin intermediul unghiului de birefringenţă folosind următoarea tehnică. În prezenţa tensiunii U se măsoară curentul fotoelectric I. În absenţa

tensiunii se roteşte analizorul pentru a obţine acelaşi curent şi se citeşte valoarea unghiului de birefringenţă. Folosind relaţia $\beta = f(U)$ se determină tensiunea U.

2° Prin intermediul măsurării curentului fotoelectric compensînd valoarea curentului de zero.

Primul procedeu este incomod şi neadecvat. Procedeul al doilea este simplu, comod şi adecvat folosirii în construcţia unor astfel de aparate. Valorile curenţilor sînt date în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

Valorile curentului fotoelectric în detecţia pătratică

U kV	E kV/cm	I A
10	10	7.10^{-10}
20	20	$1{,}12.10^{-8}$
30	30	$5{,}67.10^{-8}$
40	40	$1{,}79.10^{-7}$
50	50	$4{,}375.10^{-7}$
60	60	$9{,}07.10^{-7}$
80	80	$2{,}86.10^{-6}$
100	100	7.10^{-6}
150	150	$35{,}43.10^{-6}$
200	200	112.10^{-6}
250	250	273.10^{-6}

Tabelul 2

Valorile curentului fotoelectric în detecţia liniară

U kV	E kV/cm	I A
1	1	$1{,}32.10^{-8}$
3	3	$1{,}18.10^{-7}$
5	5	$0{,}33.10^{-6}$
10	10	$1{,}32.10^{-6}$
20	20	$5{,}28.10^{-6}$
30	30	$11{,}88.10^{-6}$
40	40	$21{,}10.10^{-6}$
50	50	33.10^{-6}
60	60	$47{,}5.10^{-6}$
80	80	$84{,}5.10^{-6}$
100	100	132.10^{-6}

4.3. Etalonarea

Luînd în considerare comportarea caracteristicii $I_1 = f(E^4)$ etalonarea în detecţia pătratică se poate realiza la tensiuni joase, dreapta obţinută putîndu-se extrapola pînă la tensiunea limită a aparatului.

În cazul detecţiei liniare, din cauza erorilor arătate în **3.1.2**, etalonarea trebuie efectuată pe toată scala de măsură a aparatului.

4.4. Erorile de măsurare [28]...[30]

Curenţii fotoelectrici prin intermediul cărora se măsoară tensiunea sînt:

(10) $I_1 = k_p I_0 \beta^2$ — în detecţia pătratică, (11) $I_1 = 2k_p I_0 \beta_0 \beta$ — în detecţia liniară.

Expresiile tensiunilor vor fi:

(12) $$U = \frac{d}{\sqrt{\pi B l}} \sqrt{\frac{I_p}{k_p I_0}}$$ — în detecţia pătratică,

(13) $$U = \sqrt{\frac{d^2 I_1}{8\pi k_p I_0 \beta_0 B l}}$$ — în detecţia liniară.

Erorile relative vor fi:

(14) $$\frac{\Delta U}{U} = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{B} + \frac{1}{4}\frac{\Delta I_1}{I_1} + \frac{1}{4}\frac{\Delta I_0}{I_0}$$ — în detecţia pătratică,

(15) $$\frac{\Delta U}{U} = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{B} + \frac{1}{2}\frac{\Delta I_1}{I_1} + \frac{1}{2}\frac{\Delta I_0}{I_0}$$ — în detecţia liniară,

unde:

$$B = A\frac{\varrho}{T} \quad \text{şi} \quad \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \varrho}{\varrho} + \frac{\Delta T}{T}.$$

Păstrînd invariabil raportul ϱ/T, prin modificarea lui ϱ odată cu temperatura T se poate realiza situaţia ca B să rămînă independent de variaţiile de temperatură. Un astfel de procedeu nu poate fi aplicat la lichide sau coloizi, din care motiv gazele rămîn singurele posibile a fi utilizate la construcţia de instrumente mai precise.

În relaţiile (14) şi (15) $\Delta I_0/I_0$ reprezintă eroarea introdusă de fluctuaţiile sursei de lumină ($\cong 0{,}1\,\%$), iar $\Delta I_1/I_1$ — eroarea introdusă de instrumentul cu care se măsoară curentul fotoelectric ($\cong 0{,}2\,\%$).

La acestea se mai adaugă: E_e — eroarea de etalonare ($\cong 0{,}1\,\%$) şi E_c — eroarea pentru compensarea curentului de zero ($\cong 0{,}1\,\%$).

Etalonarea se poate efectua cu divizori activi de tensiune, cu reacţii nucleare, prin intermediul spectrului de difracţie al razelor X.

Eroarea relativă totală, în cazul nostru, este de 0,570 % în detecţia pătratică şi de 0,650 % în detecţia liniară.

4.5. Caracteristicile generale ale aparatelor

1° Domeniul de măsură.

La voltmetrele cu simetrie plană:

30...1 000 kV — în detecţia pătratică, 5...400 kV — în detecţia liniară, 5...1 000 kV — în ambele detecţii.

La voltmetrele cu simetrie cilindrică:

150...1 000 kV — în detecţia pătratică, 30...500 kV — în detecţia liniară, 30...1 000 kV — în ambele detecţii.

2°. Scala de măsură este cuadratică în detecţia pătratică şi pătratică în detecţia liniară.

3° Eroarea relativă a aparatului — 0,6 %.

4° Timpul de amortizare este aproximativ nul (aparatul este lipsit de inerţie).

5° Consumul propriu al aparatului este aproximativ nul.

6° Eroarea de fidelitate — 0,05 %.

7° Aparatul este universal.

8° Aparatul este robust, comod, sistemul de citire poate fi plasat la distanţă.

5. Concluzii

1. Lucrarea constituie un studiu sistematic al posibilităţilor de a utiliza efectul Kerr electro-optic, la CO_2 sub presiune, pentru construcţia de voltmetre destinate măsurării tensiunilor înalte. În acest sens se întreprinde o analiză teoretică şi experimentală a efectului Kerr la CO_2 sub presiune. Ca metodă de măsură s-a folosit metoda fotoelectrică, cu ambele mijloace de detectare a fenomenului: detecţia pătratică şi detecţia liniară. S-au studiat caracteristicile de cîmp $I_1 = f(E^4)$, $\beta = f(E^2)$ în cazul detecţiei pătratice şi $I_1 = f(E^2)$, $\beta = f(E^2)$ în cazul detecţiei liniare. Aceste legi s-au verificat experimental cu o precizie bună în cazul detecţiei pătratice, în timp ce în cazul detecţiei liniare, la valori mari ale cîmpului aplicat s-au observat abateri de la dreapta $I_1 = f(E^2)$ din cauza aproximaţiilor teoretice făcute. S-a mai constatat că datele sînt reproductibile şi nu există diferenţă între cazurile cu polaritate pozitivă şi cele cu polaritate negativă aplicată electrodului cu tensiunea înaltă. Impurităţile gazului duc la scăderea sensibilităţii.

2. S-a studiat dependenţa constantei Kerr de temperatură şi densitate atît teoretic cît şi experimental. În ambele situaţii se constată o concordanţă bună între valorile teoretice şi cele experimentale. Dependenţa de temperatură este destul de pronunţată. Se mai constată că efectul de temperatură şi cel de densitate se compensează mutual. Printr-un procedeu corespunzător se poate păstra constant raportul ϱ/T astfel încît curentul fotoelectric I_1 să fie independent de temperatură.

3. Se indică, principial, elementele necesare construcţiei şi caracteristicile a două tipuri de voltmetre cu efect Kerr pentru măsurarea tensiunilor înalte, continue, pînă la 1 milion volţi. Avînd o eroare relativă de aproximativ 0,6% voltmetrele cu efect Kerr pot fi folosite atît în laboratoarele de cercetări cît şi în industrie. Pot fi considerate aparate industriale întrucît sînt precise, robuste, uşor de manevrat şi universale.

Academia Republicii Socialiste România,
Institutul de fizică atomică, Bucureşti
şi
Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de măsuri şi maşini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Belot F., Rev. Gén. d'Electr., 1957, **66**, p. 247.
2. Langevin P., Le Radium, 1910, **7**, p. 249.
3. Born M., Ann. der Phys., 1918, **35**, S. 117.
4. — *Optik*. Berlin, 1933.
5. Szivessy G., Handb. der Phys., 1929, **XXI**, S. 724.
6. Bruce C. W., Phys. Rev., 1934, **44**, p. 689.
7. Breazeale W. M., Phys. Rev., 1936, **49**, p. 625.
8. — Phys. Rev., 1937, **48**, p. 237.
9. Badosz J., J. Phys. et Radium, 1956, **17**, *11*, p. 143 A.
10. — Ann. de Phys., 1958, **3**, p. 33.
11. Quarles G. G., Phys. Rev., 1934, **46**, p. 692.
12. Böttcher G. J. F., *Theory of Electric Polarisation*. London, 1952.

13. Goodwin D. W., Proc. Phys. Soc., Part I, 1956, **69**, p. 61.
14. * * * *Tables annuelles de constantes et données numériques*. Paris, 1937.
15. von Itterbeek, de Clippeleir K., Physica, 1948, **14**, p. 349; Ibid., 1947, **13**, p. 459.
16. Michels A. L., Kierekoper, Physica, 1939, **6**, p. 586.
17. Clay J. F., von der Maesen, Physica, 1949, **15**, p. 467.
18. Veyes F. G., Kirkwood J. G., Phys. Rev., 1930, **36**, p. 754.
19. Abraham A., Sacerdote P., *Recueil de constantes physiques*. Paris, 1913.
20. Joung D. R., J. Appl. Phys., 1950, **21** p. 222.
21. Kuss E., Stuart H. A., Phys. Ztschr., 1941, **42**, S. 95.
22. Börnstein-Landolt, *Zahlenwerte und Funktionen*. **II B, 6 T, 8 T**, 1962; **II B**, 1923.
23. Böning P., *Das Messen hoher elektrischer Spannungen*. Karlsruhe, 1953.
24. Craggs J., Meek D. M., *High Voltage Laboratory Technique*. London, 1954.
25. Böning P., A. T. M., 1959, **88**.
26. Sirotinski I. I., *Tehnica tensiunilor înalte*. Ed. Tehn., Buc., 1954, (trad. din l. rusă).
27. Landsberg G. S., *Optica*. Ed. Tehn., Buc., Ed. 2-a, (trad. din l. rusă).
28. Kovo D., *Electrical Measurements and the Calculation of the Errors involved*. London, 1961.
29. Topping J., *Errors of Observation and their Treatment*. London, 1960.
30. Idrac J., *Mesure et instrument de mesure*. Paris, 1960.
31. Воробьева А. А., *Высоковольтное испытательное оборудование и измерения*. Ленинград, 1960.

VOLTMÈTRES À EFFECT KERR

(Resumé)

Cette Note a pour objet une étude concernant les possibilités d'utiliser l'effet de Kerr électro-optique, dans le CO_2 sous pression, pour la mesure des hautes tension continues. On étudie les caractéristiques $I_1 = f(E^4)$, $\beta = f(E^2)$, dans le cas de la détection carrée et $I_1 = f(E^2)$, $\beta = f(E^2)$ dans le cas de la détection linéaire.

On établit par voie théorique et expérimentale la dépendance de la constante de Kerr fonction de la température et de la densité du gaz.

Dans la dernière partie du travail on présente nombre de données quant à la construction de deux modèles de voltmètres basés sur l'effet de Kerr.

Explications des figures

Fig. 1. — Schéma du montage; S — source de lumière, C — colimateur, A_1, A_2 — fantes rectangulaires de 1×8 mm^2 chacune, T — téléobjectif, F — filtre optique, N_1 — polariseur, N_2—analyseur, M — photomultiplicateur.

Fig. 2. — Caractéristique du champ en détection carrée ($\alpha = 45°$, $\varrho = 77{,}8$ g/cm^3, $t = 26°$C).

Fig. 3. — Caractéristique $\beta = f(E^2)$ en détection carrée ($\alpha \neq 45°$, $\varrho = 77{,}8$ g/cm^3, $t = 26°$C).

Fig. 4. — Caractéristique du champ en détection linéaire ($\alpha = 45°$, $\beta_0 = 0{,}094\,\lambda$, $\varrho = 77{,}8$ g/cm^3, $t = 26°$C).

Fig. 5. — Caractéristique de la température ($\lambda = 5\,825$ Å, $\varrho = 77{,}8$ g/cm^3); × — caractéristique théorique, ▲ — caractéristique expérimentale.

Fig. 6. — Dépendence expérimentale de la caractéristique $I_1 = f(E^4)$, fonction de temperature ($\varrho = 77{,}8$ g/cm^3, $\lambda = 5\,460{,}7$ Å).

Fig. 7. — Caractéristique de la densité ($\lambda = 5\,460{,}7$ Å, $t = 26°$C); × — caractéristique théorique, ▲ — caractéristique expérimentale.

Fig. 8. — Dépendence de la densité, fonction de pression ($\varrho = f(p)$, $t = 26°$C).

Fig. 9. — Modèle de voltmètre à effet Kerr, pour 1 MV, à symétrie plane.

Fig. 10. — Modèle de voltmètre à effet Kerr, pour 1 MV, à symétrie cylindrique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

УДК 621.396.611.3

О ТЕОРИИ n-КОНТУРНЫХ LC-АВТОГЕНЕРАТОРОВ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИНДУКТИВНОСТЯМИ

Д. Д. БАЙНОВ, Г. В. ПЛОТНИКОВА и Ю. П. МАРИНОВ

В ряде работ была рассмотрена теория n-контурных LC-автогенераторов с линейными элементами. Часто, однако, в частотноопределяющие колебательные контуры включаются нелинейные элементы, которые используются для реализации частотной модуляции или автоматической донастройки на частоту.

В настоящей работе рассматривается теория n-контурного лампового LC-автогенератора с нелинейными индуктивностями, включенными в его частотноопределяющие колебательные контуры.

В результате углубленного анализа найдены условия существования устойчивого колебательного процесса в резонансном случае и в области значительно отдаленной от резонанса.

Процессы в электромагнитной схеме рассматриваемого n-контурного автогенератора описываются следующей системой дифференциальных уравнений, которыми выражается связь между контурными токами $I_1, I_2, \ldots, I_n$ и анодным током I_a:

$$(1) \qquad \frac{d(L_k I_k)}{dt} + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k\,dt = M_k \frac{dI_a}{dt} + \bar{p}_k \sin \omega_k t + \bar{I}_k \sin qt,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где: L_k — индуктивности, C_k — емкости, R_k — активные сопротивления контуров, M_k — взаимные индуктивности между контурами и катушками обратной связи, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Предполагаем, что индуктивности L_k являются функциями напряжений u_k вида

$$L_k = L_{k0} + L_{k1} u_k + L_{k2} u_k^2, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

и, что связь между напряжениями

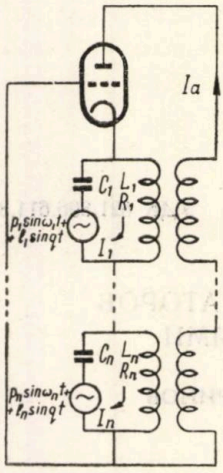


Рис. 1

$$u_k = \frac{1}{C_k}\int I_k \, dt, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

в контурах и анодном токе I_a

$$I_a = a_0 + a_1 \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu + a_3 \left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \right)^3. \tag{4}$$

Полагаем $1/L_k C_k = \omega_k^2$ и переходим к напряжениям.

Система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = {} & \omega_k^2 M_k \left[a_1 + 3a_3 \left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \right)^2 \right] \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu - \\ & - \omega_k^2 R_k C_k \dot{u}_k - \omega_k^2 (L_{k1} u_k + L_{k2} u_k^2) C_k \ddot{u}_k - \\ & - \omega_k^2 L_{k1} C_k \dot{u}_k^2 - 2\omega_k^2 L_{k2} C_k u_k \dot{u}_k^2 + \omega_k^2 \bar{p}_k \sin \omega_k t + \\ & + \omega_k^2 \bar{l}_k \sin qt, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{5}$$

Предполагаем, что a_1, R_k, L_{k1}, $\bar{p}_k$ и $\bar{l}_k$ — величины малости λ. Полагаем

$$\omega_k^2 a_1 M_k = \lambda b_k, \quad 3\omega_k^2 a_3 M_k = d_k, \quad -\omega_k^2 R_k C_k = \lambda g_k, \quad -\omega_k^2 L_{k1} C_k = \sqrt{\lambda} h_k,$$

$$-\omega_k^2 L_{k1} C_k = \sqrt{\lambda} r_k, \quad -2\omega_k^2 L_{k2} C_k = s_k, \quad \omega_k^2 \bar{p}_k = \lambda^{3/2} p_k, \quad \omega_k^2 \bar{l}_k = \sqrt{\lambda} l_k^*,$$

$$-\omega_k^2 L_{k2} C_k = m_k,$$

где $\lambda > 0$ — малый параметр. После подстановки $u_k = \sqrt{\lambda} x_k$ система (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \lambda \Bigg\{ & \left[b_k + d_k \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right)^2 \right] \sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu + g_k \dot{x}_k + (h_k x_k + \\ & + m_k x_k^2) \ddot{x}_k + r_k \dot{x}_k^2 + s_k x_k \dot{x}_k^2 + p_k \sin \omega_k t \Bigg\} + l_k^* \sin qt, \\ & (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{6}$$

Система (6) согласно [1] в первом приближении эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \lambda \Bigg\{ & \left[b_k + d_k \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right)^2 \right] \sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu + g_k \dot{x}_k + (h_k x_k + \\ & + m_k x_k^2)(l_k^* \sin qt - \omega_k^2 x_k) + r_k \dot{x}_k^2 + s_k x_k \dot{x}_k^2 + p_k \sin \omega_k t \Bigg\} + l_k^* \sin qt, \\ & (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{7}$$

Сначала рассмотрим колебания автогенератора в области значительно отдаленной от резонанса. Предполагаем, что число q целое, а числа ω_k нецелые. Для порождающего решения выбираем частный интеграл порождающей системы системы (7)

$$x_k = l_k \sin qt, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где $l_k = l_k^* / (\omega_k^2 - q^2)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Этому порождающему решению отвечает единственное периодическое с периодом 2π решение системы (7).

Условиями асимптотической устойчивости этого решения являются

$$\int_0^{2\pi} \{b_k + d_k (E \sin qt)^2 + g_k + 2r_k q l_k \cos qt + 2s_2 q l_k^2 \sin qt \cos qt\} \, dt < 0, \tag{9}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $E = \sum_{\nu=1}^{\nu} l_\nu$, или в развернутом виде

$$2b_k + 2g_k + d_k E^2 < 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Сейчас рассмотрим резонансный случай, когда одна из частот внешнего влияния совпадает с одной из собственных частот автогенератора.

Предполагаем, что $\omega_1 \neq q$ являются целыми числами и, что ω_s, $(s = 2, 3, \ldots, n)$ — нецелые числа. Для порождающего решения выбираем частный интеграл порождающей системы (7)

$$\begin{cases} x_{10} = A_0 \cos \omega_1 t + \dfrac{B_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + l_1 \sin qt, \\ x_{s0} = l_s \sin qt, \quad (s = 2, 3, \ldots, n). \end{cases} \tag{11}$$

Отыскиваемое периодическое с периодом 2π решение системы (7) можно представить степенными рядами вида

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}(t) + \beta_1 \cos \omega_1 t + \dfrac{\gamma_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \\ \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_{1m}(t) + \dfrac{\partial C_{1m}(t)}{\partial A_0} \beta_1 + \dfrac{\partial C_{1m}(t)}{\partial B_0} \gamma_1 + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 C_{1m}(t)}{\partial A_0^2} \beta_1^2 + \ldots \right] \lambda^m, \\ x_s(t) = x_{s0}(t) + \psi_s \cos \omega_s t + \dfrac{\varphi_s}{\omega_s} \sin \omega_s t + \\ \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_{sm}(t) + \dfrac{\partial C_{sm}(t)}{\partial A_0} \beta_1 + \dfrac{\partial C_{sm}(t)}{\partial B_0} \gamma_1 + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 C_{sm}(t)}{\partial A_0^2} \beta_1^2 + \ldots \right] \lambda^m, \\ \quad (s = 2, 3, \ldots, n). \end{cases} \tag{12}$$

Величины β_1 и γ_1 являются функциями λ и при $\lambda = 0$ обращаются в нуль; величины φ_s, ψ_s, $(s = 2, 3, ..., n)$ — функции λ, β_1 и γ_1, которые при $\lambda = 0$ также обращаются в нуль [2].

При сделанных выше предположениях, необходимыми условиями чтобы решение (12) при $\lambda = 0$ обращалось в порождающее решение (11) являются [2]

$$C_{11}(2\pi) = 0, \quad \dot{C}_{11}(2\pi) = 0. \tag{13}$$

Условия (13) являются уравнениями основных амплитуд A_0 и B_0. После известных вычислений условия (13) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{1}{4} d_1 A_0^3 + \left(\frac{3}{4} m_1 - \frac{1}{4} s_1\right) A_0^2 B_0 + \frac{1}{4} \frac{d_1}{\omega_1^2} A_0 B_0^2 + \left(\frac{3}{4} m_1 - \frac{1}{4} s_1\right) B_0^3 + \\ + \left(b_1 + g_1 + \frac{1}{2} d_1 E^2\right) A_0 + \left(\frac{3}{2} m_1 l_1^2 - \frac{m_1 l_1 l_1^*}{\omega_1^2} - \frac{s_1 l_1^2 q^2}{2\omega_1^2}\right) B_0 - \frac{p_1}{\omega_1} = 0, \\ \left(\frac{1}{4} s_1 \omega_1^2 - \frac{3}{4} m_1 \omega_1^2\right) A_0^3 + \frac{1}{4} d_1 A_0^2 B_0 + \left(\frac{1}{4} s_1 - \frac{3}{4} m_1\right) A_0 B_0^2 + \\ + \frac{1}{4} \frac{d_1}{\omega_1^2} B_0^3 + \left(m_1 l_1 l_1^* + \frac{1}{2} s_1 l_1^2 q^2 - \frac{3}{2} m_1 l_1^2 \omega_1^2\right) A_0 + \left(b_1 + g_1 + \frac{1}{2} d_1 E^2\right) B_0 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Предполагаем, что система (14) допускает однократное решение $A_0 = A$, $B_0 = B$. При наличии условия (14), достаточным условием существования периодического с периодом 2π решения системы (7), расположенного по целым степеням малого параметра и отвечающего основным амплитудам A и B является [2]

$$\frac{D[C_{11}(2\pi), \dot{C}_{11}(2\pi)]}{D[A_0, B_0]} \neq 0, \tag{15}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} &\pi^2 \left[\frac{3}{4} d_1 A^2 + \left(\frac{3}{2} m_1 - \frac{1}{2} s_1\right) AB + \frac{1}{4} \frac{d_1}{\omega_1^2} B^2 + b_1 + \right. \\ &\left. + g_1 + \frac{1}{2} d_1 E^2\right] \left[\frac{1}{4} d_1 A^2 + \left(\frac{1}{2} s_1 - \frac{3}{2} m_1\right) AB + \frac{3}{4} \frac{d_1}{\omega_1^2} B^2 + \right. \\ &\left. + b_1 + g_1 + \frac{1}{2} d_1 E^2\right] - \pi^2 \left[\left(\frac{3}{4} m_1 - \frac{1}{4} s_1\right) A^2 + \frac{1}{2} \frac{d_1}{\omega_1^2} AB + \right. \end{aligned} \tag{16}$$

$$+\left(\frac{q}{4}m_1-\frac{3}{4}s_1\right)B^2+\frac{3}{2}m_1l_1^2-\frac{m_1l_1l_1^*}{\omega_1^2}-\frac{s_1l_1^2q^2}{2\omega_1^2}\Bigg|\left|\frac{3}{4}s_1\omega_1^2-\right.$$

$$-\frac{q}{4}m_1\omega_1^2\Bigg)A^2+\frac{1}{2}d_1AB+\left(\frac{1}{4}s_1-\frac{3}{4}m_1\right)B^2+m_1l_1l_1^*+ \tag{16}$$

$$\left.+\frac{1}{2}s_1l_1^2g^2-\frac{3}{2}m_1l_1^2\omega_1^2\right]\neq 0.$$

Условиями асимптотической устойчивости решения системы (7) с основными амплитудами A и B являются

$$\begin{cases}\dfrac{D[C_{11}(2\pi),\dot{C}_{11}(2\pi)]}{D[A_0,B_0]}>0, \quad \dfrac{\partial C_{11}(2\pi)}{\partial A_0}+\dfrac{\partial\dot{C}_{11}(2\pi)}{\partial B_0}<0,\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\left[b_p+g_p+d_p\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu 0}\right)^2+2r_p\dot{x}_{p0}+2s_px_{p0}\dot{x}_{p0}\right]dt<0,\\ (p=2,3,\ldots n),\end{cases} \tag{17}$$

или в развернутои виде

$$\left[\frac{3}{4}d_1A^2+\left(\frac{3}{2}m_1-\frac{1}{2}s_1\right)AB+4\frac{d_1}{\omega_1^2}B^2+b_1+g_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}d_1E^2\right]\left[\frac{1}{4}d_1A^2+\left(\frac{1}{2}s_1-\frac{3}{2}m_1\right)AB+\frac{3}{4}\frac{d_1}{\omega_1^2}B^2+b_1+g_1+\frac{1}{2}d_1E^2\right]-$$

$$-\left[\left(\frac{3}{4}m_1-\frac{1}{4}s_1\right)A^2+\frac{1}{2}\frac{d_1}{\omega_1^2}AB+\left(\frac{9}{4}m_1-\frac{1}{4}s_1\right)B^2+\frac{3}{2}m_1l_1^2-\right. \tag{18}$$

$$-\frac{m_1l_1l_1^*}{\omega_1^2}-\frac{s_1l_1^2q^2}{2\omega_1^2}\Bigg|\left|\left(\frac{3}{4}s_1\omega_1^2-\frac{9}{4}m_1\omega_1^2\right)A^2+\frac{1}{2}d_1AB+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4}s_1-\frac{3}{4}m_1\right)B^2+m_1l_1l_1^*+\frac{1}{2}s_1l_1^2g_1^2-\frac{3}{2}m_1l_1^2\omega_1^2\right]>0,$$

$$2b_k+2g_k+d_k\left(A^2+\frac{B^2}{\omega_1^2}+E^2\right)<0, \quad (k=1,\ldots,n).$$

Поступила 12 XI 1965 г.

Машино-электротехнический институт,
София, Н. Р. Болгария

ЛИТЕРАТУРА

1. Плотникова Г. В., Байнов Д. Д., *Разрешимость относительно старшей производной системы дифференциальных уравнений, зависящей от малого параметра.* Докл. Болг. АН, 1965, **18**, *1*.
2. — *Периодические колебания механической системы с n степенями свободы при наличии резонансных частот* (в печати).

ASUPRA TEORIEI OSCILATORILOR DE TIP *LC* CU *n* CIRCUITE ŞI CU INDUCTANŢE NELINIARE

(Rezumat)

Se studiază teoria oscilatorilor cu tuburi, de tip *LC*, cu *n* circuite şi cu inductanţe neliniare, conectate cu circuite oscilante.

Se determină condiţiile de existenţă a proceselor oscilante stabile în caz de rezonanţă, precum şi într-un domeniu destul de depărtat de rezonanţă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 621.317.44

MAGNETOMETRU CU SONDĂ DE SATURAŢIE TRANZISTORIZAT

DE

GH. VASILIU, C. ONU şi AL. MOLDOVANU

1. Introducere

Studiul ferosondelor cu miez saturat a constituit în ultimii ani o preocupare a unor colective din cadrul Institutului politehnic din Iaşi şi a Centrului de cercetări fizice al Academiei Republicii Socialiste România, filiala Iaşi, [2], [3].

Colectivul nostru a reuşit să construiască un magnetometru cu sondă de saturaţie, complet tranzistorizat, de sensibilitate destul de ridicată, folosind unele soluţii constructive proprii.

2. Principiul metodei de măsură

Metoda sondei de saturaţie pentru măsurarea cîmpurilor magnetice a devenit larg cunoscută în ultima vreme, fiind citată în multe lucrări şi monografii cît şi în lucrările noastre anterioare [1], [2]. În cele ce urmează o expunem foarte sumar.

Sonda de saturaţie se compune din două miezuri subţiri cilindrice sau paralelipipedice din Mu-metal sau permalloy, pe cît posibil identice, dispuse paralel şi introduse în două bobine de asemenea identice, legate în serie în aşa fel încît cîmpurile magnetice instantanee h_1 şi h_2 create să fie paralele cu axele miezurilor, dar opuse ca sens (fig. 1). Aceste bobine constituie înfăşurarea primară a sondei. Ansamblul se află introdus într-o bobină secundară, cu un număr mare de spire, de ordinul a cîteva mii.

Elementul sensibil al sondei îl constituie de fapt cele două miezuri din material feromagnetic.

Înfăşurarea primară a sondei este alimentată cu un curent alternativ de frecvenţă f (în cazul nostru 2 kHz), de amplitudine suficient de mare pentru ca valorile maxime ale cîmpurilor magnetice să producă în cele două miezuri inducţii care să depăşească cu mult porţiunea liniară a curbei de magnetizare $B = f(H)$, intrînd în zona de saturaţie (de aici şi denumirea de „sondă de saturaţie" (v. fig. 2)).

Tratarea pe cale analitică sau grafică a fenomenelor ce au loc în sondă [2], [3] ţine seama în ultimă instanţă de neliniaritatea curbei de magnetizare în apropierea zonei de saturaţie şi duce la următoarele concluzii:

a) Dacă pe direcţia miezurilor sondei cîmpul magnetic exterior este nul, cele două cîmpuri alternative h_1 şi h_2, ($h_1 = -h_2 = h$), induc în înfăşurarea secundară t. e. m. egale şi de sens contrar, care se compensează; în înfăşurarea secundară nu se induce nici un semnal (fig. 3 a).

b) Dacă în spaţiul ferosondei există un cîmp magnetic constant H_0, paralel cu direcţia miezurilor, atunci la un moment dat avem pentru miezul din stînga cîmpul $H_0 + h$, pentru miezul din dreapta $H_0 - h$ şi invers pentru cealaltă alternanţă. Sistemul nu mai este simetric. Tratarea analitică a fenomenului [3], [4] arată că t. e. m. induse în înfăşurarea secundară, datorită variaţiei inducţiei magnetice în cele două miezuri, sînt defazate şi nu se mai compensează. În secundarul ferosondei se induce o t. e. m. de formă complicată (fig. 3 b şi fig. 3 c); semnalul indus este bogat în armonici pare ($2nf$) ale frecvenţei de excitaţie (f), cea mai intensă fiind

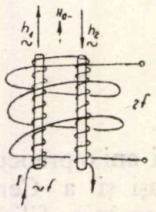


Fig. 1

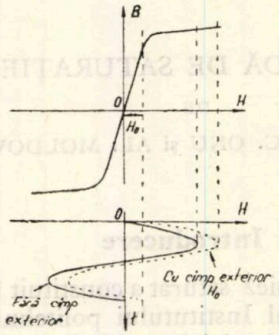


Fig. 2

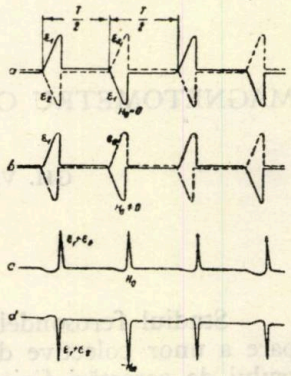


Fig. 3

armonica de frecvenţă dublă ($2f$). Pentru valori mici ale cîmpului constant H_0, t. e. m. indusă este proporţională cu valoarea cîmpului H_0. Faza semnalului de frecvenţă dublă, în raport cu faza semnalului de excitaţie, depinde de sensul cîmpului constant H_0.

Măsurînd mărimea semnalului indus în secundarul ferosondei şi determinînd faza acestuia, se poate afla indirect mărimea şi sensul cîmpului magnetic constant H_0.

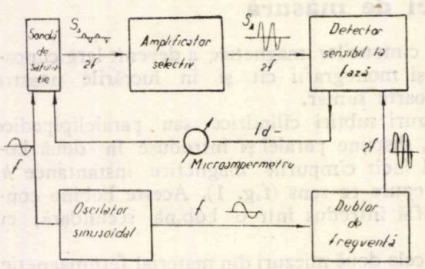


Fig. 4

Funcţionarea magnetometrului construit de noi poate fi urmărită examinînd schema bloc din fig. 4.

Un oscilator de semnale sinusoidale tranzistorizat alimentează înfăşurările primare ale sondei de saturaţie cu un semnal de 2000 Hz la o tensiune de 2 V. În prezenţa unui cîmp constant H_0, paralel cu direcţia sondei, în secundarul acesteia se induce o t. e. m. de frecvenţă dublă (4000 Hz). Acest semnal slab (S_s), de ordinul zecilor de μV, este amplificat de către un amplificator selectiv tranzistorizat, acordat pe frecvenţa $2f = 4000$ Hz, pînă la nivelul a cîţiva volţi. Semnalul obţinut (S_A), practic sinusoidal, este introdus într-un detector sensibil la fază (detector sincron) de tip Walter. Detectorul Walter mai primeşte şi un semnal de referinţă (S_{ref}) de frecvenţă dublă ($2f = 4000$ Hz) şi de amplitudine constantă, pe care-l generează un

dublor de frecvență. Dublorul de frecvență, de asemenea tranzistorizat, este pilotat de către același oscilator care alimentează și primarul sondei.

Detectorul Walter debitează un curent numai dacă semnalul de intrare S_A este diferit de zero (sonda aflîndu-se în cîmp magnetic). Mărimea curentului de detecție este proporțională cu mărimea semnalului S_A, deci în ultimă instanță cu cîmpul de măsurat H_0.

Detectorul Walter redresează o singură alternanță. Alegerea alternanței detectate este determinată de raportul de fază dintre semnalul de detectat S_A și semnalul de referință S_{ref} și determină sensul curentului detectat I_d. Faza semnalului de referință S_{ref} este constantă, dublorul de frecvență fiind pilotat de către oscilatorul comun. Faza semnalului S_A depinde de sensul cîmpului magnetic H_0. Rezultă că sensul curentului detectat I_d depinde de sensul cîmpului magnetic măsurat.

Un microampermetru cu zero la mijlocul scării, conectat în circuitul curentului de detecție, indică, în mod indirect, atît mărimea cît și sensul cîmpului magnetic măsurat H_0.

Curentul de detecție se închide parțial prin înfășurarea secundară a sondei și crează un cîmp magnetic H', de sens opus cîmpului măsurat H_0. Se realizează în acest fel o reacție negativă de cîmp, care conferă schemei o stabilitate sporită și permite să se obțină diferite sensibilități, după profunzimea de reacție aleasă. Se obțin diferite profunzimi de reacție, șuntînd în mod potrivit, cu rezistențe, înfășurarea secundară a sondei.

3. Realizarea aparatului

a) *Oscilatorul tranzistorizat* (fig. 5). Schema folosită este cea a unu oscilator clasic cu reacție cu cuplaj inductiv, în contra-timp, în montaj cu bazele la masă. Tranzistorii folosiți sînt EFT-131 (românești). Miezul folosit pentru transformatorul T_4 este o ferită mangan-zinc în formă de tor.

Pentru a evita saturația miezului am limitat curenții din înfășurările transformatorului T_4 alegînd în mod potrivit rezistența R_{17} care reglează curenții de emitor.

Circuitul magnetic sub formă de tor ne-a permis să obținem o frecvență foarte stabilă.

Oscilatorul debitează 2 V pentru sondă și 7 V pentru dublorul de frecvență.

b) *Sonda de saturație* (fig. 6). Primarul sondei constă din două bobine de cîte 500 spire fiecare, din conductor de cupru emailat de $\varnothing = 0{,}1$ mm, bobinate pe carcase paralepipedice cu dimensiunile $2 \times 4 \times 500$ mm. Miezurile sînt tăiate din tablă de Mu-metal, cu dimensiunile $2 \times 0{,}5 \times 500$ mm.

Înfășurarea secundară a sondei cuprinde 3 000 spire de conductor din cupru cu $\varnothing = 0{,}1$ mm.

Un capăt al înfășurării secundare este legat la masa aparatului iar celălalt, prin grupul $R_1 C_3$, la transformatorul de intrare T_1. Curentul de reacție se închide prin secundarul sondei, trecînd mai întîi prin bobina de

filtraj „şoc". Condensatorul C_2 nu permite componentelor alternative să ajungă de la intrare, prin circuitul de reacţie, la etajul de detecţie, evitînd fenomene de reacţie parazită.

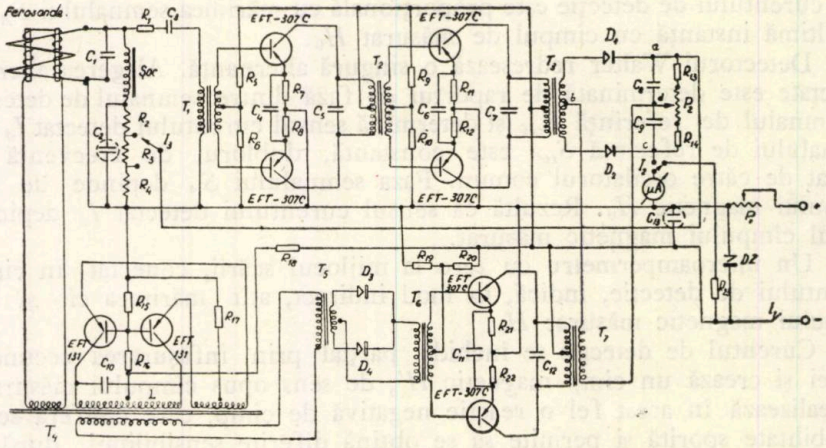


Fig. 5

Pentru a mări sensibilitatea aparatului, am legat un condensator fix C_1 la bornele secundarului sondei, ales în aşa fel încît sonda să devină un circuit acordat pe frecvenţa dublă $2f$.

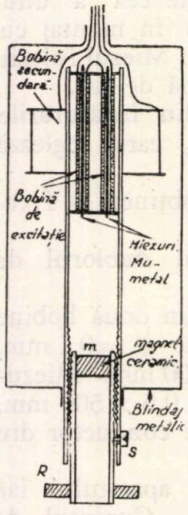


Fig. 6

Construcţia sondei este simplă şi se poate urmări în fig. 6. Prin rotirea uşoară a rozetei R, micul magnet ceramic m poate fi apropiat sau depărtat de miezurile sondei. În acest mod se realizează anularea cîmpului magnetic terestru în spaţiul miezurilor sondei, moment observat uşor prin revenirea acului indicator al microam-permetrului pe diviziunea zero din mijlocul scalei.

Prin strîngerea şurubului S se fixează piesele în poziţia celei mai bune compensări, evitînd dereglările mecanice.

Transformatorul T_1 realizează adaptarea impedanţei sondei cu primul etaj al amplificatorului.

Bobina de şoc şi transformatorul T_1 sînt construite pe miezuri de ferite Mn-Zn, fabricate în ţară.

c) *Amplificatorul selectiv* (fig. 7). Etajele amplificatorului sînt tranzistorizate, în montaj de contra-timp. Sînt folosiţi tranzistori EFT-307 C, fabricaţi în ţară.

Cuplajul între etaje şi adaptarea impedanţelor se realizează prin transformatoare, bobinate de asemenea pe miezuri de ferite fabricate în ţară. Circuitele primare

ale transformatoarelor T_2 și T_3 sînt acordate pe frecvența semnalului amplificat $2f$, cu ajutorul capacităților C_5 și C_7.

Pentru a obține un reglaj fin al acordării acestor circuite pe frecvența dorită, am ales o soluție constructivă proprie (fig. 7).

Miezurile de ferită sînt fixate, prin brățare metalice, de două plăcuțe din textolit. Plăcuța suport este fixată prin șuruburi de șasiul aparatului. Printr-un sistem simplu de șuruburi micrometrice plăcuța superioară, împreună cu jumătatea de miez de ferită pe care o poartă, poate fi ridicată sau coborîtă manual față de plăcuța inferioară (fixată). Se obține în acest mod o variație fină a întrefierului transformatorului, ceea ce permite reglarea fină a inductanței și deci un acord fin pe frecvența dorită. Prezența întrefierului elimină totodată pericolul saturației miezurilor.

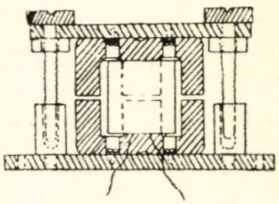


Fig. 7

Raporturile de transformare sînt: 1:2 pentru T_1; 6,5 pentru T_2 și 1:1,5 pentru T_3.

După construcția montajului s-a obținut o amplificare în tensiune de circa 130 pe etaj.

La ieșirea amplificatorului frecvența fundamentală f este amplificată de 100 de ori mai puțin decît frecvența dublă $2f$, iar frecvența $3f$, de 50 de ori mai puțin.

d) *Dublorul de frecvență* (fig. 5). Un redresor simplu, constituit din două diode cu germaniu, redresează ambele alternanțe ale semnalului de frecvență f primit de la o înfășurare separată a oscilatorului. Transformatorul T_6 separă, în înfășurarea secundară, numai componenta alternativă a curentului redresat, de frecvență dublă $2f$. Mai departe, semnalul este amplificat pînă la circa 12 V. Semnalul astfel obținut se aplică ca semnal de referință la detectorul Walter.

Între oscilator și redresor am folosit un transformator de separare T_5, coborîtor de tensiune, pentru o mai bună adaptare a impedanțelor și pentru a aplica diodelor detectoare o tensiune mică, de circa 1 V. În acest mod diodele lucrează sensibil în porțiunea neliniară a caracteristicii de detecție și se îmbunătățește forma semnalului. Într-adevăr, în cazul redresării unor semnale mari porțiunea neliniară a caracteristicii de detecție este neglijabilă, folosindu-se practic porțiunea liniară a caracteristicii. În consecință, forma componentei alternative din semnalul redresat este asimetrică, cu vîrfurile superioare rotunjite și cu cele inferioare foarte ascuțite (fig. 8 a).

În cazul redresării unor semnale mici, de un ordin de mărime corespunzător porțiunii neliniare a caracteristicii de detecție, forma componentei alternative de frecvență $2f$ obținute este mult ameliorată, practic sinusoidală, ceea ce rezultă clar din construcția grafică din fig. 8 b.

Am verificat practic acest aspect, care a constituit punctul de plecare în construirea dublorului de frecvență, simplu și stabil.

Un alt avantaj al redresării unor semnale mici este acela că componenta continuă care circulă prin primarul transformatorului T_5 este mică şi nu saturează miezul.

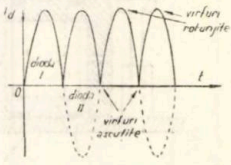


Fig. 8a

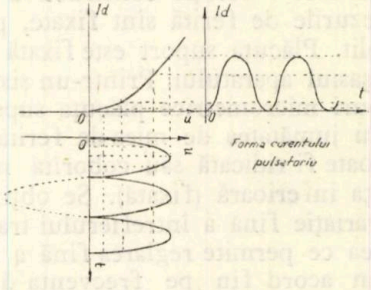


Fig. 8b

e) *Detectorul sensibil la fază.* Detectorul sensibil la fază este de tipul Walter, fiind construit cu două diode D2B.

În montajul nostru semnalul de referinţă se aplică între punctele *b* şi *d* şi nu între punctele *a* şi *c*, ca în montajul clasic. În acest mod se realizează o mai bună independenţă între ultimul etaj al amplificatorului şi dublorul de frecvenţă, înlăturînd cuplajele parazite, inevitabile în varianta clasică.

Semnalul de referinţă este de circa 12 V.

Detectorul mai cuprinde şi potenţiometrul P_2, foarte important pentru simetrizarea schemei.

f) *Alimentarea montajului.* Magnetometrul se alimentează la 9 V (2 baterii de lanternă), tensiunea utilă pe schemă fiind de 8 V, restul de circa 1 V fiind consumată pe reostatul de reglare P_1. Stabilizarea tensiunii pe diodă Zener este utilă în cazul unei funcţionări de durată, de exemplu la obţinerea de magnetograme.

4. Reglarea magnetometrului

Reglarea întregului montaj prezintă unele dificultăţi, specifice amplificatoarelor selective în joasă frecvenţă şi detecţiei sensibile la fază. Ea constă din mai multe operaţii, expuse în cele de mai jos.

a) *Acordarea oscilatorului.* Oscilatorul tranzistorizat se acordă pe frecvenţa dorită, de circa 2000 Hz, conectînd o capacitate potrivită la bornele înfăşurării L a transformatorului T_4. Prin încercări se alege condensatorul cel mai potrivit (în cazul nostru o capacitate de 0,1 μF).

Trebuie să subliniem că acordarea este definitivă numai dacă în timpul acestei operaţii funcţionează întregul montaj şi miezurile de Mu-metal sînt introduse în sonde. Într-adevăr, regimul de funcţionare al oscilatorului şi deci şi frecvenţa acestuia sînt influenţate de impedanţa sondei, principala

sarcină pe care debitează oscilatorul. Or, impedanța sondei, în primul rînd inductivă, crește în prezența miezurilor de Mu-metal.

Odată acordul oscilatorului realizat, el rămîne definitiv. Frecvența obținută se măsoară la un osciloscop catodic, comparînd-o cu frecvența unui generator de servici de joasă frecvență.

b) *Acordarea amplificatorului selectiv.* Această operație se realizează în două etape.

1° Inițial se decuplează secundarul sondei de la intrarea în amplificator și se introduce un semnal slab, de frecvență $2f$, furnizat de un generator de semnale sinusoidale de joasă frecvență, etalonat în frecvență și amplitudine.

Sistemul de reglare a întrefierului transformatoarelor T_2 și T_3 permite acordarea etajelor amplificatorului pe frecvența $2f$. Operația se urmărește pe ecranul unui osciloscop catodic.

Este recomandabil ca în timpul acestei operații detectorul Walter să nu primească semnalul de frecvență, pentru a evita o detecție inutilă care poate duce la suprasolicitarea microampermetrului indicator.

2° In etapa a doua se conectează secundarul sondei la intrarea în amplificator. Cu ajutorul magnetului de compensare m (fig. 6) se crează în zona miezurilor un cîmp magnetic slab, care duce la apariția unui semnal slab, de frecvență $2f$, la intrarea în amplificator. Se corijează, cu ajutorul aceloraşi sisteme de reglare ale transformatoarelor T_2 și T_3, acordul amplificatorului pe acest semnal real, în condițiile de funcționare ale întregii scheme.

Apoi, prin încercări se alege un condensator fix (avînd o capacitate de circa 6000 pF) care, conectat la capetele secundarului sondei, o transformă pe aceasta într-un circuit acordat de frecvența $2f$. În acest mod am obținut randamentul optim.

c) *Reglarea circuitului Walter.* Oricît de îngrijit s-ar alege elementele schemei (miezuri de Mu-metal, tranzistori, diode) și oricît de atent s-ar confecționa sonda, aceasta din urmă, ca și transformatorul de cuplaj, diodele de detecție și circuitul Walter, nu pot fi perfect simetrice. Nesimetria sondei, de exemplu, duce la apariția unui semnal de frecvență $2f$ la intrarea în detector chiar și în absența unui cîmp magnetic H_0.

Prezența în schema Walter a potențiometrului P_2 permite compensarea acestor nesimetrii.

Pentru aceasta, cu ajutorul magnetului m (fig. 6) se anulează pe cît posibil cîmpul în regiunea sondei; semnalul de frecvență $2f$ la intrarea în detector, urmărit la osciloscop, este minim. În această situație, manipulînd asupra cursorului potențiometrului P_2, se aduce acul microampermetrului indicator la zero. Operația se repetă de 2...3 ori.

d) *Reglarea dublorului de frecvență.* Acordarea dublorului de frecvență pe frecvența $2f$ se efectuează alegînd, prin încercări, capacitatea C_{11} cea mai potrivită. Acest acord este fix și se realizează pe frecvența de lucru $2f$ a semnalului util, în condițiile funcționării întregii scheme.

La reglarea întregii scheme se întîmpină dificultăți serioase dacă miezurile de Mu-metal ale ferosondei prezintă magnetizări remanente inegale. Aceste

magnetizări pot să apară chiar în urma manipulării neatente a magnetului de compensare în apropierea sondei, sau a apropierii întîmplătoare a unor magneţi puternici, şi ele duc la serioase perturbări în funcţionarea magnetometrului.

Una din aceste perturbări constă în distrugerea etalonării „pe zero" a magnetometrului şi face necesară o nouă etalonare (cazul magnetizării egale a miezurilor). O perturbare mai gravă, de care ne-am lovit, constă în răsturnarea fazei semnalului dat de sondă, cîmpul de măsurat rămînînd constant (cazul magnetizării inegale a miezurilor). Aceasta duce la modificarea sensului curentului care produce reacţia de cîmp: din negativă, reacţia devine pozitivă. Schema devine instabilă, iar în cazul unei profunzimi mici de reacţie, crează iluzia realizării unei sensibilităţi extraordinare.

Tratarea termică a miezurilor la punctul Curie, în cîmp magnetic nul, elimină aceste dificultăţi.

5. Performanţele obţinute

Cu magnetometrul realizat am obţinut o sensibilitate maximă de 5 $\gamma/\mu A$ Sensibilităţile de exploatare pot fi, după necesităţi, de 5 $\gamma/\mu A$, 10 $\gamma/\mu A$, 25 $\gamma/\mu A$ şi se obţin prin trecerea comutatorului K în poziţiile c, b, şi a, respectiv.

Etalonarea aparatului s-a făcut cu un sistem de bobine Helmholtz, cu diametrul de 1 m.

Aparatul consumă 40 mA la o putere de 0,320 W.

6. Concluzii

S-a construit un magnetometru cu sondă de saturaţie tranzistorizat, de sensibilitate ridicată (5 $\gamma/\mu A$).

În construcţie s-au folosit unele soluţii proprii: acordul circuitelor selective prin variaţia inductanţei cu un sistem mecanic simplu, dublorul de frecvenţă folosind detecţia unor semnale mici, acordarea circuitului secundar al sondei, echilibrarea circuitului Walter, construcţia sondei, stabilizarea tensiunii de alimentare prin diodă Zener.

Aproape toate piesele folosite (tranzistori, diode Zener, rezistenţe, condensatori, miezuri de ferită, magnetul de compensare etc.) sînt produse de industria din Republica Socialistă România.

Magnetometrul realizat de noi poate servi ca prototip pentru o întreprindere specializată, în scopul producerii lui în mică serie, pentru a acoperi necesităţile geofizicienilor. În condiţii industriale elementele sale se pot executa mai îngrijit decît în laborator, iar piesele care intervin în schemă (tranzistori, condensatori, rezistenţe etc.) pot fi selectate, în scopul obţinerii unor performanţe şi mai bune.

Primită la 24 XII 1966

Academia Republicii Socialiste România,
Filiala Iaşi,
Centrul de cercetări tehnice,
Centrul de cercetări fizice

BIBLIOGRAFIE

1. Procopiu Șt., Vasiliu Gh., C. R. Ac. Sci., Paris, 1937, **204**, p. 673.
2. Vasiliu Gh., Calinicenco N., Poeată N., Rosman H., Gavrilaș N., Suchar I., Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI** (**X**), *1—2*, p. 203.
3. Vasiliu Gh., Calinicenco N., Onu C., St. și cerc. șt., Acad. R. P. R., filiala Iași, Fiz. și șt. tehn., 1963, **XIV**, *2*, p. 341.
4. Яновский Б. М. *Земной магнетизм*. Т. **II**, ИЛУ, 1963.

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ МАГНИТОМЕТР С НАСЫЩЕННЫМ ЗОНДОМ

(Резюме)

Предлагается подробное описание полупроводникового магнитометра с насыщенным зондом, построенного авторами.

Электронная схема построена исключительно на полупроводниках. Все использованные детали румынского производства.

Использованы собственные конструктивные решения.

Своей чувствительностью — 5γ/μA; аппарат не отличается от иностранных магнитометров того же типа.

Прибор предназначен для геомагнитной разведки и может быть использован и для регистрации магнитных вариаций. Он питается двумя карманными батареями в 4,5 вольта. Расход всей схемы приблизительно 40 mA, при максимальной мощности в 0,320 W.

Предлагаемый магнитометр может служить как образец для промышленного производства подобных аппаратов.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 621.317.382 ; 621.317.385

POSIBILITAŢI DE MĂSURARE SIMULTANĂ, CU PATRU ECHIPAJE, A PUTERILOR ŞI ENERGIILOR ACTIVE ŞI REACTIVE ÎN REŢELE TRIFAZATE, ÎN REGIM DEZECHILIBRAT DE CURENŢI[1])

DE

LAURIAN PREDA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Galaţi, din 20-22 mai 1966

1. Introducere

Evidenţa energiei electrice necesită aparate simple şi precise pentru măsurarea puterilor şi energiilor active şi reactive.

Studiind expresiile analitice ale indicaţiilor unui wattmetru (contor) monofazat [1] montat într-o reţea trifazată cu trei conductoare, în regim dezechilibrat de curenţi, se constată că există anumite montaje ce permit măsurarea simultană a puterilor (energiilor) active şi reactive. Aceste expresii analitice sînt [1]:

$$(a, b, ..., i) = K_1 P + K_2 Q + K_3 p_1 + K_4 q_1 + K_5 p_2 + K_6 q_2,$$

unde: $a, ..., i$ sînt indicaţiile instrumentului de măsură conform cu tabelul 1, P, Q — puterile active şi reactive din circuit, p, q — puterile active şi reactive de nesimetrie (indicele 1 corespunzînd cazurilor A, B, C iar 2 cazurilor D, E, F de mai jos).

Considerînd trei valori constante şi diferite pentru curenţii pe cele trei faze ($I_a = \text{const.}$, $I_b = \text{const.}$, $I_c = \text{const.}$, $I_a \neq I_b \neq I_c$) pot exista următoarele şase cazuri:

$A) I_a > I_b > I_c$; $C) I_c > I_a > I_b$; $E) I_b > I_a > I_c$;
$B) I_b > I_c > I_a$; $D) I_a > I_c > I_b$; $F) I_c > I_b > I_a$.

Tabelul 1

	I_a	I_b	I_c
U_{ab}	a	b	c
U_{bc}	d	e	f
U_{ca}	g	h	i

$a = -a'$; ... ; $i = -i'$.

[1]) Cercetare efectuată sub conducerea ştiinţifică a tov. prof. dr. doc. V. Petrescu.

Aparatele trebuie să măsoare corect în toate aceste şase cazuri, deoarece în practică dezechilibrul este oarecare. Astfel coeficienţii $K_1,\ldots,K_6$ au fost stabiliţi [1, tabelul 3] în toate cele $6\times 9=54$ cazuri posibile.

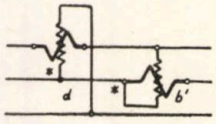
2. Măsurarea simultană a puterilor şi energiilor active şi reactive

Analizînd cele 54 de expresii analitice ale indicaţiei wattmetrului (contorului) monofazat, constatăm că există şase montaje ce permit măsurarea simultană a puterilor (energiilor) active şi reactive [2]:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(I)}\ d-b=d+b'\\ \text{(II)}\ c-g=c+g'\\ \text{(III)}\ h-f=h+f'\end{array}\right\}\rightarrow\frac{P+\sqrt{3}Q}{2},\qquad \left.\begin{array}{l}\text{(IV)}\ i-d=i+d'\\ \text{(V)}\ e-c=e+c'\\ \text{(VI)}\ a-h=a+h'\end{array}\right\}\rightarrow\frac{P-\sqrt{3}Q}{2}.$$

În fig. 1 s-a reprezentat montajul (I).

La oricare din aceste şase montaje permutarea circulară a fazelor nu influenţează rezultatul măsurătorii (deoarece (I) devine (II) sau (III) iar (IV) devine (V) sau (VI)) însă inversarea a două faze schimbă indicaţia din $(P+\sqrt{3}Q)/2$ în $(P-\sqrt{3}Q)/2$ şi invers.



(I) $d+b'\rightarrow P+\frac{\sqrt{3}Q}{2}$.

Fig. 1

Deci *cu două contoare trifazate de inducţie de energie activă, fiecare cu cîte două echipaje, schimbînd doar legăturile bobinelor şi cuplîndu-le prin mecanisme diferenţiale* (pentru separarea componentei activă de cea reactivă) *se poate măsura energia activă şi reactivă*. Legăturile pot fi schimbate la ambele contoare sau la unul singur; în acest caz celălalt rămîne montat după schema Aron:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(VII)}\ a-f=a+f'\\ \text{(VIII)}\ i-b=i+b'\\ \text{(IX)}\ e-g=e+g'\end{array}\right\}\rightarrow P;\qquad \text{(I)}=-\text{(I')};\quad \text{(II)}=-\text{(II)'};\ldots;\ \text{(IX)}=-\text{(IX)'}.$$

Pentru identificarea tuturor posibilităţilor de măsurare simultană a energiei active şi reactive cu două contoare trifazate de inducţie de energie activă (cel puţin unul avînd modificate legăturile) se pot combina cele nouă scheme ((I), (II),..., (IX)) ce măsoară P, $(P+\sqrt{3}Q)/2$ sau $(P-\sqrt{3}Q)/2$, rezultînd 27 variante. Cercetarea primelor 18 variante (care folosesc un contor montat după schema Aron iar al doilea montat după schema $(P+\sqrt{3}Q)/2$, respectiv $(P-\sqrt{3}Q)/2$), conduce la şase tipuri de scheme, celelalte reducîndu-se la ele prin permutarea circulară a fazelor. Aceste scheme sînt:

$$(1)\ \text{(VII)}\rightarrow P,\qquad \text{(I)}\rightarrow\frac{P+\sqrt{3}Q}{2},\qquad 2\text{(I)}-\text{(VII)}\rightarrow\sqrt{3}Q,\qquad -2\text{(I')}-\text{(VII)}\rightarrow\sqrt{3}Q;$$

[2] Semnul → indică mărimea măsurată de montaj.

(2) $$(VII)\to P,\ (II)\to\frac{P+\sqrt{3}Q}{2},\ 2(II)-(VII)\to\sqrt{3}Q;$$

(3) $$(VII)\to P,\ (III)\to\frac{P+\sqrt{3}Q}{2},\ 2(III)-(VII)\to\sqrt{3}Q;$$

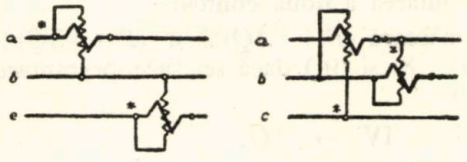
(4) $$(VII)\to P,\ (IV)\to\frac{P-\sqrt{3}Q}{2},\ (VII)-2(IV)\to\sqrt{3}Q;$$

(5) $$(VII)\to P,\ (V)\to\frac{P-\sqrt{3}Q}{2},\ (VII)-2(V)\to\sqrt{3}Q,\ (VII)+2(V')\to\sqrt{2}Q;$$

(6) $$(VII)\to P,\ (VI)\to\frac{P-\sqrt{3}Q}{2},\ (VII)-2(VI)\to\sqrt{3}Q.$$

Schema 1 este reprezentată în fig. 2.

Cele şase tipuri de scheme necesită patru tipuri de mecanisme diferenţiale pentru a executa operaţiile indicate de (1)...(6). De exemplu, pentru schema (1) mecanismul diferenţial va trebui să dubleze rotaţiile discului contorului complex luate cu semn schimbat, $-2(I')$, şi să le scadă pe cele ale contorului de energie activă, $-(VII)$.



$$(VII)\ (a+f')\to P,\ (I')\ (d'+b)\to-\frac{P+\sqrt{3}Q}{2},$$

$$-2(I')-(VII)\to\sqrt{3}Q.$$

Fig. 2

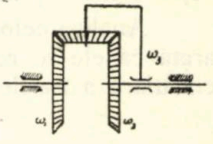


Fig. 3

Piesa principală a mecanismului diferenţial este reprezentată în fig. 3. Ea este montată într-un sistem de angrenaje cu rapoarte de transmisie convenabile. Mecanismul diferenţial este cuplat la intrare cu discurile celor două contoare, iar la ieşire cu un mecanism integrator obişnuit ce indică energia reactivă.

Deoarece fiecare montaj utilizează patru bobine de tensiune şi patru bobine de curent, numărul de conductoare fiind trei, cel puţin o bobină de curent şi una de tensiune vor fi legate întotdeauna în acelaşi mod.

Executînd schemele pentru cele şase tipuri de montaje (1),..., (6) se deduce că sînt necesare următoarele bobine:

(1') $$2I_a,\ 1I_b,\ 1I_c,\quad 2U_{ab},\ 2U_{cb};$$

(2') $$2I_a,\quad 2I_c,\quad 2U_{ab},\ 1U_{cb},\ 1U_{ac};$$

(3′) $1I_a$, $1I_b$, $2I_c$, $1U_{ab}$, $2U_{cb}$, $1U_{ca}$ (2 echipaje $U_{cb}I_c$);
(4′) $2I_a$, $2I_c$, $1U_{ab}$, $2U_{cb}$, $1U_{ca}$;
(5′) $1I_a$, $1I_b$, $2I_c$, $2U_{ab}$, $2U_{cb}$;
(6′) $2I_a$, $1I_b$, $1I_c$, $2U_{ab}$, $1U_{cb}$, $1U_{ac}$ (2 echipaje $U_{ab}I_a$).

Din punctul de vedere al numărului de bobine se observă că cele şase tipuri de scheme se reduc la trei şi anume (1), (2) şi (3).

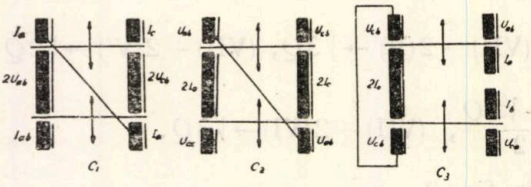


Fig. 4

Existenţa bobinelor duble permite construirea unor contoare cu două discuri, cu rotaţii independente, cuplate prin mecanisme diferenţiale. Bobinele duble vor acţiona asupra ambelor discuri. Contorul măsurînd simultan energia activă şi reactivă, va avea două mecanisme integratoare. Montarea bobinelor este indicată în fig. 4.

La aceste contoare numărul necesar de bobine se reduce de la opt la cinci (maximum şase) scăzînd astfel preţul de cost. Contorul se montează într-o singură carcasă, are un singur şir de borne şi astfel montarea în reţea este simplificată (în raport cu montarea a două contoare).

Analiza celorlalte 9 variante (ce măsoară $(P+\sqrt{3}Q)/2$ şi $(P-\sqrt{3}Q)/2$) arată că ele se reduc la trei tipuri ((7), (8) şi (9)) dacă se face permutarea circulară a fazelor. Aceste scheme sînt

(7) $\quad (\mathrm{I})-(\mathrm{IV}')\to P, \quad (\mathrm{I})+(\mathrm{IV}')\to\sqrt{3}Q,$

(8) $\quad (\mathrm{I})+(\mathrm{V})\to P, \quad (\mathrm{I})-(\mathrm{V})\to\sqrt{3}Q,$

(9) $\quad (\mathrm{I})-(\mathrm{VI}')\to P, \quad (\mathrm{I})+(\mathrm{VI}')\to\sqrt{3}Q.$

Montajele (7), (8), (9) necesită următoarele bobine:

(7′) $2I_a$, $1I_b$, $1I_c$, $2U_{bc}$, $1U_{ba}$, $1U_{ac}$;
(8′) $1I_a$, $2I_b$, $1I_c$, $2U_{bc}$, $2U_{ca}$;
(9′) $2I_a$, $2I_b$, $1U_{bc}$, $2U_{ba}$, $1U_{ca}$.

Fiecare montaj necesită cîte două mecanisme diferenţiale capabile să execute operaţiile indicate de relaţiile (7), (8), (9). Rezultă deci că sînt necesare două tipuri de mecanisme diferenţiale duble.

Analiza schemelor din punctul de vedere al numărului de bobine arată că se pot construi trei tipuri de contoare şi anume, după schema (7) contorul tip C_1, după schema (8) contorul tip C_2 iar după schema (9) contorul tip C_3 (fig. 4).

Există deci posibilitatea construirii a *nouă tipuri* de contoare (T_1, T_2,..., T_9) capabile să măsoare simultan energiile activă şi reactivă, care se deosebesc

între ele prin modul de montare al bobinelor duble în raport cu discurile (reducîndu-se din acest punct de vedere la tipurile C_1, C_2, C_3), modul de conectare la reţea şi prin tipurile mecanismelor integratoare diferenţiale necesare.

Montajele (3), (6) şi (7) utilizează un echipaj comun (f' respectiv a din tabelul 1). Deci cu trei wattmetre monofazate se poate măsura atît puterea activă cît şi cea reactivă. Acesta reprezintă montajul Righi cunoscut în literatură [2]...[4]. Montînd trei wattmetre monofazate conform schemelor a, f' şi h (3) obţinem:

$$a + f' \to P, \quad 2h + f' - a \to \sqrt{3}Q.$$

La fel putem proceda şi cu schemele (6) sau (7). Pentru măsurarea energiei active şi reactive pe baza schemei Righi, contorul va trebui prevăzut cu trei discuri independente, fiecare acţionat de cîte un singur echipaj. Sînt necesare însă două mecanisme diferenţiale din care unul dublu (pentru a măsura pe $\sqrt{3}Q$). Rezultă astfel posibilitatea de a construi al zecelea tip de contor (T_{10}).

La legarea la reţea a unui contor de tipul $T_1 \cdots T_9$ trebuie ţinut seama de succesiunea fazelor, deoarece discul a cărei rotaţie este proporţională cu $(P + \sqrt{3}Q)/2$ sau $(P - \sqrt{3}Q)/2$ îşi schimbă sensul la inversarea a două faze şi astfel mecanismul integrator pentru măsurarea energiei reactive se roteşte în sens invers.

Sensul de rotaţie al discului acţionat după schemele ce măsoară $(P - \sqrt{3}Q)/2$ este funcţie de valoarea factorului de putere. Pentru $\cos\varphi = 0{,}866$, ($\sin\varphi = 0{,}5$), staţionează, dacă $\cos\varphi > 0{,}866$ se roteşte în sens direct, iar dacă $\cos\varphi < 0{,}866$, în sens invers. Este deci necesar ca pe contor să se indice printr-o săgeată sensul corect de rotaţie al discului acţionat după schema $(P - \sqrt{3}Q)/2$ în funcţie de valoarea factorului de putere. În acest mod se poate verifica imediat corectitudinea montajului. Dacă discul se roteşte invers evident trebuie inversate două faze.

Cu ajutorul montajelor $(P + \sqrt{3}Q)/2$, pentru $\cos\varphi = 0{,}5$, ($\varphi = 60°$), se măsoară direct *puterea* (*energia*) *aparentă* deoarece:

$$\frac{1}{2}(P + \sqrt{3}Q) = \frac{3}{2}UI(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi) = \frac{3}{2}UI\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P_a.$$

Pentru $\cos\varphi = 0{,}375 \cdots 0{,}616$, ($\varphi = 68° \cdots 52°$), se măsoară de asemenea direct P_a cu erori sub 1%.

Montajele (1) ... (9) sînt mai economice şi mai precise deoarece nu necesită rezistenţe pentru crearea neutrului artificial (ca în schema cu două echipaje pentru măsurarea puterii reactive).

Rezultatele expuse au fost pe deplin verificate pe cale experimentală. În acest scop, utilizînd două contoare de inducţie trifazate cu cîte două echipaje de energie activă, cuplate printr-un mecanism diferenţial, s-a construit un contor de tipul T_4.

3. Concluzii

1. Un wattmetru (contor) cu două echipaje de putere (energie) activă poate fi transformat, prin schimbarea legăturilor la reţea, în unul care măsoară $(P+\sqrt{3}Q)/2$ sau $(P-\sqrt{3}Q)/2$.

2. Se poate construi un contor complex (ce măsoară energiile activă şi reactivă) utilizînd două contoare de energie activă cu cîte două echipaje, cuplate prin unul sau două mecanisme diferenţiale. El nu necesită rezistenţe, ceea ce micşorează erorile de măsurare. Contorul fiind montat într-o singură caracasă, cu un singur şir de borne, se leagă la reţea mai simplu decît două (contoare distincte de energie activă şi de energie reactivă), reducîndu-se astfel numărul greşelilor de montaj. Un contor complex poate fi construit şi pe baza schemei Righi, folosind trei contoare monofazate, cuplate prin mecanisme diferenţiale.

3. Există nouă tipuri de scheme (1) ... (9) pe baza cărora se pot construi zece tipuri de contoare de consum complex; schemele (3), (6) şi (7) sînt cunoscute în literatură (Righi).

4. Prin utilizarea unor bobine cu acţiune dublă (asupra ambelor discuri ce se rotesc independent), numărul total de bobine de curent şi de tensiune necesare se reduce la cinci sau şase, ceea ce este avantajos din punct de vedere economic. Preţul de cost al unui astfel de contor rezultă mai mic decît cel a două contoare obişnuite (de energie activă şi de energie reactivă).

5. Un wattmetru (contor) trifazat cu două echipaje, montat după o schemă ce măsoară $(P+\sqrt{3}Q)/2$ indică direct, la $\cos\varphi=0{,}5$, puterea (energia) aparentă (P_a). Pentru $\cos\varphi=0{,}375\dots0{,}616$ o măsoară cu erori sub 1%.

Wattmetrele (contoarele) montate după schemele ce măsoară $(P-\sqrt{3}Q)/2$ indică valoarea orientativă a factorului de putere, deoarece indicaţia schimbă sensul la $\cos\varphi=0{,}866$.

Institutul politehnic, Iaşi,
Laboratorul de măsuri electrice

BIBLIOGRFIE

1. Preda L., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XIII (XVI)**, *1—2*, pp. 225—232.
2. Righi A., L'Elettrotecnica, giuglio 1929.
3. Barbagelata A., L'Elettrotecnica, marzo 1930, pp. 57—61.
4. Fränkel D., Electrotehnica, 1955, *2—3*, pp. 51—59.
5. Preda M., Ambrozie C., Electrotehnica, 1957, *1*, pp. 19—27.

POSSIBILITÉS DE MESURE SIMULTANÉE, AVEC QUATRE ÉQUIPAGES, DES PUISSANCES ET DES ÉNERGIES ACTIVES ET RÉACTIVES DANS LES RÉSEAUX TRIPHASÉS EN RÉGIME DÉSÉQUILIBRÉ DES COURANTS

(Résumé)

L'analyse des indications d'un wattmètre (compteur) monophasé connecté dans un réseau à trois conducteurs présentant un déséquilibre des courants montre qu'il existe 9 schémas qui permettent la mesure simultanée des puissances (énergies) actives et réactives. L'utilisation convenable des bobines de tension et de courant offre le possibilité de construire 10 types de compteurs à disques indépendants, couplés par des mécanismes intégrateurs-différentiateurs, qui sont capables de mesurer simultanément les énergies actives et réactives.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 621.3.015.33; 621.314.2

TRANSFORMATOR CU DOUĂ ÎNFĂŞURĂRI SUPUS LA TENSIUNEA DE IMPULS

DE

N. GAVRILAŞ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

1. Introducere

În [1] s-au studiat fenomenele ce au loc în transformatorul cu două înfăşurări supus la tensiunea de impuls, pe baza unei scheme echivalente în care nu se iau în considerare capacităţile între elementele în serie ale înfăşurărilor. Această simplificare adusă schemei echivalente nu permite a se trage concluzii cu privire la armonicele superioare ale oscilaţiilor din înfăşurări.

În lucrarea de faţă, introducîndu-se în schema echivalentă şi capacităţile între elementele în serie, se întreprinde o verificare a concluziilor din [1] şi o evaluare a erorilor comise la neglijarea capacităţilor în serie. Studiul se efectuează pentru cazul înfăşurării secundare scurtcircuitate, neutrul ambelor înfăşurări fiind legat la pămînt.

2. Ecuaţia diferenţială generală şi soluţia ei

Pe baza consideraţiilor din [1] cu privire la adoptarea schemei echivalente simplificate a transformatorului cu două înfăşurări supus la tensiunea de impuls şi avînd în vedere cele arătate mai sus, se adoptă schema echivalentă din fig. 1, unde: L_1, L_2 — inductivităţile proprii ale înfăşurărilor, M — inductivitatea mutuală între înfăşurări, C_1, C_2 — capacităţile faţă de pămînt ale înfăşurărilor, C_{12} — capacitatea între înfăşurări, K_1, K_2 — capacităţile între elementele în serie ale înfăşurărilor, toţi parametrii fiind consideraţi pe unitatea de lungime axială a înfăşurărilor.

Conform fig. 1, pentru un element dx din lungimea axială a înfăşurărilor, rezultă următoarele ecuaţii:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x} = L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_1}{\partial t}, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = (C_1 + C_{12}) \frac{\partial u_1}{\partial t} - C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} - K_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t}. \tag{3}$$

$$-\frac{\partial i_2}{\partial t} = (C_2 + C_{12}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial t} - K_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t}. \tag{4}$$

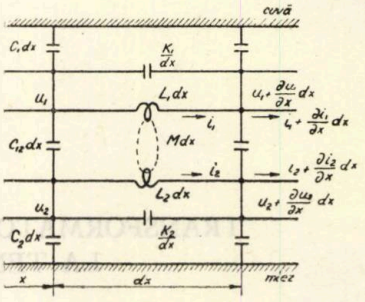


Fig. 1

Trecînd la mărimi operaţionale (transformarea Wagner-Carson) şi eliminînd curenţii, se obţin ecuaţiile:

$$\begin{aligned}(1 + L_1 K_1 p^2) \frac{d^2 U_1}{dx^2} - [L_1 (C_1 + C_{12}) - M C_{12}] p^2 U_1 = \\ = - M K_2 p^2 \frac{d^2 U_2}{dx^2} - [L_1 C_{12} - M (C_2 + C_{12})] p^2 U_2,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}- M K_1 p^2 \frac{d^2 U_1}{dx^2} - [L_2 C_{12} - M (C_1 + C_{12})] p^2 U_1 = \\ = (1 + L_2 K_2 p^2) \frac{d^2 U_2}{dx^2} - [L_2 (C_2 + C_{12}) - M C_{12}] p^2 U_2,\end{aligned} \tag{6}$$

unde U_1 şi U_2 reprezintă transformatele mărimilor u_1 şi u_2. Rezolvînd ecuaţiile (5) şi (6) în raport cu U_2 şi d^2U_2/dx^2 se obţine

$$\begin{aligned}U_2 = \{[(L_1 L_2 - M^2) K_2 (C_1 + C_{12}) p^2 + L_1 (C_1 + C_{12}) - M C_{12}] U_1 - \\ - (1/p^2) [(L_1 L_2 - M^2) K_1 K_2 p^4 + (L_1 K_1 + L_2 K_2) p^2 + \\ + 1] (d^2 U_1/dx^2)\}/[(L_1 L_2 - M^2) K_2 C_{12} p^2 + L_1 C_{12} - M (C_2 + C_{12})].\end{aligned} \tag{7}$$

Înlocuind U_2 din (7) şi derivata sa de ordinul doi în raport cu x în una din ecuaţiile (5) sau (6) se obţine ecuaţia diferenţială generală pentru U_1:

$$\frac{d^4 U_1}{dx^4} - \frac{(LK p^2 + S) p^2}{LK_1 K_2 p^4 + H p^2 + 1} \frac{d^2 U_1}{dx^2} + \frac{L C p^4}{LK_1 K_2 p^4 + H p^2 + 1} U_1 = 0, \tag{8}$$

unde s-au utilizat notaţiile:

$$(9)\qquad \begin{cases} S = L_1(C_1 + C_{12}) + L_2(C_2 + C_{12}) - 2MC_{12}, \\ K = K_1(C_2 + C_{12}) + K_2(C_1 + C_{12}), \\ L = L_1 L_2 - M^2, \quad H = L_1 K_1 + L_2 K_2, \\ C = C_1 C_2 + C_1 C_{12} + C_2 C_{12}. \end{cases}$$

Dacă se presupune soluţia ecuaţiei diferenţiale (8) de forma

$$(10)\qquad U_1(x, p) = \text{const.} \exp(\alpha x),$$

rezultă ecuaţia caracteristică în α,

$$(11)\qquad \alpha^4 - \frac{(LKp^2 + S)p^2}{LK_1K_2p^4 + Hp^2 + 1}\alpha^2 + \frac{LCp^4}{LK_1K_2p^4 + Hp^2 + 1} = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$(12)\qquad \alpha_1 = \beta, \quad \alpha_2 = -\beta, \quad \alpha_3 = \gamma, \quad \alpha_4 = -\gamma,$$

unde

$$(13)\qquad \beta = \frac{p\sqrt{2LC}}{\sqrt{LKp^2 + S - \varphi}}, \qquad (14)\qquad \gamma = \frac{p\sqrt{2LC}}{\sqrt{LKp^2 + S + \varphi}},$$

în care

$$(15)\qquad \varphi = \sqrt{(LKp^2 + S)^2 - 4LC(LK_1K_2p^4 + Hp^2 + 1)}.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (8) rezultă astfel de forma

$$(16)\qquad U_1(x, p) = B_1 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x) + B_3 \exp(\gamma x) + B_4 \exp(-\gamma x),$$

unde $B_1, \ldots, B_4$ sînt constante de integrare.

Înlocuind (16) în (7) rezultă pentru U_2 soluţia:

$$(17)\qquad \begin{aligned} U_2(x, p) = {} & B_1N_1 \exp(\beta x) + B_2N_1 \exp(-\beta x) + B_3N_2 \exp(\gamma x) + \\ & + B_4N_2 \exp(-\gamma x), \end{aligned}$$

unde

$$(18)\qquad N_1 = \frac{L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 + L_1(C_1 + C_{12}) - L_2(C_2 + C_{12}) - \varphi}{2[LK_2C_{12}p^2 + L_1C_{12} - M(C_2 + C_{12})]},$$

$$(19)\qquad N_2 = \frac{L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 + L_1(C_1 + C_{12}) - L_2(C_2 + C_{12}) + \varphi}{2[LK_2C_{12}p^2 + L_1C_{12} - M(C_2 + C_{12})]}.$$

Pentru a determina constantele de integrare trebuie să se introducă condiţiile la limită la extremităţile înfăşurărilor. În cazul înfăşurării secundare scurtcircuitate, neutrul ambelor înfăşurări fiind legat la pămînt, socotind distanţa x măsurată de la intrarea în înfăşurare şi considerînd că la borna de intrare a înfăşurării primare se aplică saltul unitar de tensiune, condiţiile la limită sînt:

(20) $$x = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_2 = 0; \quad x = l, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0,$$

unde l — lungimea axială a înfăşurărilor.

Introducînd (20) în (16) şi (17) se obţin patru ecuaţii din care se deduc constantele de integrare. Înlocuindu-le pe acestea în (16) şi (17) se obţin soluţiile pentru U_1 şi U_2:

(21) $$U_1(x,p) = \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{\operatorname{sh}\beta(l-x)}{\operatorname{sh}\beta l} - \frac{N_1}{N_2 - N_1} \frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\operatorname{sh}\gamma l},$$

(22) $$U_2(x,p) = \frac{N_1 N_2}{N_2 - N_1}\left[\frac{\operatorname{sh}\beta(l-x)}{\operatorname{sh}\beta l} - \frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\operatorname{sh}\gamma l}\right].$$

Înlocuind N_1 şi N_2 din (18) şi (19) în (21) şi (22) se obţine:

(23)
$$\begin{aligned} U_1(x,p) = {} & \frac{1}{2\varphi}\{\varphi + L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 + \\ & + L_1(C_1 + C_{12}) - L_2(C_2 + C_{12})\}\frac{\operatorname{sh}\beta(l-x)}{\operatorname{sh}\beta l} + \\ & + \frac{1}{2\varphi}\{\varphi - L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 - \\ & - L_1(C_1 + C_{12}) + L_2(C_2 + C_{12})\}\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\operatorname{sh}\gamma l}, \end{aligned}$$

(24)
$$\begin{aligned} U_2(x,p) = {} & -\frac{1}{\varphi}[LK_1C_{12}p^2 - M(C_1 + C_{12}) + L_2C_{12}] \times \\ & \times\left[\frac{\operatorname{sh}\beta(l-x)}{\operatorname{sh}\beta l} - \frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\operatorname{sh}\gamma l}\right]. \end{aligned}$$

Explicitînd p din (13) şi (14) se obţine:

(25) $$p = \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{S - H\beta^2 - \psi(\beta)}}, \qquad (26) \quad p = \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{S - H\gamma^2 - \psi(\gamma)}},$$

unde

(27) $$\psi(\beta) = \sqrt{(S - H\beta^2)^2 - 4L(K_1K_2\beta^4 - K\beta^2 + C)},$$

(28) $$\psi(\gamma) = \sqrt{(S - H\gamma^2)^2 - 4L(K_1K_2\gamma^4 - K\gamma^2 + C)}.$$

Înlocuind parţial p din (25) şi (26) în (23) şi (24) rezultă:

(29) $$U_1(x,p) = V_1(x,p) - V_2(x,p),$$

unde

$$V_1(x,p)=\frac{1}{2\varphi}\left\{2[L_1(C_1+C_{12})-MC_{12}]+\right.$$

(30)

$$\left.+\frac{K_2(C_1+C_{12})\beta^2-C}{K_1K_2\beta^4-K\beta^2+C}[S-H\beta^2+\psi(\beta)]\right\}\frac{\operatorname{sh}\beta(l-x)}{\operatorname{sh}\beta l},$$

$$V_2(x,p)=\frac{1}{2\varphi}\left\{2[L_1(C_1+C_{12})-MC_{12}]+\right.$$

(31)

$$\left.+\frac{K_2(C_1+C_{12})\gamma^2-C}{K_1K_2\gamma^4-K\gamma^2+C}[S-H\gamma^2-\psi(\gamma)]\right\}\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\operatorname{sh}\gamma l},$$

şi

$$U_2(x,p)=\frac{1}{2\varphi}\left\{2[M(C_1+C_{12})-L_2C_{12}]-\frac{K_1C_{12}\beta^2}{K_1K_2\beta^4-K\beta^2+C}\times\right.$$

(32)

$$\times[S-H\beta^2+\psi(\beta)]\frac{\operatorname{sh}\beta(l-x)}{\operatorname{sh}\beta l}-\frac{1}{2\varphi}\left\{2[M(C_1+C_{12})-L_2C_{12}]-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{K_1C_{12}\gamma^2}{K_1K_2\gamma^4-K\gamma^2+C}[S-H\gamma^2-\psi(\gamma)]\right\}\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\operatorname{sh}\gamma l}.\right.$$

În continuare urmează a se determina originalele expresiilor lui $U_1(x,p)$ şi $U_2(x,p)$. În acest scop se scrie $V_1(x,p)$ sub forma

$$V_1(x,p)=\frac{f(p)}{F(p)}, \tag{33}$$

unde

(34)

$$f(p)=$$

$$=\frac{1}{2\varphi}\left\{2[L_1(C_1+C_{12})-MC_{12}]+\frac{K_2(C_1+C_{12})\beta^2-C}{K_1K_2\beta^4-K\beta^2+C}[S-H\beta^2+\psi(\beta)]\right\}\operatorname{sh}\beta(l-x),$$

$$F(p)=\operatorname{sh}\beta l. \tag{35}$$

Conform teoremei de dezvoltare a lui Heaviside, originalul expresiei (33) este de forma

$$v_1(x,t)=\frac{f(0)}{F(0)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{f(p_i)}{p_iF'(p_i)}e^{p_it}, \tag{36}$$

unde p_i sînt rădăcinile ecuaţiei $F(p)=0$; în cazul de faţă se obţine:

$$\beta_{1n}=\frac{jn\pi}{l}, \tag{37}$$

$$\beta_{2n}=-\frac{jn\pi}{l}, \tag{38}$$

unde $n=1,\ 2,\ 3,...$

Introducînd β_{1n} şi β_{2n} din (37) şi (38) în (25) se obţin rădăcinile respective pentru variabila p:

(39) $$p_{1n} = j\Omega_n,$$ (40) $$p_{2n} = -j\Omega_n,$$

unde

(41) $$\Omega_n = \frac{\sqrt{2}n\pi/l}{\sqrt{H(n\pi/l)^2+S-\sqrt{(H^2-4LK_1K_2)(n\pi/l)^4+2(HS-2LK)(n\pi/l)^2+S^2-4LC}}}.$$

Derivata expresiei $F(p)$ în raport cu p este

(42) $$F'(p) = l \operatorname{ch} \beta l \frac{d\beta}{dp}.$$

Prin derivarea expresiei (13) în raport cu p se obţine după o serie de transformări

(43) $$\frac{d\beta}{dp} = -\frac{\beta\psi(\beta)}{p\varphi}$$

şi înlocuind (43) în (42) se obţine

(44) $$pF'(p) = -\frac{\beta l\psi(\beta)\operatorname{ch}\beta l}{\varphi}.$$

Efectuînd şi restul de operaţii se obţine $v_1(x, t)$, apoi în mod analog $v_2(x, t)$ şi $u_2(x, t)$, rezultînd în cele din urmă:

(45) $$u_1(x,t) = 1 - \frac{x}{l} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \frac{x}{l}(A_{1n}\cos\Omega_n t + B_{1n}\cos\omega_n t),$$

(46) $$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \frac{x}{l}(A_{2n}\cos\Omega_n t + B_{2n}\cos\omega_n t),$$

unde

(47) $$\omega_n = \frac{\sqrt{2}n\pi/l}{\sqrt{H(n\pi/l)^2+S+\sqrt{(H^2-4LK_1K_2)(n\pi/l)^4+2(HS-2LK)(n\pi/l)^2+S^2-4LC}}},$$

(48)
$$\begin{matrix} A_{1n} \\ B_{1n} \end{matrix} = \frac{1}{n\pi}\left\{\frac{K_2(C_1+C_{12})(n\pi/l)^2+C}{K_1K_2(n\pi/l)^4+K(n\pi/l)^2+C} \mp \right.$$
$$\left. \mp \frac{2[L_1(C_1+C_{12})-MC_{12}] - \dfrac{K_2(C_1+C_{12})(n\pi/l)^2+C}{K_1K_2(n\pi/l)^4+K(n\pi/l)^2+C}[H(n\pi/l)^2+S]}{\sqrt{(H^2-4LK_1K_2)(n\pi/l)^4+2(HS-2LK)(n\pi/l)^2+S^2-4LC}}\right\},$$

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{1}{n\pi}\left\{\frac{K_1C_{12}(n\pi/l)^2}{K_1K_2(n\pi/l)^4 + K(n\pi/l)^2 + C} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{2[M(C_1+C_{12}) - L_2C_{12}] + \dfrac{K_1C_{12}(n\pi/l)^2}{K_1K_2(n\pi/l)^4 + K(n\pi/l)^2 + C}[H(n\pi/l)^2 + S]}{\sqrt{(H^2 - 4LK_1K_2)(n\pi/l)^4 + 2(HS - 2LK)(n\pi/l)^2 + S^2 - 4LC}}\right\}. \tag{49}$$

3. Interpretarea rezultatelor şi concluzii

Din analiza structurii expresiilor obţinute pentru u_1 şi u_2 rezultă că la aplicarea tensiunii de impuls la intrarea unei înfăşurări, în fiecare înfăşurare se dezvoltă două serii de oscilaţii de frecvenţă unghiulară Ω_n şi ω_n, $(\Omega_n > \omega_n)$, avînd amplitudini diferite. Este în general posibil ca aceste amplitudini, precum şi frecvenţele respective, să fie de mărimi apropiate sau foarte diferite. Complexitatea expresiilor obţinute pentru frecvenţele unghiulare şi amplitudinile oscilaţiilor nu permit a se aprecia în ce raport de mărime se află acestea. Expresiile respective s-ar simplifica însă sensibil dacă s-ar cunoaşte în ce raport de mărime se află inductivităţile, respectiv capacităţile din schema echivalentă a transformatorului.

Tabelul 1

Transformatorul	Putere nominală MVA	Tensiuni nominale kV	Conexiuni	Raportul nr. de spire w_2/w_1
T-1	40	110/6,6	Yd	0,10
T-2	63	121/10,5	Yd	0,15
T-3	3,2	35/6	Yd	0,28
T-4	25	110/38,5	Yd	0,74

În tabelul 1 sînt date caracteristicile a patru transformatoare pentru care s-au calculat inductivităţile şi capacităţile respective, rapoartele rezultate între inductivităţi, respectiv capacităţi, fiind date în tabelul 2. Folosind datele din acest tabel s-au calculat pentru primele 5 armonice diferite rapoarte între amplitudinile, respectiv frecvenţele oscilaţiilor (tabelul 3). De asemenea s-au calculat erorile relative ce se comit atunci cînd nu se iau în considerare capacităţile între elementele în serie ale înfăşurărilor (cu indice prim s-au notat amplitudinile şi frecvenţele unghiulare corespunzînd schemei fără capacităţi serie), rezultatele fiind date în tabelul 4.

Tabelul 2

Transformatorul	$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{M}{L_2}$	$\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{C_{12}}{C_2}$	$\frac{C_1 l^2}{K_1}$	$\frac{K_2}{K_1}$
T-1	150	10	0,10	0,6	20	0,6
T-2	70	7	0,12	0,7	30	0,6
T-3	20	3	0,15	0,6	30	0,8
T-4	3	1,27	0,15	0,8	20	0,8

Din examinarea rezultatelor obţinute rezultă următoarele concluzii:

1. Frecvenţele celor două serii de oscilaţii sînt foarte diferite ca mărime în cazul rapoartelor de transformare mari şi apropiate ca mărime în cazul rapoartelor de transformare mici.

2. Amplitudinile oscilaţiilor din înfăşurarea de înaltă tensiune (A_{1n}) avînd frecvenţele unghiulare Ω_n, reprezintă cîteva procente din amplitudinile oscilaţiilor (B_{1n}) cu frecvenţa unghiulară ω_n, deci primele pot fi neglijate în raport cu cele din urmă. Ca urmare se poate considera că în primar se dezvoltă oscilaţii avînd o singură frecvenţă fundamentală. Această concluzie confirmă valabilitatea ipotezei adoptate în studiile clasice referitoare la fenomenele de impuls în transformatoare [2] în care nu se iau în considerare parametrii înfăşurării nesupuse la tensiunea de impuls.

3. Amplitudinile celor două serii de oscilaţii din înfăşurarea nesupusă la tensiunea de impuls sînt apropiate ca mărime, fiind aproape egale pentru armonica fundamentală, în cazul rapoartelor de transformare mici. Această observaţie verifică concluzia respectivă din [1] unde s-au neglijat capacităţile serie, dar numai pentru armonica fundamentală.

4. Raportul B_{2n}/B_{1n} poate furniza unele indicaţii cu privire la transmisia fenomenelor de impuls dintr-o înfăşurare în alta. Examinînd valorile acestui raport se observă că amplitudinile oscilaţiilor din înfăşurarea de joasă tensiune sînt cu atît mai mici în raport cu cele din înfăşurarea de înaltă tensiune, cu cît raportul de transformare este mai mare. Totuşi transmisia fenomenelor de impuls nu are loc după raportul de transformare, ci după un raport mai mic decît cel de transformare (în cazurile analizate de aproape două ori mai mic). Concluzia din [1] care menţiona posibilitatea ca transmisia fenomenelor de impuls dintr-o înfăşurare în alta să se facă într-un raport superior celui de transformare nu se confirmă deci aici.

5. Dacă se consideră că amplitudinea maximă a oscilaţiilor din înfăşurarea supusă la tensiunea de impuls este dată de suma $A_{1n}+B_{1n}$, iar din cealaltă înfăşurare — de suma $A_{2n}+B_{2n}$, pentru raportul dintre amplitudinile maxime rezultă expresia

$$\frac{A_{2n}+B_{2n}}{A_{1n}+B_{1n}} = \frac{K_1 C_{12}(n\pi/l)^2}{K_2(C_1+C_{12})(n\pi/l)^2+C}.$$

Tabelul 3

n	Transformatorul			
	T-1	T-2	T-3	T-4
	ω_n/Ω_n			
1	0,064	0,109	0,24	0,65
2	0,062	0,107	0,23	0,58
3	0,058	0,103	0,21	0,51
4	0,054	0,098	0,20	0,45
5	0,051	0,093	0,19	0,42
	A_{1n}/B_{1n}			
1	0,070	0,075	0,087	0,026
2	0,108	0,109	0,103	0,060
3	0,134	0,136	0,101	0,170
4	0,140	0,146	0,089	0,282
5	0,133	0,147	0,067	0,385
	A_{2n}/B_{2n}			
1	1,5	1,3	1,2	1,1
2	2,9	2,2	1,8	1,4
3	4,7	3,4	2,5	1,8
4	6,7	4,7	3,2	2,3
5	8,6	6,1	3,9	2,7
	B_{2n}/B_{1n}			
1	0,0650	0,0805	0,134	0,423
2	0,0653	0,0813	0,137	0,443
3	0,0656	0,0822	0,141	0,456
4	0,0659	0,0830	0,144	0,463
5	0,0661	0,0836	0,146	0,467
	$(A_{2n}+B_{2n})/(A_{1n}+B_{1n})$			
1	0,038	0,030	0,034	0,053

Tabelul 4

n	Transformatorul			
	T-1	T-2	T-3	T-4
	$\frac{\Omega_n - \Omega'_n}{\Omega_n} \cdot 100$ [%]			
1	—2,5	—1,9	—2,3	—1,7
2	—8,7	—7,1	—8,4	—6,2
3	—17	—14	—16	—13
4	—26	—22	—26	—21
5	—36	—30	—37	—31
	$\frac{\omega_n - \omega'_n}{\omega_n} \cdot 100$ [%]			
1	—3,9	—2,7	—4,0	—6,9
2	—14	—10	—15	—25
3	—31	—22	—31	—52
4	—50	—37	—52	—82
5	—73	—54	—75	—116
	$\frac{B_{1n} - B'_{1n}}{B_{1n}} \cdot 100$ [%]			
1	—7,9	—5,5	—8,1	—16
2	—31	—22	—32	—66
3	—71	—50	—74	—149
4	—127	—89	—132	—264
5	—199	—139	—207	—413
	$\frac{A_{2n} - A'_{2n}}{A_{2n}} \cdot 100$ [%]			
1	30	22	13	—0,6
2	55	46	29	—6,8
3	64	57	36	—19
4	67	61	35	—38
5	66	62	30	—62
	$\frac{B_{2n} - B'_{2n}}{B_{2n}} \cdot 100$ [%]			
1	—7,7	—5,1	—6,8	—13
2	—30	—20	—27	—53
3	—69	—46	—62	—124
4	—124	—83	—113	—223
5	—194	—130	—177	—351

Se observă că în această expresie intervin numai capacităţile, deci s-ar putea trage concluzia că, în ceea ce priveşte amplitudinile maxime ale oscilaţiilor, transmisia fenomenelor de impuls dintr-o înfăşurare în alta are loc numai pe cale capacitivă. Valorile raportului $(A_{21} + B_{21})/(A_{11} + B_{11})$ arată că amplitudinile maxime ale oscilaţiilor din înfăşurarea de joasă tensiune reprezintă cîteva procente din cele din înfăşurarea de înaltă tensiune.

Ultimele două concluzii confirmă ipoteza adoptată în general cu privire la faptul că supratensiunile ce se propagă pe partea de joasă tensiune a transformatorului nu reprezintă un pericol, atît pentru izolaţia înfăşurării de joasă tensiune cît şi pentru maşinile rotative sau aparatele ce se află conectate la această înfăşurare.

6. Erorile ce se comit în cazul neglijării capacităţilor serie sînt admisibile numai pentru armonica fundamentală, cel mult pentru armonica de ordinul doi. Deci neglijarea capacităţilor serie nu este permisă mai ales în cazul în care se face o predeterminare a solicitării izolaţiei longitudinale a înfăşurărilor, în care caz contribuţia armonicilor superioare nu este neglijabilă.

7. Aceste erori sînt în general negative, deci neglijarea capacităţilor serie duce la o oarecare supraevaluare a solicitărilor izolaţiei transversale.

8. Erorile rezultă mai mari pentru seria de oscilaţii de frecvenţă mai ridicată (Ω_n), precum şi pentru armonicele superioare ale ambelor serii de oscilaţii în raport cu armonicele fundamentale respective, ceea ce era şi de aşteptat, deoarece capacităţile serie influenţează în special frecvenţele mai înalte.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de Electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Gavrilaş N., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, p. 211.
2. Heller B., Veverka A., *Les phénomènes de choc dans les machines électriques*. Dunod, Paris, 1963.

TRANSFORMATEUR À DEUX ENROULEMENTS SOUMIS À L'ACTION D'UNE ONDE DE CHOC

(Résumé)

En utilisant une schéma équivalente simplifiée (fig. 1) d'un transformateur à deux enroulements, soumis à l'action d'une onde de choc, on étudie les phénomènes transitoires qui se manifestent dans les enroulements et on déduit la réponse transitoire de ceux-ci. On particularise les résultats obtenus pour 4 types de transformateurs, en resultant les suivantes conclusions :

1. Dans l'enroulement primaire (soumis à l'onde de choc) on obtient pratiquement la même réponse transitoire que dans le cas où l'on ne tient compte de la présence de l'enroulement secondaire. Dans le secondaire se manifestent deux ondes dont les fréquences fondamentales sont très différentes pour des valeurs élevées du rapport de transformation et raprochées dans le cas contraire. Les amplitudes de ces ondes-ci sont comparables, surtout pour la fondamentale.

2. Le rapport des amplitudes des oscillations des deux enroulements est inférieur au rapport de transformation.

3. Les erreurs comises, lorsqu'on néglige les capacités en série des enroulements, sont admissibles seulement pour la fondamentale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 621.313.323

STUDY OF AN OSCILLATING BIPHASE SYNCHRONOUS LINEAR MOTOR (I)

BY

CAROL SAAL

1. Introduction

The first preocupations in the domain of oscillating motors are reported at the end of the XIX-th century; P. Boucherot developed some linear oscillating motors, called „motoscilla" [1], [2]. Further, other single-phase synchronous motors, linear and oscillating, were realized by A. Moskvitin [3]. Prof. M. Marinescu, invented and developed an electromagnetic biphase oscillomotor, based on electromechanical hysteresis [4]...[15]. Other types of electrical oscillating motors were developed by E. R. Laithwaite [16]...[18] and other researchers [19]...[24]. The literature indicates also relatively recent works in the domain of induction linear motors, used in various industrial applications [25]...[27].

The paper describes the establishment of operation equations for a biphase oscillating linear motor, the lower premises being accepted. A simplified theory is exposed for a motor with identical phase coils, sketched in Fig. 1 and afterwards the behaviour during operation of this oscillomotor is studied. The operating principle is the following: the phase coils being supplied with electrical sinusoidal voltages, with a phase angle between them equal to $\pi/2$ rad, the associated magnetic fields of the currents in both coils, acting on the common ferromagnetic armature, cause his displacement. The motion will be an alternating one, because the magnetic forces are acting alternatively with a greater or a smaller magnitude. The constructive variant, sketched in Fig. 1, presents the advantage of eliminating the magnetic saturation phenomenon, when the motor is in action. The laminated-iron armature can be made cylindrical or not. For lower work frequencies, the armature can be massive, with longitudinal notches for the diminution of eddy-current losses.

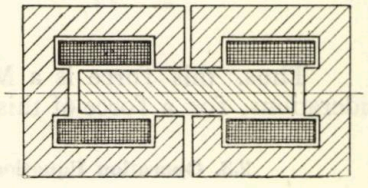


Fig. 1. — Biphase reactive oscillomotor.

2. Establishement of Operation Equations of the Oscillomotor

2.1. Calculation Premises

It ts assumed that the phase coils are identical, the coils having the same number of tourns and active resistance. The eddy-current and magnetic hysteresis losses are neglected and the iron is supposed to have the same magnetic potential. For lower frequencies and laminated-iron circuits, these premises are not far from the real phenomena.

In the simplified theory of the motor, the leakage flux will be considered as negligible, for small displacements of the armature. The differential equation of motion will be exposed for the case of a viscous damping, the mechanical losses being included in the mechanical useful power, considered as a result of a viscous power. The oscillomotor is considered without or with a linear spring.

The admitted premises are used in the dynamic study of electromagnets [26] or linear machines [3], in their simplified theory.

2.2. Determination of Electromagnetic Excitation Force

The equivalent magnetic circuit of the first phase coil, with the previous premises, is represented in Fig. 2.

The instantaneous forces f_1 and f_2, due to the currents i_1 and i_2 from both coils, are, in magnitude, given by:

$$(1) \qquad f_1 = \frac{1}{2}(wi_1)^2 \left|\frac{d\Lambda_1}{dx}\right|, \quad f_2 = \frac{1}{2}(wi_2)^2 \left|\frac{d\Lambda_2}{dx}\right|.$$

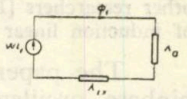


Fig. 2. — Equivalent magnetic circuit of the first phase coil: Φ_1 — instantaneous fascicular magnetic flux; wi_1 — instantaneous magneto-motive force; — Λ_{1x} — magnetic permeance of the useful air gap; Λ_a — magnetic permeance of the transverse parasite air gap

In compliance with the considerations exposed in Appendix I, the instantaneous electromagnetic resulting force, longitudinal acting, may be written as follows:

$$(2) \qquad f_{em} = f_2 - f_1 = \frac{\Phi_2^2 - \Phi_1^2}{2\mu_0 S_f}.$$

Thus, this force is a Maxwellian one. Any considerations, for a force of this type, are exposed in [23].

2.3. Operation Equations of the Oscillomotor

The voltages equations, for the two coils, are:

$$(3) \qquad Ri_1 + w\frac{d\Phi_1}{dt} = u_1, \quad Ri_2 + w\frac{d\Phi_2}{dt} = u_2.$$

The differential equation of motion, without spring, is:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}=\frac{\Phi_2^2-\Phi_1^2}{2\mu_0 S_f}=f_{em}. \tag{4}$$

Using Eqs. (I.6), (I.1) and (I.9), the instantaneous currents i_1 and i_2 in the phase coils are given by

$$i_1=\frac{\Phi_1(l_0+x)}{k_a\mu_0 S_f w},\quad i_2=\frac{\Phi_2(l_0-x)}{k_a\mu_0 S_f w}. \tag{5}$$

Eliminating the currents between (3) and (5), one obtaines the operation equations of the oscillomotor:

$$\begin{gathered}\frac{d\Phi_1}{dt}+bl_0\Phi_1+b\Phi_1 x=c\cos\omega t,\quad \frac{d\Phi_2}{dt}+bl_0\Phi_2-b\Phi_2 x=c\sin\omega t,\\ \frac{d^2x}{dt^2}+\varrho\frac{dx}{dt}=n(\Phi_2^2-\Phi_1^2)=f'_{em},\end{gathered} \tag{6}$$

with:

$$b=\frac{R}{k_a\mu_0 S_f w^2},\quad c=\frac{U\sqrt{2}}{w},\quad n=\frac{1}{2m\mu_0 S_f},\quad \varrho=\frac{\beta}{m},\quad f'_{em}=\frac{f_{em}}{m}, \tag{7}$$

supposing the supplying voltages:

$$u_1=U\sqrt{2}\cos\omega t,\quad u_2=U\sqrt{2}\sin\omega t=U\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{1}{2}\pi\right). \tag{8}$$

The instantaneous currents i_1 and i_2, given in the equalities (5), become:

$$i_1=g(l_0+x)\Phi_1,\quad i_2=g(l_0-x)\Phi_2, \tag{9}$$

where

$$g=\frac{bw}{R}=\frac{1}{k_a\mu_0 S_f w}. \tag{10}$$

The system of equations (6), completed with Eqs. (9), give the possibility to study the behaviour of the oscillomotor without spring, in dependance of the magnetic fluxes Φ_1, Φ_2 and displacement x. When the oscillomotor is equipped with a spring, fixed between armature and stator, equation (6_3) must be substituted by:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varrho\frac{dx}{dt}+\gamma x=n(\Phi_2^2-\Phi_1^2)=f'_{em}, \tag{11}$$

with

$$\gamma=\frac{k_r}{m}, \tag{12}$$

k_r being the spring stiffness; the spring is considered an ideal one, with a negligible mass.

The examination of system (6) shows that it cannot be exactly integrated analytically.

3. Considerations on the Operation of the Biphase Oscillomotor

The study on the operation of the oscillomotor will be accomplished in the case of a resistive viscous load; the mechanical losses are included in the mechanical useful power.

The approximate solution of the operation equations of the oscillomotor can be obtained with or without consideration of the active coils resistances. In the first hypothesis a Fourier series representation for the periodic functions Φ_1, Φ_2 can be used. The neglect of the resistances, allowable for not too lower frequencies, permits the integration of system (6). It may be observed that many difficulties occur, from the point of view of mathematics, when the resistances are not negligible.

3.1. Instantaneous Displacement and Absorbed Currents

3.1.1. OSCILLOMOTOR WITHOUT SPRING

If the resistance of the coils is considered zero, Eqs. (6) become:

$$(13)\qquad \frac{d\Phi_1}{dt} = c\cos\omega t,\quad \frac{d\Phi_2}{dt} = c\sin\omega t,\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \varrho\frac{dx}{dt} = n(\Phi_2^2 - \Phi_1^2).$$

From Eqs. (13_1) and (13_2), it follows:

$$(14)\qquad \Phi_1 = \frac{c}{\omega}\sin\omega t,\quad \Phi_2 = -\frac{c}{\omega}\cos\omega t;$$

the equation of motion (13_3) becomes:

$$(15)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \varrho\frac{dx}{dt} = F'_m\cos 2\omega t.$$

Written in this form, the equation of motion is correct only in the hypothesis that the armature moves from its initial position where the useful medium permeance is reached, after the establishment of the steady-state currents.

The longitudinal instantaneous force f_{em}, which is acting upon the armature, has the amplitude:

$$(16)\qquad F_m = mF'_m = \frac{c^2mn}{\omega^2} = \frac{U^2}{\mu_0 S_f \omega^2 w^2},$$

being a sinusoidal function, with a double value for the angular frequency in comparison with the angular frequency of the supplying voltages.

The solution of Eq. (15), with the initial conditions $x(0) = 0$, $(dx/dt)_{x=0} = v(0) = 0$, will be:

$$x(t) = \frac{F'_m}{\sqrt{\varrho^2 + 4\omega^2}}\left[\frac{\cos\alpha}{\varrho}\,e^{-\rho t} + \frac{\sin(2\omega t - \alpha)}{2\omega}\right], \tag{17}$$

where:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{\varrho}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega m}{\beta}\right). \tag{18}$$

The steady-state solution is:

$$x_p = \frac{F'_m}{2\omega\sqrt{\varrho^2 + 4\omega^2}}\sin(2\omega t - \alpha) = X_m \sin(2\omega t - \alpha); \tag{19}$$

after a time $t \geqslant 4/\varrho$, this solution will be, practically, already reached. The amplitude of the displacement of the armature has the expression:

$$X_m = \frac{F'_m \cos\alpha}{2\omega\varrho} = \frac{F'_m}{2\omega\sqrt{\varrho^2 + 4\omega^2}}. \tag{20}$$

The stady-state currents, given by Eqs. (9), after some elementary transformations, take the form:

$$\begin{cases} i_1 = I_{rm}\left[\sin\omega t + \frac{1}{2}A\cos(\omega t - \alpha) - \frac{1}{2}A\cos(3\omega t - \alpha)\right], \\ i_2 = I_{rm}\left[-\cos\omega t + \frac{1}{2}A\sin(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2}A\sin(3\omega t - \alpha)\right], \end{cases} \tag{21}$$

where

$$I_{rm} = \frac{cl_0\, g}{\omega} = \frac{\sqrt{2}Ul_0}{k_a w^2 \mu_0 S_f}, \quad A = \frac{X_m}{l_0} = \frac{F'_m}{2\omega l_0\sqrt{\varrho^2 + 4\omega^2}}. \tag{22}$$

The relationships (21) indicate the presence of a third harmonic, confirming for the biphase reactive oscillomotor, some results found by A. I. Moskvitin, for the reactive single-phase oscillomotors [3].

After the examination of the relation (21_1), which evidences a deformation of the currents from a sine function with the angular frequency ω, one observes that i_{1f}, the fundamental composant, has the complex simplified image:

$$\underline{I}_{1f} = \frac{I_{rm}}{\sqrt{2}} + \frac{AI_{rm}}{2\sqrt{2}}\,e^{j(\pi/2-\alpha)}, \tag{23}$$

using the sine form.

3.1.2. SPRING EQUIPPED OSCILLOMOTOR

If the oscillomotor is endowed with a spring, the motion equation (11) is the classical equation of a damped single degree-of-freedom linear oscillator, with viscous damping and with a sinusoidal excitation force, possessing the angular frequency 2ω.

Maintaining the hypothesis of negligible active resistances for the phase coils and the supplying voltages being as given in (8), the equation of motion (11) takes the following shape:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varrho\frac{dx}{dt} + \gamma x = F'_m \cos 2\omega t, \tag{24}$$

F'_m being given in (16). The particular solution of this equation, the steady-state solution, is:

$$x_p = X_{mr} \sin(2\omega t - \alpha_r), \tag{25}$$

with:

$$X_{mr} = \frac{F'_m}{\sqrt{(\gamma - 4\omega^2)^2 + 4\varrho^2\omega^2}}, \quad \alpha_r = \tan^{-1}\frac{4\omega^2 - \gamma}{2\varrho\omega}. \tag{26}$$

Relationships (26) go over into (20), respectively (18), if it assumed $\gamma = 0$.

The general solution of the equation (24) was indicated, for various possible cases, in Appendix II.

The instantaneous steady-state currents in the phase coils, given in Eqs. (5), become, after some transformations, having in sight the relationships (14) too (approximately valid if one neglegts the resistances):

$$\begin{cases} i_1 = I_{rm}\left[\sin\omega t + \frac{1}{2}A_r\cos(\omega t - \alpha_r) - \frac{1}{2}A_r\cos(3\omega t - \alpha_r)\right], \\ i_2 = I_{rm}\left[-\cos\omega t + \frac{1}{2}A_r\sin(\omega t - \alpha_r) + \frac{1}{2}A_r\sin(3\omega t - \alpha_r)\right], \end{cases} \tag{27}$$

where I_{rm} is given in (22) and A_r, a dimensionless factor, has the value:

$$A_r = \frac{X_{mr}}{l_0} = \frac{F'_m}{l_0\sqrt{(4\omega^2 - \gamma)^2 + 4\varrho^2\omega^2}}. \tag{28}$$

For $\gamma = 0$, A_r goes over into A, given in Eq. (22_2).

It is to remarke the presence of a third harmonic in the composition of the phase currents, by the oscillomotor equipped with a spring too. Using the sine form, the complex simplified image of the fundamental wave of the current i_1 is:

(29) $$\underline{I}'_{1f} = \underline{I}_r + \underline{I}'_m,$$

where

(30) $$\underline{I}_r = \frac{I_{rm}}{\sqrt{2}}, \quad \underline{I}'_m = \frac{I_{rm} A_r}{2\sqrt{2}} e^{j(\pi/2-\alpha_r)} = \frac{X_{mr} I_{rm}}{2\sqrt{2} l_0} e^{j(\pi/2-\alpha_r)}.$$

3.2. Simplified Theory of a Biphase Oscillomotor

3.2.1. CIRCULAR DIAGRAMS

In the case when the spring is absent, considering the relation (23), it may be observed that the harmonic fundamental composant of the steady-state current, in the first phase coil, is composed from

(31) $$\underline{I}_r = \frac{I_{rm}}{\sqrt{2}},$$

which is not dependent on X_m — the amplitude of the motion described by the armature in a steady-state displacement, and from

(32) $$\underline{I}_m = \frac{A I_{rm}}{2\sqrt{2}} e^{j(\pi/2-\alpha)} = \frac{I_{rm} X_m}{2\sqrt{2} l_0} e^{j(\pi/2-\alpha)};$$

the composant $\underline{I}_m$ depends on X_m. The physical interpretation of these two composants, $\underline{I}_r$ and $\underline{I}_m$, becomes evident examining their variation with X_m. If this amplitude is zero, $\underline{I}_{1f} = \underline{I}_r$; consequently, $\underline{I}_r$ will be the current image, which would be absorbed in the coil, in the absence of the motion ($X_m = 0$). When this condition is accomplished, the third harmonic becomes zero. In this case, the armature will reach a position with a medium permeance of the useful longitudinal air gaps. $\underline{I}_r$ can be considered as the repose current image; in the assumed hypothesis, $\underline{I}_r$ lags behind the applied supplying voltage by 90°.

Neglecting the third harmonic, $\underline{I}_m$ represents the motion composant image of the current. The error commited herewith will be studied afterwards.

The relationship of phasors

(33) $$\underline{I}_{1f} = \underline{I}_r + \underline{I}_m$$

conducts, on a complex-plane representation, when $\underline{I}_r$ is taken as the phase reference to a diagram as shown in Fig. 3. If the angle α is varying, the extremity M of the phasor $\underline{I}_m$ will describe a circle with the radius I_m and the centre in C, extremity of $\underline{I}_t$. From Eq. (18) is evidently that this angle is dependent on the damping coefficient β, angular frequency ω

and mass m of the armature. Further results that for a determined frequency for the motion of the armature and for a determined damping coefficient, the point M will be find in the point D_2, in the limiting case for a mass m of the armature equal to zero ($\alpha = 0$); if $m \to \infty$, then $\alpha \to \pi/2$ and the point M will tend to the point D_1. The motion would be impossible. Consequently, the studied oscillomotor will have the operation point M on the quarter $D_1 MD_2$ of the circle.

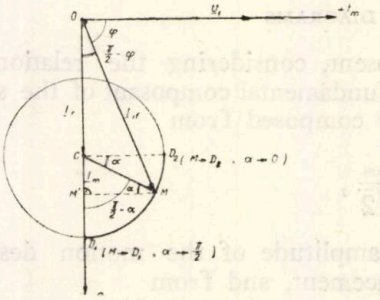


Fig. 3. — The complex-plane representation of the composants of fundamental current wave in the first phase coil (oscillomotor without spring operating on a resistive viscous load).

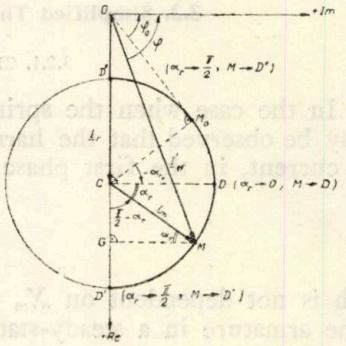


Fig. 4. — The complex-plane representation of the composants of fundamental current wave in the first phase coil (oscillomotor endowed with a spring, operating on a resistive viscous load).

In the case when the oscillomotor is equipped with a spring, maintaining the viscous resistive load, the mechanical losses being included in the useful power, it results that the simplified complex image $\underline{I}'_{1f}$ of the fundamental current composant of the first coil given in Eq. (29), is composed from the same repose current composant $\underline{I}_r$, indicated in (31), added with the motion composant $\underline{I}'_m$ (Eq. (30_2)). When α_r changes ($\alpha_r \in [-\pi/2, +\pi/2]$), reasoning analogically on the complex plane as in the case of an oscillomotor without spring, one proves that the point M, extremity of the phasor $\underline{I}'_m$ (Fig. 4) describes the semicircle $D'DD''$, with the radius I'_m and having the centre C, extremity of $\underline{I}_r$.

The equipping of the oscillomotor with a spring, conducts to the doubling of the geometrical locus, described by the extremity of the motion current composant.

3.2.2. POWER FACTOR

The power factor will be approximated through $\cos\varphi$, where φ means the phase difference between fundamental composant of the current and the supplying voltage, applied to the input terminals pair of a phase coil.

3.2.2.1. *Oscillomotor without Spring.* From the triangles OMM' and $MM'C$ (Fig. 3), where M' is the projection on the real axis of the extremity of the phasor I_m, the following equalities may be obtained:

$$I_{1f}\cos\varphi = I_m\cos\alpha\,, \quad I_{1f}\sin\varphi = I_r + I_m\sin\alpha\,,$$

whence:

$$\cos\varphi = \frac{I_m\cos\alpha}{\sqrt{I_r^2 + I_m^2 + 2I_r I_m\sin\alpha}} = \frac{A\cos\alpha}{\sqrt{A^2 + 4A\sin\alpha + 4}}, \tag{34}$$

in view of Eqs. (31), (32).

In order to have a minimum phase difference, the point M must be found in D_2, the segment CD_2 having a phase angle equal to $\pi/2$ rad in advance with the real positive semiaxis, i. e. $\alpha = 0$. The optimum power factor will be obtained for an angle $\alpha = 0$, between the instantaneous displacement x_p and the electromagnetic instantaneous force f_{em}, given in (19) and

$$f_{em} = F_m\cos 2\omega t\,. \tag{35}$$

It follows:

$$(\cos\varphi)_{opt} = (\cos\varphi)_{\alpha=0} = \frac{A}{\sqrt{A^2+4}}. \tag{36}$$

This equality proves that the considered oscillomotor cannot have a power factor equal to the unit.

For the valuation of the optimum power factor, the coefficient A, given in (22_2), must be estimated. This coefficient is only positive and smaller as the unit, because for the possible oscillomotors it can be written $l_0 = X_m + \varepsilon$, ε being a positive and very small quantity. Therefore:

$$A \leqslant 1\,, \tag{37}$$

the equality being a limiting case, for $\varepsilon \to 0$. In the ideal case ($A = 1$), we have:

$$(\cos\varphi)_{opt} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447\,. \tag{39}$$

This optimum power factor corresponds to an amplitude equal to l_0, the useful air gap, computed in a medium permeance position of the armature. In practice, $A = 0.7...0.9$. For the most disadvantageous case, $A = 0.7$, the power factor will be 0.33.

The Eq. (36) may be easily trnsformed into:

$$(\cos\varphi)_{opt} = \frac{1}{\sqrt{(2l_0/X_m)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(4\omega l_0/V_m)^2+1}}, \tag{39}$$

since

$$X_m = \frac{V_m}{2\omega}, \tag{40}$$

where V_m represents the steady-state velocity amplitude of the armature. It must be noticed that greater optimum power factors will be realized with smaller quotients l_0/X_m, in the limiting case 1.

3.2.2.2. *Oscillomotor Equipped with a Spring.* In the case of a biphase oscillomotor, endowed with a spring, Eqs. (34) remain available for the power factor, but α must be substituted with α_r, given in (26_2), A with A_r, given in (28) and I_m will be substituted with $I'_m = |\underline{I}'_m|$ (see (30_2)). The expression of the repose current remains the same. It results:

$$\cos\varphi = \frac{I'_m \cos\alpha_r}{\sqrt{I_r^2 + I'^2_m + 2I_r I'_m \sin\alpha_r}} = \frac{A_r \cos\alpha_r}{\sqrt{A_r^2 + 4A_r \sin\alpha_r + 4}}. \tag{41}$$

Observing Fig. 4, it follows with no difficulty that $\cos\varphi_0$, the optimum power factor obtained for $\varphi = \varphi_0$ (minimum), exists only when the point M is in M_0, the angle CM_0O being 90°. In this case, the following equalities are available:

$$I_r^2 = I'^2_{1f} + I'^2_m, \quad I'_{1f} \cos\varphi_0 = I'_m \cos\alpha_{0r}.$$

Knowing that the effective values I_r, I'_m, I'_{1f} are

$$I_r = \frac{I_{rm}}{\sqrt{2}}, \quad I'_m = \frac{A_r I_{rm}}{2\sqrt{2}}, \quad I'_{1f} = \frac{1}{2} I_{rm} \sqrt{2 + 2A_r \sin\alpha_r + A_r^2}, \tag{42}$$

it follows:

$$\alpha_{0r} = -\sin^{-1}\left(\frac{3A_r}{4}\right) < 0, \quad \cos\varphi_0 = \frac{A_r}{4}\sqrt{\frac{16 - 9A_r^2}{2 - 2A_r}}. \tag{43}$$

The calculation of the numerical value of the optimum power factor $\cos\varphi_0$ and of the phase angle α_{0r}, for which takes place this power factor, in the case of an oscillomotor equipped with a spring and having a viscous resistive load, imposes the appreciation of the dimensionless factor A_r (Eq. (28)). Since $A_r = X_{mr}/l_0$ and $l_0 \leqslant X_m$, it results $A_r \leqslant 1$, the limiting superior value being achieved when the length l_0 of the useful air gap, in a medium permeance position, coincides with the amplitude X_m of the motion, as well as for the oscillomotor without spring. In practice, therefore, A_r must have the same values as those for A, indicated in § **3.2.2.1**, i. e. 0.7...0.9. In the ideal limiting case, $A_r = 1$, the best power factor will be:

$$\cos\varphi_0 = (\cos\varphi)_{opt} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}} \cong 0.47; \tag{44}$$

for $A_r = 0.7$, a more unfavourable case,

$$\cos\varphi_0 \cong 0.34. \tag{44'}$$

When $\alpha_r = 0$, the oscillomotor is operating with mechanical resonance,

$$(\cos\varphi_0)_{\alpha_r=0} = \frac{A_r}{\sqrt{A_r^2+4}}; \tag{45}$$

for the limiting value $A_r = 1$,

$$(\cos\varphi_0)_{\alpha_r=0;\ A_r=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cong 0.447, \tag{45'}$$

and for $A_r = 0.7$:

$$(\cos\varphi_0)_{\alpha_r=0;\ A_r=0.7} \cong 0.33. \tag{45''}$$

Using Eq.

$$A_r = \frac{X_{mr}}{l_0} = \frac{V_{mr}}{2\omega l_0}, \tag{46}$$

X_{mr} and V_{mr} being respectively the motion amplitude of the armature and of its velocity, in a steady-state motion, Eq. (43_2) for the optimum power factor may be written in the shape:

$$\cos\varphi_0 = \frac{X_{mr}}{4l_0}\sqrt{\frac{16l_0^2 - 9X_{mr}^2}{4l_0^2 - 2X_{mr}^2}} = \frac{V_{mr}}{8\omega l_0}\sqrt{\frac{64l_0^2 - 9V_{mr}^2}{16l_0^2 - 2V_{mr}^2}}. \tag{47}$$

3.2.2.3. *Remarks.* From the previous presented material results a little difference between the optimum power factor and that reached in a mechanical resonance case ($\alpha_r = 0$), the difference being 3...8 %. *The carrying out of the mechanical resonance condition* $\alpha_r = 0$, *otherwise*

$$\Omega_0 = 2\omega_0 = \sqrt{\frac{K_r}{m}} = \sqrt{\gamma}, \tag{48}$$

conducts in the same time to a power factor value very nearly from its optimum value.

The deduced relationships for the power factor can be estimated as being nearly to the real values. This assertion may be confirmed in view of the following remark: the hypothesis of an equal magnetic potential for the stator and armature iron leads to a lower power factor as calculated, but the neglect of iron losses, in a simplified theory, have an opposite effect.

Concerning the effective value of the fundamental wave of the current, in the case of the best power factor ($\alpha_r = \alpha_0$) and mechanical resonance ($\alpha_r = 0$), it results:

$$(I'_{1f})_{\alpha_r=0} = \sqrt{\frac{I_r^2 - I'^2}{I_r^2 + I_m^2}} = \sqrt{\frac{4 - A_r^2}{4 + A_r^2}}, \tag{49}$$

whence

$$k_i = \frac{(I'_{1f})_{\alpha_r=0}}{(I'_{1f})_{\alpha_r=\alpha_0}} = \sqrt{\frac{I_r^2 - I_m'^2}{I_r^2 + I_m^2}} = \sqrt{\frac{4 - A_r^2}{4 + A_r}}. \tag{50}$$

For $A_r = 0.7$ and $A_r = 1$, the values of the quotient k_i are respectively:

$$(k_i)_{A_r=0.7} \cong 0.89, \quad (k_i)_{A_r=1} \cong 0.79.$$

3.2.3. VALUATION OF THE EFFECTED ERROR DUE TO THE NEGLECT OF THE THIRD HARMONIC

In order to estimate the effected error, produced by neglecting the third harmonic of the phase current, the quotient k_e between the effective value of the fundamental wave and the effective value of the phase current, together with the distortion current coefficient k_d, will be now calculated.

3.2.3.1. *Oscillomotor without Spring.* It results:

$$k_e = \frac{I_{1f}}{I_1} = \frac{I_{1f}}{\sqrt{I_{1f}^2 + I_3^2}}. \tag{51}$$

The distortion current coefficient [26] is:

$$k_d = \frac{I_d}{I_1}, \tag{52}$$

where I_d, the deforming residuum, has the form:

$$I_d = I_3 = \frac{AI_{rm}}{2\sqrt{2}}; \tag{53}$$

then the effective value I_3 of the third harmonic, which results from Eq. (21_1), coincides with the deforming residuum. With respect to I_1, it has the expression:

$$I_1 = \sqrt{I_{1f}^2 + I_3^2} = \frac{I_{rm}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + A \sin\alpha + \frac{1}{2} A^2}. \tag{54}$$

Using Eq. (51), we have:

$$k_e = \sqrt{\frac{4 + A^2 + 4A \sin\alpha}{4 + 2A^2 + 4A \sin\alpha}}, \tag{55}$$

and using Eq. (52), we obtain:

$$k_d = \frac{A}{\sqrt{4 + 4A \sin\alpha + 2A^2}}. \tag{56}$$

In the previous equalities, $\sin\alpha$, which can take values only between 0 and 1, is:

$$\sin\alpha = \frac{2\omega}{\sqrt{\varrho^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2/(4\omega^2 m^2)}}, \tag{57}$$

and $A \in [0.7; 0.9]$. The small values for $\sin\alpha$ will be obtained for important viscous friction factors β, for small masses of the armature in the case of an imposed constant frequency for the supplying voltages. Values nearly to the unit will be registered for small β and important m.

After some calculations, it results, for limiting values for $\sin\alpha$, the values indicated in the table 3.1.

It is important to be remarked that k_e is nearly to the unit, the influence of $\sin\alpha$ remaining small; k_d—the distortion coefficient is rather important.

Table 3.1

Values of the Coefficients k_e and k_d

A	$\sin\alpha$	k_e	k_d
0.7	0	0.95	0.32
0.8	0	0.91	0.35
0.7	1	0.97	0.25
0.8	1	0.96	0.28

3.2.3.2. *Oscillomotor with Spring.* The valuation of the committed error by neglecting the third harmonic of the phase current, may be analogically made as in § **3.2.3.1,** obtaining:

$$k_e' = \frac{I_{1f}'}{I_1'} = \sqrt{\frac{4 + A_r^2 + 4A_r \sin\alpha_r}{4 + 2A_r^2 + 4A_r \sin\alpha_r}}, \tag{59}$$

the deforming residuum being:

$$k_d' = \frac{A_r}{\sqrt{4 + 2A_r^2 + 4A_r \sin\alpha_r}}. \tag{60}$$

In the last two equalities, $\sin\alpha_r$ is given by the following expression:

$$\sin\alpha_r = \frac{4\omega^2 - \gamma}{\sqrt{(4\omega^2 - \gamma)^2 + 4\varrho^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varrho^2\omega^2/(4\omega^2 - \gamma)^2}}, \tag{61}$$

its values being contained between + 1 and − 1.

For different values for A_r and $\sin\alpha_r$, k_e' and k_d' take the values indicated in the table 3.2.

Table 3.2

Values of the coeficients k_e' and k_d'

A_r	$\sin\alpha_r$	k_e'	k_d'
0.7	1	0.97	0.25
0.8	1	0.96	0.28
0.7	0	0.95	0.32
0.8	0	0.91	0.35
0.7	−1	0.95	0.47
0.8	−1	0.93	0.36

The coefficient k_e' indicates — in the case of an oscillomotor equipped with a spring — that the effective value of the current, neglecting its third harmonic, is nearly to the real effective current value, which considerates this harmonic.

Appendix I

Calculation of the Electromagnetic Longitudinal Resulting Force

In the equation of motion of the oscillomotor is necessary the knowledge of the instantaneous electromagnetic longitudinal resulting force, which produces and entertains the motion, acting on the armature of the oscillomotor. The calculation is based on the admittance of the relationship (1).

The total permeances of the first and second magnetic circuit, corresponding to the phase coils, are:

$$\Lambda_1 = \frac{\Lambda_{1x}\Lambda_a}{\Lambda_{1x}+\Lambda_a}, \quad \Lambda_2 = \frac{\Lambda_{2x}\Lambda_a}{\Lambda_{2x}+\Lambda_a}; \tag{I.1}$$

the fascicular magnetic fluxes from the two magnetic circuits may be written:

$$\Phi_1 = wi_1\Lambda_1, \quad \Phi_2 = wi_2\Lambda_2. \tag{I.2}$$

Since

$$\Lambda_{1x} = \frac{\mu_0 S_f}{l_0 + x}, \quad \Lambda_{2x} = \frac{\mu_0 S_f}{l_0 - x}, \tag{I.3}$$

it follows, based on Eqs. (1):

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2}(wi_1)^2 k_{1a}^2 \dfrac{\Lambda_{1x}^2}{\mu_0 S_f} = \dfrac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S_f}, \\ f_2 = \dfrac{1}{2}(wi_2)^2 k_{2a}^2 \dfrac{\Lambda_{2x}^2}{\mu_0 S_f} = \dfrac{\Phi_2^2}{2\mu_0 S_f}, \end{cases} \tag{I.4}$$

k_{1a}, k_{2a} being coefficients due to the influence of the transversal parasite air gaps:

$$k_{1a} = \frac{\Lambda_a}{\Lambda_a + \Lambda_{1x}}, \quad k_{2a} = \frac{\Lambda_a}{\Lambda_a + \Lambda_{2x}}. \tag{I.5}$$

The above considerations took in sight the same transversal air gaps. In Eqs. (I.4), the fascicular magnetic fluxes are:

$$\Phi_1 = k_{1a}(wi_1)\Lambda_{1x}, \quad \Phi_2 = k_{2a}(wi_2)\Lambda_{2x}. \tag{I.6}$$

The resulting electromagnetic instantaneous force, which will acte longitudinaly, entertaining the motion of the armature, is:

$$\mathbf{f}_{em} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = (f_2 - f_1)\mathbf{i}, \tag{I.7}$$

$\mathbf{i}$ representing the unit vector of the positive x-semiaxis, directed towards $\mathbf{f}_2$. Having in sight Eqs. (I.4) we have:

$$f_{em} = f_2 - f_1 = \frac{\Phi_2^2 - \Phi_1^2}{2\mu_0 S_f}. \tag{I.8}$$

We can admit, in base of the following reasoning, that:

$$k_{1a} = k_{2a} = k_a < 1. \tag{I.9}$$

Indeed, Eq. (I.5$_1$) may be written:

$$k_{1a} = \frac{1}{1 + \Lambda_{1x}/\Lambda_a}, \tag{I.5'}$$

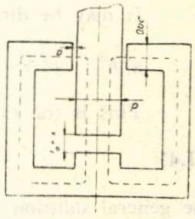


Fig. I. 1

where $\Lambda_a = \mu_0 S_a/a$, Λ_{1x} being given in Eq (I.3$_1$). With the dimensions on Fig. I.1, neglecting the swelling of field lines, we obtain:

$$\frac{\Lambda_{1x}}{\Lambda_a} = \frac{S_f}{S_a}\,\frac{a}{l_0 + x} = \frac{\pi d^2}{0{,}6\,\pi d(2a + d)}\,\frac{a}{l_0 + x} = \frac{1.66\,a}{(1 + 2a/d)\,(l_0 + x)} \simeq 1.66\,\frac{a}{l_0}\,\frac{1}{1 + x/l_0},$$

since $a \ll d$.

By a feasible oscillomotor, the amplitude of motion is $X_{mr} = A_r l_0$, A_r being a positive coefficient, smaller as the unit. Thus $1 + x/l_0$ changes between the limiting values $1 + A_r$, $1 - A_r$, having in sight a harmonic motion of the armature. After some elementary calculations, for k_{1a} results (Eq. (I.5')):

$$k_{1a} = \frac{1}{1 + (0.55 \ldots 1.66)\,a/l_0}, \tag{I.10}$$

considering as extreme values for A_r, 0.8 and 1. Because $a \ll l_0$, k_{1a} will be practically constant, smaller as the unit and nearly to the unit.

The same reasoning may be developped for k_{2a} too (Eq. (I.5$_2$)), which justifies Eq. (I.9), where k_a is the medium value of k_{1a} or k_{2a}. For instance, if $a = 0.5$ mm, $l_0 = 10$ mm, results $a/l_0 = 0.05$, k_a changing between 0.92 and 0.97, having the medium value 0.945.

Appendix II

General Solution of the Differential Equation of Motion

The general solution of the differential equation (24) of an oscillomotor equipped with a spring, is composed from x_1, the free solution, corresponding to Eq. (24) without right member, added with x_p, the forced solution, given by Eq. (25):

$$x = x_1 + x_p. \tag{II.1}$$

Introducing the notations:

$$\varrho = 2h, \quad \gamma = p^2, \tag{II.2}$$

the homogenous Eq. (24) becomes:

(II.3) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + p^2 x = 0 .$$

It may be distinguished three cases (see [28]):

a) $h^2 - p^2 = -s^2 < 0$, $(s = \sqrt{p^2 - h^2})$.

This is the case $h \ll p^2$. The solution of Eq. (II.3) is:

(II.4) $$x_1 = Ce^{-ht} \sin (st + \alpha_x);$$

the general solution of the equation of motion (24) is:

(II.5) $$x = Ce^{-ht} \sin (st + \alpha_x) + X_{mr} \sin (2\omega t - \alpha_r).$$

With the initial conditions

(II.6) $$x(0) = 0 , \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v(0) = 0 ,$$

the constants of integration are:

(II.7) $$\alpha_x = \tan^{-1}\left(\frac{h \tan \alpha_r}{2\omega + s \tan \alpha_r}\right), \quad C = \frac{2X_{mr} \cos \alpha_r}{h \cos \alpha_x - s \sin \alpha_x} = \frac{X_{mr} \cos \alpha_r (2\omega + s \tan \alpha_r)^2}{h} .$$

In this case, during the transient working conditions the armature describes damped oscillations. After a time $t \geqslant 4/h$, the sinusoidal steady-state motion can be considered as ended.

b) $h^2 - p^2 = q^2 > 0$.

The solution of Eq. (II.3) is

(II.8) $$x_1 = C_1 e^{(q-h)t} + C_2 e^{-(q+h)t};$$

the general solution of Eq. (24):

(II.9) $$x = C_1 e^{(q-h)t} + C_2 e^{-(q+h)t} + X_{mr} \sin (2\omega t - \alpha_r).$$

With the initial conditions (II.6), it may be obtained:

(II.10) $$C_1 = X_{mr}\left[\sin \alpha_r \left(1 + \frac{h-q}{2q}\right) - \frac{\omega}{q} \cos \alpha_r\right], \quad C_2 = \frac{X_{mr}}{q}\left(\frac{q-h}{2} \sin \alpha_r + \omega \cos \alpha_r\right).$$

During the transient working conditions, take place a supplementary aperiodical motion of the armature.

c) $h^2 - p^2 = 0$.

In this limiting case, Eq. (II.3) possess the solution:

(II.11) $$x_1 = (C_1 + C_2 t) e^{ht} ,$$

the general solution of Eq. (24) being:

(II.12) $$x = (C_1 + C_2 t) e^{ht} + X_{mr} \sin (2\omega t - \alpha_r) .$$

Imposing the initial conditions (II.6), it can be obtained:

$$C_1 = X_{mr} \sin \alpha_r, \quad C_2 = X_{mr}(h \sin \alpha_r - 2\omega \cos \alpha_r). \tag{II.13}$$

In all the cases (a)...c)), the free solutions become zero, when $t \to \infty$, inclusively $\lim_{t \to \infty} t \exp(-ht) = 0$, which appears in Eq. (II.12).

Polytechnic Institute, Brashov,
Department of Electrical Engineering

REFERENCES

1. Boucherot P., *Appareil et machines à courant et mouvement alternatifs.* Bull. de la Soc. Intern. des Électr., 1908, série 2, **VIII,** pp. 731–755.
2. Bidot R., *Exposition d'électricité à Marseilles.* Révue Électr., 1908, *III,* p. 114.
3. Москвитин А. И., *Электрические машины возвратно-поступательного движения.* Изд. АН СССР, М.-Л., 1950.
4. Marinescu M. a. o., *L'effet d'hystérèse électromécanique. Un nouveau processus de transformation de l'énergie électrique en travail mécanique. Application à la réalisation de nouvelles machines électriques.* RGÉ, 1962, **71,** *12,* pp. 545—556.
5. Marinescu M., *Moteurs électromagnétiques à mouvement alternatif et générateurs magnétostrictifs d'ultrasons.* RGÉ, 1963, **72,** *11,* pp. 565–572.
6. — *Sur un nouveau moteur électrique à mouvement alternatif.* RGÉ, 1961, **70,** pp. 453–459.
7. Marinescu M., Vrancea L., *Der Motor mit elektromechanischer Hysteresis und Hinundherbewegung.* Elektrie, 1963, **17,** *6,* S. 198–200.
8. Marinescu M., *Sur certains effets d'instabilité électromécanique.* C.R. Acad. Sci., Paris, 1963, **257,** pp. 3578–3581.
9. — *Sur le principe du „transfert extremal de l'énergie", dans les systèmes électromécaniques.* C. R. Acad. Sci., Paris, 1964, **258,** *8,* pp. 2282–2284.
10. — *On the production of alternative (attractive and repulsive) electromagnetic forces. New means for linear motor development.* Rev. Roum. Sci. Techn., s. Électrot. et énerg., 1965, **10,** *3,* pp. 543—552.
11. — *Funcționarea optimală a oscilomotoarelor electromagnetice.* St. și cerc. energ. electr., 1965, **15,** *3,* pp. 629–642.
12. — *Schimb de experiență cu R.D.G., privind aplicarea oscilomotoarelor parametrice la acționarea compresoarelor pentru frigidere.* St. și cerc. energ. electr., 1965, **15,** *2* pp. 421–422.
13. — *Asupra unor noi proprietăți ale electromagneților de tip solenoidal.* St. și cerc. energ electr., 1964, **14,** *1,* pp. 195–201.
14. — *Étude de l'application d'une charge apériodique aux moteurs à hystéresis électromécanique.* Rev. Roum. Sc. Techn., s. Électrot. et energ., 1964, **9,** *3,* pp. 323–330.
15. — *Despre o nouă tehnică a producerii energiei sonice (ultrasunete) prin magnetostricțiune.* Com. Acad. R.P.R., 1963, **XIII,** *3,* pp. 253–258.
16. Laithwaite E. R., Mamak R. S., *An Oscillating Synchronous Linear Machine.* Proced. I.E.E., 1962, **109 A,** *47,* pp. 415—426.
17. Laitwaite E. R., *Electrical Machines of the Future.* Proced. I. E. E., 1962, **109 A,** *39,* p. 119.
18. — *Oscillating Machines, Synchronous and Asynchronous.* Proced. I. E. E., 1962, **109 A,** *47,* pp. 411—414.
19. Späth W., *Ein elektromechanischer Schwingungserzeuger (Schwingungsmotor).* ETZ, 1929, **50,** *13,* S. 455–458.
20. Cristea M., *Motorul bifazat cu reacție, cu mișcare rectilinie alternativă.* Lucr. șt., Inst. polit. Brașov, Mecanică, 1962, V, pp. 59–71.

21. Saal C., *Aspecte teoretice ale funcționării motorului bifazat cu mișcare rectilinie alternativă.* Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 249—262.
22. Russenberger M., *Theorie und Anwendung elektromagnetischer Schwingungsmotoren.* Schw. Techn., Ztschr., 1962, **59**, *48*, S. 941—947.
23. Sequenz H., *Elektrische Maschinen mit geradliniger Bewegung.* E. u. M., 1964, **81**, *17*, S. 421—432.
24. Тер-Акопов А. К., *Динамика быстродействующих электромагнитов.* Энергия, М.-Л., 1965.
25. Sequenz H., *Atomkraftwerke und Atomkraftantriebe.* E. u. M., 1955, **72**, *15/16*, S. 357.
26. Timotin Al. ş. a., *Lecții de bazele electrotehnicii.* Vol. **II**, EDP, Buc., 1964.
27. Bălă C. V., *Predeterminarea caracteristicilor de funcționare ale oscilomotoarelor electromagnetice axiale.* St. şi cerc. energ. electr., 1966, **16**, *4*.
28. Smirnov V. I., *Curs de matematici superioare.* Vol. **II**, Ed. tehn., Buc., 1954, pp. 101—104, (trad. din l. rusă).

STUDIUL UNUI OSCILOMOTOR BIFAZAT SINCRON (I)

(Rezumat)

Se stabilesc ecuațiile de funcționare ale oscilomotorului bifazat reactiv, alimentat cu tensiuni bifazate simetrice.

În anumite ipoteze simplificatoare, se examinează comportarea oscilomotorului, prevăzut sau nu cu resort, pe o sarcină rezistivă vîscoasă. Se trasează, în planul complex, diagramele corespunzătoare diferitelor componente ale fundamentalei curentului de fază; se stabilește că acesta conține o armonică de ordinul trei. În teoria simplificată această armonică poate fi neglijată. Evaluarea erorii comise arată că această aproximație este acceptabilă.

Se calculează factorul maxim de putere, a cărui valoare este 0,45, dacă oscilomotorul nu este prevăzut cu resort, sau 0,47, dacă există resort.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Oscilomotor bifazat reactiv.

Fig. 2. — Circuitul magnetic echivalent al primei bobine: Φ_1 — fluxul magnetic instantaneu fascicular; wi_1 — tensiunea magnetomotoare instantanee; Λ_{1x} — permeanța magnetică a întrefierului util; Λ_a — permeanța magnetică a întrefierului transversal parazit.

Fig. 3. — Diagrama de fazori a componentelor armonicii fundamentale a curentului din prima bobină (oscilomotorul neechipat cu resort, funcționînd pe o sarcină rezistivă vîscoasă).

Fig. 4. — Diagrama de fazori a componentelor armonicii fundamentale a curentului din prima bobină (oscilomotorul echipat cu resort, funcționînd pe o sarcină rezistivă vîscoasă).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 621.316.936

ANALYSE D'UN SCHÉMA DE PROTECTION DES STATIONS CONTRE LES SURTENSIONS À L'AIDE DES DÉCHARGEURS À RÉSISTANCE VARIABLE

PAR

C. DINCULESCU
membre corespondant de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie
et
DORIN CRISTESCU

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Galatz, le 20-22 mai 1966

1. Introduction

1. L'essor rapide de la consommation de l'énergie électrique pendant ces dernières années a conduit à l'apparition d'un système énergétique complexe, à tensions toujours plus élevées, à lignes de transport multiples et de grandes longueurs. De cette manière, la probabilité de la chute du coup de foudre dans les installations électro-énergétiques, spécialement dans les lignes, s'est accrue considérablement. À la suite d'un pareil coup sur la ligne, des ondes de surtension apparaissent et se propagent vers les extrémités où elles recontrent les appareils installés dans les stations : des interrupteurs, des transformateurs de mesure, des transformateurs de force.

Le dépassement des niveaux d'isolation de cet appareillage mène à la détérioration de son isolation et de plus, il mène à l'apparition de quelques interruptions de longue durée dans l'alimentation des consommateurs, ce qui augmente dans maints cas les dédommagements provoqués. Pour limiter les tensions qui apparaissement aux bornes des appareils installés dans les stations on emploie les déchargeurs à résistance variable qui gardent la tension sur les barres auxquelles ils sont raccordés, à une valeur inférieure ou bien égale à sa tension résiduelle ($U_{rés}$).

Quant à l'appareil à protéger, le cas échéant le transformateur, est installé tout juste près du déchargeur, c'est alors qu'à coup sûr la tension qui sollicite son isolation sera égale à la tension résiduelle. Mais pratiquement cette chose n'est jamais possible, spécialement dans les stations de 110 kV ayant un nombre élevé de transformateurs et de lignes et à déchargeurs montés aux bouts des barres collectrices. Compte tenu de cet aspect et toutefois des phénomènes de propagation et réflexion successive il en resulte que la tension qui apparaît aux bornes du transformateur peut dépasser quelquefois d'une manière considérable la tension résiduelle du déchargeur à résistance variable (DRV). Cette tension croît au fur et à mesure que la distance jusqu'au du déchargeur augmente.

Dans ce qui suit on a cherché à déterminer la dépendance de la tension maxima aux bornes de l'appareil à protéger, fonction de la distance par rapport au déchargeur, pour certaines formes de l'onde incidente dans

les stations, pour les installations de 110 kV. Le caractère complexe du processus étudié et la nature non-linéaire des grandeurs qui interviennent a rendu nécessaire l'utilisation d'un calculateur numérique CIFA-102, pour l'obtention des résultats concrets utilisables dans le calcul de la protection des stations et le choix de paramètres des déchargeurs.

2. Hypothèses de calcul et des formules

2.1. La protection de base, comme on l'a déjà dit, réalisée par DRV, est complétée par une protection auxiliaire installée sur chaque ligne de transport qui arrive dans la station. Dans le schéma représenté dans la fig. 1 a cette protection auxiliaire est réalisée par un déchargeur tubulaire placé à une distance l_c par rapport aux barres de la station et à conducteur de protection. Le choix correct du schéma auxiliaire de protection a pour résultat la limitation du courant par le DRV à une valeur bien inférieure à celle nominale. Mais un autre but de premier ordre est l'applatissement correspondant du front de l'onde incidente grâce à l'effet corona d'impulsion. Dans un ouvrage antérieur [1] on a analysé l'influence de la longueur l_c sur la pente de l'onde incidente considérée, coupée par le déchargeur tubulaire.

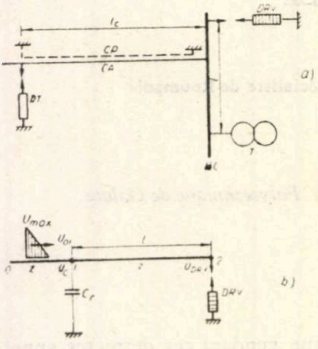


Fig. 1. — Schéma de protection des stations contre les surtensions (*a*); schéma équivalent employé dans les calculs (*b*).

L'analyse des processus de propagation sur un schéma du type *a* en tenant compte de tous les paramètres qui y interviennent, n'est pas possible comme on l'a déjà dit, dû à la non-linéarité des processus. Les éléments essentiels du schéma se trouvent être le DRV et le transformateur T. Pour l'analyse théorique et numérique qui est exposée dans ce qui suit, ce sont ceux-ci les éléments du schéma équivalent pris en considération (schéma *b*).

Dans la littérature on donne un calcul complet effectué à l'aide d'un calculateur chiffrique [2], mais pour un schéma à déchargeur placé avant le transformateur dans le sens de la propagation de l'onde et en utilisant d'autres principes de calcul.

Lorsque sur chaque ligne de transport est installé un DRV alors ce type de schéma est indiqué. Lorsque le DRV est unique, placé sur la barre collectrice à laquelle sont connectés des transformateurs et des lignes, le caractère aléatoire du processus de décharge fait possible, même plus probable, un schéma du type *b* pour lequel on donne une analyse détaillée dans cet ouvrage.

Dans ce schéma à la place du transformateur l'on a considéré une capacité, C_T, à savoir la capacité d'entrée à l'impulsion. Pour des calculs pratiques dans C_T on peut englober tant les capacités des barres collectrices

que celles des appareillages raccordés. Du point de vue du phénomène de propagation la présence de cette capacité est favorable, car comme on le sait, elle mène à l'applatissement de la pente de l'onde.

Dans le schéma *b*, *Z* est l'impédance caractéristique des barres collectrices et celle de la ligne considérée, pour des éléments sans pertes.

Jusqu'à l'atteint du point *1* les pertes peuvent être prises en considération; elles mènent à l'obtention d'une certaine pente et d'une certaine amplitude de l'onde incidente. Mais, vu la longuer relativement réduite parcourue par l'onde dans la station, tout au plus $2l$, ou l ne dépasse pas que rarement 250...300 m, l'influence des processus d'amortissement et d'applatissement cesse d'être essentielle et c'est pourquoi qu'on ne l'a même pas prise en considération. Ce sont les bornes du transformateur *1* et les bornes du DRV *2* les seuls points du schéma ou ont lieu des transformations de forme, de pente et d'amplitude de l'onde.

2.1. Les processus qui ont lieu dans un schéma du type *b* sont influencés dans une large mesure par la manière de fonctionnement du DRV. Le déchargeur étant placé au bout de la ligne, se produit une réflexion totale accompagnée d'un redoublement des valeurs, jusqu'au moment où la tension d'amorçage du DRV est dépassée. À ce moment, le courant commence à circuler par la résistance variable et la tension aux bornes du DRV est établie selon la règle de Petersen à une certaine valeur (voir les courbes *2* et *3* de la fig. 2).

L'apparition d'une cime importante de tension est essentielle dans ce processus (*A* ou *A'* — fig. 2), cime qui ne saurait être négligée.

Dans les calculs pour le schéma de l'autre type (*a*) on ne tient pas compte de sa présence.

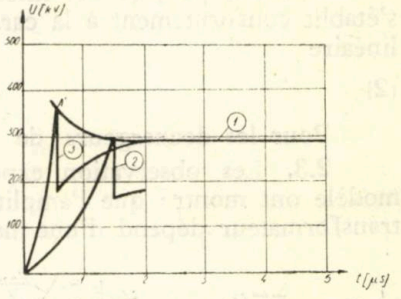


Fig. 2. — La caractéristique tension-temps des intervalles d'amorçage pour un DRV à 110 kV utilisé dans la République Socialiste de Roumanie (courbe *1*) et la variation de la tension aux bornes du déchargeur (courbes *2* et *3*).

Pour pouvoir obtenir la valeur et le moment d'apparition de cette cime, il est nécessaire que l'on connaisse la caractéristique tension-temps des intervalles d'amorçage du déchargeur. Les déchargeurs usuels employés dans notre pays ont comme caractéristique une ligne droite parallèle à l'horizontale, pour les valeurs du temps situés dans l'intervalle 1,5 ... 10 μs.

La tendance moderne est que cette hauteur de la caractéristique *U-t* soit égale à la tension résiduelle du DRV et qu'elle s'étende autant plus longuement que possible vers des temps de l'ordre de 1 μs par l'uniformisation du champ entre les électrodes d'amorçage. Ces performances sont poursuivies avec attention dans les déchargeurs pour des tensions très hautes. Pour l'obtention des résultats numériques, a été necessaire l'utilisation d'une équation analytique pour la caractéristique tension-temps. Tenant

compte du caractère profondément uniforme du champ, la formule de Gorev et Mascileison [3]

$$u = u_\infty \sqrt{1 + \frac{T_0}{t - t_0}}$$

s'était avérée inutilisable.

En utilisant les caractéristiques données dans la littérature [4] pour les déchargeurs de 110 kV, on a choisi pour cette relation une équation d'une conique à deux asymptotes, de la forme:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0.$$

En considérant qu'entre 1,5 μs et 5 μs la tension varie de 293 kV à 282 kV, à une asymptote horizontale à 280 kV, l'on obtient une juste superposition avec la courbe expérimentale en employant l'équation:

$$(1) \qquad u = f(t) = 0{,}145\,(2{,}574 - t + \sqrt{t^2 - 1{,}301\,t + 0{,}600}),$$

où u est exprimé en MV et t en μs; le domaine d'applicabilité est delimité par $t > 0{,}3$ μs. L'allure de la caractéristique obtenue est cele de la courbe *1* (fig. 2).

Après le perçage des intervalles d'amorçage le point de fonctionnement s'établit conformément à la caractéristique volt-ampère de la résistance non-linéaire

$$(2) \qquad u = Ct^\alpha.$$

Pour les déchargeurs de 110 kV on a considéré $C = 206$ et $\alpha = 0{,}2$.

2.3. Les observation expérimentales et les mesures effectuées sur modèle ont montré que l'amplitude maxima de la tension aux bornes du transformateur dépend d'une manière essentielle de la forme de l'onde incidente sur les barres de la station. Dans la première étape des calculs, présentée dans cet ouvrage, on n'a pas utilisé la forme usuelle de l'onde à front incliné et derrière infini de valeur constante, quoique cette forme eût simplifié toute une série d'étapes dans les calculs, puisque ce n'est pas celle-ci qui soit la forme à être la plus rapprochée des ondes incidentes dans les installations électro-énergétiques.

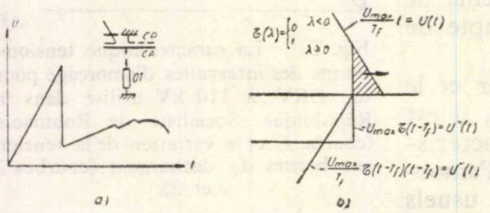


Fig. 3. — Onde de surtension triangulaire qui se propage sur la ligne; *a* — forme d'une onde qui passe au delà du déchargeur tubulaire, après le fonctionnement de celui-ci; *b* — obtention d'une impulsion triangulaire par la superposition des ondes angulaires à front infini et rectangulaires.

Pour des tensions dépassant 110 kV on met le point de nul à la terre; par conséquent au dépassement de la tension à contourner de 50% de l'isolation de la ligne la chaîne d'isolateurs est contournée et le derrière de

l'onde coupée est conduit dans la terre par des supports. De plus, sur les lignes de 110 kV des déchargeurs tubulaires sont installés, qui amorcent lorsque la tension dépasse une certaine valeur. Dans la fig. 3 a l'on représente la variation de la tension, fonction de temps, aux bornes d'un déchargeur tubulaire. On peut remarquer que la forme de cette variation est bien éloignée de celle de l'onde à derrière infini que l'on utilise habituellement [2], [5], [6] ; elle a pour éléments essentiels la cime accentuée et le rabaissement pratiquement instantanée.

Même après que cette onde ait parcouru une certaine distance sur une ligne à effet corona — quoique grâce à l'effet corona de signe contraire qui apparaît après le dépassement du maxima, le rabaissement ne se produit plus instantanément — la forme de la courbe de la tension garde les mêmes traits essentiels qui se caractérisent par un rabaissement rapide aussitot après le dépassement de la valeur au sommet.

Compte tenu de ces aspects l'on a utilisé la forme triangulaire de l'impulsion de tension comme onde incidente, présentée dans la fig 3 b. Les paramètres de cette impulsion sont la valeur maxima $U_{\max}$ et la durée du maximum T_f. Il en résulte la pente du front egale à $U_{\max}/T_f$. Comme il en résulte aussi de la figure on peut obtenir une pareille impulsion triangulaire par la superposition de deux ondes à front incliné infini u' et u''' et d'une onde rectangulaire u'' à derrière infini.

L'écuation de l'impulsion de tension est

$$u_{01}(t) = u'_{01}(t) + u''_{01}(t) + u'''_{01}(t),$$

$$u_{01}(t) = \frac{U_{\max}}{T_f} t - U_{\max}\,\tau(t - T_f) - \frac{U_{\max}}{T_f}(t - T_f)\,\tau(t - T_f), \tag{3}$$

où

$$\tau(t - T_f) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < T_f, \\ 1 \text{ pour } t \geqslant T_f. \end{cases}$$

2.4. En utilisant les règles du calcul opérationnel et aussi le schéma équivalent Petersen, l'on obtient pour l'onde u_{12} qui passe au delà du noeud *1*, les expressions suivantes :

$$u_{12}(t) = \frac{U_{\max}}{T_f}\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right], \text{ pour } 0 \leqslant t < T_f$$

$$\left.\begin{aligned} u'_{12}(t) &= \frac{U_{\max}}{T_f}\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right], \\ u''_{12}(t) &= U_{\max}\left[1 - e^{-\frac{t-T_f}{T}}\right], \\ u'''_{12}(t) &= \frac{U_{\max}}{T_f}\left[t - T_f - T\left(1 - e^{-\frac{t-T_f}{T}}\right)\right] \end{aligned}\right\} \text{ pour } t \geqslant T_f.$$

De ces relations il en résulte que, partant du transformateur une onde de tension se propage vers le déchargeur ; l'expression analytique de cette onde est :

$$(3') \qquad u_{12}(t) = \begin{cases} \dfrac{U_{\max}}{T_f}\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right], & \text{pour } 0 \leqslant t < T_f, \\ \dfrac{U_{\max}}{T_f} T\left[1 - \left(1 - \dfrac{T_f}{T}\right) e^{-\frac{T_f}{T}}\right] e^{-\frac{t}{T}}, & \text{pour } t \geqslant T_f. \end{cases}$$

Dans les relations (3') T représente la constante de temps du circuit, donnée par :

$$(4) \qquad T = \frac{1}{2} Z C_T.$$

La valeur maxima de l'onde qui se propage au delà du point de raccordage du transformateur est pour $t = T_f$

$$U_{12_{\max\,(t=T_f)}} = \frac{U_{\max}}{T_f}\left[T_f - T\left(1 - e^{-\frac{T_f}{T}}\right)\right],$$

obtenue comme limite à la droite, respectivement à la gauche, des expressions (3').

L'onde $u_{12}(t)$ se propage avec une vitesse c égale à celle de la lumière, vers le DRV où elle arrive après un intervalle $t_{12} = l/c$.

Dans le point *2* du schéma se produit une réflexion totale accompagnée du redoublement des valeurs jusqu'au moment du perçage des éclateurs d'amorçage du déchargeur.

Soit t' le moment où ce perçage se produit et en supposant que $t' < T_f$, supposition qui s'avérerait ultérieurement justifiée pour une gamme extrêmement large des pentes de l'onde incidente $u_{01}(t)$, on obtient la tension au vide aux bornes du déchargeur :

$$(5) \qquad U_{\mathrm{DRV_{vide}}}(t) = 2\frac{U_{\max}}{T_f}\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right], \qquad 0 \leqslant t < t'.$$

Pour déterminer le temps t' on doit trouver l'intersection des courbes (5) et (1), c'est-à-dire l'on doit trouver le point qui satisfasse à l'équation (5) de la tension des bornes du déchargeur au vide et la caractéristique tension-temps (1) des intervalles d'amorçage du DRV, à savoir

$$(6) \qquad 2\frac{U_{\max}}{T_f}\left[t' - T\left(1 - e^{-\frac{t'}{T}}\right)\right] = 0{,}145\left[2{,}574 - t' + \sqrt{t'^2 - 1{,}301\,t' + 0{,}600}\right].$$

Au moment t' intervient la résistance non-linéaire du déchargeur et par le déchargeur passera un courant i; ce dernier s'obtient de l'équation:

$$u_{\mathrm{DRV_{vide}}}(t) = Zi + Ci^{\alpha}, \quad t \geqslant t',$$

et la tension qui s'établit dans le point *2*, après le perçage des éclateurs d'amorçage, l'on obtient en tenant compte de la relation (2), par la solution de l'équation (6):

$$2\frac{U_{\max}}{T_f}\left[t - T\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)\right] = ZC^{-1/\alpha}\, u_{\mathrm{DRV}}^{1/\alpha} + u_{\mathrm{DRV}}. \tag{7}$$

Les relations (5) et (7) (cette dernière n'est qu'une fonction implicite $u_{\mathrm{DRV}}(t)$) déterminent à chaque moment la tension aux bornes du déchargeur. Dans la fig. 2, les courbes *2* et *3* représentent la variation de cette tension en fonction du temps pour deux pentes initiales de l'onde incidente.

L'onde reflechie du point *2* vers le point *1* est donnée par

$$u_{21}(t) = -u_{12}(t) + u_{\mathrm{DRV}}(t).$$

Cette tension, après un autre intervalle t_{12}, arrive au point *1* aux bornes du transformateur et se superpose sur ce que passe de l'onde incidente, c'est-à-dire sur u_{12}; la superposition doit être effectuée en tenant compte du déphasage temporel existant entre u_{12} et u_{21}, au point *1*.

À noter que raisonnant de cette manière l'on fait une erreur en excès puisque l'on considère le transformateur à impédance infinie seulement pour l'onde u_{12}. On a été obligé à adopter cette hypothèse compte tenu de la capacité limitée de la mémoire du calculateur chiffrique utilisé et du nombre d'heures reduit qui a été affecté pour l'utilisation du calculateur.

Il en résulte que la valeur de la tension aux bornes du transformateur dans le point *1* peut être calculée, après avoir effectué toute une série de calculs élémentaires, par les relations:

$$u_T(t) = \begin{cases} u_{\mathrm{DRV}}(t-2t_{12}) + \dfrac{U_{\max}}{T_f}\left[2t_{12} - T\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2t_{12}}{T}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t-2t_{12}}{T}}\right], & 2t_{12} \leqslant t < T_f, \\ u_{\mathrm{DRV}}(t-2t_{12}) + \dfrac{U_{\max}}{T_f}\, T\left[1-\left(1-\dfrac{T_f}{T}\right)\mathrm{e}^{\frac{T_f}{T}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} - \\ \qquad - \dfrac{U_{\max}}{T}\left[t - 2t_{12} - T\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-2t_{12}}{T}}\right)\right], & t \geqslant T_f, \end{cases} \tag{8}$$

où $u_{\mathrm{DRV}}(t)$ peut être calculé à l'aide des relations (5) et (7).

3. Problèmes concernant le calcul numérique et le programme

Pour effectuer le grand volume de calculs necessaires l'on a employé un calculateur chiffrique de fabrication roumaine, du type CIFA-102, à mémoire, à tambour magnétique vertical, ayant 4 020 cellules de mémoire et une vitesse moyenne d'environ 60 opérations par seconde. Le dispositif de calcul est du type à une seule adresse et deux instructions sur mot. Il fonctionne à virgule fixe et l'introduction du programme se réalise par bande percée.

Partant de l'idée qu'une influence toute particulière sur les tensions à diverses distances du déchargeur est exercée par la pente de l'onde incidente, l'on a effectué des détermination pour $U_{max}/T_f = 150;\ 250;...;\ 950$ kV/μs et l'onde fut supposée être coupée après 2 μs (donc $T_f = 2\,\mu s$).

Pour chacune de ces ondes on a supposée que la distance entre le déchargeur et le transformateur varie tous les 30 m pour 10 valeurs, c'est-à-dire $l = 30; 60; 90;...;$ 300 m, ce qui correspond aux intervalles de temps nécessaires pour le déplacement de l'onde $t_{12} = 0{,}1\ ;\ 0{,}2;..;$ 1 μs. On n'a pas utilisé des distances dépassant 300 m puisque celles-ci ne sont que peu probables dans les stations de 110 kV.

La constante de temps du circuit a été considérée $T = 0{,}6\ \mu s$, ce qui correspond à une impédance caractéristique du tronçon DRV-transformateur de 600 Ω et à une capacité d'entrée à l'impulsion de 2000 pF.

Une attention toute particulière a été exigée pour la normalisation des équations, compte tenu le fonctionnement du calculateur à virgule fixe. Toutes les tensions ont été introduites en MV, les temps en μs, les courants en kA, les impédances en kΩ. Par conséquent le coefficient C de l'équation (2) a résulté égale à 0,206 MV $\times$ kA$^{-0,2}$. C'est ainsi que l'on a obtenu une homogénéité correcte des données numériques. L'analyse détaillée de la structure des équations employées a montré que, pour qu'au cours des opérations l'on ne dépasse pas l'unité il est nécessaire que les intervalles de temps et les tensions soient estimés dix fois moindres. C'est pourquoi tous les résultats enregistrés, qui représentent les chiffres à droite de la virgule, doivent être multipliés par 10, pour qu'ils soient obtenus en μs et en MV.

Pour résoudre le problème à l'aide du calculateur on a parcouru deux étapes: l'enchaînement des équations et des conditions initiales dans un schéma logique et le programme proprement-dit, c'est-à-dire l'élaboration de l'algorithme dans le langage adéquat à son utilisation dans la machine, la description détaillée des opérations sous la forme d'une succession d'instructions et d'adresses de memoire où l'on puisse trouver les nombres à l'aide desquels on effectue ces opérations.

Les calculs doivent être effectués par cycles, chaque d'eux correspondant à une certaine valeur de la pente de l'onde initiale. La comparaison effectuée avec la plus grande valeur de U_{max}/T_f commande la reprise du cycle tout entier pour une autre pente initiale et, neuf fois ces répétitions effectuées on commande l'arrêt de la machine.

À part ces cycles simples, dans le schéma logique l'on a inclus aussi les parties où l'on a choisi automatiquement le nombre de répétitions du cycle. On a inclus dans le programme deux pareils processus itératifs, à part les procédés de calcul usuelles pour e^{-x} et pour le calcul des radicaux.

Pour résoudre l'équation trancendante irrationnelle (6) on calcule les valeurs de chaque membre à partir de $t = 0{,}4$ μs (la valeur initiale a été déterminée par un calcul préliminaire approximatif) à un certain pas Δt. Ce calcul se répète jusqu'a une valeur t pour laquelle le radical devient moindre que l'exponentielle. En partant de $t - \Delta t$, à ce moment, le calcul est repris en divisant à deux le pas Δt et ces cycles se répètent, en divisant chaque fois à deux le pas, jusqu'a ce que les deux membres de l'équation diffèrent de moins de $\varepsilon = 10^{-5}$ MV. La précision relativement élevée de cette solution a été imposée par le caractère peu convergeant du processus iteratif en cause. La valeur obtenue est justement t' — la solution cherchée de l'équation (6).

Le deuxième cycle automatique a dû être appliqué à la solution de l'équation (7). Pour la valeur $\alpha = 0{,}2$ l'équation (7) est une équation algébrique ordinaire du cinquième degré $(1/\alpha = 5)$.

Le processus itératif a eu comme point de depart 0,1 MV, et l'erreur admise a été la même que celle du cas précédent.

Les résultats finals obtenus par le calculateur, pour chaque variante correspondant à une certaine valeur de la pente de l'onde initiale, représentent les valeurs de la tension aux bornes du DRV et aux bornes du transformateur pour des intervalles de temps évalués du moment de l'arrivée aux bornes du transformateur de l'onde réfléchie du point de raccord du DRV, donc pour $t = 2t_{12}$. Dans le schéma logique ce temps est noté avec φ, et le temps $t - 2t_{12}$ avec θ. Le pas du calcul est de 0,05 μs.

Pour ne perdre pas un seul éventuel maximum de u_t les opérations continuent jusqu'a $t = T_f$ lorsque $2t_{12} + t' < T_f$ et jusqu'à $t_{12} + t' + \Delta t$ lorsque $2t_{12} + t' > T_f$. Par conséquent il a été nécessaire de travailler avec ce que l'on appelle un programme ramifié. Cette ramification est dûe à l'existence de deux formules (8) pour u_T, applicables la première jusque à T_f et la seconde au delà de T_f. Le schéma logique met en évidence la manière dont on a obtenu la solution de ce problème. Lorsque φ devient plus grand que T_f le calcul s'arrête ou il peut continuer par la deuxième formule (8) suivant que $2t_{12} + t'$ est plus petit ou plus grand que T_f.

Le choix comme limite finale du temps d'une des valeurs T_f ou bien $2t_{12} + t' + \Delta t$ s'explique par le fait qu'au delà de ces moments ont lieu des rabaissements brusques de la tension aux bornes du transformateur, quelquefois même instantanés. De plus il est nécessaire de préciser que pour les valeurs numériques considérées l'onde incidente aux bornes du déchargeur ne dépasse pas la valeur maxima, donc on ne doit prendre aucune précaution spéciale en ce qui concerne la non superposition des effets compte tenu de la nature non-linéaire de l'équation (2).

Dans le schéma logique sont inclues et les commandes usuelles d'un programme, à savoir le départ, l'arrêt, les valeurs initiales, la frappe à la machine, la mise en mémoire des chiffres qui seront nécessaires ultérieurement, le retour du vernier de la machine à écrire pour chaque variante u_{max}/T_f, sousvariante t_{12} et au dépassement de T_f.

4. Interprétation des résultats obtenus

En analysant les résultats numériques fournis par le calculateur on obtient les valeurs du premier maximum de la tension à chaque pente u_{max}/T_f

Tableau 1

l m \ U_{max}/T_f kV/μs		150	250	350	450	550	650	750	850	950
30	U_T [kV]	320	345	369	391	412	431	449	466	481
	$U_T/U_{rés}$	1,12	1,21	1,30	1,37	1,44	1,51	1,58	1,64	1,69
60	U_T [kV]	349	391	430	467	502	535	566	596	625
	$U_T/U_{rés}$	1,22	1,37	1,51	1,67	1,76	1,88	1,98	2,08	2,19
90	U_T [kV]	341	437	493	546	597	646	693	738	781
	$U_T/U_{rés}$	1,20	1,53	1,73	1,92	2,09	2,26	2,43	2,58	2,74
120	U_T [kV]	315	485	558	629	697	762	826	887	947
	$U_T/U_{rés}$	1,10	1,70	1,96	2,21	2,44	2,67	2,89	3,11	3,32
150	U_T [kV]	290	483	625	714	800	883	964	1 043	1 120
	$U_T/U_{rés}$	1,02	1,69	2,19	2,51	2,81	3,10	3,38	3,66	3,93
180	U_T [kV]	266	444	622	800	904	1 006	1 105	1 202	1 298
	$U_T/U_{rés}$	0,93	1,56	2,18	2,81	3,17	3,53	3,87	4,22	4,55
210	U_T [kV]	246	410	574	738	903	1 067	1 231	1 365	1 479
	$U_T/U_{rés}$	0,86	1,44	2,01	2,58	3,17	3,74	4,31	4,79	5,19
240	U_T [kV]	229	382	535	688	841	994	1 147	1 300	1 452
	$U_T/U_{rés}$	0,81	1,34	1,88	2,41	2,95	3,49	4,02	4,57	5,08
270	U_T [kV]	217	362	507	653	798	943	1088	1 233	1 378
	$U_T/U_{rés}$	0,76	1,27	1,78	2,29	2,80	3,31	3,82	4,32	4,82
300	U_T [kV]	213	355	497	639	781	923	1 066	1 208	1 350
	$U_T/U_{rés}$	0,75	1,25	1,74	2,24	2,74	3,24	3,74	4,25	4,73

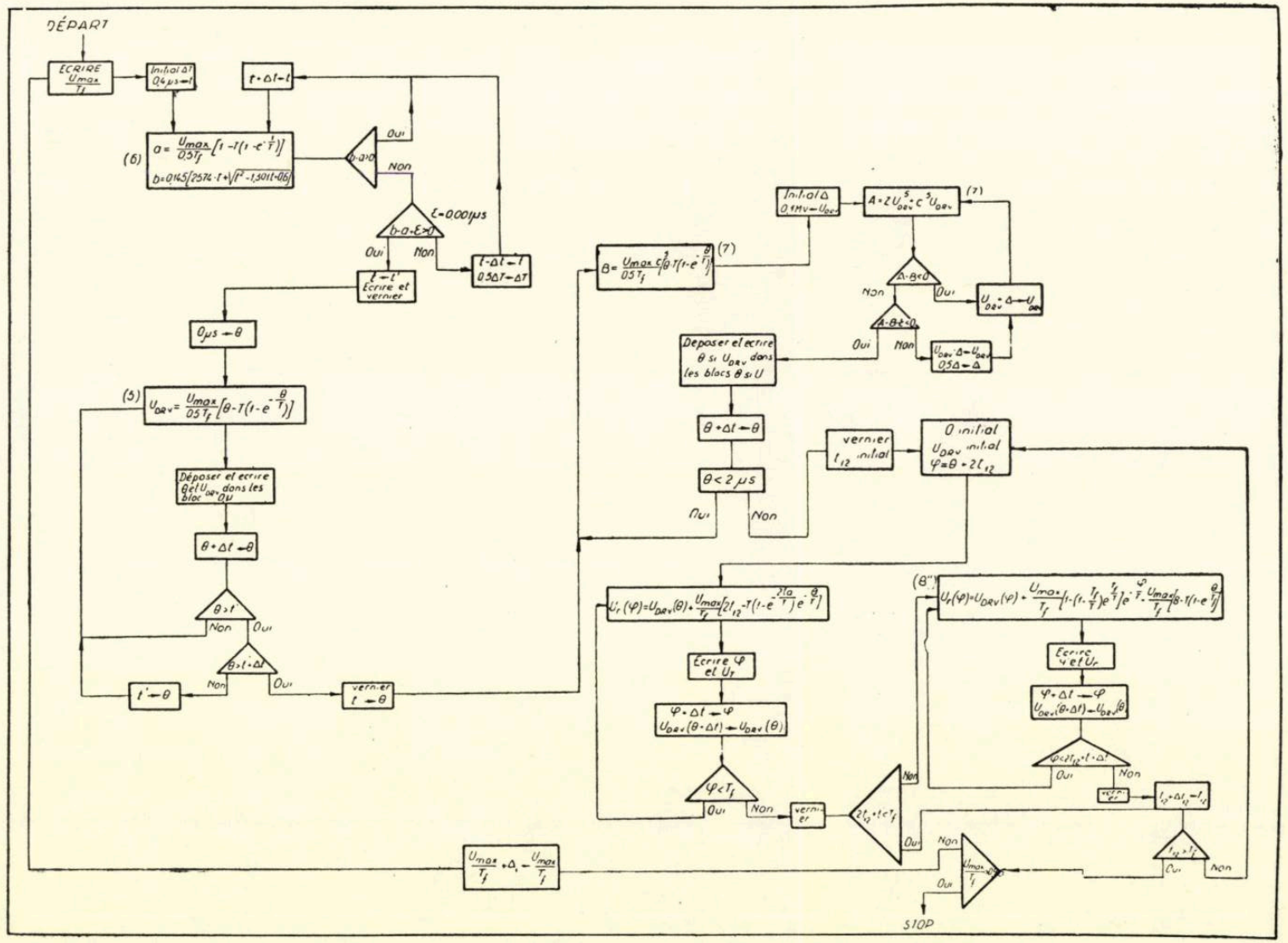


Fig. 4. — Schéma logique de calcul pour élaborer le programme de travail

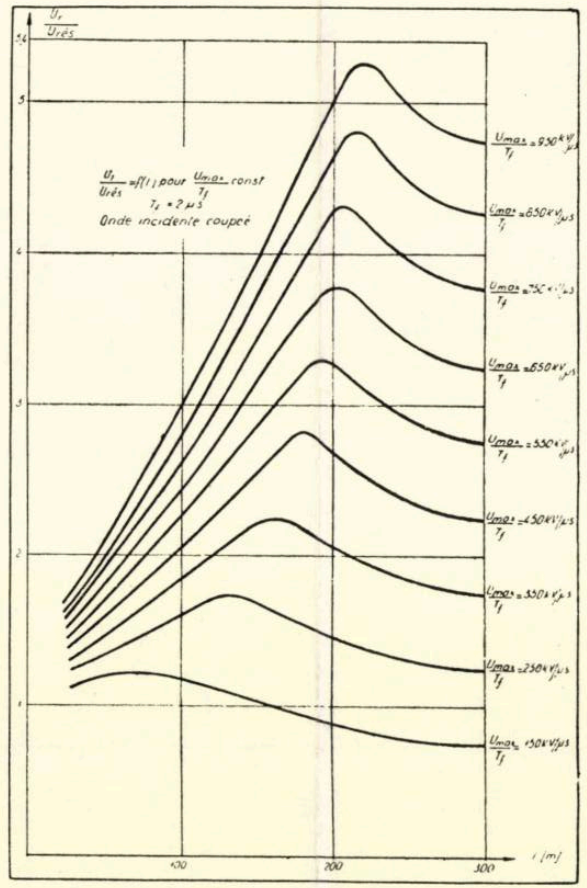


Fig. 5.

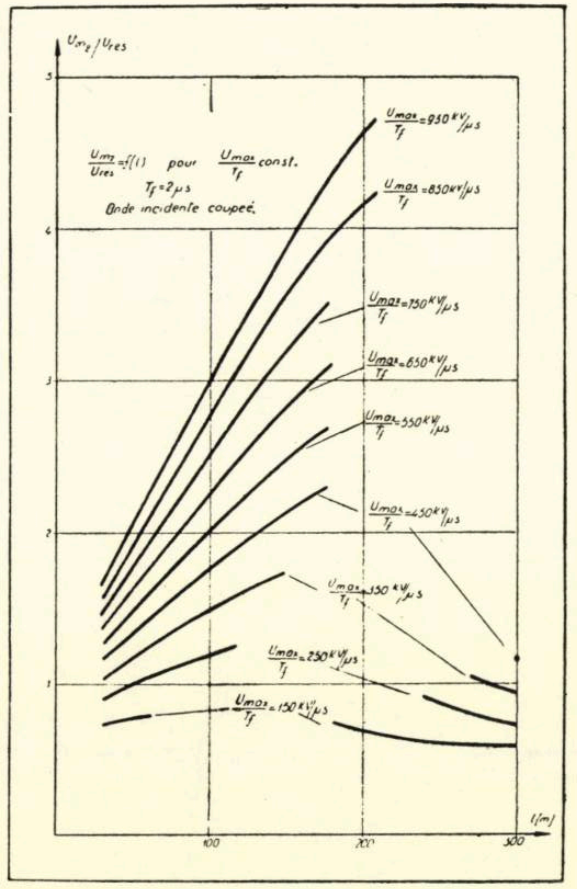
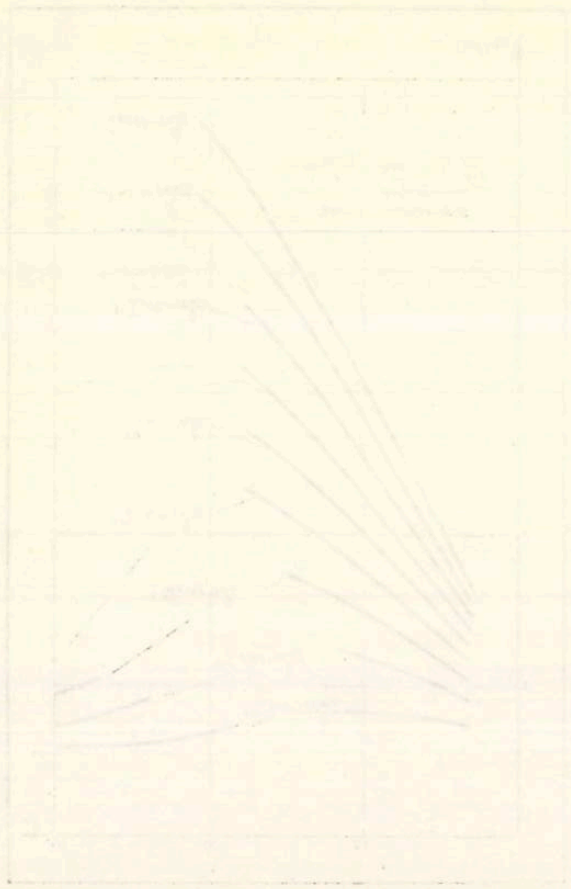
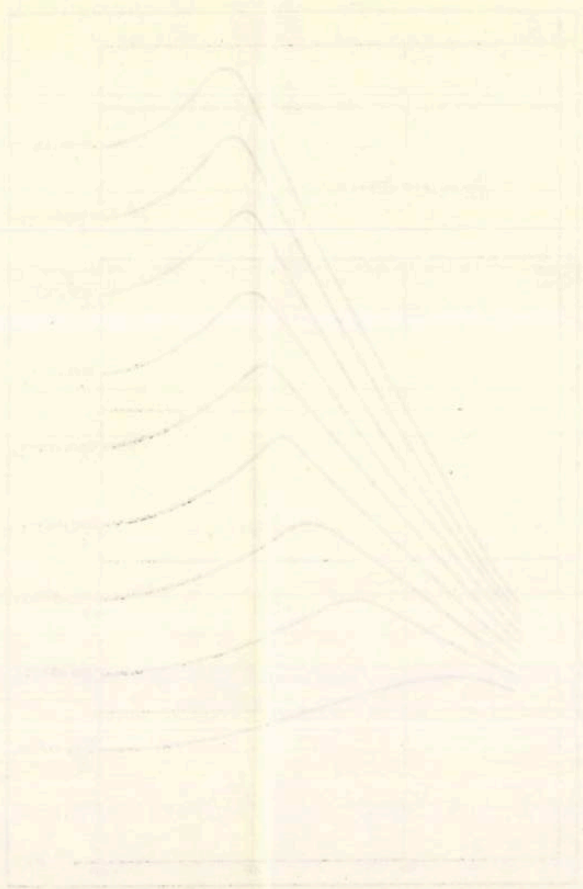
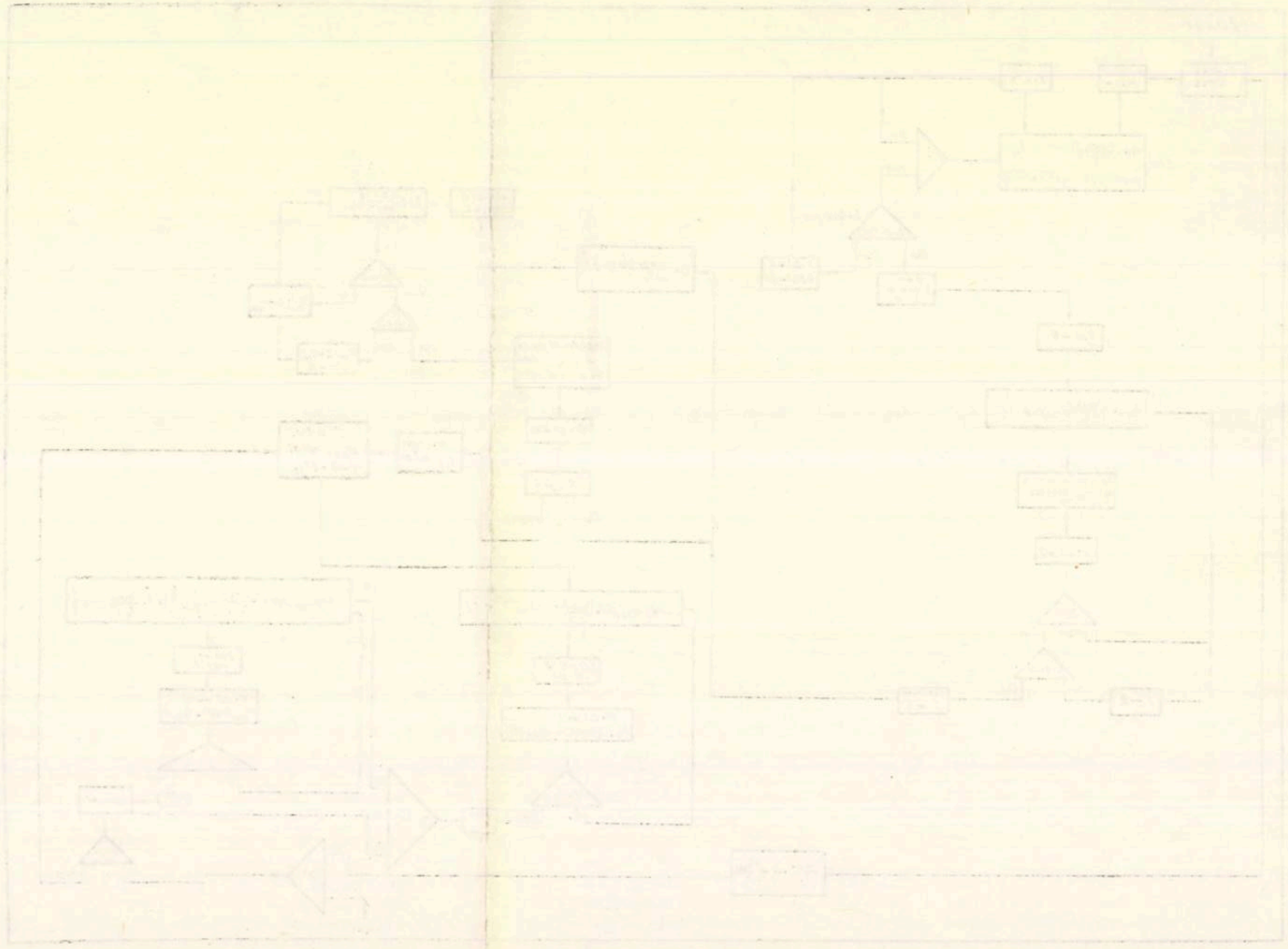


Fig. 6.







de l'onde initiale, pour toutes les 10 valeurs de la longueur de la distance déchargeur-transformateur. Dans le tableau 1 à part ces valeurs enregistrées en kV, on a inscrit leurs rapports avec la tension résiduelle du déchargeur de 110 kV, estimée à 285 kV.

On doit remarquer que, exceptant quelques distances où la pente initiale est de 150 kV/μs, tous les autres points sont situés au dessus de la valeur de la tension résiduelle du déchargeur. Les courbes présentées dans la fig. 5 on l'aspect des „V" renversés en représentant des accroissements du raport U_{max}/T_f fonction de distance, jusqu'a une certaine limite, dont la valeur augmente en même temps que la pente.

On remarque l'accroissement de l'inclinaison $\left(\frac{U_r/U_{res}}{l}\right)$ des portions ascendantes de ces courbes de 0,0033 à 0,0208 1/m pour l'accroissement de la pente de l'onde initiale de 150 à 950 kV/μs.

La forme de cette courbe est directement influencée par celle de l'onde initiale, dans notre cas triangulaire à derrière vertical, coupé. Les points se succèdent dans une ondre croissante tant que $2t_{12} + t' < T_f$, ce qui veut dire que l'onde refléchie par le DRV se superpose à l'onde incidente ayant le sommet produit par le perçage des intervalles d'amorçage, avant d'atteindre la valeur maxima. On doit remarquer encore une fois l'avantage obtenu en coupant les ondes incidentes à des fronts si petits que possible, donc à des valeurs pour T_f aussi petites que possible.

Mais les variations de la tension aux bornes du transformateur présentent, dans la plupart des cas, plus d'un maximum à part celui donné dans le tableau 1. Les valeurs du deuxième maximum sont reproduites dans le tableau 2.

Il est utile à remarque que pour une même pente de l'onde incidente, le deuxième maximum de la tension n'apparaît pas pour toutes les valeurs de la distance. Pour de petites valeurs de la pente on constate la présence de deux valeurs maxima, l'un à de petites distances, l'autre à de grandes distances. Au fur et à mesure que la pente grandit, les distances les plus grandes auxquelles le maximum apparaît diminuent de façon qu' à partir d'une pente de l'ordre 550 kV/μs la valeur maximum U_{max_2} n'apparaisse point.

Dans la fig. 6 on présente les courbes de variation de l'amplitude du deuxième maximum (rapporté à la tension résiduelle) en fonction de la distance déchargeur-transformateur, en considérant comme paramètre la pente de l'onde incidente. Comme on le remarque à de petites distances, indépendamment de la pente incidente, il existe toujours U_{max_2}; pour des distances depassant 240 m ce maximum n'apparaît plus que pour des petites valeurs de la pente.

On a obtenu comme résultats intermédiaires enregistrés les valeurs de la tension et celles du temps d'amorçage du DRV pour diverses pentes de l'onde incidente. C'est ainsi que pour 150 kV/μs l'amorçage se produit à 1,53 μs et à une tension de 292 kV, tandis que pour 950 kV/μs le temps est 0,55 μs et la tension 357 kV.

Tableau 2

l m \ U_{max}/T_f kV/μs		150	250	350	450	550	650	750	850	950
30	U_{m2} [kV]	207	225	293	329	358	387	415	443	470
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,73	0,90	1,03	1,16	1,26	1,36	1,46	1,56	1,65
60	U_{m2} [kV]	226	293	350	405	452	499	546	593	640
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,79	1,03	1,23	1,42	1,58	1,75	1,92	2,08	2,24
90	U_{m2} [kV]	—	328	403	477	542	608	673	738	804
	$U_{m2}/U_{rés}$	—	1,15	1,42	1,67	1,91	2,13	2,36	2,58	2,82
120	U_{m2} [kV]	—	359	453	545	627	710	793	876	960
	$U_{m2}/U_{rés}$	—	1,26	1,59	1,92	2,20	2,49	2,78	3,07	3,36
150	U_{m2} [kV]	—	—	496	606	704	803	903	1 004	1 106
	$U_{m2}/U_{rés}$	—	—	1,74	2,12	2,47	2,82	3,17	3,52	3,88
180	U_{m2} [kV]	209	—	—	659	771	885	1 001	1 118	1 297
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,73	—	—	2,31	2,71	3,11	3,51	3,92	4,33
210	U_{m2} [kV]	191	—	—	—	—	—	—	1 211	1 347
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,67	—	—	—	—	—	—	4,25	4,72
240	U_{m2} [kV]	178	259	—	—	—	—	—	—	—
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,62	0,91	—	—	—	—	—	—	—
270	U_{m2} [kV]	169	229	307	—	—	—	—	—	—
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,59	0,80	1,04	—	—	—	—	—	—
300	U_{m2} [kV]	163	207	264	329	—	—	—	—	—
	$U_{m2}/U_{rés}$	0,57	0,73	0,93	1,16	—	—	—	—	—

5. Conclusions

Les courbes de variation de la tension aux bornes du transformateur, fonction de la distance de montage du déchargeur (fig. 5 et 6), sont utiles dans le calcul correcte et économique des protections des stations de 110 kV contre les surtensions atmosphériques.

L'on remarque la nécessité de l'utilisation de quelques déchargeurs ayant une caractéristique tension-temps des intervalles d'amorçage aussi plate que possible et pour des temps entre 1 ... 1,5 μs, en permettant de cette façon

à applatir la cime périlleuse de la tension aux bornes du transformateur et à la tension de 110 kV.

À l'aide de ces courbes on peut aussi déterminer la longuer nécessaire pour le conducteur de protection à installer dans les circuits d'entrée en stations, de même que l'emplacement et les caractéristiques du déchargeur tubulaire qui coupe l'onde.

Les indications données exigent qu'elles soient continuées et approfondies dans le sens qu'il faut écarter les approximations faites, par exemple la mise en discussion de l'impédance du transformateur pour la deuxième réflexion à valeur infinie; en complétant le programme du calculateur en ce qui concerne la solution numérique des équations differentielles permettra à resoudre cet aspect. L'utilisation dans les calculs des ondes incidentes d'une autre forme que celle triangulaire permettra à clarifier les problèmes posés.

Reçu le 9 VII 1966

Institut Polytechnique „Gh. Gheorghiu-Dej", Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Dinculescu C., Cristescu D., *Déformation des ondes d'impulsion dans la propagation sur les lignes aériennes de haute tension.* Bull. de l'Inst. Polyt. Bucarest, 1966, **XXIX**, 2.
2. Johansen H., *The Location and the Protection Level of Lightning Arresters in High-Voltage Stations.* CIGRE, 1962, p. 404.
3. Sirotinski L. I., *Tehnica tensiunilor nalte.* EES, Buc. 1954, (trad. de russe).
4. — *Hochspannungstechnik. Äussere Überspannungen. Wanderwellen.* Verlag Technik, Berlin, 1965, (trad. de russe).
5. Костенко М. В., *Атмосферные перенапряжения и грозозащита высоковольтных установок.* ГЭИ, М-Л., 1949.
6. Разевиг Д. В., *Техника высоких напряжений.* ГЭИ, М.-Л., 1963.
7. Lesch G., *Lehrbuch der Hochspannungstechnik.* Springer Verlag, Berlin, 1959.
8. Kagan B. M., *Rezolvarea problemelor inginereşti cu calculatoare numerice.* Ed. Tehn., 1965, (trad. de russe).
9. Goruşkin V. I., *Efectuarea calculelor energetice cu ajutorul maşinilor de calcul.* Ed. Tehn., Buc., 1963, (trad. de russe).

ANALIZA UNEI SCHEME DE PROTECŢIE A STAŢIILOR ÎMPOTRIVA SUPRATENSIUNILOR CU AJUTORUL DESCĂRCĂTOARELOR CU REZISTENŢĂ VARIABILĂ

(Rezumat)

Se determină dependenţa dintre tensiunea maximă la bornele aparatului de protecţie, în funcţie de distanţa faţă de descărcător, pentru anumite forme ale undei incidente în staţiile de 110 kV. Caracterul complex al procesului studiat şi natura neliniară a mărimilor care intervin a făcut necesară folosirea calculatorului electronic cifric CIFA-102 în vederea obţinerii rezultatelor concrete utilizabile în proiectarea staţiilor şi în alegerea parametrilor descărcătoarelor.

Explicația figurilor

Fig. 1. — *a* — schemă de protecție a stațiilor contra supratensiunilor; *b* — schemă echivalentă utilizată în calcul.

Fig. 2. — Caracteristica tensiune-timp a intervalelor de amorsare pentru un descărcător cu rezistența variabilă de 110 kV, folosit în Republica Socialistă România (curba *1*) și variația tensiunii la bornele descărcătorului, pentru două pante ale undei incidente u_{01} (curba *2* — $U_{max}/T_f = 150$ kV/μs, curba *3* — $U_{max}/T_f = 950$ kV/μs).

Fig. 3. — Undă de supratensiune triunghiulară care se propagă pe linie; *a* — forma unei unde care trece de descărcătorul tubular, după funcționarea acestuia; *b* — obținerea unui impuls triunghiular din suprapunerea unor unde unghiulare cu front infinit și dreptunghiulare.

Fig. 4. — Schema logică de calcul pentru întocmirea programului de lucru.

Fig. 5. — $U_T/U_{rez} = f(l)$ pentru $U_{max}/T_f = \text{const.}$; $T_f = 2\mu s$; undă incidentă tăiată.

Fig. 6. — $U_{m_2}/U_{rez} = f(l)$ pentru $U_{max}/T_f = \text{const.}$; $T_f = 2\mu s$; undă incidentă tăiată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

УДК 621.318.4

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТРЕХФАЗНОГО МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ В СХЕМАХ ЭЛЕКТРОПРИВОДА

Н. В. БОЦАН, В. ПРИСЭКАРУ, Б. ПОНОМАРЕВ,
Л. КАНТЕМИР и Е. БАЛАБАН

В одной из предыдущих работ [1] было приведено поведение трехфазного магнитного усилителя с центральным сердечником, в сравнении с поведением обыкновенного магнитного усилителя, использованного в трехфазных схемах.

Поскольку трехфазный магнитный усилитель с центральным сердечником обеспечивает магнитную связь между тремя фазами, были исследованы возможности применения данного усилителя для управления трехфазным асинхронным двигателем, при несимметричных напряжениях питания по фазам.

Обмотки асинхронного двигателя были приключены к сети последовательно с рабочими обмотками магнитного усилителя. Работа блока, трехфазный магнитный усилитель — асинхронный двигатель, была исследована как в симметричном так и в несимметричном режимах работы.

На рис. 1 дано изменение напряжения на зажимах двигателя в зависимости от тока управления. Следует показать, что во всех произведенных опытах для уменьшения напряжения тройной частоты, которая возникает в обмотках управления, одна из секций этой обмотки была закорочена.

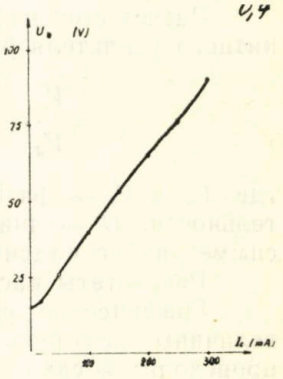


Рис. 1

При помощи однофазного автотрансформатора было осуществлено несимметричное питание трехфазного магнитного усилителя (рис. 2). На рис. 3 приведены кривые изменения степени несимметрии напряжений на зажимах двигателя в зависимости от тока управления.

Приведенные кривые соответствуют различным степеням несимметрии напряжений, приложенных на входе магнитного усилителя, указанных на рисунке.

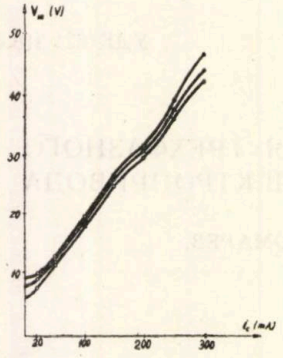


Рис. 2

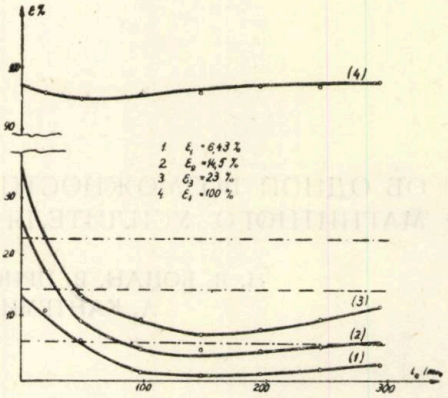


Рис. 3

Принимая во внимание степень несимметрии напряжений приложенных на входе трехфазного магнитного усилителя, на рис. 4 дано изменение отношения $\varepsilon_e/\varepsilon_i$ в зависимости от тока управления.

Здесь ε — степень несимметрии, при чем ε_i — степень несимметрии напряжений на входе, а ε_e — на выходе магнитного усилителя.

Расчет степени несимметрии ε, как на выходе, так и на входе магнитного усилителя был произведен при помощи следующих отношений

$$\varepsilon = \frac{V_i}{V_d}, \quad V_d = \sqrt{\frac{3U^2 + 3U(U-\Delta U)}{3}}, \quad V_i = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}},$$

где V_d и V_i — фазные напряжения прямой и обратной последовательности, U — линейное симметричное напряжрние и ΔU — линейное симметричное падение напряжения.

Результаты расчетов были проверены и графическим методом [2].

Графические расчеты показали также, что помимо изменения величины векторов напряжения, на выходе магнитного усилителя происходит и сдвиг между векторами напряжения.

При отсутствии тока управления сдвиг напряжений на выходе магнитного усилителя на фазах между которыми был установлен автотрансформатор, является небольшим и увеличивается по мере увеличения тока управления, достигая максимума при значениях тока управления для которых сглаживание несимметрии является также максимальным (рис. 5).

Исследование рисунка показывает также, что сдвиг между соответствующими напряжениями уменьшается с увеличением степени несимметрии. Следует также, что в случае малых несимметрий напряжений (ниже 70 %), при малых токах управления (меньше 50 *мА*), степень несимметрии на выходе магнитного усилителя больше чем на входе, т. е. $\varepsilon_e/\varepsilon_i > 1$. Это явление наблюдается также и на рис. 4.

Более повышенная несимметрия на выходе магнитного усилителя, при малых токах управления, является следствием того, что индуктивности каждой фазы магнитного усилителя различны между собой. Известно, что большим приложенным напряжениям соответствуют малые индуктивности и наоборот. Это явление и ведет к тому, что на выходе магнитного усилителя несимметрия повышается.

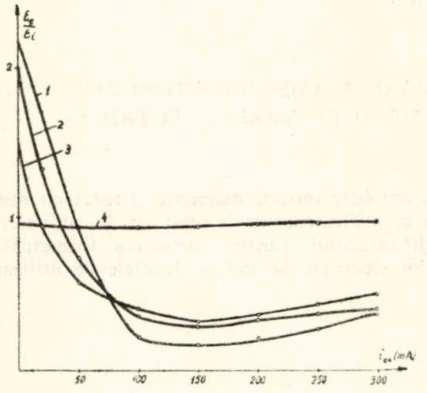


Рис. 4

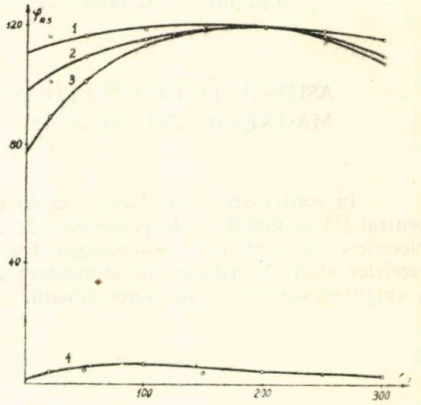


Рис. 5

По мере увеличения тока управления значение индуктивностей на всех трех фазах, даже в случае различных напряжений, стремится к сглаживанию, что приводит к уменьшению несимметрии.

Это обстоятельство следует из рис. 5, на котором можно заметить, что для малых токов управления сдвиг между напряжениями фаз, между которыми находится автотрансформатор — мал и увеличивается по мере увеличения тока управления.

Изменение сдвига зависит также и от различных значений индуктивностей, являющимися функциями токов управления.

Из вышеуказанного следует, что трехфазный магнитный усилитель с центральным сердечником может быть использован для уравновешивания напряжений питания трехфазного асинхронного двигателя.

Следует также, что имеется оптимальное значение тока управления, для которого несимметрия на выходе является минимальной. Это оптимальное значение тока управления зависит от степени несимметрии напряжений на входе трехфазного магнитного усилителя.

Ясский политехнический институт,
Лаборатория электропривода

ЛИТЕРАТУРА

1. Boţan N. V., Cantemir L., Ponomarev B., Balaban E., *Caracteristici şi posibilităţi de utilizare ale unui amplificator magnetic trifazat cu miez central unic.* Bul. Inst. polit Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *3—4*, p. 217.
2. Boţan N. V., Trifan Fl., *Consideraţiuni teoretice asupra unui caz de alimentare cu tensiuni asimetrice a unui motor asincron trifazat.* St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Fiz. şi şt. tehn., 1959, **X**, *1*, p. 73.

ASUPRA POSIBILITĂŢII DE UTILIZARE A AMPLIFICATORULUI MAGNETIC TRIFAZAT ÎN SCHEME DE ACŢIONARE ELECTRICĂ

(Rezumat)

În continuarea unei lucră i anterioare asupra amplificatorului magnetic trifazat cu miez central [1] se indică unele posibilităţi de utilizare a amplificatoarelor de acest tip în acţionările electrice. Se subliniază posibilitatea folosirii amplificatorului pentru atenuarea disimetriilor reţelelor electrice trifazate de alimentare a motoarelor electrice. Se indică limitele de utilizare a amplificatoarelor în asemenea situaţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

C. Z. 621.392.5 ; 621.396.662.3

DIAGRAMELE-LOC GEOMETRIC ALE COEFICIENŢILOR DE TRANSFER AI UNUI CUADRIPOL DIPORT LINIAR, PASIV ŞI RECIPROC, ÎN REGIMURILE REZONANTE

DE

HUGO ROSMAN

I. Introducere

1. Se consideră un cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc (CDLPR), avînd ecuaţiile [1]:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

cu

$$\det |\underline{A}_{st}| = 1, \quad (s, t = 1, 2), \tag{2}$$

bornele sale primare constituind poarta de intrare.

Impedanţa echivalentă la poarta de intrare ($\underline{Z}_{e1} = R_{e1} + jX_{e1}$) poate fi exprimată în funcţie de impedanţa $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$ a receptorului, anume :

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}. \tag{3}$$

În regimurile care realizează rezonanţa la poarta de ieşire a cuadripolului ($X_2 = 0$) [2], impedanţa echivalentă la poarta de intrare descrie diagrama-loc geometric :

$$\underline{Z}_{e1}(\lambda) = \frac{\underline{A}_{12} + \lambda \underline{A}_{11} R_2}{\underline{A}_{22} + \lambda \underline{A}_{21} R_2}, \quad (\underline{Z}_2 = \lambda R_2 ; \lambda \in [0, \infty)), \tag{4}$$

reprezentînd un cerc care nu trece prin origine [3, p. 61].

Rezultatul obţinut poate fi considerat drept un caz particular al unei teoreme stabilite de J. Schérer [4] (v. şi [5]) avînd următorul enunţ : „Dacă impedanţa receptorului unui CDLPR descrie o dreaptă, atunci impedanţa echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului considerat descrie un cerc". Această teoremă a mai făcut ulterior şi independent obiectul unor cercetări întreprinse de J. Tarboux [6] şi C. E. Moorhouse [7] relative la unele reţele electronice de tip cuadripol.

De asemenea, în regimurile care realizează rezonanţa la poarta de intrare a cuadripolului ($X_{e1} = 0$) [8], impedanţa receptorului descrie diagrama-loc geometric :

$$(5)\qquad \underline{Z}_2(\mu)=\frac{-\underline{A}_{12}+\mu\underline{A}_{22}R_{e1}}{\underline{A}_{11}-\mu\underline{A}_{21}R_{e1}},\quad (\underline{Z}_{e1}=\mu R_{e1};\ \mu\in[0,\infty)),$$

reprezentînd un cerc care nu trece prin origine [3, p. 61].

Scopul acestei Note este în primul rînd de a stabili expresiile analitice ale ecuaţiilor diagramelor-loc geometric ale coeficienţilor de transfer (coeficientul de transmisie a tensiunii, coeficientul de transmisie a curentului şi impedanţa de transfer) ai unui CDLPR, atît în regimurile care realizează rezonanţa la poarta de intrare cît şi în cele în care este realizată rezonanţa la poarta de ieşire. În al doilea rînd vom fi în măsură să indicăm procedee experimentale expeditive apte pentru determinarea acestor diagrame.

2. În prealabil vom da o extensiune a teoremei lui Schérer enunţată mai sus. Anume, vom dovedi că *dacă impedanţa receptorului unui CDLPR descrie diagrama-loc geometric avînd ecuaţia*

$$(6)\qquad \underline{Z}_2(\lambda)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\underline{M}_k\lambda^k}{\sum_{k=0}^{n}\underline{N}_k\lambda^k},\qquad \lambda\in[0,\infty),$$

atunci impedanţa echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului considerat descrie o diagramă-loc geometric de acelaşi tip.

Într-adevăr, introducînd expresia (6) în (3), se obţine:

$$(7)\qquad \underline{Z}_{e1}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\underline{R}_k\lambda^k}{\sum_{k=0}^{n}\underline{T}_k\lambda^k},$$

adică o expresie de tipul (6), unde

$$(9)\qquad \underline{R}_k=\underline{A}_{11}\underline{M}_k+\underline{A}_{12}\underline{N}_k,\quad \underline{T}_k=\underline{A}_{21}\underline{M}_k+\underline{A}_{22}\underline{N}_k.$$

În cazul particular $n=1$, $N_1=0$, se regăseşte teorema lui Schérer. Alte cazuri particulare interesante se obţin pentru $n=1$, $N_1\neq 0$; $n=2$, $\underline{M}_k$, $\underline{N}_k\neq 0$, $(k=0,\ 1,\ 2)$.

3. În vederea stabilirii ecuaţiilor diagramelor-loc geometric ale coeficienţilor de transfer, în regimurilor rezonante, este necesar să se scrie expresiile acestora fie în funcţie de impedanţa echivalentă la poarta de intrare, fie în funcţie de impedanţa rceptorului. În acest scop se ţine seama de expresiile (de ex. [9]):

a) coeficientului de transmisie a tensiunii

$$(10)\qquad \underline{k}_U=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1};$$

b) coeficientului de transmisie a curentului

$$\underline{k}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}; \tag{10}$$

c) impedanței de transfer (mutuală)

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}, \tag{11}$$

precum și de ecuațiile (1) ale cuadripolului. Se obțin suitele de relații

$$\underline{k}_U = \underline{A}_{22} - \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{e1}}, \tag{12}$$

$$\underline{k}_I = -\underline{A}_{21}\underline{Z}_{e1} + \underline{A}_{11}, \tag{13}$$

$$\underline{Z}_m = \underline{A}_{22}\underline{Z}_{e1}, \tag{14}$$

respectiv:

$$\underline{k}_U = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}, \tag{15}$$

$$\underline{k}_I = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}, \tag{16}$$

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}, \tag{17}$$

utile în cele ce urmează.

II. Diagramele-loc geometric ale coeficienților de transfer în regimurile care realizează rezonanța la poarta de intrare

4. Dacă se ține seama că în aceste regimuri $\underline{Z}_{e1} = \mu R_{e1}$, cu ajutorul relațiilor (12)...(14) se pot stabili ecuațiile diagramelor- loc geometric ale coeficienților de transfer, anume:

$$\underline{k}_U(\nu) = \underline{A}_{22} - \nu\frac{\underline{A}_{21}}{R_{e1}}, \tag{18}$$

$$\underline{k}_I(\mu) = \underline{A}_{11} - \mu\underline{A}_{21}R_{e1}, \tag{19}$$

$$\underline{Z}_m(\mu) = -\underline{A}_{12} + \mu\underline{A}_{22}R_{e1}, \tag{20}$$

unde

$$\nu = \frac{1}{\mu}. \tag{21}$$

Din analiza relațiilor (18)...(20) rezultă că *diagramele-loc geometric ale coeficienților de transfer ai unui CDLPR, în regimurile care realizează rezonanța la poarta de intrare, sînt drepte* (fig. 1). Dacă regimurile de rezonanță la poarta de intrare sînt realizate cu receptori pasivi se are în vedere faptul că în acest caz coeficienții de transfer ai unui CDLPR pot lua valori numai în interiorul și pe frontiera unor domenii (de existență) [10], în general finite. Prin urmare diagramele-loc geometric ale coeficienților de transfer, în regimurile care realizează rezonanța la poarta de intrare a unui CDLPR, vor fi în acest caz *segmente* ale dreptelor (18)...(20) conținute în interiorul domeniilor de existență ($\mathcal{D}_{\underline{k}_V}$, $\mathcal{D}_{\underline{k}_I}$, $\mathcal{D}_{\underline{Z}_m}$).

5. Ecuaţiile (18)...(20) pot fi scrise în coordonatele $k'_U = \mathcal{R}e\,(\underline{k}_U)$, $k''_U = \mathcal{I}m\,(\underline{k}_U)$; $k'_I = \mathcal{R}e\,(\underline{k}_I)$, $k''_I = \mathcal{I}m\,(\underline{k}_I)$; $R_m = \mathcal{R}e\,(\underline{Z}_m)$, $X_m = \mathcal{I}m\,(\underline{Z}_m)$,

$$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})\,k'_U - \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})\,k''_U - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = 0, \tag{22}$$

$$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})\,k'_I - \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})\,k''_I + \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21}) = 0, \tag{23}$$

$$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})\,R_m - \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})\,X_m - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = 0. \tag{24}$$

6. Examinînd ecuaţiile (22)...(24) rezultă cu uşurinţă că tăieturile dreptelor respective pe axe pot fi determinate cu ajutorul încercărilor uzuale la gol şi în scurtcircuit.

Pentru a determina experimental diagrama-loc geometric (22) a coeficientului de transmisie a tensiunii este necesară efectuarea unei singure încercări, şi anume în scurtcircuit, cuadripolul fiind alimentat în sens direct. Într-adevăr, tăieturile pe axe ale dreptei (22):

$$k'_U = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}, \quad k''_U = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})} \tag{25}$$

sînt funcţii de mărimile: $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})$, care se determină cu ajutorul încercării în scurtcircuit şi anume: $\underline{A}_{12} = \underline{U}_{1sc}/\underline{I}_1$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = Q_{1sc}/I_2^2$, fiind necesară în acest regim şi măsurarea defazajului dintre tensiunea la poarta de intrare şi curentul la poarta de ieşire a cuadripolului.

Dacă parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = 0$, determinarea experimentală a diagramei-loc geometric a coeficientului de transmisie a tensiunii implică măsurarea numai a defazajului dintre tensiunea la poarta de intrare şi curentul la poarta de ieşire, la funcţionarea cuadripolului în scurtcircuit.

În vederea determinării pe cale experimentală a diagramei-loc geometric (23) a coeficientului de transmisie a curentului, este necesar ca cuadripolul să fie supus atît încercării la gol cît şi celei în scurtcircuit, fiind alimentat în sens direct. În acest scop se observă că tăieturile pe axe ale dreptei (23) sînt date de:

$$k'_I = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}, \quad k''_I = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}. \tag{26}$$

Mărimile $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})$ şi $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21})$ se determină — primele două cu ajutorul încercării în scurtcircuit ($\underline{A}_{21} = \underline{I}_{1sc}/\underline{U}_2$), care implică necesitatea măsurării în acest regim a defazajului dintre tensiunea la poarta de intrare şi curentul la poarta de ieşire a cuadripolului, iar a treia — cu ajutorul încercării la gol ($\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21}) = Q_{10}/U_2^2$).

În cazul cînd parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21}) = 0$, pentru determinarea diagramei-loc geometric a coeficientului de transmisie a curentului este suficientă numai măsurarea defazajului dintre curenții la porțile cuadripolului, la funcționarea în scurtcircuit.

Un procedeu asemănător poate fi utilizat pentru a determina pe cale experimentală diagrama-loc geometric (24) a impedanței de transfer. În acest scop este necesară doar efectuarea unei singure încercări în scurtcircuit, cuadripolul fiind alimentat în sens direct.

Se are în vedere că tăieturile pe axe ale dreptei (24) sînt date de:

$$\bar{R}_m = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}, \quad \bar{X}_m = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}. \tag{27}$$

Cantitățile $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})$ pot fi determinate cu ajutorul unei încercări în scurtcircuit, căci $\underline{A}_{22} = \underline{I}_{1sc}/\underline{I}_2$, ceea ce implică măsurarea defazajului dintre curenții la porțile cuadripolului în acest regim, iar $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = Q_{1sc}/I_2^2$.

În situația în care parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = 0$, determinarea experimentală a diagramei-loc geometric a impedanței de transfer implică doar măsurarea defazajului dintre curenții la porțile cuadripolului, la funcționarea în scurtcircuit.

Observații. 1°. Procedeele experimentale de determinare a diagramelor-loc geometric ale coeficienților de transfer, în regimurile de rezonanță la poarta de intrare a unui CDLPR, stabilite în acest paragraf, trebuie puse în conexiune cu cele necesare pentru determinarea domeniilor de existență $\mathcal{D}_{\underline{k}_U}$, $\mathcal{D}_{\underline{k}_I}$, $\mathcal{D}_{\underline{Z}_m}$ [11], căci în cazul unor receptori pasivi prezintă sens numai arcele diagramelor conținute în interiorul domeniilor de existență corespunzătoare.

2°. Metodele experimentale de determinare a diagramelor-loc geometric $\underline{k}_U(\nu)$, $\underline{k}_I(\mu)$ și $\underline{Z}_m(\mu)$, preconizate în acest paragraf, pot fi utilizate numai în cazul CDLPR la care este accesibilă măsurarea defazajelor dintre mărimi aparținînd la porți diferite. În caz contrar este obligator să se recurgă la încercările uzuale la gol și în scurtcircuit, măsurînd numai mărimi de la cîte o poartă a cuadripolului.

III. Diagramele-loc geometric ale coeficienților de transfer în regimurile care realizează rezonanța la poarta de ieșire

7. Deoarece coeficienții de transfer ai unui CDLPR se pot exprima în funcție de impedanța receptorului, prin relații (v. (15)...(17)) de același tip, comun cu (3), constituind un subgrup de prima speță a grupului liniar omogen [12], rezultă că teorema lui Schérer precum și generalizarea ei (v. § 2) pot fi extinse și asupra lor. Anume, *dacă impedanța receptorului*

unui CDLPR descrie diagrama-loc geometric avînd ecuaţia (6), *atunci coeficienţii de transfer ai cuadripolului considerat descriu diagrame-loc geometric de acelaşi tip.*

Într-adevăr, introducînd expresia (6), succesiv, în relaţiile (15)...(17), se obţine:

$$(28)\quad \underline{k}_U = \frac{\sum_{k=0}^{n} \underline{M}_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^{n} \underline{R}_k \lambda^k}, \qquad (29)\quad \underline{k}_I = \frac{\sum_{k=0}^{n} \underline{N}_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^{n} \underline{T}_k \lambda^k}, \qquad (30)\quad \underline{Z}_m = \frac{\sum_{k=0}^{n} \underline{M}_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^{n} \underline{T}_k \lambda^k},$$

unde $\underline{R}_k$ şi $\underline{T}_k$ sînt date de (8).

8. În regimurile care realizează rezonanţa la poarta de ieşire $\underline{Z}_2 = \lambda R_2$; cu ajutorul relaţiilor (15)...(17) pot fi stabilite ecuaţiile diagramele-loc geo-coeficienţilor de transfer, anume:

$$(31)\quad \underline{k}_U(\sigma) = \frac{R_2}{\underline{A}_{11} R_2 + \sigma \underline{A}_{12}}, \qquad (32)\quad \underline{k}_I(\lambda) = \frac{1}{\underline{A}_{22} + \lambda \underline{A}_{21} R_2},$$

$$(33)\quad \underline{Z}_m(\sigma) = \frac{R_2}{\underline{A}_{21} R_2 + \sigma \underline{A}_{22}},$$

unde

$$(34)\quad \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Rezultă că *diagramele-loc geometric ale coeficienţilor de transfer ai unui CDLPR în regimurile care realizează rezonanţa la poarta de ieşire, sînt cercuri care trec prin origine* (fig. 1). Deoarece în toate cazurile în care aceste regimuri sînt realizate cu receptori pasivi, coeficienţii de transfer pot lua valori numai în interiorul şi pe frontiera domeniilor de existenţă $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ [10]; diagramele-loc geometric ale acestor coeficienţi, în regimurile considerate, rezultă a fi arce de cerc conţinute în interiorul domeniilor respective.

9. Din analiza relaţiilor (31) ··· (33) rezultă că diagramele-loc geometric ale coeficienţilor de transfer ai unui CDLPR, în regimurile care realizează cu receptori pasivi rezonanţa la poarta de ieşire, coincid cu arcele de cerc care separă, în interiorul domeniilor de existenţă ale acestor coeficienţi, subdomeniile corespunzătoare unor receptoare pasive de natură inductivă de cele de natură capacitivă. Or, studiul acestor curbe a fost efectuat într-o lucrare anterioară [10], iar procedeul experimental care permite ridicarea acestor diagrame, bazat pe o tehnică care face apel la încercările la gol şi în scurtcircuit, a fost expus în [11].

10. În fig. 1 sînt reprezentate diagramele-loc geometric ale coeficienților de transfer ai unui CDLPR ($F \equiv k_U, k_I, Z_m$), în regimurile care realizează cu receptori pasivi rezonanța, fie la poarta de intrare, fie la poarta de ieșire. Funcție de valorile parametrilor fundamentali ai cuadripolului este posibil ca aceste diagrame să se intersecteze în două (fig. 1 a), unul (fig. 1 b, c) sau în nici un punct (fig. 1 d, e). Punctele de intersecție

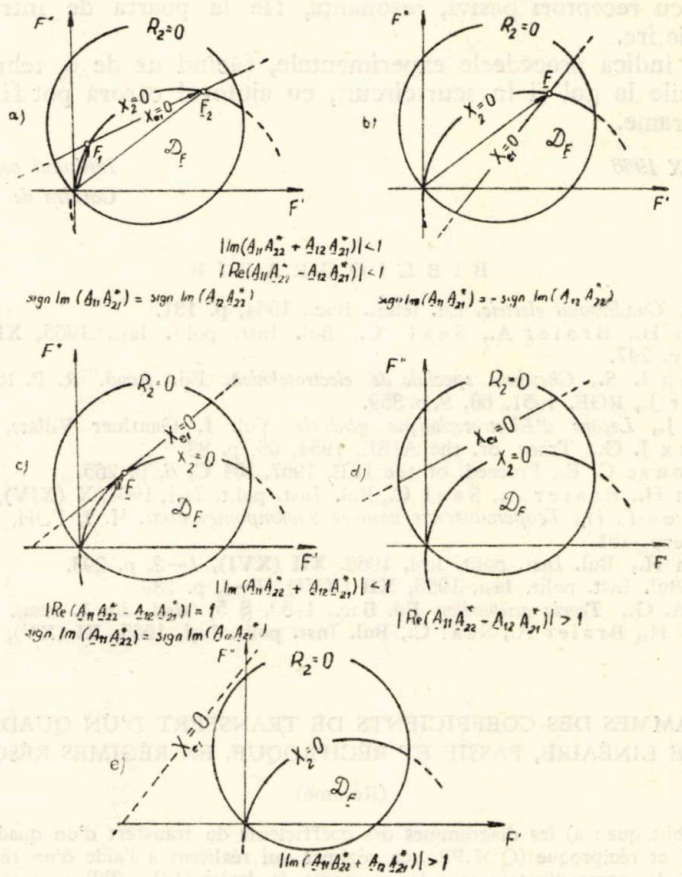


Fig. 1

corespund regimurilor de *rezonanță cuadripolară dublă* în care se realizează simultan rezonanța atît la poarta de intrare cît și la poarta de ieșire [13] a cuadripolului considerat.

Cazurile $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{21})=0$, $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{22})=0$ nu au fost luate în considerare, constituind excepții.

IV. Concluzii

1. Se generalizează o teoremă a lui Schérer relativă la diagrama-loc geometric a impedanţei echivalente la poarta de intrare a unui CDLPR şi se extinde această teoremă pentru diagramele coeficienţilor de transfer.

2. Se stabilesc expresiile analitice ale ecuaţiilor diagramelor-loc geometric ale coeficienţilor de transfer ai unui CDLPR în regimurile care realizează, cu receptori pasivi, rezonanţa, fie la poarta de intrare, fie la poarta de ieşire.

3. Se indică procedeele experimentale, făcînd uz de o tehnică bazată pe încercările la gol şi în scurtcircuit, cu ajutorul cărora pot fi determinte aceste diagrame.

Primită la 5 X 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Şora C., *Cuadripolul electric.* Ed. tehn., Buc., 1964, p. 131.
2. Rosman H., Braier A., Saal C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, p. 247.
3. Antoniu I. S., *Chestiuni speciale de electrotehnică.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1956.
4. Schérer J., RGÉ, 1951, **60**, *9*, p. 359.
5. Fallou J., *Leçons d'Électrotechnique générale.* Vol. **I**, Gauthier Villars, Paris, 1939.
6. Tarboux J. G., Trans. of. the AIEE, 1954, **66**, p. 88.
7. Moorhouse C. E., Proceed. of the IEE, 1957, **104 C**, *6*, p. 265.
8. Rosman H., Braier A., Saal C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, p. 234.
9. Атабеков Г. И,. *Теоретические основы электротехники.* Ч. **I**, ГЭИ, М.-Л., 1962, стр. 131.
10. Rosman H., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, p. 293.
11. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, p. 289.
12. Kuroş A. G., *Teoria grupurilor.* Ed. Buc., 1953, § 5, (trad. din l. rusă).
13. Rosman H., Braier A., Saal C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, p. 247.

DIAGRAMMES DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT D'UN QUADRIPÔLE DIPORTE LINÉAIRE, PASSIF ET RÉCIPROQUE, EN RÉGIMES RÉSONANTS

(Résumé)

On établit que: a) les diagrammes des coefficients de transfert d'un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque (QDLPR), en régimes qui réalisent à l'aide d'un récepteur passif la résonance à la porte d'entrée sont les segments de droite (18)... (20) contenus à l'intérieur des domaines d'existence $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ [10]; b) les diagrammes des coefficients de transfert d'un QDLPR en régimes qui réalisent à l'aide d'un récepteur pasif la résonance à la porte de sortie sont des arcs de cercles (31)... (33) contenus à l'intérieur des domaines d'existence indiqués ci-dessus. Ces diagrammes sont susceptibles à être prélevés par voie experimentale à l'aide d'une technique qui fait appel aux épreuves à vide et en courtcircuit.

On donne une extension d'un théorème de Schérer [4] et à cet égard on établit le théorème suivant:

Si l'impédance du récepteur d'un QDLPR décrit un diagramme du type (6) alors les coefficients de transfert du quadripôle considéré décrivent des diagrammes du même type.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 1—2, 1967

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 531.133.1

SUR LE PROBLÈME DES LIAISONS HOLONOMES IMPOSÉES AUX SYSTÈMES DE SOLIDES RIGIDES

LIAISONS GÉOMÉTRIQUES

NOTE I

PAR

N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU et ELENA RUSU

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Galatzi, 19—20 Mai 1967

1. Introduction

La manière habituelle de présenter le problème des liaisons holonomes, basée sur l'idée d'un système mécanique ayant pour éléments constitutifs des points matériels, est susceptible de critique lorsqu'on essaye de l'appliquer aux systèmes de solides rigides.

1°. On sait qu'au point de vue cinématique le mouvement d'un solide indéformable est équivalent à celui d'un système rigide formé de trois de ses points, tandis qu'au point de vue dynamique on doit tenir compte, tout au moins, de tous les points d'application des forces actives qui sollicitent le solide considéré, dont le nombre est presque toujours supérieur à trois. L'ensemble de termes des équations du mouvement doivent contenir dans ce cas les coordonnées de tous ces points (par ex. dans les expressions des forces généralisées). De là, l'alternative, soit d'augmenter le nombre de points constituant le système mécanique considéré, tout en introduisant simultanément un certain nombre d'équations de liaison — ce qui complique le problème —, soit d'exprimer les coordonnées d'autres points en fonction de celles des points choisis pour déterminer la position du solide, ce qui implique, en dernière instance, l'emploi d'autres paramètres de position du solide, à savoir les coordonnées d'un pôle invariablement lié au solide et les angles d'Euler.

2°. On rencontre une situation semblable en prenant en considération les liaisons de contact — les seules qui intéressent les applications pratiques — car la forme connue des équations des liaisons ne reflète pas les liaisons réelles, réalisées par des moyens matériels concrets (appuis sur des surfaces où sur des courbes, des articulations, des liaisons par fils, etc.), et qui établissent en réalité des dépendances entre les coordonnées des p les Q_ν invariablement liés aux solides S_ν, $x_{Q_{\nu\sigma}}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, 3)$, et les angles d'Euler respectifs, $\theta_{\nu e}$, $(e = p, r, n$: précession, rotation propre et nutation).

3°. Pour les systèmes de solides rigides la forme habituelle des équations des liaisons ne permet pas d'établir aisément le nombre d'équations distinctes pour un système mécanique donné.

4°. Les interprétations habituelles données aux équations des liaisons, et aux dérivées de premier et seconde ordre par rapport au temps des paramètres qui y figurent (concernant les réstrictions imposées aux vitesses et aux accélérations des points du système) manquent, dans le cas des solides rigides, de signification physique.

5°. Les images des réactions des liaisons, nommées „idéales", exprimées au moyen des équations habituelles des liaisons, ne correspondent pas aux images physiques, concrètes, des réactions des liaisons réalisées dans les applications pratiques.

6°. Pour les systèmes de solides rigides il n'est plus évidente l'égalité à zéro du travail virtuel des réactions comme conséquence des conditions de compatibilité des déplacements virtuels aux liaisons, même si l'on néglige les frottements; la manque de clarté s'accentue encore de plus pour les liaisons holonomes cinématiques.

Ces considérations ci-dessus impliquent d'une manière nécessaire, au point de vue de la mécanique technique au moins, l'élaboration d'une nouvelle forme de présentation du problème des liaisons; c'est ce qu'on essaye dans ce qui suit.

2. Analyse des liaisons géométriques utilisées dans les applications de la mécanique technique

a) *Liaisons géométriques réalisées par des appuis*

Dans cette catégorie figurent les appuis qui permettent le glissement. Soint S_ν un solide qui s'appuie dans un point C sur une surface Σ_μ d'un autre solide S_μ, dont l'équation, rapportée au repère R'_μ, $(Q_\mu x_1'^{(\mu)} x_2'^{(\mu)} x_3'^{(\mu)})$, invariablement lié au solide, est:

$$f'_\mu (x_1'^{(\mu)}, x_2'^{(\mu)}, x_3'^{(\mu)}) = 0. \tag{I.1}$$

Les coordonnées $x_{C_\sigma}'^{(\mu)}$ du point d'appui par rapport au repère R'_μ satisferont l'équation (I.1) à savoir

$$f'_\mu (x_{C_1}'^{(\mu)}, x_{C_2}'^{(\mu)}, x_{C_3}'^{(\mu)}) = 0. \tag{I.2}$$

En substituant

$$x_{C_\sigma}'^{(\mu)} = (x_{C_k} - x_{Q_k}) \alpha_{\sigma k}^{(\mu)\,1}), \quad (k = 1, 2, 3;\ \sigma = 1, 2, 3), \tag{I.3}$$

où x_{C_σ} et $x_{Q_{\mu\sigma}}$ sont les coordonnées du point d'appui C et du pôle Q_μ invariablement lié au solide S_μ par rapport au repère fixe et $\alpha_{\sigma k}^{(\mu)} = \bar{i}_\sigma'^{(\mu)} \bar{i}_k = \alpha_{\sigma k}^{(\mu)} (\theta_{\mu e})$ — les cosinus directeurs des axes mobiles $Q_\mu x_\sigma'^{(\mu)}$ par rapport aux axes fixes Ox_k, fonctions connues de $\theta_{\mu e}$, l'équation (I.2) devient

$$f'_\mu [x_{C_1}'^{(\mu)} (x_{C_\sigma}, x_{Q_{\mu\sigma}}, \theta_{\mu e}), x_{C_2}'^{(\mu)} (x_{C_\sigma}, x_{Q_{\mu\sigma}}, \theta_{\mu e}), x_{C_3}'^{(\mu)} (x_{C_\sigma}, x_{Q_{\mu\sigma}}, \theta_{\mu e})] =$$
$$= \varphi_\mu (x_{C_\sigma}, x_{Q_{\mu\sigma}}, \theta_{\mu e}) = 0. \tag{I.4}$$

---

[1]) On adopte la convention des indices muets seulement pour les indices latins *h, i, j, k, l,* etc.

Il suffit maintenant de substituer dans (I.4)

$$x_{C_\sigma} = x_{Q_{\nu\sigma}} + x'^{(\nu)}_{C_k}\,\alpha^{(\nu)}_{k\sigma}, \quad (k=1,2,3;\ \sigma=1,2,3), \tag{I.5}$$

où $x'^{(\nu)}_{C_\sigma}$ sont les coordonnées du point d'appui par rapport au repère R'_ν, $(Q_\nu x'^{(\nu)}_1 x'^{(\nu)}_2 x'^{(\nu)}_3)$, invariablement lié au solide S_ν, et $\alpha^{(\nu)}_{k\sigma} = \bar{i}'^{(\nu)}_\sigma \bar{i}_k = \alpha^{(\nu)}_{k\sigma}(\theta_{\nu e})$ — les cosinus directeurs des axes mobiles $Q_\nu x'^{(\nu)}_\sigma$ par rapport aux axes fixes Ox_k, pour obtenir la dépendance cherchée entre les paramètres de position des solides S_μ et S_ν. On obtient

$$\varphi_\mu [x_{C_\sigma}(x_{Q_{\nu\sigma}}, \theta_{\nu e}), x_{Q_{\mu\sigma}}, \theta_{\mu e}] = f(x_{Q_{\mu\sigma}}, \theta_{\mu e}, x_{Q_{\nu\sigma}}, \theta_{\nu e}) = 0. \tag{I.6}$$

Pour $x_{Q_{\mu\sigma}} = x_{Q_{\mu\sigma}}(t)$, $\theta_{\mu e} = \theta_{\mu e}(t)$, connus, l'équation (I.6) prend la forme

$$f(x_{Q_{\nu\sigma}}, \theta_{\nu e}, t) = 0 \tag{1.7}$$

et correspond à l'appui extérieur du solide S_ν sur une surface, mobile elle aussi (la surface sera fixe pour $x_{Q_{\mu\sigma}} = x^0_{Q_{\mu\sigma}}$ et $\theta_{\mu e} = \theta^0_{\mu e}$).

En dérivant l'équation (I.6) par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_{Q_{\mu k}}}\dot{x}_{Q_{\mu k}} + \frac{\partial f}{\partial x_{Q_{\nu k}}}\dot{x}_{Q_{\nu k}} + \frac{\partial f}{\partial \theta_{\mu e}}\dot{\theta}_{\mu e} + \frac{\partial f}{\partial \theta_{\nu e}}\dot{\theta}_{\nu e} = 0, \quad (k=1,2,3;\ e=p,r,n). \tag{I.8}$$

Dans (I.8) l'indice e joue, lui aussi, le rôle d'indice muet.

On démontre, tout en utilisant les rélations (I.2)...(I.6), la série d'expressions

$$\frac{\partial f}{\partial x_{Q_{\mu k}}}\dot{x}_{Q_{\mu k}} = \bar{\beta}_\mu \bar{v}_{Q_\mu}, \tag{I.9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{Q_{\nu k}}}\dot{x}_{Q_{\nu k}} = \bar{\beta}_\nu \bar{v}_{Q_\nu}, \tag{I.10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_{\mu e}}\dot{\theta}_{\mu e} = \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\bar{\omega}_\mu, \tag{I.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_{\nu e}}\dot{\theta}_{\nu e} = \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\bar{\omega}_\nu, \tag{I.12}$$

où

$$\bar{\beta}_\mu = -\bar{\beta}_\nu = -\operatorname{grad}_C f'_\mu \tag{I.13}$$

sont les *paramètres vectoriels de la liaison relatifs aux pôles* Q_μ *et* Q_ν, appliqués dans le point d'appui, $\bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)$ et $\bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)$ — leurs moments par rapport aux pôles mentionnés et $\bar{\omega}_\mu$ et $\bar{\omega}_\nu$ — les vecteurs vitesses angulaires de ces deux solides liés.

L'équation (I.8) prend par suite la forme

$$\bar{\beta}_\mu \bar{v}_{Q_\mu} + \bar{\beta}_\nu \bar{v}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\bar{\omega}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\bar{\omega}_\nu = 0. \tag{I.14}$$

Celle-ci dérivée encore une fois par rapport au temps conduit à la relation

$$\bar{\beta}_\mu \bar{a}_{Q_\mu} + \bar{\beta}_\nu \bar{a}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\bar{\varepsilon}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\bar{\varepsilon}_\nu + \Phi = 0, \tag{I.15}$$

où Φ désigne les termes qui ne contiennent pas les accélérations $\bar{a}_Q$ et $\bar{\varepsilon}$.

Les interprétations des relations (I.14) et (I.15) seront données lors des conclusions finales.

La relation (I.14) permet d'établir pour les déplacements virtuels de l'esemble des solides S_μ et S_ν [1], $\Delta\bar{r}_{Q_\mu} = \delta\bar{r}_{Q_\mu}$, $\Delta\bar{r}_{Q_\nu} = \delta\bar{r}_{Q_\nu}$, $\Delta\bar{\theta}_\mu = \delta\bar{\theta}_\mu$ et $\Delta\bar{\theta}_\nu = \delta\bar{\theta}_\nu$, la condition suivante de compatibilité :

$$\bar{\beta}_\mu \Delta\bar{r}_{Q_\mu} + \bar{\beta}_\nu \Delta\bar{r}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\Delta\bar{\theta}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\Delta\bar{\theta}_\nu = 0. \tag{I.16}$$

On démontre aussi que le travail virtuel des réactions ($\bar{N}_{\mu\nu} = \lambda\bar{\beta}_\mu$ et $\bar{N}_{\nu\mu} = \lambda\bar{\beta}_\nu$) est exprimé par la relation

$$\delta L_{\mu\nu} = \lambda\,[\bar{\beta}_\nu \Delta\bar{r}_{Q_\mu} + \bar{\beta}_\nu \Delta\bar{r}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\Delta\bar{\theta}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\Delta\bar{\theta}_\nu], \tag{I.17}$$

d'où, selon (I.16), il en resulte

$$\delta L_{\mu\nu} = 0. \tag{I.18}$$

b) *Liaisons géométriques réalisées par articulations*

Soit C le point théorique d'articulation entre les solides S_μ et S_ν. La liaison sera exprimée au point de vue analytique d'abord par les deux relations suivantes :

$$\varphi_\mu(x_{C_\sigma}, x_{Q_{\mu\sigma}}) = x_{C_k} x_{C_k} + x_{Q_{\mu k}} x_{Q_{\mu k}} - 2x_{C_k} x_{Q_{\mu k}} - l_\mu^2 = 0, \tag{I.19}$$

$$\varphi_\nu(x_{C_\sigma}, x_{Q_{\nu\sigma}}) = x_{C_k} x_{C_k} + x_{Q_{\nu k}} x_{Q_{\nu k}} - 2x_{C_k} x_{Q_{\nu k}} - l_\nu^2 = 0, \quad (k=1,2,3), \tag{I.20}$$

où $l_\mu = \overline{Q_\mu C}$ et $l_\nu = \overline{Q_\nu C}$, expriment que le point C doit rester sur les sphères mobiles ayant les pôles Q_μ et Q_ν comme centres et les distances l_μ et l_ν comme rayons.

Pour établir la dépendance entre les paramètres de position $x_{Q_{\mu\sigma}}$, $\theta_{\mu\varepsilon}$, $x_{Q_{\nu\sigma}}$ et $\theta_{\nu\varepsilon}$, on substitue respectivement dans (I.19) et (I.20)

$$x_{C_\sigma} = x_{Q_{\nu\sigma}} + x'^{(\nu)}_{C_k} \alpha^{(\nu)}_{k\sigma}, \tag{I.21}$$

$$x_{C_\sigma} = x_{Q_{\mu\sigma}} + x'^{(\mu)}_{C_k} \alpha^{(\mu)}_{k\sigma}, \tag{I.22}$$

$$(x = 1,2,3;\ \sigma = 1,2,3).$$

Pour les articulations sphériques, à ces deux équations on doit ajouter une troisième ; celle-ci fixe le point C sur le cercle de section entre les deux sphères. Elle s'obtient en écrivant que le point C doit rester à dis-

tance constante $l_{\mu D} = \overline{DC}$ d'un autre point D, pris arbitrairement dans l'un des solide — par exemple dans le solide S_μ — de coordonnées $x'^{(\mu)}_{D_\sigma}$, connues :

$$\varphi_{\mu D}(x_{C_\sigma}, x_{D_\sigma}) = x_{C_k} x_{C_k} + x_{D_k} x_{D_k} - 2 x_{C_k} x_{D_k} - l^2_{\mu D} = 0, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{I.23}$$

dans laquelle les coordonnées x_{C_σ} seront remplacées par les expressions (I.22) et les coordonnées x_{D_σ} par les expressions

$$x_{D_\sigma} = x_{Q_{\mu\sigma}} + x'^{(\mu)}_{D_k} \alpha^{(\mu)}_{k\sigma}, \quad (k = 1, 2, 3 ; \sigma = 1, 2, 3). \tag{I.24}$$

On obtient de la sorte trois équations de liaison, à savoir

$$f_\alpha (x_{Q_{\mu\sigma}}, \quad x_{Q_{\nu\sigma}}, \quad \theta_{\mu e}, \quad \theta_{\nu e}) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{I.25}$$

qui se réduisent aux deux premières pour les articulations cylindriques.

En dérivant les équations (I.25) par rapport au temps on obtient les relations

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{Q_{\mu k}}} \dot{x}_{Q_{\mu k}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{Q_{\nu k}}} \dot{x}_{Q_{\nu k}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta_{\mu e}} \dot{\theta}_{\mu e} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta_{\nu e}} \dot{\theta}_{\nu e} = 0, \tag{I.26}$$

$$(k = 1, 2, 3 ; \ e = p, r, n ; \ \alpha = 1, 2, 3).$$

En utilisant les relations (I.19)...(I.25), on trouve les expressions :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{Q_{\mu k}}} \dot{x}_{Q_{\mu k}} = \bar{\beta}^{(\alpha)}_\mu \bar{v}_{Q_\mu}, \tag{I.27}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{Q_{\nu k}}} \dot{x}_{Q_{\nu k}} = \bar{\beta}^{(\alpha)}_\nu \bar{v}_{Q_\nu}, \tag{I.28}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta_{\mu e}} \dot{\theta}_{\mu e} = \bar{M}_{Q_\mu} (\bar{\beta}^{(\alpha)}_\mu) \bar{\omega}_\mu, \tag{I.29}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta_{\nu e}} \dot{\theta}_{\nu e} = \bar{M}_{Q_\nu} (\bar{\beta}^{(\alpha)}_\nu) \bar{\omega}_\nu, \tag{I.30}$$

les nouveaux paramètres vectoriels des liaisons ayant maintenant les significations suivantes

$$\bar{\beta}^{(1)}_\mu = - \bar{\beta}^{(1)}_\nu = - 2 \bar{r}'^{(\mu)}_C, \tag{I.31}$$

$$\bar{\beta}^{(2)}_\mu = - \bar{\beta}^{(2)}_\nu = 2 \bar{r}'^{(\nu)}_C, \tag{I.32}$$

$$\bar{\beta}^{(3)}_\mu = - \bar{\beta}^{(3)}_\nu = - 2 \bar{r}'^{(\mu)}_{DC}. \tag{I.33}$$

Les relations (I.26) prennent donc les formes ci-dessous :

$$\bar{\beta}^{(\alpha)}_\mu \bar{v}_{Q_\mu} + \bar{\beta}^{(\alpha)}_\nu \bar{v}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\mu} (\bar{\beta}^{(\alpha)}_\mu) \bar{\omega}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu} (\bar{\beta}^{(\alpha)}_\nu) \bar{\omega}_\nu = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{I.34}$$

qui conduisent aux conditions de compatibilité entre les déplacements virtuels $\Delta \bar{r}_{Q_\mu}$, $\Delta \bar{r}_{Q_\nu}$, $\Delta \bar{\theta}_\mu$ et $\Delta \bar{\theta}_\nu$, et les liaisons

$$\bar{\beta}^{(\alpha)}_\mu \Delta \bar{r}_{Q_\mu} + \bar{\beta}^{(\alpha)}_\nu \Delta \bar{r}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\mu} (\bar{\beta}^{(\alpha)}_\mu) \Delta \bar{\theta}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu} (\bar{\beta}^{(\alpha)}_\nu) \Delta \bar{\theta}_\nu = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{I.35}$$

On démontre aussi que le travail virtuel des réactions de l'articulation a, lorsqu'on néglige les frottements, l'expression:

$$\delta L_{\mu\nu}=\lambda_j\,[\bar{\beta}_\mu^{(j)}\,\Delta\bar{r}_{Q_\mu}+\bar{\beta}_\nu^{(j)}\,\Delta\bar{r}_{Q_\nu}+\bar{M}_{Q_j}\,(\bar{\beta}_\mu^{(j)})\,\Delta\bar{\theta}_\mu+\bar{M}_{Q_{\nu j}}\,(\bar{\beta}_\nu^{(j)})\,\Delta\bar{\theta}_\nu],\quad (j=1,2,3), \tag{I.36}$$

d'où, tout en tenant compte des conditions (I.35), il en résulte (I. 18).

c) *Liaisons géométriques réalisées par fils*

Les liaisons géométriques par fils sont réalisées à l'aide d'un fil de longueur constante l, ayant les extrémités fixées en deux points, C_μ et C_ν, fixes dans les solides S_μ et S_ν, entre lesquels a été établie la liaison, qui sera considérée réalisée lorsque le fil reste tensionné, sans être, théoriquement, allongé. La liaison pourra être directe, le fil prenant alors la forme rectiligne, où indirecte, par l'intermède d'un nombre s de roles, de masses négligeables. Dans ce cas le fil aura la forme d'une ligne polygonale avec les noeuds raccordés par les arcs de cercles de longueurs $r_\rho\varphi_\rho$, $(\rho=1,2,\ldots,s)$, où r_ρ et φ_ρ sont respectivement les rayons des roles et les angles $\sphericalangle B_\rho O_\rho D_\rho$ d'enroulement du fil sur les roles (B_ρ et D_ρ étant les points extrèmes de contact sur chaque role, comptés en partant du solide S_μ vers le solide S_ν).

Si $l_{\rho,\rho+1}$, $(\rho=1,2,\ldots,s-1)$, sont les longueurs des portions libres du fil, délimitées entre les roles, l'équation de liaison aura la forme

$$\varphi(x_{C_{\mu\sigma}},x_{C_{\nu\sigma}})=\sqrt{x_{B_{1k}}x_{B_{1k}}+x_{C_{\mu k}}x_{C_{\mu k}}-2x_{B_{1k}}x_{C_{\mu k}}}+ \tag{I.37}$$

$$+\sqrt{x_{C_{\nu k}}x_{C_{\nu k}}+x_{D_{sk}}x_{D_{sk}}-2x_{C_{\nu k}}x_{D_{sk}}}+\sum_{\rho=1}^{s}r_\rho\varphi_\rho+\sum_{\rho=1}^{s-1}l_{\rho,\rho+1}-l=0,$$

$$(k=1,2,3).$$

On y considère

$$x_{C_{\mu\sigma}}=x_{Q_{\mu\sigma}}+x'^{(\mu)}_{\mu k}\alpha^{(\mu)}_{k\sigma}, \tag{I.38}$$

$$x_{C_{\nu\sigma}}=x_{Q_{\nu\sigma}}+x'^{(\nu)}_{C_{\nu k}}\alpha^{(\nu)}_{k\sigma}, \tag{I.39}$$

$$(k=1,2,3;\ \sigma=1,2,3).$$

Ces substitutions conduisent à l'équation:

$$f(x_{Q_{\mu\sigma}},x_{Q_{\nu\sigma}},\theta_{\mu e},\theta_{\nu e})=0, \tag{I.40}$$

qui à la suite de la dérivation par rapport au temps fournit une relation qui coïncide au point de vue formel à (I.18).

En partant des formules (I.37)...(I.39) on trouve des expressions du type (I.9)...(I.12).

Les nouveaux paramètres vectoriels

$$\beta_\mu=-\bar{n}_{C_\mu B_1},\quad \beta_\nu=-\bar{n}_{C_\nu D_s},$$

y dénotent cette fois-ci les vecteurs unitaires des directions des portions extrèmes du fil, liées aux solides, ce qui permet d'obtenir une relation du même type que (I. 14); il en resulte comme condition de compatibilité entre les déplacements virtuels et les liaisons la relation (I. 16).

Enfin, on peut démontrer que le travail virtuel des réactions a l'expression (I. 17) d'où, compte tenu de (I. 16), il en résulte (I. 18).

3. Conclusions

L'étude effectué permet d'en tirer les conclusions suivantes, concernant les liaisons géométriques et les applications pratiques:

1°. Le nombre p d'équations distinctes des liaisons géometriques qui peuvent être écrites pour un système mécanique constitué d'un nombre n de solides rigides est donné par la relation

$$p = n_r + 2n_{ap} + 3n_{as} + n_f, \tag{I.42}$$

où n_r — le nombre d'appuis sur des surfaces, n_{ap} — le nombre d'articulations planes intérieures, n_{as} — le nombre d'articulation sphériques intérieures et n_f — le nombre des fils de liaison de longueurs constantes.

2°. La forme générale des équations des liaisons géométriques est

$$f_\alpha(x_{Q_{11}},\ldots,\theta_{1n},\ldots,x_{Q_{v1}},\ldots,\theta_{vn},\ldots,x_{Q_{w1}},\ldots,\theta_{nn},t) = 0,\ (\alpha = 1,2,\ldots,p), \tag{I.43}$$

où nombre de paramètres peuvent, évidemment, manquer

Les équations de liaisons seront exprimées au moyen des relations (I.1)...(I.5), pour les appuis, au moyen des relations (I.19)...(I.24), pour les articulations et au moyen des relations (I.38) ... (I.40), pour les liaisons par fils.

3°. En dérivant par rapport au temps les équations (I.43) on obtient les relations

$$\bar{\beta}_i^{(\alpha)}\bar{v}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)})\bar{\omega}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ \alpha = 1,2,\ldots,p), \tag{I.44}$$

où $\bar{\beta}_i^{(\alpha)}$ sont les paramètres vectoriels des liaisons f_α relatifs aux pôles Q_i invariablement liés aux solides S_i; ce sont des vecteurs appliqués dans les points théoriques de liaison et ayant les même orientations que les composantes des réactions. L'interprétation des équations (I.44) peut être donnée sous la forme suivante:

Les liaisons géométriques appliquées à un système mécanique de solides rigides imposent des restrictions quant aux projections des vitesses de translation des solides sur les paramètres vectoriels des liaisons, et aux projections des vitesses angulaires sur les directions des moments par rapport aux pôles liés aux solides de ces paramètres vectoriels, les composantes normales à ces vecteurs des paramètres cinématiques $\bar{v}_{Q_i}$ et $\bar{\omega}_i$ restant arbitraires.

4°. En dérivant par rapport au temps les équations (I.44) on parvient aux équations

$$(I.45)\quad \bar{\beta}_i^{(\alpha)} a_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)})\bar{\varepsilon}_i + \Phi_\alpha = 0, \quad (i = 1,2,...,n;\ \alpha = 1,2,...,p),$$

où Φ_α désignent les termes qui ne contiennent pas les accélérations $\bar{a}_{Q_i}$ et $\bar{\varepsilon}_i$. Les relations (I.45) peuvent être interprétés de la manière suivante :

Les liaisons géométriques appliquées à un système de solides rigides imposent des restrictions quant aux projections des accélérations de translation des solides sur les paramètres vectoriels des liaisons, et aux projections des accélérations angulaires sur les directions des moments par rapport aux pôles invariables liés aux solides de ces paramètres vectoriels, les composantes normales à ces vecteurs des accélérations $\bar{a}_{Q_i}$ et $\bar{\varepsilon}_i$ restant arbitraires.

5°. Les équations (I.44) conduisent au système suivant de conditions de compatibilité avec les liaisons des déplacements virtuels $\Delta\bar{r}_{Q_i} = \delta\bar{r}_{Q_i} - \bar{v}_{Q_i}\delta t$ et $\Delta\bar{\theta}_i = \delta\bar{\theta}_i - \bar{\omega}_i\delta t$:

$$(I.46)\quad \bar{\beta}_i^{(\alpha)}\Delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)})\Delta\bar{\theta}_i = 0, \quad (i = 1,2,...,n;\ \alpha = 1,2,...,p).$$

6°. L'expression du travail virtuel des réactions des liaisons géométriques prend toujours, lorsqu'on néglige les frottements, la forme suivante :

$$(I.47)\quad \delta L_{\text{int}} = \lambda_j[\bar{\beta}_i^{(j)}\Delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(j)})\Delta\bar{\theta}_i], \quad (i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,p),$$

d'où il en résulte, tout en tenant compte des conditions (I.46):

$$(I.48)\quad \delta L_{\text{int}} = 0.$$

7°. Pour les systèmes de points matériels définis comme des solides ayant — dans les mouvements relatifs par rapport aux centres des masses — les énergies cinétiques négligeables par rapport aux celles des centres des masses ($\bar{\omega}_i = 0$, $\bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)}) = 0$), on retrouve les équations des liaisons connues dans la littérature, les équations restrictives pour les vitesses et les accélérations habituelles, les conditions connues de compatibilité des déplacements virtuels avec des liaisons, ainsi que la justification usuelle de l'égalité avec zéro du travail virtuel des réactions sans frottements.

Dans la seconde partie de ce travail, qui sera insérée dans le prochain fascicule du même *Bulletin*, nous discuterons, tout en conservant le même point de vue, le problème des liaisons cinématiques.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique

BIBLIOGRAPHIE

1. Vâlcovici V., Bălan Şt., Voinea R., *Mecanica teoretică*. Ed. Tehn., Buc., 1963.
2. Irimiciuc N., *Mecanica*. EDP, Buc., 1965.
3. — *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *3—4*, pp. 255—260.
4. Platrier C., *Mécanique rationnelle*. Dunod, Paris, 1954.
5. Suslov G. K., *Mecanica raţională*. Ed. tehn., Buc., 1950, (trad. din l. rusă).
6. Whittaker F. T., *Analytical Dynamics*. Cambridge, 1937.

ASUPRA PROBLEMEI LEGĂTURILOR OLONOME IMPUSE SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

Nota I

Legături geometrice

Se expune o nouă formă de prezentare a problemei legăturilor geometrice impuse sistemelor mecanice, adecvată situaţiilor reale întîlnite în aplicaţiile practice, considerîndu-se ca elemente constitutive ale sistemelor mecanice, solidele rigide.

Concluziile privind stabilirea numărului de ecuaţii distincte de legătură geometrice, formele ecuaţiilor de legătură, condiţiile restrictive pentru viteze şi acceleraţii, condiţiile de compatibilitate ale deplasărilor virtuale cu legăturile, precum şi justificarea egalităţii cu zero a lucrului mecanic virtual al reacţiunilor cu frecare neglijabilă, includ ca forme particulare şi concluziile cunoscute din literatură privind legăturile impuse sistemelor de puncte materiale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. K. 531.314.2

ÜBER DIE AUFSTELLUNG UND DIE ANWENDBARKEIT EINIGEN NEUEN FORMEN DER GLEICHUNGEN DER ANALYTISCHEN DYNAMIK[1])

VON

BL. DOLAPTSCHIEW

1. Die Form der Gleichungen der analytischen Dynamik [1]

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = Q_\varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k), \tag{1}$$

wobei

$$S = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu^2}{2}, \quad \bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu (t, \ldots, q_\varkappa, \ldots), \quad q_\varkappa = q_\varkappa (t), \tag{2}$$

die Energie der Beschleunigung bedeutet und

$$Q_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\varkappa}, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k), \tag{3}$$

die verallgemeinerter Kräfte sind, welche Form bekanntlich sich sowohl auf ein rheonom-holonomes, als auch auf ein nicht-holonomes mechanisches System bezieht, so dass es, im ersten Falle, k Freiheitsgrade besitzt und durch die verallgemeinerten Koordinate $q_\varkappa$ dargestellt wird, und im zweiten Falle, wegen der linearen nicht-integrierbaren differenziellen Bindungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} a_{\rho\varkappa}\, dq_\varkappa + a_\rho\, dt, \; a_{\rho\varkappa} = a_{\rho\varkappa}(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots), \; a_\rho = a_\rho (t, \ldots, q_\varkappa, \ldots), \; (\varrho = 1, 2, 3, \ldots, r), \tag{4}$$

$l = k - r$ Freiheitsgrade hat und durch die verallgemeinerten Koordinaten q_λ, $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l = k - r)$, gegeben wird, d. h. man muss im zweiten Falle statt (1) eigentlich

[1]) Der Leser auf eine Reihe der Arbeiten die in diesem *Bulletin* veröffentlicht worden waren und demselben Thema gewidmet sind aufmerksam gemacht ist [16], [17].

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\lambda} = Q_\lambda\,, \quad (\lambda = 1, 2, 3,..., l = k - r), \tag{5}$$

schreiben, nennen wir Appell-Tzenoff'sche Form, weil auf eine ähnliche Form, allerdings nicht durch Funktion S ausgedrückt, und zunächst im Falle eines rheonom-holonomen Systems auch I. Tzenoff [2] gelangt ist.

Da alles, was die Form von Tzenoff anbelangt, sich ganz allgemein auch auf irgendeine beliebige Ordnung der Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten $q_\varkappa$ bezieht, wollen wir gleich mit dem allgemeinsten Fall anfangen.

Zu diesem Zweck gehen wir aus den — von uns genannten — „verallgemeinerten Gleichungen von Lagrange zweiter Art" aus, nämlich

$$\frac{1}{n}\left[\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} - (n+1)\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right] = Q_\varkappa\,, \quad (n = 1, 2, 3,...;\ \varkappa = 1, 2, 3,..., k), \tag{6}$$

welche Form — unabhängig voneinander — sowohl von Mangeron (1961) [3], [15], als auch von uns (1965) [4], [5] ausgeführt wurde. Wie wir gezeigt haben, können die Gleichungen (6) entweder aus der Identität [4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right), \quad \overset{(n)}{T} = \frac{\mathrm{d}^n T}{\mathrm{d}t^n}\,, \quad (n = 1, 2, 3,...;\ \varkappa = 1, 2, 3,..., k), \tag{7}$$

aufgestellt werden, wobei

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2}{2} \tag{8}$$

die kinetische Energie des Systems bedeutet, jedoch gilt eine solche Identität (7) auch für jede beliebige Funktion

$$z(x) = z(x,..., y_\sigma,..., y'_\sigma,...), \quad (\sigma = 1, 2, 3,..., s), \tag{9}$$

wobei $y_\sigma = y_\sigma(x)$, $y'_\sigma = \mathrm{d}y_\sigma/\mathrm{d}x$, so dass sowohl die Funktionen $y_\sigma(x)$, als auch die Funktion $z(x)$ beliebig viel mal nach x, bzw. nach $y_\sigma^{(n)}$ differenzierbar sind; oder aber aus dem „verallgemeinerten Prinzip von d'Alembert" [5], [6]

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu).\, \overset{(n)}{\delta \mathbf{r}}_\nu = 0, \quad (n = 1, 2, 3,...), \tag{10}$$

wobei $\delta t = 0$, $\delta \mathbf{r}_\nu = \delta \dot{\mathbf{r}}_\nu = \delta \ddot{\mathbf{r}}_\nu = ... = \overset{(n-1)}{\delta \mathbf{r}}_\nu = 0$, $\overset{(n)}{\delta \mathbf{r}}_\nu \neq 0$ ist.

Man sieht sofort, dass genauso wie aus dem Prinzip von d'Alembert (cf. (10): $n = 0$) die Gleichungen von Lagrange zweiter Art

$$(11)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

resultieren, so können aus dem Prinzip von Jourdain [7] (cf. (10) : $n = 1$) die Gleichungen von Nielsen [8] (cf. (6) : $(n = 1)$

$$(12)\qquad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\varkappa} - 2\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

und aus dem Prinzip von Gauss (cf. (10) : $n = 2$) die Gleichungen von Tzenoff [9] (cf. (6) : $n = 2$)

$$(13)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\varkappa} - 3\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) = Q_\varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

abgeleitet werden.

2. Um zu zeigen, dass die Form (1,5) der Gleichungen der holonomen, bzw. der nicht-holonomen Systeme ein Variationsprinzip, und zwar das Prinzip des kleinsten Zwanges von Gauss, ausdrücken, hat Appell [10] folgende Transformation eingeführt

$$(14)\qquad K = S - \sum_{\substack{\varkappa=1 \\ \lambda}}^{k} Q_{\varkappa\lambda}\ddot{q}_{\varkappa\lambda}.$$

Ohne vorauszusetzen, dass die verallgemeinerten Kräfte (3) auch von den verallgemeinerten Beschleunigungen $\ddot{q}_\varkappa$ abhängen könnten, schliesst Appell aus (14), mit Bezugnahme von (1), dass seine Gleichungen noch die Form

$$(25)\qquad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_{\varkappa\lambda}} = 0, \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

annehmen können, welches nur dann gültig ist, wenn auch die Bedingung

$$(16)\qquad \frac{\partial Q_{\varkappa\lambda}}{\partial \ddot{q}_{\varkappa\lambda}} = 0, \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

erfüllt wäre.

Appell bemerkt [11]: „Ce sont les équations que l'on aurait à écrire pour trouver les valeurs de $\ddot{q}_\varkappa$ rendant K minimum. Inversement les valeurs de $\ddot{q}$ tirées de ces équations rendent K minimum, car les termes homogènes du deuxième degré de K proviennent de S et constituent une forme quadratique définie positive. Comme les valeurs de $\ddot{q}$ détermi-

nent les accélérations, on peut interpréter ce résultat en disant que *les valeurs des accélérations à chaque instant rendent K minimum.* Dans cet énoncé, on peut remplacer la fonction K par toute autre fonction qui en diffère seulement par des termes indépendants des accélérations, par exemple par les deux fonction suivantes:

. . . . . .

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m}[(mx''-X)^2+(my''-Y)^2+(mz''-Z)^2].$$

Le fait que les accélérations rendent cette dernière fonction minimum est une conséquence du principe de la moindre contrainte de Gauss".

3. Um seine Gleichungen (13) zunächst zu der ersten Appellschen Forme (1) und dann zu der zweiten Form (15) zurückzuführen, nich aber durch die Energie der Beschleunigung S (2), sondern wieder durch die kinetische Energie T (8) ausgedrückt, geht Tzenoff [9], [11] folgendermassen vor: ersten Schritt, indem er setzt

$$R_2=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0), \tag{17}$$

wobei T_0 diejenige Funktion bedeutet, wenn in derlezten die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $q_\varkappa$ fehlen, d. h. sie sind in T fixiert, gedacht; nun nehmen die Gleichungen (13) die „Appellsche Form"

$$\frac{\partial R_2}{\partial \ddot{q}_\varkappa}=Q_\varkappa\,,\quad (\varkappa=1,2,3,...,k), \tag{18}$$

an; zweiten Schritt, indem er setzt

$$K_2=R_2-\sum_{\varkappa=1}^{k}Q_\varkappa\ddot{q}_\varkappa\,, \tag{19}$$

wodurch — jedoch wieder unter der ergänzenden Bedingung (16), welche auch Tzenoff nicht in Betracht nimmt — die Gleichungen (18) ebenso die extremale Form

$$\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\varkappa}=0,\quad (\varkappa=1,2,3,...,k), \tag{20}$$

annehmen.

Im allgemeinen, da die Relation

$$\frac{\partial \overset{(n)}{T_0}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa}=\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\,,\quad (n=1,2,3,...;\ \varkappa=1,2,3,...,k), \tag{21}$$

erfüllt ist, kann man nacheinander die Transformationen schreiben

$$R_n = \frac{1}{n}[\overset{(n)}{T} - (n+1)\overset{(n)}{T_0}], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{22}$$

$$K_n = R_n - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \overset{(n)}{q_\varkappa} \tag{23}$$

und *unter der ergänzenden Bedingung*

$$\frac{\partial Q_\varkappa}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k), \tag{24}$$

„die verallgemeinerten Gleichungen von Lagrange“ (6) zu der stationären Form

$$\frac{\partial K_n}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k), \tag{25}$$

zurückführen.

Bei $n = 2$ erscheinen die Gleichungen (20) von Tzenoff. Es existiert aber noch eine einfachere Form, die man erhält, wenn $n = 1$ gesetzt wird, nämlich

$$\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_\varkappa} = 0, \quad \text{falls} \quad \frac{\partial Q_\varkappa}{\partial \dot{q}_\varkappa} = 0, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k). \tag{26}$$

Diese Form ist aber nichts anders als die Gleichungsform von Lagrange zweiter Art, dargestellt in Appelscher Form. Es ergibt sich genauso die Form, welche für $n = 3$ herauskommt, nämlich

$$\frac{\partial K_3}{\partial \dddot{q}_\varkappa} = 0, \quad \text{falls} \quad \frac{\partial Q_\varkappa}{\partial \dddot{q}_\varkappa} = 0, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k), \tag{27}$$

und welche den Gleichungen

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \dddot{T}}{\partial \dddot{q}_\varkappa} - 4\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) = Q_\varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k), \tag{28}$$

entspricht, usw.

Es lässt sich folglich leicht ersehen, dass die Gleichungen (13) von Tzenoff keine bevorzugte Stelle nehmen. Es erwiesen sich im Gegenteil einerseits einfachere Gleichungen, wie (12,26) von Nielsen, und andererseits ist es noch erforderlich die Bedingung (16) ebenso in Betracht zu nehmen.

4. Da das fernere und das wichtigste Ziel Tzenoffs dasjenige ist, durch die Form (20) auch die nicht-holonomen mechanischen Systeme zu betrachten, dessen Weg von hier ab von der Appellschen Methode abweicht, wollen wir unsere weiteren Bemerkungen fortsetzen.

Bei Aufstellung seiner Gleichungen hat Appell tatsächlich nur die linearen Bindungen (4) in Betracht genommen; er hat aber hingewiesen, dass wenn die Bindungen nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\varkappa$ unlinear sind, so könnte man, nach einer Ableitung nach der Zeit t, sie nach den verallgemeinerten Beschleunigungen $\ddot{q}_\varkappa$ linearisieren [12]. Nach einem solchen Verfahren geht auch Tzenoff vor, meinend, es sei nur die Ordnung der Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten massgebend. Wie gesehen, muss jedoch noch die Bedingung (24) für beliebiges n in Betracht genommen sein. Tzenoff hält es für hinreichend entweder zu derivieren, oder zu differenzieren, damit man nicht an höheren als an zweiten Ableitungen von $q_\varkappa$ stösst. Durch Differenzieren könnte man aber in manchen Fällen auch mit der Nielsenschen Form (12,26) vorgehen.

Es seien die Bedingungen ganz allgemein durch die Relation

$$\Phi_\varrho^{(n-1)}(t,\ldots,q_\varkappa,\ldots,\dot{q}_\varkappa,\ldots,\ddot{q}_\varkappa,\ldots,\overset{(n-1)}{q_\varkappa},\ldots)=0, \tag{29}$$

$$(n=1,2,3,\ldots;\ \varkappa=1,\ldots,k;\ \varrho=1,2,3,\ldots,r<k),$$

angegeben. Stellen wir uns vor, dass (29) nicht linear nach den höchsten Ableitungen $\overset{(n-1)}{q_\varkappa}$ sind. Wie gesagt, wir linearisieren sie aber nach $\overset{(n)}{q_\varkappa}$, nachdem wir (29) einmal nach t derivieren; man hat

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial\Phi_\varrho^{(n-1)}}{\partial\overset{(n-1)}{q_\varkappa}}\overset{(n)}{q_\varkappa}+\cdots=0,\quad (n=1,2,3,\ldots;\ \varrho=1,2,3,\ldots,r<k), \tag{30}$$

d. h. man kann stets die allgemeinen Bindungsrelationen von n-er Ordnung in $\overset{(n)}{q_\varkappa}$ in folgender explizite Form darstellen

$$\overset{(n)}{q_\varrho}=\sum_{\lambda=1}^{l}\alpha_{\varrho\lambda}\overset{(n)}{q_\lambda}+\alpha_\varrho,\quad (\varrho=l+1,\ l+2,\ldots,l+r=k;\ n=1,2,3,\ldots), \tag{31}$$

wobei $\alpha_{\varrho\lambda}=\alpha_{\varrho\lambda}(t,\ldots,q_\varkappa,\ldots,\overset{(n-1)}{q_\varkappa},\ldots)$, $\alpha_\varrho=\alpha_\varrho(t,\ldots,q_\varkappa,\ldots,\overset{(n-1)}{q_\varkappa},\ldots)$ sind.

Die Funktion K_n hängt aber von den r verallgemeinerten Beschleunigungen höherer Art $\overset{(n)}{q_\varrho}$ und von l solchen $\overset{(n)}{q_\lambda}$. Das Verfahren, welches Tzenoff weiter vorgeht, um die Gleichungen der nicht-holonomen mechanischen System aufzustellen, besteht darin, dass er die r-en $\overset{(n)}{q_\varrho}$ dadurch eliminiert, indem er sie aus (31) in $K_n(\overset{(n)}{q_\varrho},\overset{(n)}{q_\lambda})$ einsetzt (bei ihm $n=2$). Bezeichnet man dann die so entstandene neue Funktion mit K_n^*, so gelangt man formal zu der Form

$$(32)\qquad \frac{\partial K_n^*}{\partial \overset{(n)}{q}_\lambda} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots, l = k - r),$$

welche für $n = 2$ die — nach Tzenoff — gesuchten Gleichungen darstellt, und welche die Bewegung auch der nicht-holonomen Systeme beschreiben soll.

5. Was für Fälle nun vorkommen könnten?

Da die Bedingung (24) bis heute nicht in Betracht genommen war, wurde folgendermassen prozediert:

a) Sind die Bindungen (29) linear und von erster Ordnung in $\dot{q}_\varkappa$ d. h. sie haben die Gestalt

$$(33)\qquad \dot{q}_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_{\varrho\lambda}\, \dot{q}_\lambda + \beta_\varrho, \quad (\varrho = l+1,\ l+2, \ldots, l+r),$$

$$\beta_{\varrho\lambda} = \beta_{\varrho\lambda}(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots),\ \beta_\varrho = \beta_\varrho(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots),\ (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

so deriviert man (33) und benutzt man die Form (13,20), statt ohne Derivieren direkt die Nielsensche Form (12,26) zu benutzen.

b) Sind die Bindungen (29) unlinear bezüglich $\dot{q}_\varkappa$, so deriviert man sie wieder und erhält man die gesuchte Gestalt

$$(34)\qquad \ddot{q}_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{l} \gamma_{\varrho\lambda}\, \ddot{q}_\lambda + \gamma_\varrho, \quad (\varrho = l+1,\ l+2, \ldots, l+r),$$

$$\gamma_{\varrho\lambda} = \gamma_{\varrho\lambda}(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots),\ \gamma_\varrho = \gamma_\varrho(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots),\quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

nachdem man wie vorher prozediert.

c) Sind die Bindungen (29) linear bezüglich der verallgemeinerten Beschleunigungen $\ddot{q}_\varkappa$ so kann man sie wieder in die Gestalt (34) darstellen und den Fall b) haben.

d) Sind schliesslich die Bindungen (29) unlinear nach $\ddot{q}_\varkappa$, man deriviert sie nicht und sie in die Gestalt

$$(35)\qquad \dddot{q}_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{l} \varepsilon_{\varrho\lambda}\, \dddot{q}_\lambda + \varepsilon_\varrho, \quad (\varrho = l+1,\ l+2, \ldots, l+r),$$

$$\varepsilon_{\varrho\lambda} = \varepsilon_{\varrho\lambda}(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots, \ddot{q}_\varkappa, \ldots),\ \varepsilon_\varrho = \varepsilon_\varrho(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \ddot{q}_\varkappa, \ldots, \dddot{q}_\varkappa + \ldots),\ (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

zurückführt, in welchem Fall jetzt die Form (28,27) benutzt sein kann, sondern differenziert man sie und statt der Form (13,20), die Form $dK_2^* = 0$ benutzt, weil jetzt die Bindungen nach den Differenzialen $d\ddot{q}_\varrho$ linear werden. Es steht nämlich bei Tzenoff folgende Begründung [13]:

„Dans le cas actuel, en utilisant les relations

$$(14)\qquad f_r([\ddot{q}_\alpha], [\ddot{q}_\beta], [\dot{q}_l], [q_i], t) = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, l),$$

l'expression des dépendantes $[\ddot{q}_\beta]$ en fonction des indépendantes $[\ddot{q}_\alpha]$ est rendu difficile et même irréalisable. Cependant, nous pouvons calculer la différentielle totale dK^l (d. h. dK_2^*, n. b.) de K^l sans que l'élimination de la dépendante $[\ddot{q}_\beta]$ dans la fonction $K = K([\ddot{q}_\beta], [\ddot{q}_\alpha])$ soit effectuée. Et, en effet, en différenciant K et (14) nous obtenons:

$$(15) \qquad dK = \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} d\ddot{q}_\beta, \quad \frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_\alpha} d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_\beta} d\ddot{q}_\beta + \cdots = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, l),$$

indiquant avec ... les membres, qui ne contiennent pas $[d\ddot{q}_\alpha]$ et $[d\ddot{q}_\rho]$.

Des l dernières équations de (15), qui sont linéaires par rapport à $[d\ddot{q}_i]$, nous trouvons $d\ddot{q}_\beta = b_{\beta\alpha} d\ddot{q}_\alpha$. Alors la première équation de (15) devient

$$(16) \qquad dK^l \equiv \frac{\partial K^l}{\partial \ddot{q}_\alpha} d\ddot{q}_\alpha = \left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta}\right) d\ddot{q}_\alpha,$$

où $[d\ddot{q}_\alpha]$ sont arbitraires et indépendantes; $b_{\beta\alpha}$ sont des fonctions de $[\ddot{q}_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[q_i]$, t. Pour maximum et minimum il faut $dK^l = 0$ ou

$$(17) \qquad \frac{\partial K^l}{\partial \ddot{q}_\alpha} \equiv \frac{\partial K^l}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} b_{\beta\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, k; \ \beta = k+1, k+2, \ldots, k+l).$$

Les équations du mouvement d'un système non holonome à relations non linéaires par rapport à $[\ddot{q}_i]$ sont donc les équations (17) auxquelles nous ajoutons (14)".

Eine vorläufige Bemerkung ist die, dass im Falle b) bei nicht linearen Bindungen nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, könnte man genauso wie oben prozedieren und nicht die Tzenoffschen, sondern die einfacheren Nielsenschen Gleichungen benutzen.

Wegen der zweiten, ergänzenden, Bedingung (24) sieht man aber unmittelbar, dass die Ordnung der Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten (Geschwindigkeiten und Beschleunigungen), die in den Bindungsrelationen (29) vorhanden, *nicht genügen*, um wir den Auswahl der Gleichungsformen zu bestimmen. Es kommen gebräuchlich die Fälle vor:

I. Die Bindung $\Phi_\rho^{(1)}$ in (29), $(n = 1)$, ist linear nach $\dot{q}_\varkappa$ und $Q_\varkappa$ hängt a) von der Zeit t, b) von der Lage $q_\varkappa$, c) von allen beiden, ab. Dann ist $\partial Q_\varkappa / \partial \dot{q}_\varkappa = 0$ erfüllt und man kann die Nielsensche Form (12,26) benutzen.

II. Die Bindung $\Phi_\rho^{(1)}$ in (29), $(n = 1)$, ist unlinear nach $\dot{q}_\varkappa$ und $Q_\varkappa$ kann auch noch von $\dot{q}_\varkappa$ abhängen. Dann ist die Bedingung $\partial Q_\varkappa / \partial \dot{q}_\varkappa = 0$ *nicht erfüllt*, aber ist $\partial Q_\varkappa / \partial \ddot{q}_\varkappa = 0$; nach Derivieren von (29) nach t wird

die Bindung linear nach $\ddot{q}_\varkappa$. Derselbe der Fall, wenn die Bindung $\Phi_\rho^{(2)}$ in (29), $(n=2)$, linear nach $\ddot{q}_\varkappa$ wäre. In diesen beiden Fällen benutzt man die Tzenoffsche Form (13,20).

III. Die Bindung $\Phi_\rho^{(2)}$ in (29), $(n=2)$, ist linear oder unlinear nach $\ddot{q}_\varkappa$, aber $Q_\varkappa$ hängt auch von $\ddot{q}_\varkappa$ ab. Jetzt ist $\partial Q_\varkappa/\partial\ddot{q}_\varkappa \neq 0$ und nun kann man *nicht* die Tzenoffsche Form gebrauchen, sondern muss man zu der höheren Form (28,27) anwenden; usw.

6. Zum Schluss sind noch zwei Bemerkungen zu machen. Die eine ist die dass man in der verallgemeinerten Form (32) die Funktion K_n^* nach $\overset{(n)}{q}_\lambda$ differenzieren muss. Nach (6) enthält aber die Funktion K_n^* Ableitungen von $q_\varkappa$, die mit einer Ordnung höher sind, d. h. $\overset{(n+1)}{q}_\varkappa$, da nach (6) dort $\overset{(n)}{T}$ eben zu den $\overset{(n+1)}{q}_\varkappa$ führt, dementsprechend $\overset{(0)}{T}$, d. h. T, schon $\dot{q}_\varkappa$ enthält. Man muss also bei den Ableitungen darauf aufmerksam machen, dass in K_n^* noch $\overset{(n+1)}{q}_\rho$ vorkommen. Obwohl man K_n^* nach $\overset{(n)}{q}_\lambda$ differenziert, hängt — nach den Bindungsrelationen — auch $\overset{(n+1)}{q}_\rho$ von $\overset{(n)}{q}_\lambda$. Infolgedessen sind in den endgültigen Gleichungen (17) (im Zitat von Tzenoffscher Arbeit [13]) noch Glieder hinzuzufügen, welches wir gelegentlich durch „..." bezeichnet haben. Es ist in der Tat nicht nur $\partial\overset{(n)}{q}_\rho/\partial\overset{(n)}{q}_\lambda = \alpha_{\rho\lambda}$, sondern auch $\partial\overset{(n+1)}{q}_\rho/\partial\overset{(n)}{q}_\lambda = \alpha_{\rho\lambda}$, so dass

$$(36)\quad \frac{\partial K_n^*}{\partial\overset{(n)}{q}_\lambda} \equiv \frac{\partial K_n}{\partial\overset{(n)}{q}_\lambda} + \sum_{\rho=l+1}^{l+r} \frac{\partial K_n}{\partial\overset{(n)}{q}_\rho}\alpha_{\rho\lambda} + \sum_{\rho=l+1}^{l+r} \frac{\partial K_n}{\partial\overset{(n+1)}{q}_\rho}\alpha_{\rho\lambda} = 0,\ (n=1,2,3,\ldots;\ \lambda=1,2,3,\ldots,l).$$

Die lezte Bemerkung betrifft eine mehr prinzipielle Frage.

Beschreiben die Gleichungen $\partial K_2^*/\partial\ddot{q}_\rho = 0$ von Tzenoff, und überhaupt die nach der behandelten Methode gewonnenen allgemeineren Forme, tatsächlich die Bewegungen der nicht-holonomen mechanischen Systeme? Meiner Meinung nach, verlangt diese Frage auch eine Antwort, da bis hierher nur eine formale mathematische Rezeptur gegeben wurde. Man muss speziell bei der Tzenoffschen Gleichungen beweisen, dass sie zu den Appellschen Gleichungen (5) für nicht-holonomen mechanischen Systeme zurückgeführt werden können.

Es steht übrig dieser offenen Frage zu beantworten, welches das nächste Ziel unserer Untersuchung sein möge.

Eingegangen am 30 XII 1966

Akademie der Wissenschaften,
Sofia, Bulgarien

LITERATURVERZEICHNIS

1. Appell P., C. r. Ac. Sci., Paris, 1899; Crelle's J., **121**; Journ. de Jordan, 1900.
2. Tzenoff I., *Докл.* БАН, 1956, *6*; *ДАН СССР*, 1953, **89**; Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, V(IX), *1—2*, pp. 119—124.
3. Mangeron D., Deleanu S., *Докл.* БАН, 1962, *4*.
4. Dolaptschiew B., ZAMP, 1966, **17**, *3*, S. 443.
5. — C. r. Ac. Sci., Paris, 1966, **263**, *8*, p. 288.
6. Nordheim L., Hb. Phys., 1927, **5**.
7. Jourdain Ph., Quart. J., 1908, **39**.
8. Nielsen J., *Elementare Mechanik*. Springer, Berlin, 1935.
9. Tzenoff I., XIII th Intern. Astronaut. Congress, Varna, 1962, 1964.
10. Appell P., *Mécanique rationelle*. T. **II**, 1924, pp. 392, 393.
11. Ценов И., Изв. Мат. И-т БАН, 1960, *4*.
12. Appell P., C. r. Ac. Sci., Paris, 1911.
13. Tzenoff I., *Докл.* БАН, 1965, **18**.
14. Манжерон Д., Изв. АН СССР, Механика и Машиностроение, 1961, *1*, стр. 27—29.
15. Niang S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X(XIV)**, *1—2*, pp. 53—58.
16. Tokacs E., Sima P., Olariu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 111—116.

ASUPRA STABILIRII ŞI APLICABILITĂŢII UNOR NOI FORME DE ECUAŢII ALE DINAMICII ANALITICE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare unele forme noi ale ecuaţiilor Mecanicii analitice [1]...[3], discută domeniul de aplicabilitate al acestora şi-şi propune să studieze într-una din lucrările viitoare problema reductibilităţii la o formă unică a ecuaţiilor care schematizează astăzi, sub diferite forme, mişcări mecanice ale sistemelor anolonome.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 531.1

KINETIC SYNTHESIS OF GENERAL MECHANICAL SYSTEMS (I)

BY

W. BOGUSZ and J. M. SKOWROŃSKI

Consider the possibly arbitrary general mechanical system modeled in the form of a chain of point of masses, coupled to each other with a strongly nonlinear springs, positive and partially negative dampers, general in their shape [8]...[10]. The motion of such a system can be described in general form by the vectorial equation

$$\ddot{q} + F(q, \dot{q}, t) = 0, \tag{1}$$

with the initial conditions $(q^0, \dot{q}^0, t_0) \in \Omega_\alpha$, where q, $\dot{q}$ denotes n-dimensional vectors and $F(q, \dot{q}, t)$ the vector field defined on some set $\Omega = \mathcal{J} \times \widetilde{\Delta}$, $\mathcal{J}: t \in [t_0, \infty)$, $\widetilde{\Delta}$ an assigned open set in the Euclidean, $2n$-dimensional phase space E^{2n} and Ω_α ($|q^0|, |\dot{q}^0| < \alpha$, $t_0 \in \mathcal{J}$) where α is an arbitrary large but finite constant, and $\Omega_\alpha \subset \Omega$. Let $F(q, \dot{q}, t)$ satisfies the sufficient conditions for existence, uniqueness and continuability of solutions of (1) to all of $\mathcal{J}$.

According to the form of our mechanical model, the F operator can be rewritten as the sum of the characteristic operator and the forcing operator:

$$F = \widetilde{F}(q, \dot{q}) - G(q, \dot{q}, t). \tag{2}$$

Further, according to the physical conditions we have assumed, the operator $\widetilde{F}$ can be represented in the following way:

$$\widetilde{F} = \Phi^p(|q|, \dot{q}) + \Phi^n(|q|, \dot{q}) + \Psi(q), \tag{3}$$

where the terms are, successively, the operator of the positive damping characteristics, the operator of the partially negative damping as an effect of the action of the external energy source [10], and finally the restoring forces operator.

The following mechanical assumptions have been substantiated many times, e. g., [8]...[10]. For q, $\dot{q} \in \widetilde{\Delta}$ we assume

$$\Phi^p \cdot \dot{q} \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\Phi^p(|q|, 0) \equiv 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Phi^p}{\partial \dot{q}} > 0, \quad \frac{\partial \Phi^p}{\partial |q|} > 0. \tag{6}$$

Furthermore, for $|\dot{q}| \in [Q, \infty)$, $q < \infty$, Q some constant,

$$\Phi^n \cdot \dot{q} > 0, \qquad (8) \quad \frac{\partial \Phi^n}{\partial \dot{q}} \geqslant 0, \quad \frac{\partial \Phi^n}{\partial |q|} \geqslant 0. \tag{7}$$

For $q \in [0, Q]$, (7) and (8) are not satisfied, i. e., there the shape of Φ^n is some positive value depending on the character of the partially negative damping source. Moreover,

$$\Phi^n(|q|, 0) \equiv 0. \tag{10}$$

For every $(q, \dot{q}) \in \tilde{\Delta}$ we assume

$$\Psi \cdot q \geqslant 0, \qquad (12) \quad \Psi(0) = 0. \tag{11}$$

In relation to the forcing term we take

$$G(q, \dot{q}, t) \neq 0 \quad \text{for } t \neq 0. \tag{13}$$

We usually select in the theory of nonlinear systems vibrations the following two parts: the first, connected with the system for itself, which is moving (structure, characteristics, forcing or general generation conditions), and the conditions of motion, the second part concerning the motion of the system.

Generally speaking the first part can be reduced to the problem of the existence of real motion of physical constructure along the solutions of some equations associated with the assumed model. The second part deals with the possibilities of solving this equations [11]. Going from the given constructure to the presented motion equations we realize the structural analysis problems, going back, i. e. optimizing the constructure through the optimal model choice we realize the structural synthesis. Further, solving the given motion equations we obtain the kinetic analysis. Reversely, choosing the right-hand-members (characteristics) of equations for receiving some required (optimal) form of motion we realize the kinetic synthesis.

We construct usually the system by the multi-turning-loop procedure of the analysis, kinetic and structural synthesis, successively included. Let us consider now one feed-back-step of this loop, i. e. the kinetic synthesis, having already assumed all other processes to be done. This we suppose to have given: the model of our system in common with the structural synthesis and the motion described uniquely by solution of (1). As it was defined previously, the kinetic synthesis is the choice of the vector field $F(q, \dot{q}, t)$ in some class of the assigned F_i - functions, $(i = 1, \ldots, n)$, having some domain of definition of this class, in such a way, that the motions would perform certain required property in Ω. If this procedure is possible for given certain mechanical system, we shall say about the existence of synthesis-procedure (shortly of synthesis) or in other words, we shall say that the system is synthezable. The mentioned class of $F_i(q, \dot{q}, t)$ functions and the prescribed domain of definition are designed to this required motions-property and are succesively named the range and the domain of synthezability. The latter is a restaint set of states (motions) of our system. Of course, the system is synthezable, (if, it is at all), in some range and on some domain of synthezability. Denote C^s (the class s) — the mentioned range of synthezability and Ω_s: $(\Omega_{\alpha_s}, \varphi(|q|, |\dot{q}|) \leqslant 0, t \in \mathcal{J}_s)$ some domain of synthezability, where $\varphi(\ldots)$ are the prescribed constrains for the synthesis existence, Ω_{α_s} and $\mathcal{J}_s$ mean the initial conditions and time sequence for which the system is synthezable.

The property of motion which aims the synthesis procedure is named the synthezability property. Most often it is an optimization according to some parameters of the system. The synthesis procedure may be done by finding some function of the $F(q, \dot{q}, t)$ — change inside of the range of synthezability in view of performing some synthezability property. We shall call this function the synthetizing function of the system. It may be employed generally either including F as an argument or representing some functional parameter inside of F functions. The latter may be in particular simply taken as some coefficients, unknown, in the series — extension of characteristics. The absolute derivative of the phase-velocity vector may serve us an example for a first case of synthetizing function, the other cases

will be further denoted and illustrated, when employing some control theory results and parameter discussion of characteristics. The shape of the synthetizing function suggests the form of mathematical describing the synthesis problem.

Let us denote it, at the moment generally, by the function $Q(F, \Omega_{\alpha s}, q^0, \dot{q}^0, t_0) \in C_s$, defined on Ω_s. The performance of synthezability property, employing this function, may be expressed generally by the extremizing condition of some functional

$$I(Q, \Omega_{\alpha s}) = \int_{\vartheta_s} h(q, \dot{q}, t, Q)\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

The scalar function h belongs to C^s. This is, as widely known, an implicit problem in the calculus of variations. It is not our intention to go into details. A brief history of those and references can be found in [1]...[3] for instance. We are interested only in the acquainting the Reader with some view on our synthesis aspects of this problem. If the function Q does not depend on t_0, we say about the uniform synthesis, if it does not depend also on $(q^0, \dot{q}^0)$, i. e. if $Q = Q(F, \Omega_{\alpha s})$, the synthesis is said to be an integral one or the system synthesis.

In any case the set of conditions restraining C^s and Ω_s should be established before synthesis, by the qualitative analytical study of the synthezability property, serving the background for the existence proofs of the synthesis. The system (1) under given assumptions can realize the finite number of conditions, required upon the motions behaviour. By the qualitative analysis we precisely know, for instance, which class of $F(q, \dot{q}, t)$ admits the ultimate boundedness property of motions or the existence of the limit steady state regime (l.s.s.r.), or anything else. It would be unreasonable to look for the synthetizing function given on F_i functions, being outside the C^s class, i. e. giving no opportunity of obtaining the ultimate boundedness or l.s.s.r. properties, if these are required. For further instance we are unable to require, that the free system disturbed from the equilibrium would come back to this equilibrium in a finite time and would rest at this position. We should point out at this place, how important is the qualitative analysis for the designer, even, if making the synthesis procedure entirely numerically, employing computers only.

If the $F(q, \dot{q}, t)$-choice is not unique inside of the range of synthezability, the synthesis is said to be an interior synthesis. If the same procedure is an unique one, the synthesis is said to be the boundary synthesis. For explaining example, suppose we have to choose $\Psi(q) = k^2 q$, such, that the amplitude of vibrations $\ddot{q} + k^2 q + 2h\dot{q} = A \sin \omega t$ will be maximum for given $h > 0$, A, ω. The answer is unique $k^2 = \omega$, and we have the boundary synthesis.

Suppose further we have to choose $\Phi(\dot{q}) = 2hq$, such that the motion of $\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = 0$ would be an oscillatory one, given k^2. The answer is not unique one, $k^4 - h^2 < 0$, and we get the interior synthesis. The range of synthezability in both examples is some class of linear functions. The examples illustrate the following general property: the boundary synthesis is most often concerning the concrete problems, when looking for a special form or even value of a prescribed parameter and does not suggest any more choice. The interior synthesis is rather connected with many possibilities and we are suggested to optimize the requirements. In this sense it may be often identified with the optimization of general systems and furnished with similar methods. In case of this interior synthesis we see how significant is to describe in concrete terms the range of synthezability in the sense of what said above. Very often it may be done by defining the boundary of C^s, which is therefore also a significant problem of kinetic synthesis. In what follows mainly the interior synthesis will be considered, related to the closure of C^s.

In view of the division (2), considering the (3) type of equations, we get two member of the vector field F: $\widetilde{F}(q, \dot{q})$, $G(q, \dot{q}, t)$ — i. e. the characteristics and forcing-operators. Most the cases of the synthesis problems in our, mechanical sense, deal with the choice of $\widetilde{F}(q, \dot{q})$, given $G(q, \dot{q}, t)$ assumed before. This means, that we choose the type of system, which could

perform a required kind of motion under really existing forcing programm. This is precisely the ground, principal idea for designing all the mechanical construction. The forcing G, driving the system to get a prescribed form of motion is usually fixed by the physical conditions somehow correlated. See for instance the rough road forcing the motion of an amortisation set of a running vehicle. The aim of designer is to choose the dampers and springs i.e. the form of $\widetilde{F}(q, \dot{q})$ for obtaining a reasonably comfortable travel. Having in mind however, that $\widetilde{F}(q, \dot{q})$ has a usual, previously studied form of many members inside, the synthesis procedure cannot be the unique one for the general case. Hence this general statement is of the limited use for solving concrete problems as long, as we do not establish some of $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ members as to be either assumed or kown by the experience or experimental data [6]. Simply, the procedure of all members choice is too difficult. For restricting the range of synthezability, our general mechanical assumptions of (4) ... (13) are also many times too general. Some of the physical laws governing the behaviour of concrete system may be known and mathematically denoted upon Φ, Ψ, some not, having however to be also included in certain way. Therefore often it is necessary to make the step-by-step realization of the synthetizable property, optimizing some parameters successively and correcting the rest at any step. This may be allowed by defining successive (14) functionals: $I^1, \ldots, I^k$ and then considering $I(I^1, \ldots, I^k)$ [5], as a result.

This kind of kinetic synthesis may be applied however not only for variety of design purposes. The other mechanical-theoretical usage is also of great importance. For instance, in celestial mechanics — asking for the force fields which result in either a specific orbit or which allow to obtain a closed form solution of the motion equations [4].

On the other hand, when $\widetilde{F}(q, \dot{q})$ members would be all fixed and G would not be established, i.e. if given a model structure we would look for the steering $G(q, \dot{q}, t)$ as a function of time to be optimal for the system achieve some objective target state in E^{2n+1} we deal already with the subject of the control-like procedure. The introduction in this subject we leave to the next subchapter, where this will be needed also in view of some application of the synthesis.

For having the matter exhausted we should add that there is also the third group of questions, being close to the synthesis defined previously, i.e. realizing also some case of the inverse problem in respect to analytical research. Suppose namely, that we get the force field $F(q, \dot{q}, t)$ given already either entirely or partly and we are looking for the set of initial conditions $\Omega_{\alpha s}$ which would guarant given synthezability property. Say, another words, that the synthesis may proceed either with fixed known $\Omega_{\alpha s}$ or with $\Omega_{\alpha s}$ unknown, to be found as we have seen before, Q in the general kinetic synthesis problem is related to both F and $\Omega_{\alpha s}$. We should assume of course, that in the case, when Q is involved into F-field as an functional parameter or even the set of coefficients, the initial conditions may be treated as a special parameters to be chosen, for obtaining what required.

The idea of above kinetic synthesis of general mechanical systems has been introduced already in [6], [7].

Received the 28 XII 1964

Polish Academy of Sciences,
Warsaw, Poland

REFERENCES

1. Бернштейн С. Н, *Об уравнениях варяционного исчисления.* УМН, 1961, **VIII**, стр. 32—74.
2. Lanczos C., *The Variational Principle of Mechanics.* Univ. of Toronto Press, Toronto, 1949.
3. Rosenberg R. M., *An Optimum Rocket Trajectories and the Calculus of Variations.* Aerospace Engng., 1960, **19**, *10*, pp. 20-21.

4. Szebehely V. G., *The Generalized Universe Problem of Orbit Computation.* Proc. II Intern. Space-Sci. Symp., Florence, April 10–14, 1961, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1961.
5. Андреев Н. И., *Метод определения оптимальной динамической системы по критерию экстремума функционала представляющего заданную функцию от нескольких других функционалов.* Тр. I конгресса IFAC, М., 1960.
6. Skowroński J. M., *The Possibility of Synthesis of some Strongly, Nonlinear Mechanical Systems.* Nonlin. Vibr. Probl., 1960, **1**, pp. 59–68.
7. — *The Problem of Size of Limit Domain for Nonlinear Mechanical Systems.* Proc. II Intern. Conf. on Nonlin. Vibr., Warsaw, 1962, Nonlin. Vibr. Probl., 1963, **5**.
8. Skowroński J. M., Ziemba S., *Certain Properties of Mechanical Model of Structures.* Arch. Mech. Stos., 1959, **11**, *2*.
9. Skowroński J. M., *The Damping Influence on the Character of Strongly Nonlinear Mechanical Systems.* Nonlin. Vibr. Probl., 1960, **2**.
10. — *The Character of Motion of General Mechanical Systems,* Nonlin. Vibr. Probl., 1962, **4**, pp. 4–100.
11. — *Structural Investigation ...* Nonlin. Vibr. Probl., 1964, **6**.
12. — *Some Remarks about the Character of Motions...* Proc. IV Nat. US Congress of Appl. Mech., 1962, pp. 387–390.

SINTEZA CINETICĂ A SISTEMELOR MECANICE GENERALE (I)

(Rezumat)

Se expun probleme în conexiune cu sinteza cinetică a sistemelor mecanice generale modelate ca lanţuri de mase punctiforme, cuplate între ele prin resorturi riguros neliniare şi amortizoare pozitive şi în parte şi negative.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

УДК 621-231

К ЗАДАЧЕ МЕХАНО-ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ ИНТЕРЕСУЮЩИХ ТЕОРИЮ И ПРАКТИКУ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

II. УСТРОЙСТВО ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ВЫЧЕРЧИВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Д. МАНЖЕРОН и С. М. ГАМРЕКЕЛИ

Академику АН СССР И. И. Артоболевскому к его первому юбилею

1. Авторы, продолжая углубление плодотворного научного сотрудничества между специалистами Грузинского и Ясского политехнических институтов и учитывая недавно вышедшие в свет свои работы [1]...[3], и результаты работ Р. Богдана и К. Пелекуди [4], выкристаллизовавшиеся в их докторских диссертациях, излагают ниже данные касающиеся устройства для механического вычерчивания кинематических диаграмм четырехзвенных шарнирных механизмов.

2. Устройство состоит из двух моделей четырехзвенных шарнирных механизмов $OA_1B_1O_1$ и $OA_2B_2O_1$ действующих в разных плоскостях и имеющих общие центры вращения O и O_1 соответственно кривошипов r_i и коромысла R_i.

Для вычерчивания кинематических диаграмм по данным параметрам четырехзвенного механизма r_i, l_i, R_i, OO_1 и скорости вращения кривошипа n_i, с моделью, смонтирована дополнительная кинематическая схема для измерения передаточных отношений, а также механизм дифференцирования, связанный с взаимно-перпендикулярно движущимися звеньями, которые приводятся в движение посредством кривошипа и коромысла четырехзвенного механизма. В устройстве все звенья четырехзвенника можно регулировать по заданным параметрам, что дает возможность исследовать и строить кинематические диаграммы законов движения ведомого звена, т. е. коромысла.

Особенность этого устройства состоит в том, что здесь в качестве ведущего звена применено не только вращение кривошипа, но и движение коромысла R_i. Посредством кривошипа r_i и коромысла R_i приводятся в движение взаимно-перпендикулярные рамки, пересечение которых дает закон движения ведущего звена коромысла R_i.

На кривошипном валу O закреплены ползуны *4*, в которые вставлены свободные концы кривошипа *1* и закрепляющие винты *5*. Шатун *2* с кривошипом *1* и коромыслом *3* связан шарнирами A_1 и B_2. Длина шатуна l_i может регулироваться посредством ползуна *6* и винта *7*. Ползун *6* шарнирно сидит на пальце кривошипа A_1. Аналогично шатуну *2*, коромысло R_i регулируется ползуном *8* и фиксирующим винтом *9*. Ползун *8* свободно сидит на коромысловом стержне *3* и фиксируется винтом *9*, в то время как сам

ползун *8* шарнирно связан с шатунной точкой B_1. Коромысло *3* имеет центр качения O_1, который шарнирно связан с ползуном *10*. Ползун *10* свободно перемещается на направляющей, и винтом *11* жестко закрепляется место расположения точки O_1, т. е. регулируется длина стойки e_i.

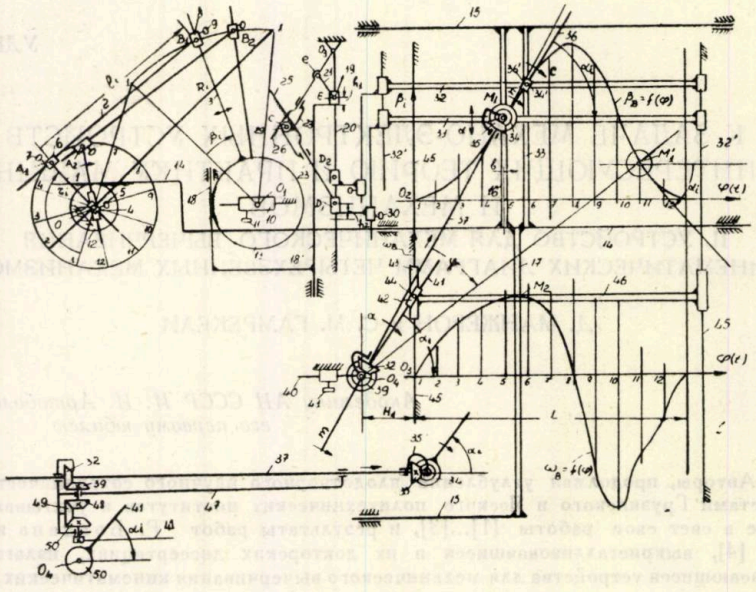


Рис. 1

Таким образом имеем две аналогичные кинематические цепи четырехзвенников в разных плоскостях, кривошипы которых отклонены друг от друга на 30°. Все основные параметры r_i, l_i, R_i, e_i четырехзвенного шарнирного механизма можно регулировать (конструктивно) в допускаемых пределах, что дает возможность исследовать большое количество разнообразных видов четырехзвенных кинематических цепей.

С кривошипом *O* жестко связана зубчатка *12*, которая вращается равномерно и приводит в движение рейку *14*. С рейкой *14* связана рама *15*, которая перемещается горизонтально в направляющих корпуса прибора.

С рамой *15* закреплены вертикальные звенья *16*, *33* и *17*, которые имеют продольные пазы и перемещаются вместе с рамой в горизонтальном направлении. Шаг между звеньями *16* и *33* зависит от общей длины, максимальной длины абсциссы h_0, т. е. от отрезка времени который отложен на координатной оси $O_2\varphi$.

Звено *17* отодвинуто от звена *16* на половину шага т. е. на 1/24 общей длины абсциссы *h*. Таким образом при равномерном вращении кривошипа *1*, рама *15* совместно с вертикально-расположенными звеньями *16*, *33* и *17* одновременно перемещаются в горизонтальном направлении (на схеме указана стрелкой *в*) слева направо. Звенья *16*,

33 и *17* перемещаются в одной плоскости и соответственно с ним в контакте находятся сопряженные звенья *31*, *32* и *46*, которые перемещаются во второй плоскости (по стрелке *a*).

При одновременном перемещении звеньев *16*, *33*, *31*, *17* и *46* во взаимно-перпендикулярных направлениях, точки пересечения M_1 и M_2 звеньев *31*, *16* и *17*, *46* дают соответствующие законы движения коромысла, т. е. угол поворота β и угловой скорости ω_B.

Звенья *31*, *32* и *46* перемещаются вверх и вниз и аналогично движения коромысла R_i совершают полный период качания. На коромыслах *3* жестко закреплена шестерня *13*, которая приводит в движение рейку *18*. В некоторых случаях угол качания коромысла оказывается очень малым, поэтому здесь необходимо увеличить передаточное отношение не нарушая закон движения коромысла. Для этого мы применяем пантограф $O_3eECД_1$. В этом механизме, при перемещении точки E на расстояние h_1, соответствует перемещение точки $Д_1$ на расстояние h_2, причем соблюдается следующее условие: $O_3e = eE$ и $O_3C = CД_1$.

Между длинами звеньев механизма и перемещениями h_1 и h_2 шарнирных точек E и $Д_1$ ползунов *19* и *24* имеется следующая зависимость $h_1/h_2 = O_3e/O_3C$.

При регулировании размеров O_3C можно изменить ход h_2 ползуна $Д_1$ по заданной величине в зависимости от масштабов перемещения, т. е. угла поворота β_i коромысла R_i, который отложен на ординатной оси Oy (координатная система $\beta O_3 \varphi$).

В точке O_3 шарнирно закреплено звено *22*, свободный конец которого заканчивается рейкой *26*. В точке *e* звена *22* шарнирно связан поводок *21*. На поводке *21* шарнирно закреплен ползун *19*, который свободно скользит на неподвижной направляющей *20*. Здесь соблюдено равенство звеньев $O_3e = eE$.

На направляющей *20* свободно сидит также второй ползун *24*. Ползун *24* связан шарниром $Д_1$ со звеном *23*, свободный конец которого заканчивается рейкой *25*. Зубчатые рейки *25* и *26* сопряжены с регулировочной шестерней (шарниром) *29* и они совместно связаны серьгами *23* и *28*.

При этом необходимо соблюдать равенство звеньев $O_3C = CД_1$. В зависимости от передаточного отношения можно посредством вращения зубчатки *29* одновременно регулировать размеры звеньев O_3C и $CД_1$, соблюдая при этом их равенство. Это даст возможность увеличить или уменьшить ход h_2 ползуна *24* относительно хода h_1 ползуна *19*.

Рейка *18* связана с ползуном *19*, а с ползуном *24* и винтом *30* связано горизонтально расположенное звено *31*. Звено *31*, которое перемещается в вертикальном направлении, свободно сидит на направляющей стойке *32*. Аналогичным устройством перемещается и звено *32*; последнее находится в другой плоскости, которая не мешает передвижению звена *31*. Одновременное перемещение звеньев *31* и *16* по стрелке указанной на схеме (стрелка *a* и *в*) и точки их пересечения M_1 приводит к описыванию кривой $\beta = f_1(\varphi)$ выражающей закон движения коромысла R_i.

Для дифференцирования этой кривой, в точке M_1 шарнирно закреплена коническая шестерня *34*. А в точке *35'* пересечения звеньев *32* и *33* шарниром *36* закреплен ползун *34'*. В ползуне *34'* свободно скользит поводок *36'*, который жестко связан с конической шестерней *34*. При относительном движении звеньев *31*, *32*, *16* и *33* свободный поводок *36* принимает вполне определенное положение. Он отклоняется от горизонтальной линии на угол α_i; тангенс этого угла дает среднее значение угловой скорости коромысла R_i в данном положении механизма. Для вычерчивания законов движения угловой скорости коромысла, необходимо угол наклона α_i перенести в другую неподвижную точку O_4 рядом

со второй координатной системой $\omega_B O_3 \varphi$. Подвижная точка M_1 и неподвижная точка O_4 связаны друг с другом дифференциальным механизмом (см. рис. 1).

С конической шестерней *34* сопряжена вторая коническая шестерня *35*, последняя жестко связана с валом *37*. Конические шестерни *34* и *35* связаны друг с другом серьгой *35*. При перемещении точки M_1 по кривой $\beta_B = f_1(\varphi)$, вал *37* совершает сложное плоское движение: поступательное движение вдоль своих осей и вращательное относительно точки O_4. Кроме этого вал *37* имеет вращательное движение вокруг своей оси. Валу *37* даются четыре возможных перемещения. Вращение вала *37* относительно своей оси вызвано изменением угла α_i поворота звена *36*. С поворотом свободного поводка *36* поворачиваются конические шестерни *34* и *35* и вместе с ними вал *37*. Передаточное отношение между коническими шестернями *34* и *35* равно единице.

В точке O_4 расположен механизм дифференциала. Свободный конец вала *37*, который проходит в точке O_4, имеет продольный паз для скольжения шпонки. На валу *37* (см. рис. 1) скользящей шпонкой надета коническая шестерня *32*, которая связана с зубчаткой *39*. Эти конические зубчатки связаны с корпусом дифференциала *47*. В корпусе *47* вмонтированы три конические шестерни *48*, *49* и *50*. Зубчатка *48* жестко связана с зубчаткой *39* и их ось свободно вращается в корпусе *47*. Коническая шестерня *50* жестко связана со звеном *41*, которая относительно координатной системы дает аналогичный угол наклона α_i звена *36*.

Конические шестерни *48* и *50* связаны друг с другом паразитной конической шестерней *49*, которая свободно сидит на корпусе *47* и меняет направление вращения шестерен *48* и *50*.

В зависимости от радиусов кривизны кинематической диаграммы $\beta = f(\varphi)$ для удобного выбора масштаба угловой скорости необходимо изменить полюсное расстояние H_1. Для этого шарнирную точку O_4 звена *40* можно переместить в неподвижных направляющих корпуса устройства и зафиксировать винтом *41*.

Звено *46* жестко связано с ползуном *43*. Ползуны свободно сидят на неподвижной направляющей *45*. Ползун *42* шарниром *44* связан с ползуном *43*. Свободный поводок *41* свободно скользит в ползуне *42*. В зависимости от положения свободного поводка *41* (его условно можно назвать касательным звеном), шарнирная точка *44*, т. е. звено *46* займет вполне определенное положение. Совместное движение звеньев *46* и *17* и точка M_2 их пересечения вычерчивает кривую $\omega_B = f_2(\varphi)$ угловой скорости коромысла четырехзвенного механизма.

Для устойчивости всей системы устройства, можно применить симметрично расположенные кинематические цепи, механизмы параллелограммов передающие движение обоим концам подвижных звеньев *31*, *32*, *46*, *16*, *33* и *17*.

Как видно из принципиальной схемы устройства, механическое построение законов движения углов поворота и угловой скорости коромысла производится следуя графическому построению и дифференцированию кинематической диаграммы $\beta_B = f_1(\varphi)$ ведомого звена R_i.

Аналогично механическому вычерчиванию закона движения угловой скорости коромысла, можно получить и кривую $\varepsilon_B = f_3(\varphi)$ ускорения (углового) коромысла R_i. В этом случае необходимо добавить к устройству еще одну подобную модель четырехзвенного механизма, чтобы для вычерчивания законов перемещения коромысла имелись бы три подвижные точки кривошипов A_1, A_2 и A_3, с которыми соответственно будут сопряжены три положения коромысел. Углы между кривошипами остаются прежними, 30°. Все три подобные четырехзвенные механизма помещены в разных параллельных плоскостях и имеют общие центры вращения кривошипов и коромысел. В этом случае на первой координатной системе $\beta_1 O_3 \varphi$ будем иметь подвижные точки M_1, M_1' и M_1'', на второй

координатной системе — две подвижные точки M_2 и M_2' и наконец на третьей координатной системе $\varepsilon_B O_5 \varphi$ будем иметь одну подвижную точку M_3. Следовательно, необходимо два дифференциальных механизма для получения средней скорости и один дифференциальный механизм для получения углового ускорения звена коромысла четырехзвеного шарнирного механизма.

Преимущество устройства (прибора) заключается в том, что здесь сокращается время на трудоемкие графические построения и продифференцирование кинематических диаграмм. Повышается точность построения законов движения и дифференцирования. Устройство быстро настраивается по данным параметрам r_i, l_i, R_i, e_i четырехзвенного механизма и также быстро определяются постоянные и переменные масштабы K_μ кинематических диаграмм. После настройки прибора, при каждом повороте жестко связанных друг с другом кривошипов r_i, на столе прибора одновременно вычерчиваются все кинематические кривые перемещения и скорости.

Для определения истинной величины кинематических параметров механизма, можно использовать непрерывную бумажную ленту, на которой нанесены параллельные линии с шагом 1/12-ой общей длины L. Бумажная лента закрепляется на столе устройства (или же периодически перемещается во время настройки прибора), так чтобы начало крайней линии совпало с осью координат, т. е. крайним положением механизма. После вычерчивания кривых на такой бумаге, ординаты параллельных линий ограничивающиеся кинематическими кривыми и осью абсцисс дают отрезки векторов, которые будучи умноженными на соответствующие масштабы определяют истинное значение кинематических параметров, т. е. углов поворота, угловой скорости и углового ускорения коромысла.

3. Авторы, предлагая себе изложить в последующих заметках ряд других механоэлектронных устройств интересующих теорию и практику машин и механизмов [5], подчеркивают факт того, что рассмотренное устройство может быть применено в разных областях техники, в конструкторских бюро, в проектных организациях занимающихся задачами синтеза четырехзвенных механизмов, а также в высших учебных заведениях в качестве наглядного пособия по ТММ, в виде устройства для механического вычерчивания и дифференцирования законов движения ведомых звеньев четырехзвенных шарнирных механизмов.

Поступила 14 VI 1964 г.

Грузинский политехнический институт
г. Тбилиси, СССР
и
Ясский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Манжерон Д., Гамрекели С., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1—2*, pp. 303—312.
2. Mangeron D., Bogdan R., St. şi cerc. Mec. apl., Acad. R. P. R., 1958, **IX**, *4*, pp. 1093—1098.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, pp. 471—478.
4. Богдан Р., Пелекуди К., Калмачук Л., *Труды второго Всесоюзного совещания по ТММ. Динамика машин.* Машгиз, М., 1960, стр. 35—46.
5. Артоболевский И. И., Сб. *Итоги Второго совещания по ТММ*, АН СССР, М., 1958, стр. 6—23.

PROBLEMA DISPOZITIVELOR MECANO-ELECTRONICE INTERESÎND TEORIA ŞI PRACTICA MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR

II. Dispozitiv pentru trasarea mecanică a diagramelor cinematice referitoare la mecanisme articulate patrulatere

(Rezumat)

Autorii, urmînd studiile lor din cadrul problematicii menţionată în titlu, cultivată în Republica Socialistă România de R. Bogdan [4], prezintă un nou dispozitiv (fig. 1), deosebit de util în proiectarea mecanismelor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 531.314.2

ESTENSIONE DEL DOMINIO DI APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI LAGRANGE-MANGERON ALLO STUDIO DEI MOTI MECCANICI CONTINUI E DISCONTINUI (I)

DE

E. TOKACS, P. SIMA, A. ORĂNESCU, V. OLARIU,
G. MUNTEANU, T. GAFENCO e G. DELIU

1. Il lavoro del Prof. D. Mangeron consacrato all'elaborazione di un'infinità di equazioni di dinamica analitica dei sistemi olonomi ed anolonomi [1] è diventato quasi immediatamente classico [2]...[4]. L'utilizzazione sistematica della teoria delle funzioni generalizzate (distribuzioni) permette l'elaborazione di un metodo unitario di studio dei moti meccanici continui e discontinui.

2. In ciò che segue consideriamo un sistema meccanico (S) di masse variabili

$$m_s = \sum_{\mu=1}^{\Omega_s} m_{s\mu}(t) = \sum_{\mu=1}^{\Omega_s} \left\{ g_{s\mu}(t)\,[1 - H(t - \tau_{s\mu 1})] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{\gamma_{s\mu}} f_{s\mu j}(t)\,[H(t - \tau_{s\mu j}) - H(t - \tau_{s\mu, j+1})] + \varphi_{s\mu}(t)\,H(t - \tau_{s\mu, \gamma_{s\mu}+1}) \right\}, \tag{1}$$

ove con $t = \tau_{s\mu j}$ si sono notati i tempi in cui le funzioni rappresentative delle variazioni delle masse considerate presentano delle discontinuità mentre $g_{s\mu}(t)$, $f_{s\mu j}(t)$ e $\varphi_{s\mu}(t)$ sono funzioni continue e derivabili negli intervalli

$$(-\infty,\ \tau_{s\mu 1}],\ [\tau_{s\mu j},\ \tau_{s\mu, j+1}] \text{ e } [\tau_{s\mu, \gamma_{s\mu}+1},\ \infty),$$

rispettivamente, essendovi, come al solito,

$$H(t - \tau_{s\mu j}) = \begin{cases} 1, \text{ per } t > \tau_{s\mu j}, \\ 0, \text{ per } t < \tau_{s\mu j}, \end{cases} \tag{2}$$

la funzione di Heaviside. E ovvio, che nel caso in cui le funzioni $g_{s\mu}(t)$, $f_{s\mu j}(t)$ e $\varphi_{s\mu}(t)$ sono costanti uguali tra di loro, il sistema considerato risulta di masse invariabili.

Nell'ipotesi in cui il sistema (S) risulta olonomo ad h gradi di libertà, i vettori di posizione $\mathbf{r}_s$ dei punti costituenti di esso M_s risultano

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s(t, q_1, q_2, \ldots, q_h), \tag{3}$$

ove q_i, $(i = 1, 2, \ldots, h)$, sono coordinate generalizzate.

Pur sottolineando il fatto che le derivazioni si intendono nel senso della teoria delle distribuzioni, sia

$$T = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} m_s v_s^2 = T(t, q_1, q_2, \ldots, q_h; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_h) \tag{4}$$

l'energia cinetica del sistema (S). Poichè le masse costituenti lo (S) sono funzioni esclusivamente del tempo, mentre l'impulso subito dalla M_s è $\mathbf{h} = m_s \mathbf{v}_s$, se ne deducono le derivate parziali

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} m_s v_s^2\right) = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{h}_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial q_i}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} m_s v_s^2\right) = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{h}_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_i}, \tag{6}$$

ove si tenga conto dell'uguaglianza $\partial \mathbf{v}_s / \partial \dot{q}_i = \partial \mathbf{r}_s / \partial q_i$.

Poichè

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\mathbf{h}_s}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} \mathbf{h}_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial q_i}, \tag{7}$$

se ne ricava, ove si tiene conto della relazione (5),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\mathbf{h}_s}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} \tag{8}$$

e dunque, ponendo

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\mathbf{h}_s}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} = Q_i, \tag{9}$$

si ricavano le equazioni di Lagrange anche nel caso generale considerato:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, h). \tag{10}$$

3. Per la deduzione delle equazioni di Mangeron basta di far associare alle equazioni (10) le identità

$$(11)\qquad \frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} - \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i^{(1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i^{(1)}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i^{(1)}}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

ove si è posto $T^{(m)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T^{(m-1)}$, $q_i^{(m)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i^{(m-1)}$.

Tenendovi conto delle (10), (11) si perviene, anche nelle ipotesi assai generali considerati, alle equazioni di Mangeron, che si riducono nei casi particolari alle equazioni di Lagrange e Tzenoff ($m = 1$ oppure $m = 2$).

4. Nel caso in cui le masse costituenti il sistema (S) sono costanti, si ha

$$(12)\qquad \frac{d\mathbf{h}_s}{dt} = \mathbf{F}_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

ove con $\mathbf{F}_s$ si è notata la risultante delle forze attive agenti sul punto M_s. Allorchè i punti M_s, $(s = 1, 2, \ldots, n)$, hanno le loro masse variabili col tempo t, si ha

$$(13)\qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{h}_s}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_s + \sum_{\mu=1}^{\Omega_s} \mathbf{u}_{s\mu}\frac{\mathrm{d}m_{s\mu}}{\mathrm{d}t},$$

essendovi $\mathbf{u}_{s\mu}$ la velocità delle particole catturate (emesse) dal punto M_s tramite gli Ω_s getti. Tenendovi conto della (13), la (9) diviene

$$(14)\qquad Q_i = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{F}_s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\Omega_s} \mathbf{u}_{s\mu}\frac{\mathrm{d}m_{s\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i}$$

e si ottengono per conseguenza le equazioni di Lagrange-Mangeron per i sistemi con masse variabili col tempo.

In una nostra Nota susseguente saranno esposte alcune applicazioni dei risultati testè conseguiti.

Ricevuta il 23 VIII 1966

Istituto Minero di Petroşani,
Istituto Politecnico di Braşov,
Istituto Politecnico di Galaţi

BIBLIOGRAFIA

1. Манжерон Д., ИАН СССР, Мех. и Машиностр., 1961, *1*, стр. 27-28.
2. Добронравов В. В., Р. Ж. Мех., 1963, *9*.
3. Niang S., Thèses présentées à la Fac. Sci. Univ. de Dakar, 1964.
4. Tokacs E. e collab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3-4*, pp. 111-116.

EXTINDEREA DOMENIULUI DE APLICAȚIE A ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE-MANGERON LA STUDIUL MIȘCĂRILOR MECANICE CONTINUE ȘI DISCONTINUE (I)

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare lucrarea prof. D. Mangeron [1], devenită repede clasică [2]...[4], extind, în vederea aplicațiilor ulterioare, ecuațiile lui Lagrange-Mangeron la cazul sistemelor mecanice de mase variabile de forma (1), subliniind totodată faptul că în raționamentele expuse se folosesc sistematic proprietățile funcțiilor generalizate (distribuții).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 532.5

FORMES DE DÉCOLLEMENT DE LA COUCHE LIMITE TRIDIMENSIONNELLE

PAR

ERNEST A. EICHELBRENNER

1. Introduction

1. 1. En deux dimensions, le décollement d'une couche limite est provoqué par un gradient de pression qui ne peut être surmonté par l'écoulement près d'une paroi solide à cause de la dissipation d'énergie cinétique sous l'action des forces de viscosité. Le fluide doit alors quitter la paroi pour rencontrer un gradient de pression moins défavorable [1].

1. 2. En absence de gradients de pression dans l'écoulement „extérieur" (non visqueux), aucun décollement ne peut se produire. Ceci est vrai aussi bien dans le cas de la plaque plane que pour le disque tournant dans un fluide à repos.

1. 3. Des généralisations du décollement bidimensionnel aux cas d'écoulements à trois dimensions ont été proposées par plusieurs auteurs; la partie essentielle de ces généralisations était la définition de la ligne de décollement sur l'obstacle décrite soit comme limite asymptotique, soit comme enveloppe de „lignes de frottement pariétales" [1], cf. la revue critique du problème dans [2].

1. 4. Aucune étude systématique n'a jusqu'ici été entreprise, à la connaissance de l'auteur, pour généraliser les écoulements sans gradients de pression aux configurations tridimensionnelles. Il paraît, cependant, qu'une telle étude, dont on tracera les grandes lignes dans cette Note, puisse conduire à un critère permettant de distinguer les lignes de décollement du type „enveloppe" de celles du type „limite asymptotique".

---

[1]) Lignes intégrales du champ de frottement à la paroi. D'après l'hypothèse de régularité de von Mises, ces lignes peuvent être interprétées comme limites de lignes de courant à la paroi. C'est pourquoi l'on les appelle aussi (improprement) „lignes de courant pariétales".

2. Les écoulements transversaux

2. 1. Les phénomènes visqueux que l'on peut observer dans les configurations à trois dimensions sont caractérisés par l'apparition, dans la couche limite près de parois solides, d'écoulements (généralement de faible intensité) de direction normale à celle du mouvement principal (soit de l'obstacle, soit du fluide).

2. 2. Des exemples bien connus de tels „écoulements transversaux" sont fournis, par exemple, par des lignes de courant, près de la paroi d'ellipsoïdes et de tores inclinés sur le vent, dont des visualisations, en laminaire et en turbulent, sont reproduites dans [3]. D'autres exemples sont donnés par les écoulements secondaires apparaissant sur des sphères tournantes [4] et à l'intérieur de dièdres [5].

2. 3. Les deux premiers exemples sont caractérisés par la présence de (forts) gradients de pression dans l'écoulement extérieur autour des obstacles qui sont à l'origine des écoulements transversaux, tandis que les deux derniers exemples ne possèdent pas de gradients de pression à l'extérieur de la couche limite. Les écoulements secondaires observés dans ces cas sont alors provoqués par des effets d'inertie ou de cisaillement. Des gradients de pression ne peuvent se manifester que comme effet du second ordre induits par les écoulements secondaires.

2. 4. Nous allons, par la suite, préciser un usage déjà établi par la convention que la dénomination „écoulement transversal" sera réservée à la première espèce (provoquée par des gradients de pression de l'écoulement extérieur) tandis que le nom d'écoulement secondaire sera utilisé pour la deuxième espèce (provoquée par des effets d'inertie ou de cisaillement).

3. Décollement et séparation

3. 1. Dans le cas de gradients de pression primaires [2]), certaines régions sont inaccessibles pour l'écoulement à l'intérieur de la couche limite:

3. 1. 1. Sur la surface de l'obstacle correspondant, il existe donc des points qui peuvent être rejoints par l'écoulement pariétal en amont et d'autres qui ne le peuvent pas. La ligne qui délimite ces deux groupes de points, est limite aussi bien des lignes de frottement pariétales provenant de l'amont que de lignes de frottement n'en provenant pas; elle est donc ligne de frottement pariétale elle-même („ligne de décollement") partageant les propriétés des deux fammilles et doit alors nécessairement contenir un point de divergence („point de décollement" d'après Oswatitsch [6]).

3. 1. 2. Pour des raisons de continuité il doit correspondre, à un tel point de décollement, un point de convergence ce qui entraine que la ligne de décollement n'est pas enveloppe de lignes de frottement mais ligne-

[2]) Déjà existants dans l'écoulement extérieur.

limite asymptotique. De plus, elle n'est normalement pas une géodésique de la surface.

3. 2. Dans le cas sans gradients de pression primaires, aucun décollement n'intervient (cf. les cas déjà mentionnés du disque tournant et de l'écoulement à l'intérieur d'un dièdre).

3. 2. 1. Par contre, une „collision" d'écoulements secondaires de direction opposée peut se produire, comme par exemple sur l'équateur d'une sphère (ou d'un ellipsoïde aplati) en rotation dans le fluide au repos [4] ou le long de la ligne médiane du plancher d'un conduit formé par deux dièdres symétriques et parallèles.

3. 2. 2. Encore pour des raisons de continuité, la couche limite quitte la surface le long d'une telle ligne („ligne de séparation") qui est, généralement, une géodésique de la surface. D'après une note de A. D. Young [7], une telle ligne géodésique est nécessairement enveloppe (dans le sens stricte) de lignes de frottement pariétales et diffère donc en caractère essentiellement des lignes de décollement.

3. 3. Les lignes de décollement et de recollement observées [8] sur des cônes et des ailes triangulaires, géodésiques de leurs surfaces, sont donc de ce deuxième type et devraient, par conséquent, être désignées comme „lignes de séparation" (ou de „rattachement"). Décollement et recollement seront réservés, comme expressions, aux phénomènes liés aux écoulements présentant des gradients de pression primaires.

4. Conclusions

4. 1. Deux phénomènes tridimensionnels du type de décollement sont discutés, dont une distinction par le langage est proposée:

4. 1. 1. Phénomènes de décollement et de recollement proprement dits, caractérisés par la présence de gradients de pression primaires. Une zone inaccessible à l'écoulement de la couche limite („zone décollée") est délimitée par des lignes-limites (lignes de „décollement" ou de „recollement") présentant des points de divergence et de convergence. Ces lignes ne sont pas de géodésiques de leur surface porteuse. L'écoulement dans la couche limite qui longe ces lignes-limites présente des composantes transversales d'une certaine intensité.

4. 1. 2. Phénomènes de séparation et rattachement, caractérisés par l'absence de gradients de pression primaires [3]. Aucune „zone séparée" n'existe dans les cas-types. Les lignes de séparation sont des géodésiques de la surface et forment, d'après A. D. Young, des enveloppes de lignes de frottement pariétales. Ces enveloppes ont généralement une direction

[3]) Des gradients de pression induits par l'écoulement secondaire dans la couche limite peuvent se présenter. Ils constituent nécessairement des effets du second ordre et peuvent provoquer des décollements „parasites" du premier type; leur étude est en cours.

voisine de celle de l'écoulement extérieur; l'écoulement dans la couche limite présente donc normalement des composantes secondaires de faible intensité.

4. 2. Les cas considérés ici sont „purs" dans le sens que les décollements observés sont produits uniquement soit par des gradients de pression primaires, soit par des collisions d'écoulements secondaires.

Il serait intéressant d'étudier des cas mixtes comme par exemple celui d'un ellipsoïde incliné sur le vent et animé d'un mouvement de rotation autour de son axe, ou celui de l'écoulement dans un conduit rectangulaire avec un gradient de pression imposé. Ce dernier cas est actuellement l'objet d'une recherche expérimentale et théorique à l'Université Laval.

Reçu le 25 XII 1966

Université Laval,
Québec, Canada

BIBLIOGRAPHIE

1. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*. McGraw Hill, 1960.
2. Rosenhead L., *Laminar Boundary Layers*. Oxford, 1963.
3. Eichelbrenner E. A., *Décollement et Recollement turbulent en trois dimensions*. La Reche che Aéronautique, 1961, *84*.
4. Banks W. H. H., *The Boundary Layer on a Rotating Sphere*. Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., 1965, **XVIII**.
5. Paradis M. A., *Couche limite turbulente à l'intérieur d'un dièdre*. Thèse, Université Laval, Québec, Canada, 1963.
6. Oswatitsch K., *Die Ablösungs-Bedingung von Grenzschichten. Grenzschicht-Forschung*. Springer-Verlag, 1958.
7. Young A. D., Comunication personnelle à l'auteur, (non publiée), 1961.
8. Rainbird W. J., Crabbe R. S., Jurewicz L. S., *A Water Tunnel Investigation of the Flow Separation about Circular Cones at Incidence*. N. R. C. Aeronautical Report *LR-385*, Ottawa, 1963.

FORMELE DE DESPRINDERE A STRATULUI LIMITĂ TRIDIMENSIONAL

(Rezumat)

Se pune în evidenţă o formă de desprindere a stratului limită tridimensional, care nu-şi are corespondenţă în două dimensiuni; se expune un criteriu permiţînd diferenţierea acestei forme de zmulgere de cele „clasice" (provocate de o distribuţie defavorabilă a presiunilor în scurgere).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 533.6

HYDROELASTIC DISTRIBUTION OF LOADS DUE TO LIFT IN THE CASE OF HYDROFOILS

BY

AUGUSTIN PETRE

We examine an elastic lifting surface fixed at its both ends. It is considered that both the lifting surface and the two supports can deform elastically, permitting incidence variations. At the initial position the lifting surface is considered as having the incidence i. Due to the deformations which appear as a sequence of the twisting load, the initial incidence changes and for velocities below the first critical divergence velocity, the phenomenon becomes convergent.

On disregarding the effects of the free surface, the hydrodynamic lift distributed on unit length of the lifting surface is of the form

$$p = qc\frac{dC_z}{di}(i + i_0 + \varphi), \tag{1}$$

where $q = \varrho V^2/2$ is the dynamic pressure, c is the profile chord, i_0 is the incidence due to the elastic deformations of the supports, C_z is the unitary lift coefficient proportional to the incidence for low values of this one.

The differential equation for the twisting of the lifting surface under the assumption of an approximate constant rigidity is

$$GI_d\frac{d^2\varphi}{dx^2} = qce\frac{dC_z}{di}(i + i_0 + \varphi), \tag{2}$$

where e is the distance between the pressure center and the elastic center.

Denoting

$$a^2 = \frac{qce}{GI_d}\frac{dC_z}{di}, \tag{3}$$

the solution of this equation may be written as

$$\varphi = A \sin ax + B \cos ax - i_0 - i.$$

Introducing the boundary conditions $x = 0$, $\varphi = 0$; $x = l$, $\varphi = 0$, we obtain

$$A = \frac{1 - \cos al}{\sin al}(i_0 + i), \quad B = i_0 + i, \tag{4}$$

such that after performing elementary calculations, the solution may be written as

$$\varphi = \left[\frac{\sin ax + \sin a(l - x)}{\sin al} - 1\right](i_0 + i). \tag{5}$$

Denoting by k the elastic constant of the two supports, we may write the equilibrum condition

$$ki_0 = \int_0^l qce_1 \frac{dC_z}{di}(i_0 + i + \varphi)\, dx, \tag{6}$$

where e_1 is the distance between the line of the pressure centers and the elastic line of the supports.

Taking into account the solution (5) we have

$$\frac{e}{e_1}\frac{kl}{GI_d} i_0 = 2al \frac{1 - \cos al}{\sin al}(i_0 + i). \tag{7}$$

From this equation one may obtain the value of the elastic deformation of the supports. This deformation is

$$i_0 = \left[\frac{e}{e_1}\frac{kl}{GI_d}\frac{\sin al}{2al(1 - \cos al)} - 1\right]^{-1} i. \tag{8}$$

The lift p may be written by considering (1), (5) and (8), under the form

$$p = qc \frac{dC_z}{di}\left[1 - \frac{2ale_1(1 - \cos al)}{kle \sin al} GI_d\right]^{-1} \frac{\sin ax + \sin a(l - x)}{\sin al} i, \tag{9}$$

which represents the problem solution. On comparing this lift to that resulting on a rigid lifting surface, rigidly fixed, whose value is

$$p_{\text{RIGID}} = qc \frac{dC_z}{di} i, \tag{10}$$

there results, as a function of the sign of e, an increase of the lift for $e > 0$, which is to be taken into account in the design of such lifting surfaces. From the lift expression for elastic lifting we observe that if

$$\frac{2\,ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}=1, \tag{11}$$

the lift assumes infinite values. The velocity which lead to this situation is the critical divergence velocity.

It is of interest to calculate the maximum loading of such a lifting surface by assuming it either rigid or elastic.

It may be easily observed that the most important loading of such a surface is that due to bending. For a rigid lifting surface the maximum bending moment has the expression

$$M_{\text{RIGID}}=\frac{qcl^2}{8}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i, \tag{12}$$

where l denotes the lifting surface span.

For the case of elastic lifting surface, elastically fixed, we must calculate first the expression of the shearing force in a section situated at the distance x from the supports.

The expression of this shearing force is

$$T_x=\left\{\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\sin ax+\sin a\,(l-x)}{\sin al}\,\mathrm{d}x-\right.$$
$$\left.-\int_0^x\frac{\sin ax+\sin a\,(l-x)}{\sin al}\,\mathrm{d}x\right\}qc\left[1-\frac{2\,ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i \tag{13}$$

and

$$T_x=\frac{\cos ax-\cos a\,(l-x)}{a\sin al}qc\left[1-\frac{2\,ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i. \tag{14}$$

The bending moment has the expression

$$M_{x\text{EL}}=\int T_x\,\mathrm{d}x=$$

$$=qc\left[1-\frac{2\,ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}i\int\frac{\cos ax+\cos a\,(l-x)}{a\sin al}\,\mathrm{d}x$$

and

$$M_{x_{\text{EL}}}=qc\left[1-\frac{2\,ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\left[\frac{\sin ax+\sin a\,(l-x)}{a^2\sin al}i+C_1\right]. \tag{15}$$

Since the bending moment on the initial support is equal to zero we have $C_1=-i/a^2$ such that the expression of the bending moment becomes

$$(16)\qquad M_{x_{EL}}=qc\left[1-\frac{2ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{dC_z}{di}\left[\frac{\sin ax+\sin a\,(l-x)}{\sin al}-1\right]\frac{i}{a^2}.$$

From the expression of the shearing force we observe that the maximum bending moment is on the section $x=l/2$ and its value is

$$(17)\qquad M_{x_{EL}}=qc\left[1-\frac{2ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{dC_z}{di}\frac{1-\cos al/2}{a^2\,l^2\cos al/2}i.$$

By comparing this value of the maximum bending moment to that obtained on the rigid case (12), we may deduce

$$(18)\qquad \frac{M_{x_{EL}}}{M_{x_{RIGID}}}=8\left[1-\frac{2ale_1\,GI_d\,(1-\cos al)}{kle\sin al}\right]^{-1}\frac{1-\cos al/2}{a^2\,l^2\cos al/2}.$$

The value of this ratio represent the increase of loading due to hydroelasticity. It may be observed that this increase depends on velocity and elastic and hydrodynamic characteristics of the considered system.

Received the 17 III 1967

Institute of Applied Mechanics „Tr. Vuia", Academy of the Socialist Republic Romania

REFERENCES

1. Bisplinghoff L. R., Ashley H., Halfman R., *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1955.
2. Petre A., *Teoria Aeroelasticității. Statica*. Ed. Acad. R. S. România, Buc., 1966.

STUDIUL DISTRIBUȚIILOR SARCINILOR ÎN CONDIȚII DE HIDROELASTICITATE

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei a contribuțiilor proprii și ale altora în domeniul aeroelasticității [1], [2], stabilește un număr de rezultate relative la distribuția sarcinilor într-o suprafață elastică pe suport fluid (hidric) cu reazeme fixe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 532.51

INVARIANT FORMS AND DISSIPATION FUNCTIONS FOR VARIOUS NON-NEWTONIAN FLUIDS

BY

J. N. KAPUR and R. C. GUPTA

1. Introduction

Non-Newtonian fluids have received a great deal of importance in the fluid mechanics literature of the last decade, partly because of the many important uses of these fluids in industry and partly because of their having given to us a number of fascinating mathematical problems. Their study has thrown a good deal of light on non-linear continuum mechanics and has helped to some extent to bridge the gulf between solid mechanics and fluid mechanics.

Since non-Newtonian fluids are increasingly encountered in chemical industry, chemical engineers have studied empirical models for various fluids (cf [1]...[3]). In most of the cases they have stated the constitutive equation only for the particular case when the symmetry of the flow conditions make all except one component of stress tensor and one component of rate of strain tensor zero. It is interesting to generalise these models to invariant forms. In fact it appears that for each empirical model, we can have a large number of feasible invariant forms. The problem of choosing the physically correct form out of the many mathematical forms can be decided only by performing experiments in which more than one component of stress and strain-rate tensors are non zero and comparing the result of the theory with those of experiments.

In the present paper, we discuss the invariant forms for a number of Non-Newtonian fluids.

An other important problem for these fluids is to determine restriction on the functional forms given by the constitutive equation. These may be due to one or more of the following considerations:

(i) dissipation function must be non-negative through out for all possible strain rates;

(ii) some observed phenomena like Weissenberg and Merrington effects should be explained;

(iii) the intuitive consideration that the tension across a plane is greatest/least whenever the streching in the direction of normal to the plane is greatest/least;

(iv) a universal phenomena predicted by a theory (like $\tau_{xx} \neq \tau_{yy}$ for Reiner-Rivlin fluids) should be observed in some fluids.

Consideration (i) has been partly considered in [4], where it has been prove that: a) there exists no incompressible fluid of second order and b) the most general second order compressible fluid is a quasi-linear fluid.

The consideration (i) has been further considered in the present paper to obtain the restrictions on functional forms given by the constitutive relations for various non-Newtonian fluids.

2. Invariant forms

In this section we attempt to generalise empirical models for various non-Newtonian fluids to invariant forms. The fluids under consideration are: a) Power-law fluids, b) Bingham plastics, c) Ellis fluids, d) Reiner-Philippoff fluids, e) Prandtl fluids, f) Eyring fluids, g) Powell-Eyring fluids, h) Williamson fluids and i) Rabinowitsch-type fluids.

a) *Power-law Fluids*

When there is only one non-zero component τ of stress tensor and only one non-zero component e of strain-rate tensor, the power law fluids are governed by the constitutive equation

$$\tau = ke^n, \tag{2.1}$$

where k and n are called consistency and flow behaviour indices. Bird [1] generalised this law to the invariant form

$$\tau_{ij} = \mu \left(\sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} e_{lm}\, e_{ml} \right)^{(n-1)/2} e_{ij} \,. \tag{2.2}$$

The general Reiner-Rivlin fluids are characterised by

$$\tau_{ij} = \alpha_0\, \delta_{ij} + \alpha_1\, e_{ij} + \alpha_2\, e_{ik}\, e_{kj}, \tag{2.3}$$

where α_0, α_1 and α_2 are functions of the three invariants I_1, I_2, I_3, of rate of strain tensor e_{ij}. Birds generalisation consists in choosing $\alpha_0 = 0 = \alpha_2$, $\alpha_1 = \text{const}.I_2^{(n-1)/2}$. This is a convenient generalisation which reduces to (2.1) as a particular case.

For incompressible fluids $I_1 = 0$ and for two-dimensional flows and for all those motions for which there is only one non-zero component of strain rate $I_3 = 0$. Thus if we choose some considerations which can govern the choice of $\alpha_1 (I_1, I_2, I_3)$ are (i) α_1 should be real and such that $\tau_{ij}\, e_{ij} > 0$, (ii) where there is only one non-zero strain-rate component e, α must be proportional to e^{n-1}, where $n > 0$.

If

$$\alpha_1 = \sum\sum\sum A_{rst}\, I_1^r\, I_2^s\, I^t, \tag{2.4}$$

then for $r = 0 = t$, $s = (n-1)/2$ we get Bird's invariant form, but for incompressible fluids, α_1 can be a function of I_2 and I_3 and we can choose

$$\alpha_1 = \sum_m (a_{2m} I_2^{3m} + a_{3m} I_3^{2m})^{(n-1)/6m}. \tag{2.5}$$

Since I_2 is essentially positive and I_3 can be positive or negative, we let m take integral values and $a_{2m} > 0$, $a_{3m} > 0$, then a more general generalisation of power law model is

$$\tau_{ij} = \mu \sum_m (a_{2m} I_2^{3m} + a_{3m} I_3^{2m})^{(n-1)/6m} e_{ij}. \tag{2.6}$$

This includes Bird's generalisation as a particular case.

Another possible generalisation is

$$\tau_{ij} = [\mu I_2^{(n-1)/2} + f(I_3, I_2)]\, e_{ij}, \tag{2.7}$$

where

$$f(0, I_2) = 0 \tag{2.8}$$

e. g. we can choose

$$f(I_3, I_2) = \sum_{r=1}^{N} f_r(I_2)\, I_3^r, \tag{2.9}$$

where N is any integer and $f_r(I_2)$ are any arbitrary continuous functions which remain finite and non-negative for positive values of their argument.

b) *Bingham Plastics*

The empirical relation is expressed as

$$\tau = \pm \tau_0 + \mu e, \tag{2.10}$$

where τ_0 is the yield value, a quantity equal to zero in Newtonian fluids.

The following form has been used by Oldroyd [6]:

$$e_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu} \dfrac{\sqrt{\mathcal{J}_2} - \tau_0}{\sqrt{\mathcal{J}_2}} \tau_{ij}, & \sqrt{\mathcal{J}_2} > \tau_0, \\ 0, & \sqrt{\mathcal{J}_2} < \tau_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

where

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} S_{ij} S_{ji} \tag{2.12}$$

and S_{ij} are the components of the deviatoric stress. For a single component case, (2.11) obviously reduces to (2.10). This is the simplest generalisation

we can have since it is invariant in form and allows flow only when a certain combination of stresses exceeds a certain yield value.

We can use a more general form

$$e_{ij} = \begin{cases} \dfrac{f_1(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) - \tau_0}{f_2(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)} \tau_{ij}, & f_1(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) > \tau_0, \\ 0 \text{ otherwise}, \end{cases} \tag{2.13}$$

where

$$f_1(\tau^2, 0) = \tau = f_2(\tau^2, 0). \tag{2.14}$$

Obviously we can have a large number of choices of the functions f_1, f_2.

c) *Ellis Fluids*

The empirical relation is

$$e = \varphi_0 \tau + \varphi_1 \tau^n. \tag{2.15}$$

The simplest generalisation is

$$e_{ij} = \varphi_0 \tau_{ij} + \varphi \mathcal{J}_2^{(n-1)/2} \tau_{ij}. \tag{2.16}$$

A generalisation of greater degree is

$$e_{ij} = \varphi_0 \tau_{ij} + \varphi_1 f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) \tau_{ij}, \tag{2.17}$$

where

$$f(\tau^2, 0) = \tau^{n-1}. \tag{2.18}$$

d) *Reiner-Phillippoff Fluids*

The empirical relation is

$$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau/\tau_0)^2} \right] e. \tag{2.19}$$

Its simplest generalisation is

$$\tau_{ij} = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \dfrac{1}{2\tau_0^2} \left(\sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \tau_{lm} \tau_{ml} \right)} \right] e_{ij}. \tag{2.20}$$

A generalisation of greater degree is

(2.21) $$\tau_{ij} = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)/\tau_0^2}\right] e_{ij},$$

where

(2.22) $$f(\tau^2, 0) = \tau^2.$$

e) *Prandtl Fluids*

The empirical relation is

(2.23) $$\tau = A \sin^{-1} \frac{e}{c}.$$

A generalisation is

(2.24) $$\tau_{ij} = A \sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\sqrt{I_2/2}\right)\frac{e_{ij}}{\sqrt{I_2/2}}.$$

An alternative generalisation is

(2.25) $$e_{ij} = C \sin\left(\frac{1}{A}\sqrt{\mathcal{J}_2}\right)\frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\mathcal{J}_2}}.$$

Corresponding generalisations of greater degree are

(2.26) $$\tau_{ij} = A \sin^{-1}\left[\frac{1}{c} f_1(I_2, I_3)\right]\frac{e_{ij}}{f_2(I_2, I_3)},$$

where

(2.27) $$f_1(2e^2, 0) = e = f_2(2e^2, 0)$$

and

(2.28) $$e_{ij} = c \sin\left[\frac{1}{A}\varphi_1(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)\right]\frac{\tau_{ij}}{\varphi_2(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)},$$

where

(2.29) $$\varphi_1(\tau^2, 0) = \tau = \varphi_2(\tau^2, 0).$$

f) *Eyring Fluids*

Empirical relation for this model is

(2.30) $$\tau = \frac{1}{B} e + c \sin\frac{\tau}{A}.$$

Possible generalisations are

(2.31) $$\tau_{ij} = \frac{1}{B} e_{ij} + c \sin\left(\frac{\sqrt{\mathcal{J}_2}}{A}\right)\frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\mathcal{J}_2}}, \quad \tau_{ij} = \frac{1}{B} e_{ij} + c \sin\left(\frac{\sqrt{\mathcal{J}_2}}{A}\right)\frac{e_{ij}}{\sqrt{I_2/2}}.$$

Generalisations of comparatively greater degree are

$$\tau_{ij} = \frac{1}{B} e_{ij} + c \sin\left[\frac{1}{A}\varphi_1(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)\right] \frac{\tau_{ij}}{\varphi_2(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)}, \tag{2.32}$$

where

$$\varphi_1(\tau^2, 0) = \tau = \varphi_2(\tau^2, 0) \tag{2.33}$$

and

$$\tau_{ij} = \frac{1}{B} e_{ij} + c \sin\left[\frac{1}{A} f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)\right] \frac{e_{ij}}{g(I_2, I_3)}, \tag{2.34}$$

where

$$f(\tau^2, 0) = \tau, \tag{2.35}$$

and

$$g(2e^2, 0) = e. \tag{2.36}$$

g) *Powell-Eyring Fluids*

These are characterised by the empirical model

$$\tau = Ae + B \sinh^{-1}(Ce). \tag{2.37}$$

Simpler generalisations are

$$\tau_{ij} = Ae_{ij} + B \sinh^{-1}(C\sqrt{I_2/2}) \frac{e_{ij}}{\sqrt{I_2/2}}, \quad \tau_{ij} = Ae_{ij} + B \sinh^{-1}(C\sqrt{I_2/2}) \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\mathcal{J}_2}}. \tag{2.38}$$

Generalisations of greater degree are

$$\tau_{ij} = Ae_{ij} + B \sinh^{-1}[C f_1(I_2, I_3)] \frac{e_{ij}}{f_2(I_2, I_3)}, \tag{2.39}$$

where

$$f_1(2e^2, 0) = e = f_2(2e^2, 0) \tag{2.40}$$

and

$$\tau_{ij} = Ae_{ij} + B \sinh^{-1}[C \varphi(I_2, I_3)] \frac{\tau_{ij}}{\psi(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)}, \tag{2.41}$$

where

$$\varphi(2e^2, 0) = e \tag{2.42}$$

and

$$\psi(\tau^2, 0) = \tau. \tag{2.43}$$

h) *Williamson Fluids*

Empirical relation for these fluids is

$$\tau = \frac{Ae}{B+e} + \mu_\infty e. \tag{2.44}$$

Possible generalisations are

$$\tau_{ij} = \frac{Ae_{ij}}{B+\sqrt{I_2/2}} + \mu_\infty e_{ij}, \quad \tau_{ij} = \frac{Ae_{ij}}{B+f(I_2,I_3)} + \mu_\infty e_{ij}, \tag{2.45}$$

where

$$f(2e^2, 0) = e. \tag{2.46}$$

i) *Rabinowitsch-type Fluids* [5]

Empirical relation is

$$e = \frac{\tau}{\mu_0} + \sum B_q \tau^{2q+1}. \tag{2.47}$$

Generalisations are

$$e_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\mu_0} + \sum B_q \mathcal{J}_2^q \tau_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\mu_0} + \sum B_q f_q(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)\tau_{ij}, \tag{2.48}$$

where

$$f_q(\tau^2, 0) = \tau^{2q}. \tag{2.49}$$

3. Dissipation Function

In this section we shall evaluate the dissipation function $\Phi\ (= \tau_{ij} e_{ij})$ for all the models discussed in the preceding section, and examine its sign for all possible deformation rates.

a) *Power-law Fluids*

The dissipation function is given by

$$\Phi = \tau_{ij} e_{ij} = \mu \left[\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} e_{lm}\, e_{ml}\right]^{(n-1)/2} e_{ij}\, e_{ji} = \mu \left[\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} e_{lm}\, e_{ml}\right]^{(n+1)/2}. \tag{3.1}$$

This is essentially non-negative if $\mu > 0$.

b) *Bingham Plastics*

For these

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\frac{\sqrt{\mathcal{J}_2} - \tau_0}{\sqrt{\mathcal{J}_2}} 2\mathcal{J}_2, & \text{when } \sqrt{\mathcal{J}_2} > \tau_0, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

This is positive if $\mu > 0$. This restriction holds good even if we consider negative square root of $\mathcal{J}_2$.

c) *Ellis Fluids*

For this model

$$\Phi = \varphi_0 \tau_{ij} \tau_{ji} + \varphi_1 f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) \tau_{ij} \tau_{ji}. \tag{3.3}$$

If $f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) > 0$, Φ is positive for $\varphi_0 > 0$ and $\varphi_1 > 0$.

d) *Reiner-Philippoff Fluids*

From (2.22) we obtain

$$\Phi = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)/\tau_0^2} \right] e_{ij} e_{ji}. \tag{3.4}$$

If $f(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) > 0$, then Φ is essentially non negative if $\mu_0 > \mu_\infty > 0$.

e) *Prandtl Fluids*

For both the forms (2.25) and (2.26) the dissipation function is positive definite if the material constants A and C are positive.

f) *Eyring Fluids*

For the model characterised by (2.32)

$$\Phi = \frac{e_{ij} e_{ji}/B}{1 - \frac{C}{A}\frac{\sin(\sqrt{\mathcal{J}_2}/A)}{\sqrt{\mathcal{J}_2}/A}}. \tag{3.5}$$

This is essentially positive definite for positive values of parameters A, B and $C < A$. This is also positive if A and B are positive and C is negative.

The dissipation function for the fluids whose rheological relation is given by (2.31_2) is easily seen to be positive for positive values of A, B and C. The restriction $C<A$ is not necessary for this model.

g) *Powell-Eyring Fluids*

From (2.38_1)

$$\Phi = \left[A + B\frac{\sinh^{-1}(C\sqrt{I_2}/2)}{\sqrt{I_2}/2}\right] e_{ij}\, e_{ji}. \tag{3.6}$$

This is positive for positive values of A, B and C.

From (2.38_2)

$$\Phi = \frac{A e_{ij}\, e_{ji}}{1-(B/\sqrt{\mathcal{J}_2})\sinh^{-1}(C\sqrt{I_2}/2)} \tag{3.7}$$

This is positive definite for $A>0$, $B<0$, $C>0$ or for $A>0$, $B>0$, $C<0$.

h) *Williamson Fluids*

For (2.45_1), Φ will be non-negative if $A>0$, $B>0$, $\mu_\infty>0$.

i) *Rabinowitsch-type Fluids*

For (2.48_1)

$$\Phi = \frac{\tau_{ij}\,\tau_{ji}}{\mu_0} + \sum B_q \mathcal{J}_2^q\, \tau_{ij}\,\tau_{ji}.$$

This is essentially positive for $\mu_0>0$ and all $B_q>0$.

Received the 23 VIII 1965

Indian Institute of Technology,
Kanpur, India

REFERENCES

1. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N., *Transport Phenomena.* J. Wiley & Sons, 1960.
2. Wilkinson W. L., *Non-Newtonian fluids.* Pergamon Press, 1960.
3. Fredrickson A. G., *Principles and Applications of Rheology.* Prentice-Hall, Inc., 1964.

4. Eringen A. C., *Non-Linear Theory of Continuous Media*. McGraw Hill Book Co., 1962.
5. Rotem Z., J. Appl. Mech., Trans ASME, 1962, **29**, p. 421.
6. Oldroyd J. G., Proc. Camb. Phil. Soc., 1947, **43**, pp. 100 — 105.

FORME INVARIANTE ŞI FUNCŢII DISIPATIVE PENTRU FLUIDE NON-NEWTONIENE

(Rezumat)

Autorii stabilesc forme invariante pentru diferite modele empirice relative la fluide non-Newtoniene.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 621.82

CONTRIBUTIONS CONCERNANT LES MÉTHODES NOUVELLES POUR L'ESSAI DES ROULEMENTS

I. MÉTHODE D'ESSAI DES ROULEMENTS SOUS CHARGE PROGRESSIVE ET CONTINUE

PAR

N. G. POPINCEANU et M. D. GAFIȚEANU

Comunication présentée à la Conférence de Mécanique, Bucarest, 27—30 Septembre 1965

1. Considérations générales

La durabilité et le taux de charge dynamique des roulements sont influencées par nombre de facteurs technologiques, constructifs et d'exploitation.

L'accroissement du taux de charge dynamique (par ex. celui de la durabilité) doit préoccuper tout d'abord le constructeur de roulements; cet accroissement peut être mis en évidence par des essais.

Les équations classiques de calcul des roulements, qui établissent une corrélation entre le taux de charge dynamique de base d'un lot de roulements, la durabilité de base et la charge [10], ont été déduites à la suite d'un très grand nombre d'essais effectués sur des lots de roulements, à l'aide des machines d'essais spécialement conçues, dans des conditions d'essai bien précisées, sous charge constante et continue.

Les essais des roulements effectués par la méthode classique sous charge constante, présentent quelques incovénients très importants, à savoir:

a) la durée de temps très grande, nécessaire pour les essais (pour l'essai d'un lot de 20 ... 30 roulements sont nécessaires aproximativement 4 000 ... 5 000 heures-machine, avec une perte considérable d'energie) ;

b) la dispersion appréciable des essais (constatée dans des conditions identiques d'essais) est due à l'influence nonuniforme des facteurs technologiques et constructifs cités ci-dessus. Dans ces conditions l'interprétation des résultats des essais avec une suffisante précision suppose un très grand nombre de roulements essayés.

En conclusion, les essais classiques ne peuvent pas suivre assez rapidement le contrôle de la production des roulements à fin d'améliorer leur qualité, avec des conséquences favorables quant au comportement dans l'exploitation,

Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes plus efficaces, plus rapides, qui permettront d'établir et de suivre des critériums d'amélioration de la qualité des roulements par rapport aux facteurs cités.

De nombreux chercheurs ont aussi indiqué nombre de possibilités permettant à accélérer les méthodes classiques d'essais dans le domaine des essais de fatigue des matériaux. On peut donner comme exemple les essais où l'on modifie l'amplitude du cycle de charge selon un certain programme

préétabli, les essais avec charge progressive continue ou en paliers, etc., [2], [6], [8], [9], [13]; on peut aussi tenir compte de quelques références [18] concernant une méthode d'essai avec interruption de la charge après la destruction d'un certain nombre d'eprouvettes.

Dans la littérature de specialité on constate à présent des tendences qui tentent à definir et à appliquer aux essais des roulements une méthode avec charge progressive [3], [4], [7], [15].

Dans ce qui suit: a) on précise les fondements théoriques, en complétant en même temps la méthode d'essai des roulements avec charge progressive et continue; b) on préconise et on applique aux essais des roulements la méthode d'essai avec charge progressive limitée et répétée et la méthode d'essai avec interruption après la destruction d'un nombre limité de roulements; c) on compare les différentes méthodes d'essai classiques, en précisant les avantages de leur utilisation.

2. Méthode d'essai sous charge progressive et continue

2. 1. Charge équivalente

Les essais des roulements sous charge progressive et continue sont basés sur les hypothèses suivantes [1], [17], [11]:

a) Pour chaque moment de la durée de vie d'un roulement correspond un certain état de détérioration.

b) On peut établir une équivalence entre une charge P_A qui pèse pendant N_A rotations sur un roulement et entre une autre charge P_B qui peserait pendant N_B rotations sur le même roulement si du point de vue physique la charge P_B aurait comme résultat le même état de détérioration que la charge P_A. Dans ce cas si L_B représente la durabilité du roulement (en rotations) sous la charge P_B, le roulement qui a fonctionné pendant N_A rotations sous la charge P_A, pourrait subir encore $L_B - N_B$ rotations sous la charge P_B comme si par avant il aurait tourné N_B rotations sous la charge P_B au lieu de N_A rotations sous la charge P_A.

c) L'état de détérioration cumulatif d'un roulement peut être mis en évidence par le paramètre:

$$A = \sum_{1}^{j} \frac{N_j}{L_j} \tag{1}$$

si le roulement a tourné pendant N_j rotations sous la charge P_j, où L_j représente les durabilités du roulement en rotations, respectivement sous les charges P_j.

d) Pour un roulement donné le taux de charge dynamique est une constante. Les essais des roulements et la dispersion des résultats de ces essais aboutissent à la conclusion que les roulements d'un lot ne sont pas identiques, le taux de charge dynamique en différant d'un roulement à l'autre.

La corrélation entre la durabilité, la charge et le taux de charge dynamique pour un roulement i qui appartient à un lot à essayer est donnée par [10], [11]

$$L_{ij} = \left(\frac{C_i}{P_{ij}}\right)^p, \tag{2}$$

ou : C_i — le taux de charge dynamique d'un roulement i du lot constitué par n roulements qu'on essaye (le taux de charge dynamique de base étant noté par C, en se référant au lot), L_{ij} — la durabilité du roulement i sous la charge P_{ij}, c'est-à-dire le nombre de rotations effectuées par le roulement sans qu'ils apparaissent des phénomènes de fatigue superficielle sur les faces de roulement.

Les valeurs de l'exposant p de l'équation (2) sont données ci dessous :

a) *charge constante :* contact ponctuel $p = 3$, contact linéaire $p = 3 \ldots 4$ (on admet [1]) $p = 3{,}33$) ;

b) *charge progressive et continue* [15] : contact ponctuel $p_k = 3{,}83$, contact linéaire $p_k = 4{,}5$.

La différence constatée entre les valeurs des exposants p et p_k pour charge constante et respectivement pour charge progressive et continue peut s'expliquer par le fait que dans le cas de la charge progressive et continue le microvolume de matériel dans lequel apparaissent les efforts unitaires de contact est situé à une distance de plus en plus grande par rapport à la surface de roulement, pendant l'augmentation de la charge.

Compe tenu de ces hypothèses on peut trouver pour le roulement i du lot à essayer une charge constante et continue P_{0i} équivalente quant à l'effet aux charges P_{ij} qui actionneraient pendant N_{ij} rotations si :

$$A = \sum_1^j \frac{N_{ij}}{L_{ij}} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_1^j N_{ij} = L_{0i}, \tag{3}$$

et si les charges P_{ij} qui actionnent sur le roulement pendant N_{ij} rotations porteraient à l'apparition des premières phénomènes de fatigue superficielle, tout comme l'action de la charge équivalente P_{0i} pendant L_{0i} rotations, (L_{0i} représente la durabilité du roulement sous la charge constante P_{0i}).

En notant :

$$a_{ij} = \frac{N_i}{L_{0i}} \tag{4}$$

et en considérant les équations (3) il résulte :

$$\frac{1}{L_{0i}} = \sum_1^j \frac{a_{ij}}{L_{ij}}. \tag{5}$$

---

[1]) Senigalliesi [2], pour des essais effectués sous charge constante, trouve les valeurs suivantes: a) contact ponctuel $p = 3{,}43$, b) contact linéaire $p = 4$.

On peut aussi écrire (hypothèse d)) $C_i = C_{0i}$ et par conséquent:

$$L_{0i} = \left(\frac{C_{0i}}{P_{0i}}\right)^{p_k} = \left(\frac{C_i}{P_{0i}}\right)^{p_k}. \tag{6}$$

Les équations (2), (5) et (6) fournissent:

$$P_{0i} = \left(\sum_1^j P_{ij}^{p_k} a_{ij}\right)^{1/p_k} = \left[\frac{1}{L_{0i}} \sum_1^j \left(P_{ij}^{p_k} N_{ij}\right)\right]^{1/p_k} \tag{7}$$

et:

$$P_{0i} = \left[\frac{1}{L_{0i}} \int_0^{L_{0i}} P_i^{p_k}(N_i)\, dN_i\right]^{1/p_k}. \tag{8}$$

Si la charge variable $P_i(N_i)$ est proportionelle avec le nombre de rotations effectuées, c'est-à-dire si:

$$P_i(N_i) = \alpha N_i, \tag{9}$$

par substitution dans l'equation (8) on peut obtenir la charge P_{0i} équivalente à la charge progressive et continue $P_i(N_i)$ pour le roulement i:

$$P_{0i} = \frac{\alpha L_{0i}}{(p_k + 1)^{1/p_k}}. \tag{10}$$

2. 2. Durabilité des roulements essayés sous charge progressive et continue

On peut écrire pour chaque roulement essayé sous charge constante la relation:

$$C_i = P_i L_i^{1/p} \tag{11}$$

et pour le même roulement essayé sous charge progressive et continue:

$$C_{0i} = P_{0i} L_{0i}^{1/p_k}. \tag{12}$$

Mais $C_i = C_{0i}$ (hypothèse d)) et donc:

$$P_i L_i^{1/p} = P_{0i} L_{0i}^{1/p_k}. \tag{13}$$

Compte tenu qu'aux essais sous charge constante tous les roulements du lot sont chargés avec la même charge constante $P_i = P = \text{const.}$, les équations (10) et (13) donnent:

$$L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \frac{1}{(p_k + 1)^{p/p_k}} L_{0i}^{(p_k+1)p/p_k}. \tag{14}$$

L'équation (14) exprime la corrélation entre la durabilité L_i d'un roulement essayé sous charge constante P et la durabilité L_{0i} du même roulement essayé sous charge progressive et continue.

2. 3. Dispersion des résultats des essais

La dispersion des résultats des essais d'un lot de roulements peut être expliquée par la nonuniformité de la production et sans aucune doute, associée au taux de charge dynamique de base représente un indice de qualité.

Pour apprécier la dispersion des résultats des essais d'un lot de roulements on peut utiliser les paramètres suivants:

a) *Exposant de dispersion*

Les recherches effectuées [8] ont montré que la distribution des durabilités des roulements d'un lot essayé est determinée, avec une suffisante précision, par la loi:

$$\log\left(\frac{1}{S_i}\right) = AL_i^e, \tag{15}$$

où: S_i — la probabilité qu'on nombre $S_i n$ d'un groupe de n roulements du lot essayé supportent, sous charge constante, L_i rotations sans que sur les surfaces de roulement apparaissent des signes de fatigue; e — l'exposant de dispersion caracterisant la dispersion des résultats des essais; A — une constante qui, en général, a la valeur:

$$A = \frac{\log(1/0{,}9)}{L_{0,9}^e}, \tag{16}$$

où $L_{0,9}$ — la durabilité corréspondante à la probabilité de vie $S = 0{,}9$.

Pour les essais sous charge progressive, des équations (14) et (15) on déduit:

$$\log\left(\frac{1}{S_i}\right) = BL_{0i}^{(p_k+1)ep/p_k} = BL_{0i}^{e_0}, \tag{17}$$

où en exceptant les notations connues:

$$B = A\frac{1}{(p_k+1)^{p/p_k}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)^p, \tag{18}$$

avec e_0 — l'exposant de dispersion pour les essais sous charge progressive et continue:

$$e_0 = \frac{ep(p_k+1)}{p_k}. \tag{19}$$

L'exposant de dispersion e dans le cas de essais sous charge constante est plus petit que celui correspondant aux essais sous charge progressive (e_0) et alors la dispersion des résultats des essais est plus grande aux essais sous charge constante qu'aux essais sous charge progressive et continue.

b) *Rapport de la durabilité maximum correspondante à la probabilité de vie $S = 1/n$ et la durabilité à la probabilité de vie $S = 0{,}9$*

Pour l'essai sous charge constante ce rapport est donné par l'expresion:

$$D = \frac{L_{1/n}}{L_{0,9}}. \tag{20}$$

tandis que pour l'essai sous charge progressive:

$$D_0 = \frac{L_{0\,1/n}}{L_{0\,0,9}}. \tag{21}$$

Dans les relations (20) et (21) $L_{0,9}$ représente, à l'essai sous charge constante, la durabilité correspondante à la probabilité de vie $S = 0{,}9$ et $L_{0\,0,9}$ a la même signification mais pour l'essai sous charge progressive et continue; $L_{1/n}$ et $L_{0\,1/n}$ représentent les durabilités maxima correspondantes à la probabilité de vie $S = 1/n$.

Des équations (14), (20) et (21) il en résulte:

$$D_0 = \frac{L_{0\,1/n}}{L_{0\,0,9}} = \left(\frac{L_{1/n}}{L_{0,9}}\right)^{p_k/[p(p_k+1)]} = D^{p_k/[p(p_k+1)]} \tag{22}$$

et, par conséquent, $D_0 < D$.

c) *Rapport de la durabilité moyenne du lot L_m et la durabilité $L_{0,9}$ correspondante à une probabilité de vie $S = 0{,}9$*

Pour l'essai sous charge constante ce rapport est:

$$m = \frac{L_m}{L_{0,9}} \tag{23}$$

où

$$L_m = \frac{\sum_1^n L_i}{n}; \tag{24}$$

pour l'essai sous charge progressive on a

$$m_0 = \frac{L_{0m}}{L_{0\,0,9}} \tag{25}$$

où

$$L_{0m} = \frac{\sum_{1}^{n} L_{0i}}{n}, \tag{26}$$

et alors on peut écrire:

$$m_0 = m^{p_k(p_k+1)/p}, \tag{27}$$

donc $m_0 < m$.

À l'aide des équations (19), (22) et (27) on peut déduire que la dispersion des résultats des essais sous charge progressive et continue est moindre que celle des essais sous charge constante; de petites valeurs pour e, e_0 et de grandes valeurs pour D, D_0 et m, m_0 indiquent une grande non-uniformité des résultats.

Dans la fig. 1 est représentée l'évolution des paramètres e, D et m pour des essais sous charge constante, par consequent à l'amélioration de la qualité des roulements.

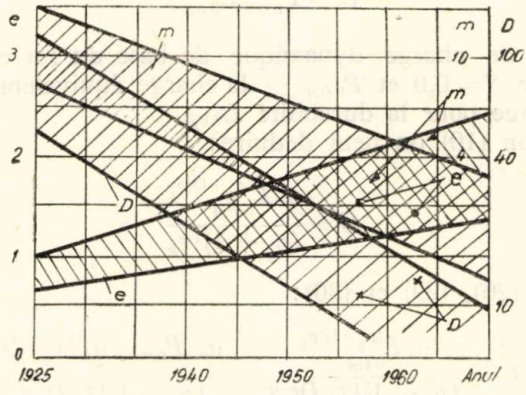


Fig. 1. — Évolution orientative des paramètres de la dispersion des résultats des essais des roulements sous charge constante. • — essais effectués sur des roulements symbole 6 308.

2. 4. Le coéficient α de proportionalité de la charge progressive et continue

La charge des roulements essayés s'accroit proportionellement avec le nombre de rotations effectuées; cette charge peut donc atteindre des valeurs assez grandes qui sont capable à provoquer des déformations rémanentes sur les surfaces de contact. Ces déformations influencent défavorablement la durabilité des roulements et bien entendu, quant à la conclusion des essais.

Dans ces conditions on peut admettre:

$$P_{i\,\max} = \frac{C_0}{c}, \tag{28}$$

où: $P_{i\,\max} = \alpha\, L_{0i}$ — la charge maximum pour le roulement i correspondant au moment de la destruction, C_0 — le taux de charge statique et c — le coefficient de surêté.

On peut distinguer les cas suivants:

a) La charge maximum $P_{i\,\max}$ ne peut pas être dépassée pour aucun des roulements du lot essayé:

$$P_{i\,\max} \geqslant \alpha_a\, L_{0\,1/n}. \tag{29}$$

Mais compte tenu de l'équation (22) il en resulte:

$$L_{0\,1/n} = L_{0\,0,9}\, D^{p_k/[p(p_k+1)]} \tag{30}$$

et en même temps

$$C = P_{0\,0,9}\, L_{0\,0,9}^{1/p_k}, \tag{31}$$

où C — le taux de charge dynamique de base du lot corréspondant à la probabilité de vie $S = 0{,}9$ et $P_{0\,0,9}$ — la charge équivalente à la charge progressive et continue pour la durabilité $L_{0\,0,9}$.

De l'équation (10) on peut déduire:

$$C = \frac{\alpha_a\, L_{0\,0,9}^{(p_k+1)/p_k}}{(p_k+1)^{1/p_k}} \tag{32}$$

et des équations (20), (29) et (30):

$$C = \frac{\alpha_a\, L_{0\,1/n}^{(p_k+1)/p_k}}{(p_k+1)^{1/p_k} D^{p_k/p}} = \frac{\alpha_a\, (P_{0\,\max}/\alpha)^{(p_k+1)/p_k}}{(p_k+1)^{1/p_k} D^{1/p}} \tag{33}$$

et donc:

$$\alpha_a = \frac{P_{0\,\max}^{p_k+1}}{C^{p_k}(p_k+1)\, D^{p_k/p}} = \frac{C_0^{p_k+1}}{C^{p_k} c^{p_k+1}(p_k+1)\, D^{p_k/p}}. \tag{34}$$

b) La charge progressive $P_{i\,\max}$ ne peut pas être dépassée pour aucun des roulements qui ont une durabilité plus petite (ou égale) que la durabilité moyenne du lot essayé sous charge progressive:

$$P_{i\,\max} \geqslant \alpha_b\, L_{0m}. \tag{35}$$

Compte tenu des rélations (23), (25) et (27) il en résulte:

(36) $$L_{0m} = L_{00,9}\, m^{p_k/[p(p_k+1)]}$$

et alors:

(37) $$\alpha_b = \frac{C_0^{p_k+1}}{C^{p_k} c^{p_k+1} (p+1)\, m^{p_k/p}}.$$

c) La charge progressive maximum $P_{i\,\max}$ ne peut pas être dépassée pour aucun des roulements qui ont une durabilité plus petite (où egale) que la durabilité $L_{00,9}$ du lot essayé — importante pour le taux charge dynamique de base C du lot:

(38) $$P_{i\,\max} \geqslant \alpha_c L_{00,9}.$$

De cette hypothèse il en résulte:

(39) $$\alpha_c = \frac{C_0^{p_k+1}}{C^{p_k} c^{p_k+1} (p_k+1)}.$$

Les coefficients α de proportionalité de la charge progressive, dans les cas exposés ci-dessus, satisfont à la relation:

(40) $$\alpha_a : \alpha_b : \alpha_c = 1/D^{p_k/p} : 1/m^{p_k/p} : 1.$$

Par exemple pour les roulements radiaux à billes symbole 6 308 avec $C = 3\,200$ et $C_0 = 2\,200$, si l'on admet $p_k = 4$ et $p = 3$ et tenant compte de la fig. 1, $D = 10$ et $m = 2{,}5$ pour la simplification des calculs, il en résulte:

$$\alpha_a = 4{,}65 \text{ kgf}/10^3 \text{ rotations} = C/690,$$
$$\alpha_b = 29{,}5 \text{ kgf}/10^6 \text{ rotations} = C/109,$$
$$\alpha_c = 100 \text{ kgf}/10^6 \text{ rotations} = C/32.$$

Les conditions specifiées aux points b) et c) peuvent être appliquées aux essais rapides lorsque la destruction d'un nombre limité de roulements du lot essayé est suffisante pour déterminer le taux charge dynamique de base.

2. 5. Durée de temps nécessaire pour les essais

Pour les essais sous charge constante, des rélations (15) et (16) il en résulte:

(41) $$L_i = \frac{L_{0,9}}{[\log (1/0{,}9)]^{1/e}} [\log (1/S_i)]^{1/e}.$$

La durée totale des essais pour essayer un lot sera donc:

(42) $$\sum_1^n L_i = \frac{L_{0,9}}{[\log (1/0{,}9)]^{1/e}} \sum_1^n [\log (1/S_i)]^{1/e}.$$

Pour les essais sous charge progressive et continue des relations (17) et (18) il en résulte pour un lot:

$$\sum L_{0i} = \tag{43}$$

$$= \frac{L_{0,9}^{p_k/[p(p_k+1)]}}{[\log (1/0,9)]^{p_k/[ep(p_k+1)]}} (p_k+1)^{1/(p_k+1)} \left(\frac{P}{a}\right)^{p_k/(p_k+1)} \sum_1^n [\log (1/S_i)]^{p_k/[ep(p_k+1)]}.$$

En substituant dans les équations (42) et (43) $L_{0,9} = C^p/p$ et compte tenu des équations (34), (37) et (39) on obtient pour les trois variantes de calcul du coefficient:

$$R_{a,b,c} = \frac{\sum_1^n L_{0i}}{\sum_1^n L_i} = \tag{44}$$

$$= \frac{(p_k+1)\, c^{p_k}\, \beta^{p_k^2/[p(p_k+1)]}}{[\log (1/0,9)]^{(p_k-p_kp-p)/[ep(p_k+1)]}} \cdot \frac{C^{[p_k(p_k-p+1)-p]/(p_k+1)}}{C_0^{p_k}} \cdot \frac{\sum_1^n [\log (1/S_i)]^{p_k/[ep(p_k+1)]}}{\sum_1^n [\log (1/S_i)]^{1/e}},$$

ou β est respectivement D, m et 1.

Le rapport des durées des essais pour les trois cas est:

$$R_a : R_b : R_c = D^{p_k^2/[p(p_k+1)]} : m^{p_k^2/[p(p_k+1)]} : 1. \tag{45}$$

Mais aux essais sous charge constante sur une machine sont essayés simultanément quatre roulements tandis qu'aux essais sous charge progressive et continue est essayé un seul roulement; le rapport R' pour une machine sera donc quatre fois plus grand que le rapport des durées R:

$$R'_{a,b,c} = 4R_{a,b,c}. \tag{46}$$

En considerant les équations (44) et (45) il en résulte que:

1° L'essai sous charge progressive et continue est d'autant plus avantageux que la charge de l'essai de comparaison sous charge constante est plus petite.

2° L'essai sous charge progressive et continue est plus avantageux dans le cas c) lorsque la durée totale des essais est moindre que dans les cas a) et b).

Avec les valeurs pour p et p_k trouvées par D. Senigalliesi et avec $e = 1,5$, $c = 1$ (fig. 1), l'équation (44) devient:

a) contact ponctuel — $p = 3,43$, $p_k = 3,83$:

$$R_{a,b,c} = 1,77\, \beta^{0,92}\, \frac{C^{0,55}\, P^4}{C_0^{4,5}}; \tag{47}$$

b) contact linéaire — $p = 4$, $p_k = 4{,}5$:

$$R_{a,b,c} = 1{,}77\,\beta^{0,92}\frac{C^{0,55}P^4}{C_0^{4,5}}. \tag{48}$$

Dans la fig. 2 sont indiquées les valeurs des rapports $R_{a,b,c}$ et $R'_{a,b,c}$ pour des roulements radiaux à billes 6 308 par rapport à P/C_0 si :

$$C = 3\,200,\ D = 10,\quad e = 1{,}5,\ p = 3{,}33,$$
$$C_0 = 2\,200,\ m = 2{,}5,\ c = 1,\quad p_k = 3{,}83.$$

Des diagrammes semblables peuvent être construites pour toutes les dimmensions et les formes existentes de roulements.

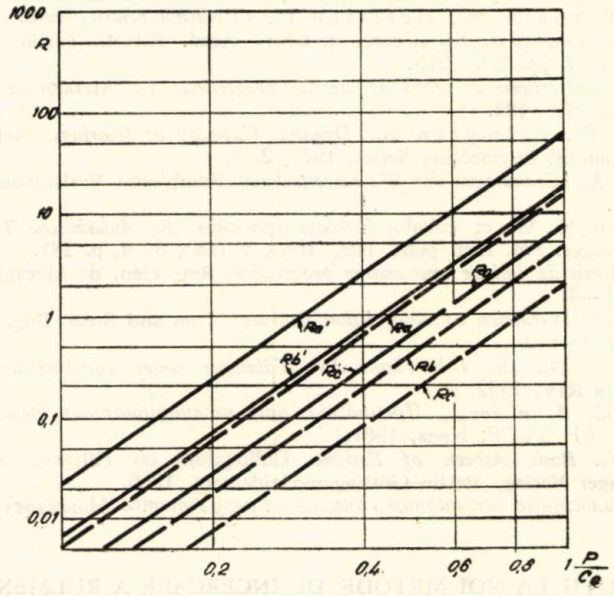


Fig. 2 — Rapport entre la durée des essais sous charge progressive et continue et la durée des essais sous charge constante des roulements 6 308.

Dans notre prochaine Note, qui sera insérée dans le même *Bulletin*, nous exposerons la méthode d'essai sous charge progressive limitée et répétée et la méthode d'essai avec un nombre limité de roulements du lot.

Institut Polytechnique de Jassy,
Laboratoire des Éléments de Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Bastenaire F., *Étude critique de la notion de dommage appliquée à une classe étendue d'essais de fatigue.* Colloquium on Fatigue, Stockholm, 1955, Springer Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1956.

2. Bastenaire F., Cazaud R., Weisz M., *Essais de fatigue statistique suivant la méthode de charge progressive.* Colloquium on Fatigue, Stockholm, 1955, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
3. Biro B., *Time Reduction of the Endurance Tests and Developments in Fatigue Testing Machines.* Acta Technica Academia Scientiarum Hungaricae, 1961, **XXXV–XXXVI,** pp. 339–346.
4. Biro B., Parducz N., *Streuung der Lebensdauer von Wälzlagern bei konstanter und stetig steigender Belastung.* Maschinenbautechnik, 1965, *6,* S. 321–324.
5. Eschmann, Hasbargen, Wiegand, *Die Wälzlagerpraxis.* Verlag R. Oldenbourg, München, 1953.
6. Ferre A., Rossetti U., *Contribution à l'étude de la fatigue des matériaux avec essais à charge progressive.* Colloquium on Fatigue, Stockholm, 1955, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
7. Giulietti L., *Kugellager: Lebensdauer bei gleichbleibender Belastung und bei zunehmender Belastung im Verhältnis zur Steigerung der Tourenzahl.* La rivista RIV, 1962, *9.*
8. Hajdu J., Bernath M., Herlescu T., *O mașină pentru încercarea la oboseală sub sarcină progresivă.* St. și cerc. șt. tehn., Acad. R.P.R., filiala Timișoara, 1960, **VI,** *3–4,* pp. 267–275.
9. Locati L., *Sul criterio di prova ad azione progresiva.* La Metalurgia Italiana, 1959, *5,* pp. 179–184.
10. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Bearings.* Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series, 1947, **2,** *4.*
11. Palmgren A., *Grundlagen der Wälzlagertechnik.* Frank'sche Verlagshandlung, Stuttgart, 1954.
12. Popinceanu N. G. et collab., *Betrachtungen über die dynamische Tragfähigkeit der Wälzlager.* Bul. Inst. polit. Iași, 1959, V (**IX**), *3–4,* p. 281.
13. Prot M., *Essais de fatigue sous charge progressive.* Rev. Gén. de Mécanique, 1953, *49,* pp. 1–4.
14. Root L., *Life Dispersion of Antifriction Bearings.* Iron and Steel Eng., 1961, **30,** *11,* pp. 113–119.
15. Senigalliesi D., *Die Lebensdauer der Wälzlager unter zunehmender Belastung.* La Rivista RIV, 1962, *9.*
16 Серенсен С. В. и сотр., *Прочности при нестационарных режимах нагрузки.* Изд. АН УССР, Киев, 1961.
17. Weibull W., *Basic Aspects of Fatigue.* Colloquium on Fatigue, Stockholm, 1955, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
18. — *Усталостные испытания и анализ их результатов.* Машиностроение, М., 1964

CONTRIBUȚII LA NOI METODE DE ÎNCERCARE A RULMENȚILOR

Nota I

Metodă de încercare a rulmenților sub sarcină progresivă și continuă

(Rezumat)

Se prezintă principiile teoretice și metoda de încercare a rulmenților sub sarcină progresivă și continuă.

Se propun metode noi de încercare a rulmenților, care oferă avantaje economice și tehnologice.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Evoluția orientativă a parametrilor de dispersie a rezultatelor încercărilor rulmenților sub sarcină constantă; •— încercări efectuate pe rulmenți 6308.

Fig. 2. — Raportul dintre durata încercărilor sub sarcină progresivă și continuă și durata încercărilor sub sarcină constantă, pentru rulmenții 6308.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 536.713; 621.1

PROPRIETĂŢILE CENTRULUI TERMODINAMIC AL CICLULUI IZOBAR

DE

EMIL GAIGINSCHI, MARCEL GUTMAN şi VIRGIL GIURCĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În cadrul unor lucrări anterioare [1], [2] au fost studiate semnificaţia, proprietăţile şi aplicaţiile noţiunii de „centru termodinamic" al ciclului izocor. Prezenta lucrare urmăreşte să determine proprietăţile aceleiaşi noţiuni în cazul ciclului izobar.

Prin noţiunea de centru termodinamic al ciclului izobar, definim punctul de stare care se găseşte la intersecţia adiabatei şi izobarei care împart, fiecare, aria ciclului în două părţi egale (punctul *g*, fig. 1).

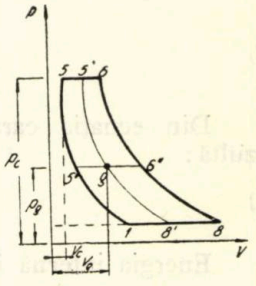


Fig. 1

2. Determinarea parametrilor de stare în centrul termodinamic al ciclului izobar

Se presupune că într-un ciclu teoretic cu introducerea şi cedarea căldurii la presiune constantă evoluează 1 kgf de fluid perfect.

Se introduc notaţiile: p — presiunea [kgf/m^2], v — volumul specific [m^3/kg], T — temperatura [°K] şi u — energia internă [kgm]; $p_c = p_5$ — presiunea la sfîrşitul compresiunii adiabatice; $\varepsilon_1 = V_1/V_{5''}$, $\varepsilon_2 = V_{5''}/V_c$ — gradele de compresiune ale ciclurilor determinate de poziţia izobarei $5''$-$6''$; $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = V_1/V_c$ — gradul de compresiune al ciclului principal *1-5-6-8-1*; $\delta_1 = T_{5'}/T_5$, $\delta_2 = T_6/T_{5'}$, $\delta = \delta_1 \delta_2 = T_6/T_5$ — respectiv, gradul de creştere a temperaturii pentru ciclul *1-5-5-'8'-1*, pentru ciclul *8'-5'-6-8-8'* şi pentru ciclul principal *1-5-6-8-1*; l — lucrul mecanic al ciclului [kgm], η_{t_1}, η_{t_2} — randamentele termice ale ciclurilor cu gradele de compresiune ε_1, respectiv ε_2; $\Delta v_{\min} = v_6 - v_5$,

$\Delta v_g = v_{6''} - v_{5''}$, $\Delta v_{max} = v_8 - v_1$ — diferenţele de volum specific de pe izobara $p_c = \text{const.}$, respectiv $p_g = \text{const.}$ şi $p_1 = \text{const.}$

Conform definiţiei de mai sus a noţiunii de centru termodinamic al ciclului izobar, scriind condiţia ca lucrul mecanic al ciclului *1-5-5'-8'-1*, să fie egal cu jumătate din lucrul mecanic al ciclului principal *1-5-6-8-1*, se obţine:

$$\delta_1 = \frac{\delta + 1}{2}$$

şi întrucît $\delta_1 \delta_2 = \delta$, rezultă:

$$\delta_2 = \frac{2\delta}{\delta + 1}.$$

De asemenea, conform definiţiei menţionate, scriind şi condiţia de egalitate între lucrul mecanic al ciclului *1-5''-6''-8-1* şi lucrul mecanic al ciclului *5''-5-6-6''-5''*, se obţine:

$$\varepsilon_1 = \frac{v_1}{v_{5''}} = \left(\frac{\varepsilon^{k-1} + 1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \left(\frac{2}{\varepsilon^{k-1} + 1}\right) \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}.$$

Deoarece $p_g = p_1 \varepsilon_1^k$, iar $v_g = V_{5''} \delta_1 = v_1 \delta_1 / \varepsilon_1$, rezultă:

$$p_g = \left(\frac{\varepsilon^{k-1} + 1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_1, \tag{1}$$

$$v_g = \frac{\delta + 1}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon^{k-1} + 1}\right)^{\frac{1}{k-1}} v_1. \tag{2}$$

Din ecuaţia caracteristică a gazelor perfecte aplicată în punctul g rezultă:

$$T_g = \frac{\delta + 1}{4} (\varepsilon^{k-1} + 1)\, T_1. \tag{3}$$

Energia internă în centrul termodinamic este:

$$u_g = \frac{\delta + 1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^{k-1} + 1}{k - 1} p_1 v_1. \tag{4}$$

3. Proprietăţile centrului termodinamic al ciclului izobar

3.1. Energia internă u_g din centrul termodinamic este egală cu media aritmetică a energiilor interne din vîrfurile ciclului:

$$\frac{u_1 + u_5 + u_6 + u_8}{4} = \frac{\delta + 1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^{k-1} + 1}{k - 1} p_1 v_1 = u_g. \tag{5}$$

Rezultă că şi produsul $p_g v_g$ este egal cu media aritmetică a produselor dintre presiunile şi volumele din vîrfurile ciclului:

$$p_g v_g = \frac{p_1 v_1 + p_5 v_5 + p_6 v_6 + p_8 v_8}{4} = \frac{\delta + 1}{4} (\varepsilon^{k-1} + 1) p_1 v_1,$$

adică:

$$\sum_{i = 1,5,6,8} p_i v_i = 4 p_g v_g. \tag{6}$$

3.2. Din proprietatea de mai sus rezultă că temperatura absolută T_g din centrul termodinamic al ciclului este egală cu media aritmetică a temperaturilor absolute din vîrfurile ciclului:

$$T_g = \frac{\sum_{i = 1,5,6,8} T_i}{4}. \tag{7}$$

3.3. Din condiţia de egalitate a lucrurilor mecanice corespunzătoare ciclurilor *5''-5-6-6''-5''* şi *1-5''-6''-8-1* rezultă:

$$p_g \Delta v_g = \frac{p_1 \Delta v_{max} + p_c \Delta v_{min}}{2}. \tag{8}$$

3.4. Adiabata *5'-8'* care trece prin centrul termodinamic al ciclului, determină următoarele proprietăţi:

a) Întrucît δ, δ_1 şi δ_2 au aceleaşi valori pe izobarele cuprinse între p_c şi p_1, dacă se cunosc volumele v_i de pe adiabata de simetrie *5'-8'*, atunci volumele de pe detentă (v_{d_i}) sau compresiune (v_{c_i}) se obţin cu relaţii simple de forma:

$$v_{d_i} = \delta_2 v_i = \frac{2\delta}{\delta + 1} v_i = a_\delta v_i, \tag{10}$$

$$v_{c_i} = \frac{v_i}{\delta_1} = \frac{2v_i}{\delta + 1} b_\delta v_i, \tag{10}$$

unde $a_\delta = 2\delta/(\delta + 1)$ şi $b_\delta = 2/(\delta + 1)$ sînt constante adimensionale pentru ciclul considerat.

De asemenea, diferenţele dintre volumele corespunzătoare aceleiaşi izobare pe curbele de detentă şi compresiune, sînt date de relaţia:

$$v_{d_i} - v_{c_i} = \Delta v_i = 2v_i \frac{\delta - 1}{\delta + 1} (a_\delta - b_\delta) v_i = c_\delta v_i, \tag{11}$$

unde $c_\delta = 2(\delta - 1)/(\delta + 1) = a_\delta - b_\delta$ este o constantă adimensională pentru ciclul considerat.

Substituind mărimile $\Delta v_{\min}$, $\Delta v_{\max}$ şi Δp_g în relaţia (8), se obţine:

$$p_1 c_\delta v_{8'} + p_c c_\delta v_{5'} = 2p_g c_\delta v_g, \quad p_1 v_{8'} + p_c v_{5'} = 2p_g v_g$$

şi deoarece $v_{8'} = v_1(\delta + 1)/2$, $v_{5'} = v_5(\delta + 1)/2$, rezultă:

$$p_1 v_1 + p_c v_c = \frac{4}{\delta + 1} p_g v_g. \tag{12}$$

Această relaţie oferă posibilitatea determinării presiunii şi temperaturii la sfîrşitul compresiunii, cînd se cunosc parametrii de stare în centrul termodinamic, ceea ce presupune cunoaşterea gradului de compresiune şi a parametrilor stării iniţiale, adică a elementelor de bază necesare calculului ciclului izobar:

$$p_c = \frac{4}{\delta + 1} \cdot \frac{p_g v_g}{v_c} - p_1 \varepsilon, \tag{13}$$

$$T_c = \frac{4T_g}{\delta + 1} - T_1. \tag{14}$$

Relaţia (14) conduce la expresia temperaturii fluidului la sfîrşitul introducerii de căldură:

$$T_6 = \delta T_c = \delta \left(\frac{4T_g}{\delta + 1} - T_1 \right). \tag{15}$$

În acest mod toţi parametrii din vîrfurile ciclului pot fi determinaţi cu relaţii simple, lipsite de factori exponenţiali.

b) Diferenţele de volum, temperatură şi energie internă între punctele care se găsesc la intersecţia aceleiaşi izobare cu linia detentei sau compresiunii şi cu adiabata ce trece prin centrul termodinamic al ciclului, sînt egale.

Astfel,

$$v_6 - v_{5'} = \frac{\delta - 1}{2} \cdot \frac{v_1}{\varepsilon} = v_{5'} - v_5,$$

$$v_{6''} - v_g = \frac{\delta - 1}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon^{k-1} + 1} \right)^{\frac{1}{k-1}} v_1 = v_g - v_{5''},$$

$$v_8 - v_{8'} = \frac{\delta - 1}{2} v_1 = v_{8'} - v_1, \qquad T_6 - T_{5'} = \frac{\delta - 1}{2} \varepsilon^{k-1} T_1 = T_{5'} - T_5,$$

$$T_{6''} - T_g = \frac{\delta - 1}{4} (\varepsilon^{k-1} + 1) T_1 = T_g - T_{5''},$$

$$T_8 - T_{8'} = \frac{\delta - 1}{2} T_1 = T_{8'} - T_1,$$

$$u_8 - u_{5'} = \frac{\delta - 1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^{k-1}}{k-1} p_1 v_1 = u_{5'} - u_5,$$

$$u_{6''} - u_g = \frac{\delta - 1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^{k-1} + 1}{k-1} p_1 v_1 = u_g - u_{5''},$$

$$u_8 - u_{8'} = \frac{\delta - 1}{2} \cdot \frac{p_1 v_1}{k-1} = u_{8'} - u_1.$$

Aşadar, adiabata care trece prin centrul termodinamic al ciclului este o linie de simetrie pentru diferenţele de volum, temperatură şi energie internă dintre punctele care se găsesc la intersecţia aceleiaşi izobare cu linia detentei şi compresiunii.

3.5 Izobara $5''$-$6''$, care trece prin centrul termodinamic g, împarte ciclul în două cicluri izomecanice, care au grade de compresiune diferite şi deci randamente termice diferite.

Între randamentele termice ale ciclurilor izomecanice şi randamentul termic al ciclului principal există relaţiile:

$$\eta_{t_1} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_1^{k-1}} = \frac{\varepsilon^{k-1} - 1}{\varepsilon^{k-1} + 1} = \eta_t \frac{\varepsilon^{k-1}}{\varepsilon^{k-1} + 1}, \tag{16}$$

$$\eta_{t_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_2^{k-1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\right) = \frac{\eta_t}{2}. \tag{17}$$

De asemenea

$$\eta_{t_1}\eta_{t_2} = \frac{\eta_t^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon^{k-1}}{\varepsilon^{k-1} + 1} = \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon^{k-1} - 1)^2}{(\varepsilon^{k-1} + 1)\,\varepsilon^{k-1}}. \tag{18}$$

Deci randamentul termic al ciclului izomecanic cu gradul de compresiune ε_2 este egal cu jumătate din randamentul termic al ciclului principal.

4. Concluzii

a) Centrul termodinamic al ciclului izobar are proprietăţi deosebite care conduc la relaţii noi în termodinamica ciclurilor; el determină şi reprezintă perfect un ciclu cînd starea iniţială este cunoscută.

b) Aplicarea noţiunii de centru termodinamic al ciclului izobar oferă posibilitatea determinării rapide, cu uşurinţă, a parametrilor de stare şi a energiei interne în diferite puncte ale ciclului.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de motoare termice

BIBLIOGRAFIE

1. Gaiginschi E., Zugrăvel M., Gutman M., Bîrjoianu Al., *Semnificaţia şi proprietăţile centrului termodinamic al ciclului izocor.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1-2*, pp. 321-332.
2. Gaiginschi E., Gutman M., Giurcă V., *Aplicarea noţiunii de „centru termodinamic" al ciclului izocor la calculul termic al acestuia.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3-4*, pp. 309-316.

LES PROPRIÉTÉS DU CENTRE THERMODYNAMIQUE DU CYCLE ISOBARE

(Résumé)

On expose les propriétés d'un certain point d'état situé à l'interieur d'un cycle théorique avec apport et retrait de chaleur à pression constante ; ce point a été nommé conventionnellement *centre thermodynamique du cicle isobare.*

On montre que si l'on connait dans le diagramme $p-v$ les paramètres d'état de ce point et l'état initiale du fluide, le cycle est bien determiné et le calcul thermique peut être effectué rapidement, à l'aide de quelques relations assez simples.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 621.1.01

STUDIUL COEFICIENTULUI α ÎN CAZUL CONVECŢIEI LA RUGOZITĂŢI ARTIFICIALE ŞI LA SUPRAFEŢE ONDULATE

DE

GÉRARD d'ALBON, VALERIU CERNESCU, IUSTIN BENDESCU, EMIL JUGUREANU, VALERIAN MACRI şi N. APETREI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

I. Studiul coeficientului α în cazul convecţiei forţate cu aer sau apă la rugozităţi artificiale

I.1 Introducere

În relaţiile obişnuite de calcul a convecţiei rugozitatea nu intervine Acest fapt este explicabil căci în majoritatea cazurilor practice stratul limită are o înălţime mare faţă de rugozităţi. Sînt însă cazuri în care este greu să se efectueze un calcul corect folosind relaţiile uzuale şi anume atunci cînd anumite rugozităţi artificiale au înălţimi importante faţă de stratul limită.

În cele ce urmează se expun rezultatele determinărilor experimentale ale valorii coeficientului α în cazul convecţiei forţate cu aer sau apă, pentru suprafeţe cilindrice cu ax orizontal.

I.2. Metoda de măsurare

S-a măsurat coeficientul α referitor la sistemul suprafaţă cilindrică filetată — mediu fluid (aer sau apă). Suprafeţele cilindrice erau realizate din ţevi cu diametrul exterior de 33 mm, filetate cu profil triunghiular Whitworth. Încercările au fost efectuate pentru următoarele suprafeţe: 1° ţeava *1*—filetată cu pasul 1,21 mm; 2° ţeava *2*—filetată cu pasul 1,58 mm; 3° ţeava *3*—filetată cu pasul 2,30 mm. Rezultatele s-au comparat cu o ţeavă *0* care era netedă.

Încălzirea ţevilor s-a realizat prin trecerea unui curent alternativ (permanent) în lungul ţevii. Din puterea electrică consumată s-a dedus cantitatea de căldură disipată pe unitatea de lungime a ţevii. Măsurînd

diferenţa de temperatură dintre ţeavă şi mediul fluid, în regim permanent, şi luîndu-se unele precauţiuni, ce vor fi precizate în cele de mai jos, cu scopul de a evita circulaţia de căldură în sens longitudinal în punctele de măsură, se determină α cu ajutorul relaţiilor clasice.

Instalaţia de principiu pentru măsurările în convecţia forţată cu aer sau apă este cea reprezentată în fig. 1.

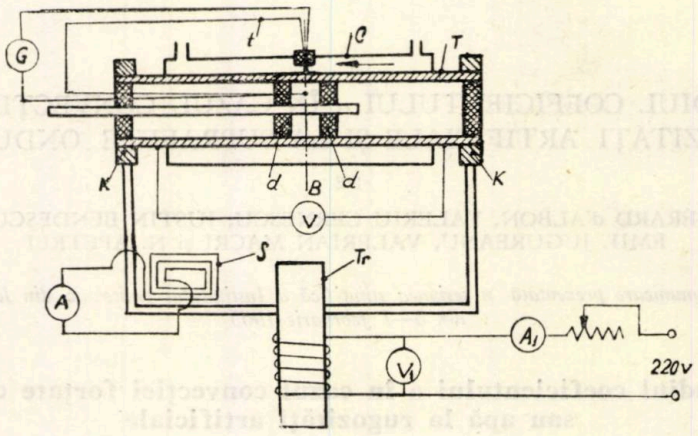


Fig. 1

Ţeava T este încălzită cu ajutorul unor curenţi I foarte intenşi, reglabili, obţinuţi cu ajutorul transformatorului Tr şi a căror valoare este menţinută constantă la stabilirea regimului permanent. Sînt instalate instrumentele de măsură necesare (voltmetrul V şi ampermetrul A conectat la bobina de inducţie S) pentru a se măsura puterea electrică disipată pe porţiunea $a-b$, de lungime cunoscută. În acest mod se determină căldura disipată prin convecţie pe unitatea de lungime de ţeavă.

Pentru realizarea regimului forţat ţeava T este înconjurată de o conductă cilindrică C prin care circulă mediul fluid (aer sau apă) în sens axial, la un debit menţinut constant în timpul unei experienţe şi măsurat cu ajutorul unui rotametru.

Se mai măsoară diferenţa de temperatură Δt dintre ţeavă şi mediul fluid cu ajutorul termocuplului t, conectat la galvanometrul G. Măsurarea se efectuează într-o secţiune B în care gradientul de temperatură $\mathrm{d}t/\mathrm{d}l = \text{const.}$, secţiune stabilită prin determinarea cîmpului termic în lungul ţevii. Se impune această ultimă condiţie în zona de măsurare pentru ca circulaţia de căldură în lungul ţevii să nu intervină în bilanţul termic al elementului de lungime unitară din care se determina valoarea lui, anume

$$\alpha = \frac{0{,}86P}{\pi D \Delta t}, \tag{1}$$

unde: P — puterea electrică [w] disipată și raportată la 1 m lungime țeavă, D — diametrul mediu al țevii, Δt — diferența de temperatură dintre țeavă și mediul fluid.

La stabilirea relației (1) s-a ținut seama de faptul că degajarea de căldură efectuîndu-se în însești pereții conductei, nu are loc schimb de căldură, în regim permanent, între aceștia și spațiul interior. Acesta este izoterm, avînd aceeași temperatură ca și pereții conductei, între dopurile izolante *d*.

I.3. Rezultate și concluzii

Toate valorile coeficientului α, redate mai jos și determinate cu ajutorul acestei metode, se referă la suprafața cilindrică învăluitoare, neținîndu-se seama că filetarea dublează geometric această suprafață. Luarea în considerație a suprafeței geometrice reale duce la erori importante.

A. CONVECȚIE FORȚATĂ CU AER

Din măsurătorile efectuate rezultă că transferul de căldură în cazul rugozităților artificiale obținute, în cazul nostru, prin filetare pînă la mărimea acestor rugozități (de ordinul mm) și pînă la viteze ale aerului de 12,60 m/s, este aproximativ același ca și pentru suprafețe netede.

Rezultă că în calcul trebuie introdusă suprafața cilindrică învăluitoare a rugozităților, făcîndu-se corecțiile indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

		Viteza aerului m/s			
		5,07	7,60	10,14	12,60
Țeava *0*	α_0 $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h}\,^\circ\text{C}}\right]$	15,93	21,05	27,33	34,73
Țeava *1*	α $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h}\,^\circ\text{C}}\right]$	17,50	23,45	33,83	39,50
	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	1,10	1,11	1,24	1,14
Țeava *2*	α	18,65	25,00	34,70	42,70
	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	1,17	1,19	1,27	1,23
Țeava *3*	α		24,2	32,5	40,2
	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$		1,15	1,19	1,16

B. CONVECŢIE FORŢATĂ CU APĂ

Tabelul 2

		Viteza apei m/s		
		0,004	0,008	0,024
Ţeava *0*	$\alpha_0 \left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h}\,^\circ\text{C}}\right]$	294	360	400
Ţeava *1*	$\alpha \left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h}\,^\circ\text{C}}\right]$	184	215	275
	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	0,63	0,60	0,69
Ţeava *2*	α	326	363	407
	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	1,11	1,01	1,02
Ţeava *3*	α	264	362	486
	$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	0,9	1,01	1,21

Din tabelul 2 se observă că în cazul convecţiei forţate cu apă la rugozităţi artificiale, coeficientul α are valori apropiate de cele corespunzătoare suprafeţei netede (ţeava *0*), cu excepţia celor mai mici rugozităţi (ţeava *1*) la care se observă o scădere pronunţată a lui α. Această scădere poate fi explicată prin faptul că rugozităţile se îneacă în stratul limită şi în interstiţiile dintre rugozităţi se află fluid staţionar la o temperatură foarte apropiată de aceea a ţevii, jucînd rolul unui izolator termic. În acest mod, probabil, stratul limită prin care se realizează transferul de căldură, atinge numai vîrfurile rugozităţilor.

Datele obţinute pot fi folosite la corectarea coeficientului α în calcule de transfer de căldură prin convecţie cu apă la suprafeţe cu rugozităţi de ordinul 1 mm, în domeniul $\mathcal{R}e = 23...146$.

În experienţele viitoare se va explora un domeniu cu limita superioară $\mathcal{R}e = 2\,000$ şi chiar mai mult, atingînd eventual regimul turbulent.

II. Studiul coeficientului α în cazul convecţiei libere în aer la suprafeţe ondulate

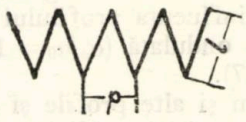
II.1. Metoda de măsurare

Principiul metodei de măsurare este acelaşi cu cel utilizat în cazul rugozităţilor artificiale.

Instalația diferă prin faptul că în locul țevii T este montată vertical banda de cupru care este supusă măsurării, iar circuitul de circulație forțată este eliminat.

Determinările s-au efectuat pentru onduluri cu dimensiunile și forma redate în tabelul 3.

Tabelul 3

Profilul tablei	l mm	p mm
	10	7
	10	10,5
	15	10,5
	15	19,2
	20	14
	20	26,6

Măsurările de temperatură s-au efectuat în trei puncte pe o secțiune transversală a tablei, determinînd apoi o medie care a fost introdusă în calcule.

II.2. Rezultate și concluzii

Valoarea coeficientului α s-a determinat în toate cazurile pentru o aceeași diferență de temperatură $\Delta t = 85°C$, cu scopul de a putea izola, prin raportarea la tabla netedă, numai influența exercitată de ondulări asupra

Tabelul 4

	Tablă netedă	Tablă $l = 10$ mm		Tablă $l = 15$ mm		Tablă $l = 20$ mm	
		$p = 7$ mm	$p = 10,5$ mm	$p = 10,5$ mm	$p = 19,2$ mm	$p = 14$ mm	$p = 26,6$ mm
Δt [°C]	85	85	85	85	85	85	85
α_0, α $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{h °C}}\right]$	$\alpha_0 = 6,43$	5,05	5,10	5,11	5,85	5,54	6,22
$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	1	0,78	0,79	0,79	0,91	0,86	0,97
α_0, α_a $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{h °c}}\right]$	$\alpha_0 = 6,43$	14,4	9,7	14,6	9,1	15,8	9,4
$\frac{\alpha_a}{\alpha_0}$	1	2,24	1,51	2,28	1,42	2,45	1,46

lui α. Acolo unde a fost nevoie s-a recurs la interpolare pentru a ajunge la valoarea corespunzătoare lui $\Delta t = 85°C$, considerînd, cu aproximaţie suficientă, variaţia lui α liniară în intervale restrînse de temperatură.

Datele tabelului 4 arată că în convecţia liberă, tabla ondulată are coeficientul α mai mic faţă de cel al tablei netede şi anume cu atît mai mic cu cît dimensiunile profilului sînt mai reduse.

Pentru a putea compara rezultatele obţinute în cazul rugozităţilor artificiale şi în cel al tablelor ondulate s-a determinat în ambele cazuri α aparent (α_a) raportat la suprafaţa mediană a profilului. După cum s-a arătat, această determinare este strict necesară, întrucît determinarea lui α raportat la suprafaţa reală conduce la erori importante în cazul rugozităţilor artificiale.

Din tabelele 1 şi 4 se observă că influenţa profilului asupra coeficientului α este mai accentuată la tabla ondulată ($\alpha_a/\alpha_0 = 1{,}42 \cdots 2{,}45$) decît la rugozităţi artificiale ($\alpha_a/\alpha_0 = 1{,}1 \cdots 1{,}27$).

Pe viitor ne propunem să explorăm şi alte profile şi pe domenii mai întinse, pentru a face legătura dintre rugozităţi artificiale şi aripioare şi a stabili un criteriu cu ajutorul căruia să se determine coeficientul α în cazul convecţiei cu aer sau cu apă pentru suprafeţe profilate.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. *** *Metode moderne pentru intensificarea transmiterii căldurii prin suprafeţe de încălzire.* Vol. 1, 2, I. D. T., Buc., 1962.

ON THE α COEFFICIENT CONCERNED WITH ARTIFICIAL ROUGHNESSES AND CORRUGATED SHEETS CONVECTION

(Summary)

After presenting a set of experimental data related with the α-coefficient concerned with artificial roughnesses and corrugated sheets convection a discussion follows.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 621.9

STUDIUL CALITĂŢILOR AŞCHIETOARE ALE TAROZILOR FABRICAŢI LA FABRICA DE SCULE, RÎŞNOV

DE

VITALIE BELOUS, I. CONDREA, I. ILIE, WERNER ZERELLES
şi HERMAN SEEWALDT

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Fabrica de scule, Rişnov, (F. S. R.) produce tarozi de maşină cu tehnologii de fabricaţie şi geometrii diferite, ceea ce implică calităţi aşchietoare diferite. Se ştie că aprecierea acestor calităţi se face pe baza criteriilor principale de optimalitate: a) durabilitatea (rezistenţa la uzură a sculei); b) forţele şi momentele minime în procesul de aşchiere; c) precizia şi calitatea suprafeţelor obţinute.

Din punctul de vedere al primului criteriu, un grup de cercetători de la F. S. R. *) a întreprins un studiu amplu asupra durabilităţii burghielor elicoidale, tarozilor, filierelor şi segmenţilor, comparativ cu produsele similare din import, concluziile fiind comunicate conducerii întreprinderii şi Ministerului Construcţiilor de Maşini.

În lucrarea de faţă se abordează studiul comparativ al calităţilor aşchietoare ale tarozilor de maşină fabricaţi la F. S. R., din punctul de vedere al celui de al doilea criteriu de optimalitate şi anume al dinamicii tarodării.

2. Condiţii de experimentare

Parametrii geometrici ai tarozilor studiaţi au fost determinaţi cu ajutorul unui dispozitiv special, construit în laboratorul de Maşini-unelte şi scule al Institutului politehnic din Iaşi (Fig. 1). Valorile medii găsite au fost, pentru unghiul de degajare pe conul de atac şi pe partea de calibrare, 4°, iar pentru unghiul de aşezare pe conul de atac, 6°.

Determinările experimentale ale momentului de torsiune la tarodare s-au efectuat în următoarele condiţii: a) măsurarea momentului cu dinamometrul dublu, cu sistem elastic Paramonov, cu microindicatoare; b) tarodul

*) Ing M. Kanyadi, ing E. Sinca, ing. G. Constantin, *Studiu comparativ asupra sculelor.*

fixat într-un dispozitiv de prindere cu compensare, special construit; c) materialul încercat — OL 38; d) viteze de aşchiere mici (1 ... 3 m/min); e) au fost experimentaţi: tarodul rulat (tip I, STAS 1153-63), tarodul aşchiat-rectificat (tip II, STAS 1153-63), tarodul aşchiat-rectificat (tip II, STAS 1153-63), tarodul cu filet conic pe conul de atac tip V şi tarodul cu aşchiere alternativă; f) aşchierea cu răcire-ungere (emulsie 5%); g) pentru obţinerea fiecărui punct de pe diagrama de variaţie a momentului cu adîncimea de pătrundere a tarodului s-au efectuat cel puţin cîte trei determinări.

3. Studiul dinamic comparativ al tarozilor de tip I (rulaţi-nerectificaţi) şi al celor de tip II (aşchiaţi-rectificaţi)

Pentru a compara, din punct de vedere al dinamicii tarodării, calităţile aşchietoare ale tarozilor rulaţi faţă de cele ale tarozilor rectificaţi, s-a studiat experimental variaţia momentului la tarodare (M_{l_x}) funcţie de adîncimea de pătrundere a tarodului (l_x), la dimensiunile M6, M10 şi M20, pentru ambele tipuri de tarozi. Curbele experimentale, trasate prin puncte, au fost reprezentate în coordonate carteziene milimetrice (fig. 2).

Din fig. 2 rezultă că momentele maxime, pentru condiţiile în care s-au efectuat determinările, nu sînt mai mari la tarozii rulaţi decît la cei rectificaţi; în schimb, datorită calităţii inferioare a suprafeţei filetului pe partea de calibrare, la tarozii rulaţi momentul de tarodare scade mai încet odată cu ieşirea conului de atac al tarodului din piuliţa tarodată. Acest aspect se explică prin faptul că odată cu înrăutăţirea calităţii suprafeţei filetului pe porţiunea de ghidare, creşte şi momentul de frecare pe această porţiune. Consecinţa imediată a acestui fenomen este creşterea momentului mediu de tarodare definit ca

$$M_{\text{med}} = \frac{1}{L}\int_0^L M_{l_x}\, \mathrm{d}l_x .$$

Intr-adevăr, din fig. 2 rezultă că momentul mediu pentru tarodul rulat (M) este mai mare decît cel pentru tarodul rectificat

$$\frac{1}{L}\int_0^L M'_{l_x}\, \mathrm{d}l_x > \frac{1}{L}\int_0^L M_{l_x}\, \mathrm{d}l_x .$$

Prin urmare şi lucrul mecanic la tarodare va fi mai mare în cazul tarodului rulat-nerectificat.

4. Studiul dinamic comparativ al tarozilor de tip II (rectificaţi) şi al celor de tip V (cu filet conic pe conul de atac)

Încercările experimentale s-au efectuat în aceleaşi condiţii cu cele precedente, înălţimea piuliţelor fiind de respectiv 30; 20 şi 6 mm.

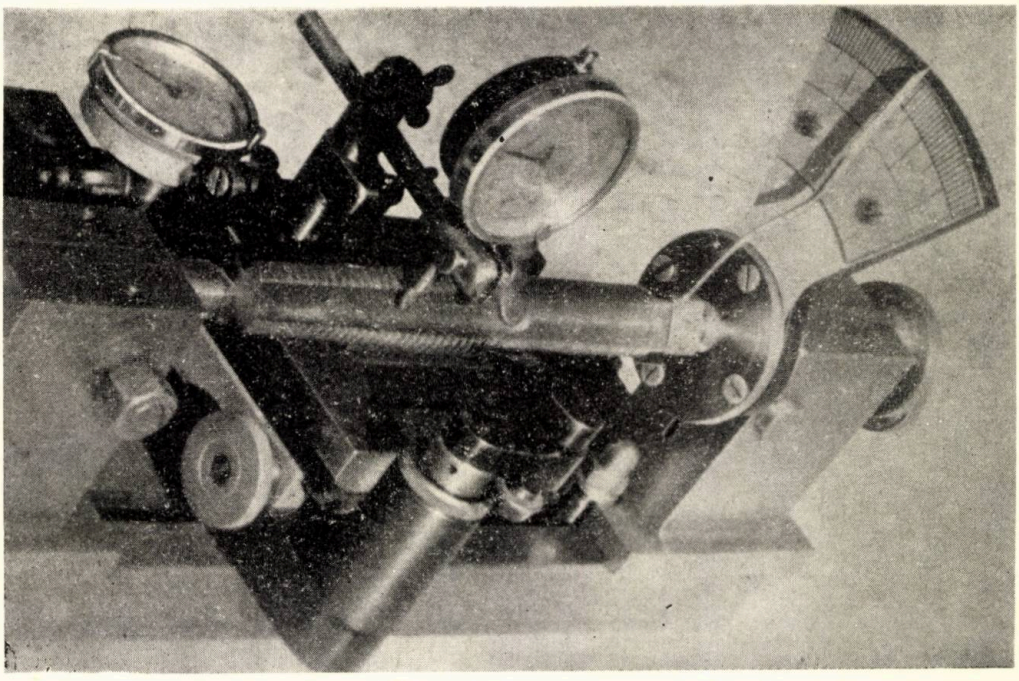


Fig. 1

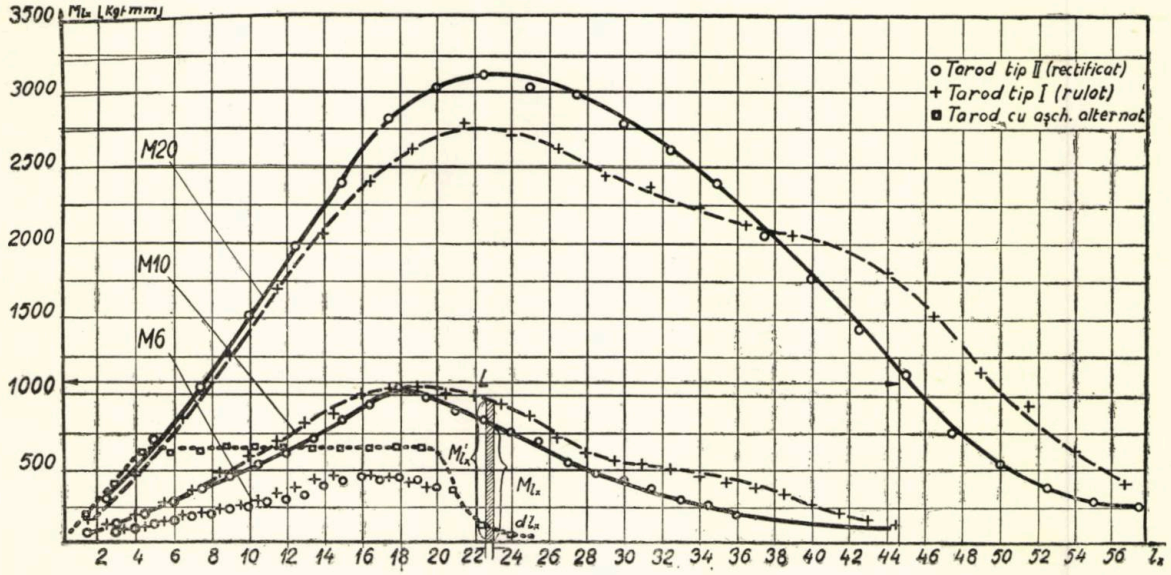


Fig. 2

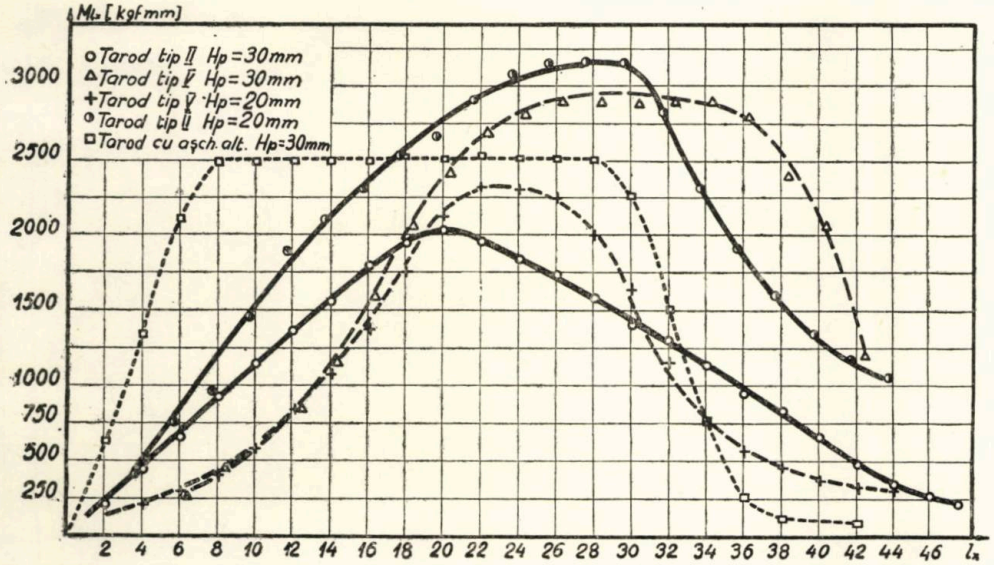


Fig. 3

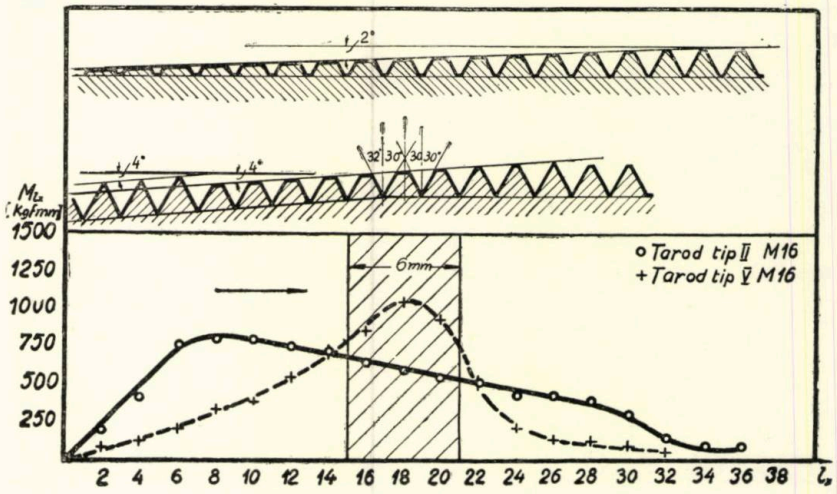
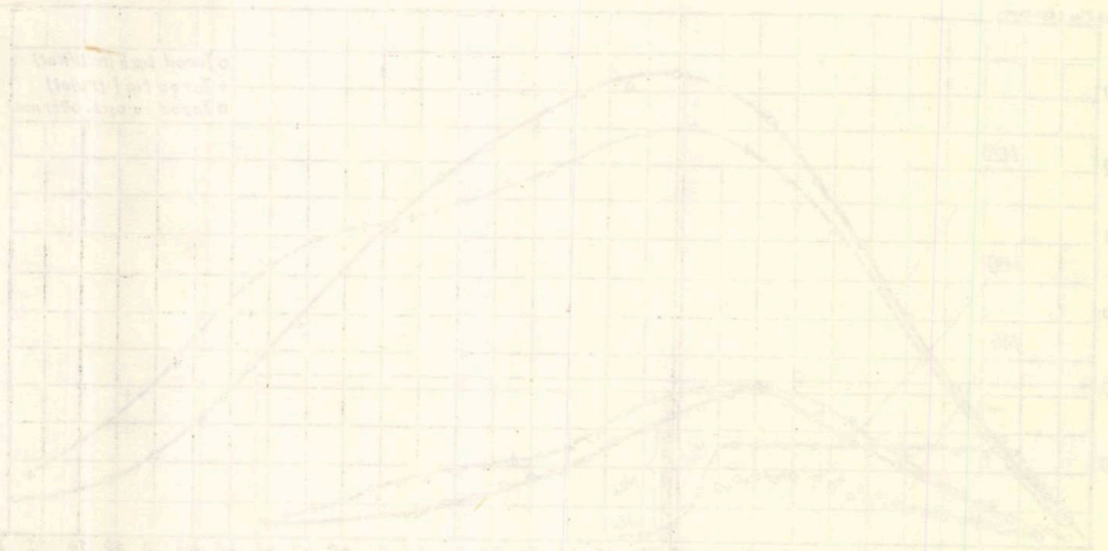
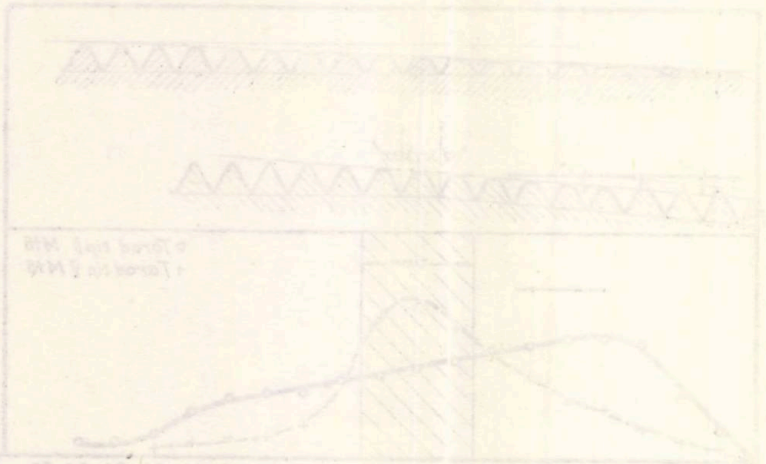
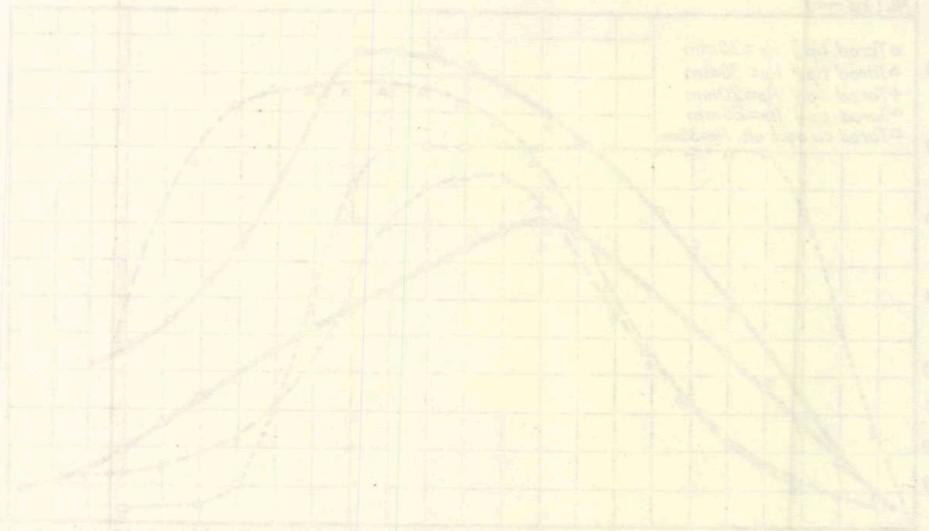


Fig. 4







Din diagramele reprezentate în fig. 3 și 4 rezultă că în cazul unei piulițe cu înălțimea superioară lungimii conului de atac al tarodului, momentul maxim, pentru tarodul de tip *V*, este inferior celui corespunzător tarodului de tip II. Acest aspect se explică prin faptul că forma secțiunilor tranversale ale aşchiilor și schema repartiției pe diferiți dinți este mai convenabilă în cazul tarodului de tip *V*. De asemenea și valoarea momentului mediu la tarodare este mai redusă în cazul tarodului de tip *V*.

Lucrurile se schimbă însă cînd lungimea conului de atac este sensibil superioară înălțimii piuliței filetate; în acest caz valoarea momentului maxim, în cazul tarodului de tip *V*, este superioară celei din cazul tarodului de tip II. Aceasta se explică, în special, prin faptul că, datorită unui unghi $2K$ superior, secțiunea totală a aşchiei degajate de tarodul de tip *V*, este la un moment dat (în momentul pătrunderii ultimului dinte de pe conul de atac în piuliță), superioară secțiunii totale maxime de aşchiere degajată de tarodul de tip II (fig. 3 și, în special, fig. 4).

În ceea ce privește valoarea momentului mediu, aceasta rămîne, și în acest caz, inferioară pentru tarodul de tip *V*.

Curbele experimentale din fig. 4 (pentru o înălțime mică a piuliței ($H_p = 6$ mm), au fost trasate, în special, cu scopul de a studia repartiția încărcării pe diferiți dinți aşchietori ai tarodului.

Din fig. 4 rezultă că în cazul tarodului de tip II, momentul maxim este atins abia după trei rotații ale tarodului cînd înălțimea piuliței este ocupată de primii dinți aşchietori de pe conul de atac, întrucît secțiunea aşchiilor preluate de aceşti dinți este maximă (grosimea aşchiilor este constantă pe toți dinții, iar lățimea este maximă pe primii dinți și descreşte spre ultimii dinți de pe conul de atac). În cazul tarodului de tip *V* momentul creşte, la început foarte încet datorită faptului că primii dinți aşchiază cu lățimi de aşchii foarte mici; panta curbei de variație a momentului cu pătrunderea tarodului creşte, atingînd valoarea maximă pentru ultimii dinți teşiți de filet conic și primii dinți de filet cilindric. Valoarea maximă a momentului este atinsă cînd intră în acțiune primul dinte de filet cilindric; creşterea pronunțată a momentului este legată, în special de faptul că acest dinte avînd o jumătate a unghiului profilului diferită de cea a filetului conic ($30 \neq 32$), va aşchia pe aproape întreaga înălțime a filetului, fiind din această cauză, foarte solicitat. De remarcat că această solicitare nefiind simetrică, dintele tinde să fie încovoiat. De altfel în cursul experimentărilor s-au observat ştirbiri tocmai la aceşti dinți.

După atingerea valorii maxime în cazul tarodului de tip II, momentul începe să scadă lent. Această scădere este determinată de faptul că odată cu ieşirea din lucru a unui dinte, intră în acțiune un alt dinte, mai puțin încărcat datorită unei lățimi de aşchie mai mici. Urmează o scădere mai pronunțată a momentului atunci cînd ies din acțiune ultimele trei spire cu dinți aşchietori. În cazul tarozilor de tip *V*, după atingerea valorii maxime momentul scade rapid odată cu ieşirea din lucru a ultimelor spire cu dinți aşchietori (este vorba de trei spire întrucît lungimea piuliței este de 6 mm, iar pasul de 2 mm).

5. Studiul dinamic comparativ al tarodului cu aşchiere alternativă

Tarodul cu aşchiere alternativă se caracterizează printr-un con de atac scurt (unghi K mare) şi prin faptul că de pe flancurile filetului sînt eliminate suplimentar, alternativ (stînga - dreapta), straturi de material de grosime $\Delta = 0{,}02 \ldots 0{,}05$ mm (fig. 5) Acestor caracteristici le corespund următoarele trei avantaje esenţiale:

a) Datorită unei valori ridicate a unghiului K grosimea aşchiei rezultă mai mare şi deci aşchierea se va produce cu comprimări plastice minime, în consecinţă şi cu forţe şi momente minime.

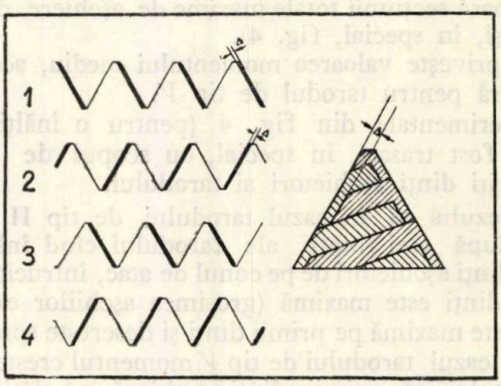


Fig. 5

b) Datorită eliminării alternative a materialului de pe flancuri, fiecare dinte va aşchia cu un singur tăiş lateral, transformîndu-se astfel aşchierea complexă bilaterală în aşchiere complexă unilaterală (fig. 5). Aceasta determină, în ultimă instanţă, o scădere pronunţată a forţelor de aşchiere [4].

c) Se realizează o productivitate mai ridicată datorită lungimii mici a conului de atac.

Încercările experimentale au confirmat cele de mai sus. Din fig. 2 rezultă că momentul maxim, pentru un tarod cu aşchiere alternativă M10, este cu 36% mai mic decît în cazul tarodului rulat şi al tarodului rectificat, iar pentru un tarod M16, cu 20% mai mic decît în cazul tarodului rectificat şi cu 12,5% faţă de tarodul tip V (cu filet conic pe conul de atac). Rezultă, de asemenea, că şi lucrul mecanic total, deci şi valoarea medie a momentului, în cazul tarodului cu aşchiere alternativă, este mai mică decît la celelalte tipuri de tarozi.

6. Concluzii

1. Calităţile aşchietoare ale tarozilor rulaţi-nerectificaţi nu sînt inferioare celor ale tarozilor rectificaţi în ceea ce priveşte valoarea momentului maxim la tarodare; în ceea ce priveşte însă valoarea medie de care depinde şi lucrul mecanic total, tarozii rulaţi-nerectificaţi au calităţi aşchietoare inferioare tarozilor rectificaţi.

2. Tarozii de tip *V* au calităţi aşchietoare superioare celor de tip II. În cazul cînd înălţimea piuliţei este superioară lungimii părţii active a conului de atac, atît momentul maxim cît şi momentul mediu sînt inferioare la tarozii de tip *V* faţă de cei de tip II. În schimb, în cazul cînd înălţimea piuliţei este inferioară lungimii părţii active a conului de atac al tarodului valoarea momentului maxim este mai mare la tarodul de tip *V* faţă de cea de la tarodul de tip II iar valoarea momentului mediu este mai mică. Folosirea tarozilor de tip *V* este eficientă în special în cazul prelucrării piuliţelor cu înălţimea superioară lungimii părţii active a conului de atac al tarodului.

3. Pentru eliminarea supraîncărcării primului dinte de filet cilindric al tarodului de tip *V* se pot folosi două soluţii:

a) micşorarea unghiului de atac pe porţiunea dinţilor teşiţi, micşorîndu-se astfel înălţimea primului dinte de filet cilindric;

b) teşirea mai pronunţată a dinţilor.

4. Tarozii cu aşchiere alternativă, din punct de vedere al momentului de aşchiere au calităţi aşchietoare superioare celorlalte tipuri de tarozi, obţinîndu-se reduceri în proporţie de pînă la 36% ale momentului de tarodare faţă de tarozii rulaţi sau rectificaţi.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte, scule şi dispozitive

BIBLIOGRAFIE

1. Резников Н. И., *Учение о резании металлов.* Машгиз, М., 1947, стр. 490.
2. Шифрин А. С., *Нарезание резьбы в деталях из жаропрочных стапей.* В сб. *Высокопроизводительная холодная обработка металлов.* Машгиз, М.–Л., 1958, стр. 121.
3. Вульф А. М., *Резание металлов* Машгиз, Л., 1963, стр. 293.
4. Belous V, *Asupra valorilor exponenţilor X_p, X_M din dinamica aşchierii metalelor.* Metalurgia şi constr. de maşini, 1962, 3.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖУЩИХ СВОЙСТВ МЕТЧИКОВ

(Резюме)

Анализируются, динамометрическим способом, режущие свойства метчиков с конической резьбой на заборной части и метчиков с чередовательным резанием, сравнивая их с режущими свойствами обыкновенных стандартных метчиков.

Устанавливается, что крутящий момент при резании метчиком с чередовательным резанием на 20...36% меньше чем крутящий момент при резании стандартным метчиком.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 1—2, 1967

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 624.01; 519.21

ASUPRA PROBABILITĂŢII DE CEDARE DIN TEORIA SIGURANŢEI CONSTRUCŢIILOR

DE

ANTON ŞESAN, SILVIA COVALI şi G. POPESCU

1. Introducere

Ştiind că acţiunea exterioară S (sarcina) cît şi capacitatea portantă R (reacţiunea) sînt aleatoare, determinarea probabilităţii de cedare ($P(R-S\leqslant 0)$) a unei structuri necesită cunoaşterea repartiţiilor probabilistice ale acestor mărimi.

Majoritatea studiilor efectuate pînă în prezent se bazează pe repartiţii normale, logaritmic normale, extremale, Pearson III etc. [2]...[7]. Freudenthal [2] include şi cazul general al funcţiilor continue oarecare. Pentru uşurinţa calculelor, diferiţi autori consideră R şi S de aceeaşi distribuţie.

Cu toate acestea, expresia integrală

$$P(R-S\leqslant 0)=\int_{-\infty}^{0} p(R-S)\,\mathrm{d}(R-S) \tag{1}$$

implică dificultăţi mari de calcul.

De fapt, distribuţiile continue folosite în mod obişnuit la reprezentarea mulţimilor reale de valori pentru R şi S, rămîn în cele din urmă estimări convenţionale ale realităţii concrete.

În absenţa unor metode analitice exacte, pentru aprecierea probabilităţii de cedare a unei structuri (deci şi a siguranţei) se introduc unele aproximări.

S-a presupus că $p(R)$ şi $p(S)$ sînt funcţiile de densitate de probabilitate ale celor două variabile aleatoare. Pentru curbele de distribuţie intersectate într-un punct oarecare $R_0=S_0$ (fig. 1), cu:

$$\int_{S_0}^{\infty} p(S)\,\mathrm{d}S=\omega_1 \quad \text{şi} \quad \int_{0}^{R_0} p(R)\,\mathrm{d}R=\omega_2,$$

Streleţki [8] stabileşte dubla inegalitate

$$\omega_1\omega_2 < P(R-S\leqslant 0) < \omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2. \tag{2}$$

În aceste condiţii siguranţa este evaluată prin:

$$\Gamma=1-\omega_1\omega_2. \tag{3}$$

În mod asemănător W i e r b i s k i [9] propune ca probabilitatea de necedare să fie calculată cu relaţia:

$$P(R - S \geqslant 0) = \Omega\Omega', \tag{4}$$

în care:

$$P(S < \max S) = \Omega, \quad P(R > \min R) = \Omega'.$$

Se arată însă că relaţia (4) este valabilă numai în cazuri cu totul particulare [10].

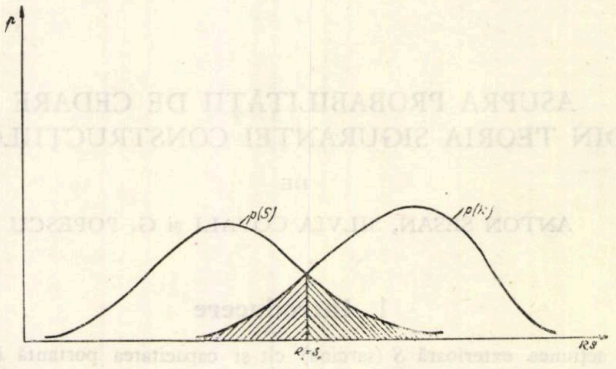


Fig. 1

2. Determinarea probabilităţii de cedare în cazul unor distribuţii discrete pentru capacitatea portantă şi sarcină

Folosirea distribuţiilor discrete finite este mult mai firească, fiindcă în realitate se cunosc numai un număr finit — mai mic sau mai mare, după necesităţi şi posibilităţi — de valori ale rezistenţei şi sarcinii.

Să considerăm deci $R\begin{pmatrix} R_j \\ a_j \end{pmatrix}$ şi $S\begin{pmatrix} S_i \\ b_i \end{pmatrix}$, ale căror histograme au n clase de intersecţie. Vom considera, pentru comoditate, $1 \leqslant j \leqslant n + p$ şi $-f \leqslant i \leqslant n$, în mulţimea numerelor întregi.

Cu operaţia de scădere a variabilelor aleatoare discrete [1], calculînd şi grupînd probabilităţile elementare, rezultă:

$$P(R - S \leqslant 0) = b_1 a_1 + b_2 (a_1 + a_2) + \cdots + b_i (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) + \cdots$$

$$\cdots + b_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{i} a_j. \tag{5}$$

Considerînd toate poziţiile posibile pentru $\min R$ şi $\max S$,

$$P(R - S \leqslant 0) = P(R \leqslant \min R) \cdot P(S \geqslant \max S) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} b_i \sum_{j=1}^{i} a_j - \sum_{i=m}^{n} b_i \sum_{j=i}^{k+1} a_j, \tag{6}$$

în care se presupune că $\min R$ şi $\max S$ corespund, respectiv, la a_k şi b_m. Necesitatea unei „marje de siguranţă", deasupra limitei de cedare a construcţiei, impune calcularea unei alte probabilităţi, anume:

$$P(R-S\leqslant C)=\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{i+\left[\frac{C}{d}\right]-\left[\frac{C}{d}\right]} a_j \tag{7}$$

sau, analog cu (6)

$$P(R-S\leqslant C)=P(R\leqslant \min R)\,.\,P(S\geqslant \max S)+$$

$$+\sum_{i=\left[\frac{C}{d}\right]+1}^{\left[\frac{C}{d}\right]+m-1} b_i \sum_{j=1}^{\left[\frac{C}{d}\right]+i} a_j - \sum_{i=\left[\frac{C}{d}\right]+m}^{\left[\frac{C}{d}\right]+n} b_i \sum_{j=\left[\frac{C}{d}\right]+i}^{k+1} a_j . \tag{8}$$

În formulele (7) şi (8), C este o constantă, d — mărimea unei clase — treaptă, iar $[C/d]$ reprezintă partea întreagă a raportului C/d. Se verifică uşor, că

$$P_C = P(R-S\leqslant C)-P(R-S\leqslant 0) \tag{9}$$

creşte odată cu C.

În cazul unor valori $P(R-S\leqslant 0)$ neconvenabile, se modifică numărul n al claselor de intersecţie prin translarea histogramei capacităţii portante (ceea ce revine la folosirea unui material sau altul de construcţie). Introducînd factorul de reglare ν, urmează deci să se calculeze:

$$P(\nu R-S\leqslant 0)=\sum_{i=1}^{n} b_{i+\left[\frac{\nu-1}{d}R_1\right]} \sum_{j=1}^{i} a_j \tag{10}$$

şi

$$P(\nu R-S\leqslant 0)=P(R\leqslant \min R)\,.\,P(S\geqslant \max S)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu-1-\left[\frac{\nu-1}{d}R_1\right]} b_{i+\left[\frac{\nu-1}{d}R_1\right]} \sum_{j=1}^{i} a_j + \sum_{i=m-\left[\frac{\nu-1}{d}R_1\right]}^{1+\frac{S_n-R_1}{d}-\left[\frac{\nu-1}{d}R_1\right]} b_{i+\left[\frac{\nu-1}{d}R_1\right]} \sum_{j=k+1}^{i} a_j , \tag{11}$$

în care indicii sumelor se obţin cu uşurinţă.

Prin încercări repetate se determină, din (10) sau (11), o astfel de valoare a factorului de reglare ν, încît să se poată rezolva toate cele trei probleme importante din teoria siguranţei şi anume:

a) cunoscînd probabilităţile $P(R\leqslant \min R)$ şi $P(S\geqslant \max S)$, să se determine $P(R-S\leqslant 0)$ şi să se compare cu probabilitatea de cedare admisă;

b) variind mărimea lui ν să se obţină probabilitatea de cedare dorită;

c) date fiind $P(R-S\leqslant 0)$ şi $P(S\geqslant \max S)$, să se găsească $P(R\leqslant \min R)$.

În funcţie de volumul informaţiei, calculele se pot efectua manual sau la o maşină electronică.

3. Exemplu

Fie distribuția reală a rezistenței unui beton B 400, realizat în 1965 la Întreprinderea de prefabricate, Roman, și o distribuție obișnuită pentru sarcini (fig. 2):

$$a_1 = 0{,}0013,\quad a_2 = 0{,}0013,\quad a_3 = 0{,}0026,\quad a_4 = 0{,}0052,\quad a_5 = 0{,}0100,$$
$$a_6 = 0{,}0180,\quad a_7 = 0{,}0220,\quad a_8 = 0{,}0300,\quad a_9 = 0{,}0500,\quad a_{10} = 0{,}100,$$
$$a_{11} = 0{,}1200,\quad a_{12} = 0{,}1700,\quad a_{13} = 0{,}1600,\quad a_{14} = 0{,}1300,$$
$$a_{15} = 0{,}0700,\quad a_{16} = 0{,}0400,\quad a_{17} = 0{,}0260,\quad a_{18} = 0{,}0130,$$
$$a_{19} = 0{,}0130,\quad a_{20} = 0{,}0042,\quad a_{21} = 0{,}0055,\quad a_{22} = 0{,}0040,$$
$$a_{23} = 0{,}0013,\quad a_{24} = 0{,}0013,\quad a_{25} = 0{,}0013$$

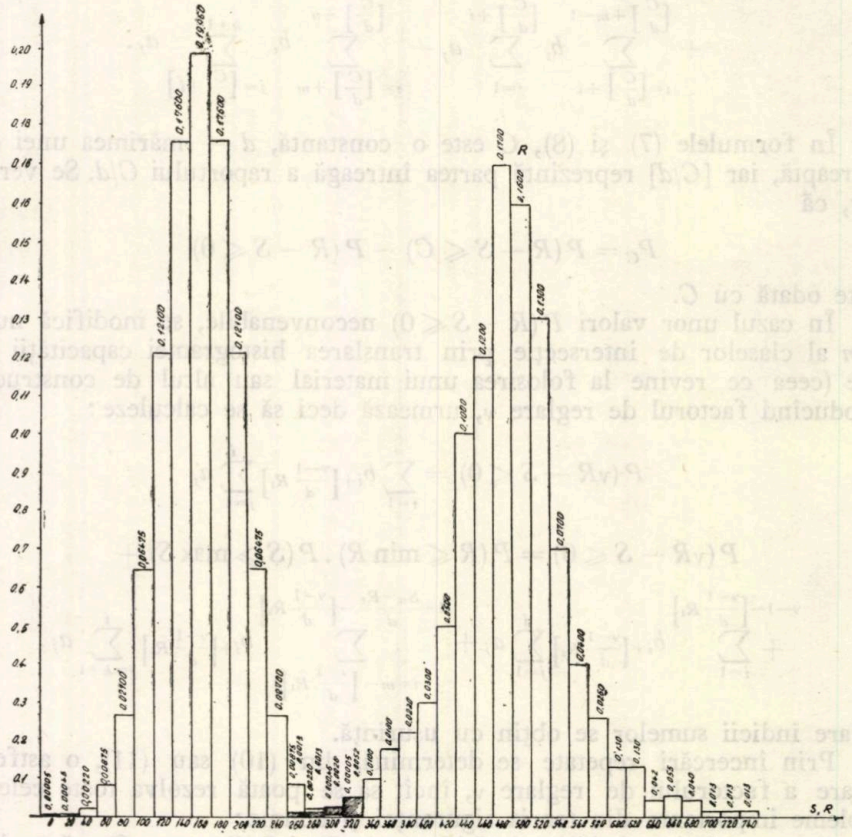


Fig. 2

și

$$b_{-12} = 0{,}00005,\quad b_{-11} = 0{,}00045,\quad b_{-10} = 0{,}0022,\quad b_{-9} = 0{,}00875,$$
$$b_{-8} = 0{,}02700,\quad b_{-7} = 0{,}06475,\quad b_{-6} = 0{,}12100,\quad b_{-5} = 0{,}17600,$$

$$b_{-4} = 0{,}19960, \quad b_{-3} = 0{,}17600, \quad b_{-2} = 0{,}12100, \quad b_{-1} = 0{,}06475,$$

$$b_0 = 0{,}02700, \quad b_1 = 0{,}00875, \quad b_2 = 0{,}00220, \quad b_3 = 0{,}00045,$$

$$b_4 = 0{,}00005.$$

Pentru $\min R = 300$ kg/cm^2, determinat cu o probabilitate $P(R \leqslant \min R) = 5{,}2 \times 10^{-3}$ şi pentru $\max S = 300$ kg/cm^2, determinat cu o probabilitate $P(S \geqslant \max S) = 0{,}5 \times 10^{-3}$, rezultă din (6):

$$P(R - S \leqslant 0) = 0{,}0052 \times 0{,}0005 + \sum_{i=1}^{3-1} b_i \sum_{j=1}^{i} a_j + \sum_{i=3}^{4} b_i \sum_{j=3+1}^{i} a_j =$$

$$= 0{,}0052 \times 0{,}0005 + 0{,}00875 \times 0{,}0013 + 0{,}00220 \times 0{,}0026 +$$

$$+ 0{,}00005 \times 0{,}0052 = 0{,}000019955 \cong 2 \times 10^{-5},$$

în care $k = m = 3$, $n = 4$.

Să modificăm probabilitatea de cedare şi anume: pentru $S_4 = 320$ kg/cm^2, $R_1 = 260$ kg/cm^2, $d = 20$ şi $\nu = 0{,}9$, de exemplu,

$$1 + \frac{S_4 - R_1}{d} - \left[\frac{\nu - 1}{d} R_1\right] = 5 \quad \text{şi} \quad \left[\frac{\nu - 1}{d} R_1\right] = -1$$

încît

$$P(0{,}9\,R - S \leqslant 0) = 0{,}0052 \times 0{,}0005 + \sum_{i=1}^{3-1+1} b_{i-1} \sum_{j=1}^{i} a_j +$$

$$+ \sum_{i=4}^{5} b_{i-1} \sum_{j=4}^{i} a_j = 0{,}0052 \times 0{,}0005 + 0{,}02700 \times 0{,}0013 +$$

$$+ 0{,}00875 \times 0{,}0026 + 0{,}00220 \times 0{,}0052 + 0{,}00045 \times 0{,}0052 +$$

$$+ 0{,}00005 \times 0{,}0152 = 0{,}000074990 \cong 7{,}5 \times 10^{-5},$$

deci mai mic.

Pentru $\nu = 1{,}1$ rezultă

$$P(1{,}1\,R - S \leqslant 0) = 0{,}0026 \times 0{,}0005 + 0{,}00220 \times 0{,}0013 +$$

$$+ 0{,}00005 \times 0{,}0026 = 0{,}000004290 \cong 4{,}3 \times 10^{-6},$$

de ordinul de mărime 10^{-6}.

Într-adevăr, alegerea unui factor de reglare ν supraunitar revine la micşorarea numărului de clase din intersecţia histogramelor ce corespund la R şi S (histograma lui R se translează spre dreapta).

Aproximînd distribuţiile discrete finite ale rezistenţei şi sarcinii prin distribuţii normale, obţinem:

a) media $\bar{x}_{R-S} = \bar{x}_R - \bar{x}_S = 474{,}77 - 160 = 314{,}77$;

b) abaterea medie pătratică

$$\sigma_{R-S} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \sqrt{40^2 + 61^2} = 72{,}9.$$

În acest caz,

$$P(R - S \leqslant 0) = P\left(-\frac{\bar{x}_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right) = P(-4{,}31) = 8{,}16 \times 10^{-6}.$$

Primită la 10 IV 1967

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statica construcţiilor

BIBLIOGRAFIE

1. Şesan A., Lazăr S., *Operaţii cu variabile aleatoare în teoria siguranţei construcţiilor.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 399—404.
2. Freudenthal A. M., *Safety and the Probability of Structural Failure,* Proc. ASCE, 1957, **80**, *468.*
3. — *Safety, Realibility and Structural Design.* Transactions ASCE, 1962, **127**, p. 11.
4. — *Die Sicherheit der Baukonstruktionen.* Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1964, **46**, *3—4.*
5. Prot M., *La Sécurité,* Ann. des ponts et chaussées, Janvier-Février, 1949.
6. Lévi R., *Calculs probabilistes de la sécurité des constructions.* Ann. des ponts et chaussées, Juillet-Aôut, 1949.
7. Мюллер P. A., *Вероятности достижения предельного состояния конструкции и взаимозависимости коэффициентов однородности и перегрузки. Вопросы безопасности и прочности строительных конструкций.* M., 1952.
8. Стрелецкий Н. С., *Основы статического учета коэффициента прочностм сооружений.* Стройиздат, M., 1952.
9. Wierbiski W., *Polprobabilistiezna metoda badania bez pieozenstwa budowlia metoda stanow granicz nych.* Inz. i Budown., 1956, *4.*
10. Eimer C., *Podstwy teorii bezpieczenstwa construjii.* Rozprawy inzynierskie, 1963, *1.*

SUR LA PROBABILITÉ DE RUPTURE DANS LA THÉORIE DE LA SURETÉ DES CONSTRUCTIONS

(Résumé)

En considérant la charge S et la réaction R comme des variables aléatoires discrètes et finies, on établit quelques formules de calcul de la probabilité de rupture.

Pour corriger les valeurs méconvenables, on introduit le coefficient de réglage ν de la probabilité $P(\nu R - S \leqslant 0)$, donné par les expressions (10) et (11).

En utilisant une distribution réelle de la résistence d'un béton B 400, et une distribution ordinaire pour les charges, on calcule la probabilité effective de rupture à l'aide de la formule (6).

Pour des coefficients de réglage différents on met en evidence la possibilité de modifier la probabilité de rupture, en utilisant les capacités portantes νR, correspondentes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

D. C. 539.4

DISPLACEMENT FIELD AND STATE OF STRESS IN A HEAVY ELASTIC RING SUPPORTED AT A POINT (II)

BY

JÓZEF GOLECKI and JANUSZ WALCZAK

Paper presented at the Scientific Symposium on the Them „Up-to-date Problems in the Strenght of Materials in the Building of Machines", Faculty of Mechanics of the Cracow Polytechnic Institute, 22 IX — 25 IX 1960

1. The Formulation and Solution of an Auxiliary Problem

Let us cut out of a disc a circle of a radius R_0. Then, on the boundary $r = R_0$ we have a state of stress (Fig. 1)

$$\begin{cases} \sigma_r^0 = \sigma_r^k \big|_{q=x_0} = \dfrac{1}{2}\sigma_s (1 + 2x_0 \cos\varphi) - \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\sigma_s \sum_{n=2}^{\infty} [(n-2)\, x_0^n - n x_0^{n-2}] \cos n\varphi, \\ \tau_{r\varphi}^0 = \tau_{r\varphi}^k \big|_{q=x_0} = \dfrac{1}{2}\sigma_s \sum_{n=2}^{\infty} n\,(x_0^n - x_0^{n-2}) \sin n\varphi, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $x_0 = R_0/R$.

Defined with formulae (1.1) the state of stress is equal to the force $W_x^0 = -\gamma\pi R_0^2$ that is to say [1]

$$\begin{cases} M^0 = \int_0^{2\pi} \tau_{r\varphi}^0 R_0^2 \, d\varphi = 0, \qquad W_y^0 = \int_0^{2\pi} (\sigma_r \sin\varphi + \tau_{r\varphi} \cos\varphi) R_0 \, d\varphi = 0, \\ W_x^0 = \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos\varphi - \tau_{r\varphi} \sin\varphi) R_0 \, d\varphi = -\gamma R_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = -\gamma\pi R_0^2. \end{cases} \tag{1.2}$$

We shall notice that, when superposing on the obtained, for the heavy disc, solution, the state of stress produced in the weightless ring by concentrated force $\gamma\pi R_0^2$ applied at the point M_1 of the boundary $r = R_0$ and by loading which equilibrates the state $(\sigma_r^0, \tau_{r\varphi}^0)$ on the boundary $r = R_0$, we derive the solution of the expounded problem [2].

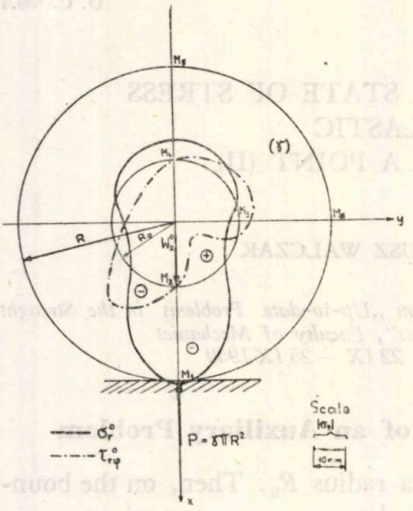


Fig. 1

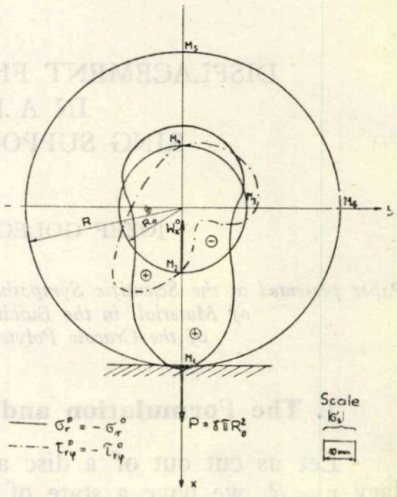


Fig. 2

Hence it comes out that what we have to do is to determine solution of the auxiliary problem for the weightless ring subjected on the boundary to the action of the loading which is in equilibrium and is defined by formulas[1])

$$(1.3)\qquad \begin{cases} r = R_0: & \sigma_r^p = -\sigma_r^k, \quad \tau_{r\varphi}^p = -\tau_{r\varphi}^k; \\ r = R: & \sigma_r^p = -\sigma_s x_0^2\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n\varphi\right), \quad \tau_{r\varphi}^p = 0. \end{cases}$$

On the basis of the formulae (1.3) and (2.1) — [2], we derive coefficients in the auxiliary problem.

$$(1.4)\qquad n = 0: \quad c_0' - b_0' = -\frac{1}{2}\sigma_s, \quad c_0' - b_0' x_0^2 = -\frac{1}{2}\sigma_s x_0^2.$$

[1]) On the basis of the paper [1] this kind of problem has an unique solution.

$$
\begin{aligned}
n=1:\quad & (3-2\mu')\,a_1' + 2b_1' - 2c_1' x_0 = -\sigma_s x_0,\\
& -(1-2\mu')\,a_1' + 2b_1' - 2c_1' x_0 = 0,\\
& (3-2\mu')\,x_0 a_1' + 2x_0^3 b_1' - 2c_1' = -\sigma_s x_0^2,\\
& -(1-2\mu')\,x_0 a_1' + 2x_0^3 b_1' - 2c_1' = 0.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
n\geqslant 2:\quad & (n+2)\,A_n' + nB_n' + (n-2)\,x_0^n C_n' + nx_0^{n-2} D_n' = \frac{1}{2}\sigma_s\,[(n-2)\,x_0^n - nx_0^{n-2}],\\
& A_n' + B_n' - x_0^n C_n' - x_0^{n-2} D_n' = -\frac{1}{2}\sigma_s\,(x_0^n - x_0^{n-2}),\\
& (n+2)\,x_0^n A_n' + nx_0^{n+2} B_n' + (n-2)\,C_n' + nD_n' = -\sigma_s x_0^2,\\
& x_0^n A_n' + x_0^{n+2} B_n' - C_n' - D_n' = 0,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

where

$$
\begin{cases}
A_n' = -n(n-1)\,a_n', \quad B_n' = (n+1)\,b_n',\\
C_n' = n(n+1)\,c_n', \quad D_n' = (n-1)\,d_n';
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

hence

$$
\begin{cases}
c_0' = 0, \quad b_0' = \dfrac{1}{2}\sigma_s, \quad a_1' = -\dfrac{1}{4(1-\mu')}\,x_0\sigma_s,\\
b_1' = -\dfrac{1-2\mu'}{8(1-\mu')}\,\dfrac{x_0}{1+x_0^2}\,\sigma_s, \quad c_1' = \dfrac{1-2\mu'}{8(1-\mu')}\,\dfrac{x_0^2}{1+x_0^2}\,\sigma_s,\\
A_n' = -\sigma_s\,\dfrac{2x_0^{3n+2} - (n+2)\,x_0^{3n} + 2(n-1)\,x_0^{n+2} - (3n-2)\,x_0^n + 2nx_0^{n-2}}{M_n(x_0)},\\
B_n' = \sigma_s\,\dfrac{2x_0^{3n} - (n+2)\,x_0^{3n-2} + 2nx_0^{n+2} - (3n+2)\,x_0^n + 2(n+1)\,x_0^{n-2}}{M_n(x_0)},\\
C_n' = \widehat{C}_n' + 2\sigma_s\,\dfrac{x_0^2}{M_n(x_0)}, \quad D_n' = \widehat{D}_n' - 2\sigma_s\,\dfrac{x_0^2}{M_n(x_0)},
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

where

$$
\begin{cases}
M_n(x_0) = 4\,[x_0^{4n} - n^2 x_0^{2n+2} + (2n^2-2)\,x_0^{2n} - n^2 x_0^{2n-2} + 1],\\
\widehat{C}_n' = \sigma_s\,\dfrac{2x_0^{4n} - (2n^2+2n+2)\,x_0^{2n+2} + (4n^2+4n-2)\,x_0^{2n} - (2n^2+2n)\,x_0^{2n-2}}{M_n(x_0)},\\
\widehat{D}_n' = -\sigma_s\,\dfrac{2x_0^{4n} - 2nx_0^{2n+4} - (2n^2-3n+2)\,x_0^{2n+2} + (4n^2-n-2)\,x_0^{2n} - 2n^2 x_0^{2n-2}}{M_n(x_0)}.
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

Moreover, on the basis of the formula (1.8) we derive additional relations which are necessary in our further considerations

$$
\begin{cases}
A'_n x_0^n - C'_n = -\dfrac{1}{2}\sigma_s x_0^2 + \sigma_s x_0^2 \alpha_n(x_0), \\
A'_n - C'_n x_0^n = -\dfrac{1}{2}\sigma_s x_0 x_0^n + \sigma_s x_0^2 \beta_n(x_0), \\
\alpha_n(x_0) = \dfrac{n x_0^{4n-2} - 2n^2 x_0^{2n+2} + 6n^2 x_0^{2n} - (6n^2+1) x_0^{2n-2} + 2n^2 x_0^{2n-4}}{M_n(x_0)}, \\
\beta_n(x_0) = \dfrac{2x_0^{3n} - 3n x_0^{3n-2} + 2n x_0^{3n-4} - 2n x_0^n + 3n x_0^{n-2} - 2n x_0^{n-4}}{M_n(x_0)}.
\end{cases} \tag{1.10}
$$

The obtained formulas we shall tabulate whereat the values of coefficients a_1, b_1, c_1, d_1, will be depending on x_0, μ' and the remained values will be determining for the case $x_0 = .4$ which is the subject of our thorough considerations.

Received the 15 VII 1963

Academy of Mining and Metallurgy, Cracow,
Polytechnic Institute, Cracow,
Poland

REFERENCES

1. Golecki J., *Boundary Value Problems for Elastic Circular Rings.* Arch. Mech. Stosowane 1956, **VIII.**
2. Golecki J., Walczak J., *Displacement Field and State of Stress in a Heavy Elastic Ring Supported at a Point (I).* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, pp. 337—354.

CÎMPUL DE DEPLASĂRI ŞI STAREA DE TENSIUNE ÎNTR-UN INEL ELASTIC, GREU, SPRIJINÎT ÎNTR-UN PUNCT (II)

(Rezumat)

În această parte se formulează şi se soluţionează o problemă auxiliară, folosindu-se în acest scop rezultatele publicate în acelaşi *Buletin* [2]. Metoda utilizată îşi are originea în rezultatele obţinute de primul dintre autori în [1].

Table 1[2]

The change of value $\frac{1}{\sigma_s} a_1'$

x_0 \ μ	.00	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
.1	−.025000 −.025000	−.0263157 −.026250	−.027777 −.027500	−.029529 −.028750	−.031216 −.0300033	−.033333 −.031216	−.035714 −.032490	−.038461 −.033750	−.041666 −.035000	−.045454 −.036250
.2	−.050000 −.050000	−.0526314 −.052500	−.055554 −.0555000	−.059058 −.057500	−.062432 −.060006	−.066666 −.062432	−.071428 −.064980	−.076922 −.067500	−.083332 −.070000	−.090908 −.072500
.3	−.075000 −.075000	−.078945 −.078750	−.083331 −.082500	−.088587 −.08625	−.093648 −.090009	−.099999 −.093648	−.107142 −.097470	−.115383 −.10125	−.124998 −.105000	−.136362 −.108750
.4	−.100000 −.100000	−.105260 −.105000	−.111108 −.110000	−.118116 −.015000	−.124864 −.120012	−.133332 −.124864	−.142856 −.129960	−.153844 −.135000	−.166664 −.140000	−.181816 −.145000
.5	−.125000 −.125000	−.131575 −.135250	−.138885 −.137500	−.147645 −.143750	−.156080 −.150015	−.166665 −.156080	−.178570 −.162450	−.192305 −.168750	−.213330 −.175000	−.227270 −.181250
.6	−.150000 −.150000	−.157890 −.157500	−.166662 −.165000	−.177174 −.172500	−.187296 −.180018	−.199995 −.187296	−.214284 −.19494	−.230766 −.202500	−.259996 −.210000	−.272724 −.207500
.7	−.175000 −.175000	−.184205 −.183750	−.194439 −.192500	−.206703 −.201250	−.218512 −.210021	−.233328 −.218512	−.249998 −.22743	−.269227 −.236250	−.306662 −.245000	−.338178 −.253750
.8	−.200000 −.200000	−.210520 −.210000	−.222216 −.2200000	−.236232 −.230000	−.249738 −.240024	−.266661 −.249728	−.285712 −.259920	−.307688 −.270000	−.353328 −.280000	−.383642 −.290000
.9	−.225000 −.225000	−.236855 −.236250	−.249993 −.247500	−.265861 −.258750	−.280954 −.270027	−.299994 −.280944	−.321426 −.292410	−.346149 −.303750	−.399994 −.315000	−.429096 −.32625
1.0	−.250000 −.250000	−.263150 −.262500	−.277770 −.275000	−.295390 −.287500	−.312170 −.300030	−.333327 −.312160	−.357140 −.324900	−.384610 −.337500	−.446660 −.350000	−.474550 −.362500

[2]) The obtained values for $x_0=1$ have a formal character because they correspond with cases $R_0=R$ (table 1...4). In tables 1...4, in each square, there are two values, the upper one corresponds with the plane state of strain and the lower one corresponds with the plane state of stress.

Table 2

The change of value $\frac{1}{\sigma_s} b_1'$

x_0 \ μ	.00	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
.1	−.012375 −.012375	−.011725 −.011755	−.010999 −.011136	−.010191 −.010518	−.009281 −.009899	−.008249 −.009281	−.007070 −.008663	−.0057113 −.008187	−.004126 −.007424	−.002249 −.006806
.2	−.024037 −.024037	−.0227721 −.022823	−.021360 −.021631	−.019795 −.020431	−.018028 −.019228	−.016024 −.018028	−.013734 −.016828	−.011098 −.015903	−.008015 −.004422	−.004369 −.013220
.3	−.034402 −.034402	−.0325915 −.032679	−.030579 −.030959	−.028331 −.029242	−.025801 −.027519	−.022934 −.025801	−.019656 −.024084	−.015877 −.022760	−.011471 −.020641	−.006252 −.011892
.4	−.043102 −.043102	−.039833 −.040943	−.0383129 −.038788	−.035495 −.036837	−.032326 −.034478	−.028753 −.032326	−.024627 −.0301751	−.019892 −.028516	−.014372 −.025861	−.00783 −.023700
.5	−.050000 −.050000	−.047368 −.047496	−.044444 −.044996	−.041176 −.042500	−.037500 −.039996	−.033332 −.037500	−.028568 −.035004	−.023076 −.033080	−.016972 −.030000	−.00900 −.027500
.6	−.0551462 −.055146	−.052243 −.052384	−.049018 −.049627	−.045414 −.046874	−.041359 −.044112	−.05762 −.041359	−.031508 −.038606	−.025410 −.036484	−.0183879 −.033087	−.010023 −.030330
.7	−.058723 −.058723	−.055632 −.055781	−.052198 −.052846	−.048360 −.049915	−.044042 −.046974	−.039147 −.044042	−.033552 −.041111	−.027102 −.038851	−.019580 −.035234	−.010673 −.032298
.8	−.060975 −.060975	−.057765 −.057921	−.054199 −.054872	−.050214 −.051828	−.045731 −.048775	−.040648 −.0457312	−.034838 −.042867	−.028141 −.040341	−.020331 −.036585	−.031082 −.033534
.9	−.0621537 −.062153	−.058581 −.059041	−.065247 −.055933	−.051184 −.052830	−.046615 −.049718	−.041434 −.046615	−.035512 −.043512	−.028685 −.041220	−.020724 −.037292	−.011297 −.034184
1.0	−.062500 −.062500	−.059210 −.059370	−.05555 −.0562450	−.051470 −.053125	−.0468750 −.049995	−.041665 −.046875	−.035710 −.043750	−.028845 −.041350	−.020340 −.057500	−.001136 −.034375

Table 3

The change of value $\frac{1}{\sigma_s} c_1'$

x_0 \ μ_0	.00	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
.1	−.001237 −.001237	−.0011725 −.0011755	−.0010999 −.001113	−.001019 −.001051	−.0009281 −.000989	−.000824 −.000928	−.000707 −.000866	−.000571 −.000818	−.000412 −.000742	−.000224 −.000680
.2	−.0048074 −.0048074	−.004554 −.004564	−.004272 −.04326	−.002958 −.004086	−.003604 −.003844	−.003204 −.003604	−.002746 −.003364	−.002218 −.003180	−.001602 −.002884	−.000872 −.002644
.3	−.010320 −.010320	−.0097773 −.009803	−.009173 −.009287	−.008499 −.008772	−.007740 −.0082557	−.006880 −.007740	−.005896 −.007225	−.004763 −.006828	−.003441 −.006192	−.001875 −.003567
.4	−.017240 −.017240	−.015933 −.016377	−.0015324 −.015515	−.014198 −.014654	−.012930 −.013791	−.011501 −.012930	−.009850 −.012170	−.007956 −.014406	−.005748 −.010344	−.003132 −.00948
.5	−.025000 −.025000	−.023684 −.023748	−.022222 −.022498	−.020578 −.021250	−.018750 −.019998	−.016666 −.018700	−.014284 −.018500	−.016538 −.016540	−.008336 −.015000	−.004500 −.013850
.6	−.033087 −.033087	−.031345 −.031430	−.029410 −.029774	−.027248 −.028124	−.024815 −.026467	−.022570 −.024815	−.018904 −.023163	−.015240 −.021890	−.011032 −.019852	−.006013 −.018198
.7	−.041161 −.041161	−.038942 −.039046	−.036538 −.036992	−.033852 −.03494	−.030829 −.032881	−.027402 −.030829	−.023485 −.028777	−.018970 −.027195	−.013709 −.024663	−.007470 −.022607
.8	−.048780 −.048780	−.046212 −.046336	−.043359 −.043897	−.040171 −.041462	−.036584 −.039020	−.032518 −.036293	−.027870 −.034293	−.022128 −.032271	−.016261 −.029268	−.088650 −.026828
.9	−.055937 −.055937	−.052992 −.053136	−.049921 −.050339	−.046065 −.047547	−.041953 −.044742	−.037290 −.041853	−.031960 −.039160	−.025816 −.037008	−.018651 −.033562	−.010167 −.030765
1.0	−.062500 −.062500	−.059210 −.059370	−.055555 −.056245	−.051470 −.053125	−.046875 −.049995	−.041665 −.046875	−.035710 −.043750	−.028845 −.041350	−.020840 −.037500	−.001136 −.034375

Table 4

The change of value: $M_n(x_0)$, $\frac{1}{\sigma_s} A_n'(x_0)$, $\frac{1}{\sigma_s} B_n'(x_0)$, $\frac{1}{\sigma_s} C_n'(x_0)$, $\frac{1}{\sigma_s} D_n'(x_0)$,

$\alpha_n = \alpha_n(x_0)$, $\beta_n = \beta_n(x_0)$ *for* $x_0 = 0{,}4$

n	M_n	$\frac{1}{\sigma_s} A_n'$	$\frac{1}{\sigma_s} B_n'$	$\frac{1}{\sigma_s} C_n'$	$\frac{1}{\sigma_s} D_n'$	α_n	β_n
2	1.99148	−1.70533	+2.37421	−.49734	+.33081	+2.30473	−1.25075
3	3.31724	−.60044	+.76869	−.03214	+.00625	+.50698	−.19630
4	3.80996	−.27521	+.33434	+.05394	−.05893	+.12637	−.03792
5	3.95292	−.13154	+.15438	+.07398	−.07496	+.03054	−.00748
6	3.98924	−.06222	+.07128	+.07866	−.07885	+.00698	−.00144
7	3.99778	−.02886	+.03248	+.07972	−.07975	+.00162	−.00027
8	3.99952	−.01315	+.01460	+.07994	−.07995	+.00032	−.00005
9	3.9999	−.00590	+.00648	+.07999	−.07999	+.00006	−.00001
10	4.00000	−.00262	+.00285	+.08000	−.08000	+.00001	.00000
11	4.00000	−.00115	+.00124	+.08000	−.08000	.00000	.00000
12	4.00000	−.00050	+.00023	+.08000	−.08000	.00000	.00000

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUA
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

УДК 539.4

ОБЩИЙ ХАРАКТЕР УРАВНЕНИЯ КЛАПЕЙРОНА

И. ДОЙЧ

1. *Введение*

В технической специальной литературе уравнение Клапейрона представляется как метод раскрытия неопределенностей прямых балок опирающихся на несколько опор. В действительности, это уравнение в его обобщенной форме, может быть применено для расчета перемещения и для раскрытия неопределенностей любой системы прямых плоских балок подвергнутых изгибу копланарных сил.

2. *Доказательство обобщенного уравнения*

Пусть имеется плоская система каких угодно балок, из прямых брусьев загруженных любыми копланарными нагрузками. Из системы выделяются *1-2-3* смежных любых участка, усеченных на месте ломки или на месте изменения жесткости изгиба (рис. 1).

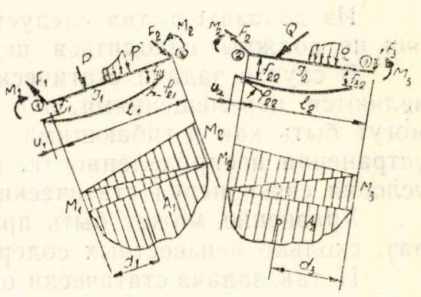


Рис. 1

Жесткости участков разные и равные EI_1 и, соответственно, EI_2.

Под влиянием внешних сил в сечениях *1*, *2* и *3*, появляются внутренние силы и изгибающие копланарные моменты.

Участки балки деформируются и перемещаются, а концы брусьев в общем узле *2* поворачиваются на тот же угол и в том же направлении для обоих концов $|\varphi_{21}| = |\varphi_{22}|$.

Представляя диаграммы моментов на тех двух участках, из этого равенства следует уравнение Клапейрона в обобщенной форме:

$$(1)\quad 6E\left(\frac{f_{21}-f_{11}}{l_1}+\frac{f_{22}-f_{32}}{l_2}\right)=\frac{M_1 l_1}{I_1}+2M_2\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)+\frac{M_3 l_2}{I_2}+6\left(\frac{S_1}{l_1 I_1}+\frac{S_2}{l_2 I_2}\right),$$

отличающееся от классического лишь первой скобкой. Введены еще обозначения: $S_1 = A_1 d_1$ — статический момент относительно точки *1*, площади моментов, заданной применимыми нагрузками, на первый участок длиной l_1; $S_2 = A_2 d_3$ — статический момент относительно точки *3*, площади моментов, заданной применимыми нагрузками, на второй участок длиной l_2; f_{11}, f_{21}, f_{22} и f_{32} — перпендикулярные перемещения на участок длиной l_1 и l_2; обычно $f_{21} \neq f_{22}$ и $u_1 \neq u_2$, только $u_1^2 + f_{21}^2 = u_2^2 + f_{22}^2$.

Допускается, что при деформировании длина брусьев сохраняется, т. е. осевое перемещение сечений одного бруса имеет одинаковое значение.

Если брусья имеют одинаковую жесткость, тогда уравнение принимает вид:

$$(2)\quad 6EI\left(\frac{f_{21}-f_{11}}{l_1}+\frac{f_{22}-f_{32}}{l_2}\right)=M_1 l_1+2M_2(l_1+l_2)+M_3 l_2+6\left(\frac{S_1}{l_1}+\frac{S_2}{l_2}\right).$$

Под общей формой (1) и (2) уравнение может быть применено для расчета перемещений и раскрытия неопределенностей любой системы прямых плоских балок.

Если те два участка бруса коллинеарны, тогда $f_{21} = f_{22} = f_2$ и $u_1 = u_2$, а уравнение (1) доходит до его классической формы при сокращенном обозначении $f_{11} = f_1$ и $f_{32} = f_3$

$$(3)\quad 6E\left(\frac{f_2-f_1}{l_1}+\frac{f_3-f_2}{l_2}\right)=\frac{M_1 l_1}{I_1}+2M_2\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)+\frac{M_3 l_2}{I_2}+6\left(\frac{S_1}{l_1 I_1}+\frac{S_2}{l_2 I_2}\right).$$

Из доказательства следует, что сечения *1*, *2* и *3* произвольны и они не должны находиться перед опорами или в углах сооружений.

В случае задачи статически определенной, неизвестные уравнения являются перемещениями, а в случае статически неопределенной, они могут быть как изгибающими моментами так и перемещениями. Для устранения неопределенности, в первой скобке могут быть поставлены условия связи перед статически неопределенными неизвестными.

Уравнение может быть применено для балочной системы столько раз, сколько неизвестных содержит эта система.

И так, задача статически определенная или неопределенная может представить четыре категории неизвестных: а) внешние реакции численностью r; б) тройки усилий в сечении для каждого закрытого контура, их численность будучи равна c; в) отдельные перемещения брусьев численностью d; г) неизвестные прогибы требуемые в условиях задачи перед некоторыми сечениями; их количество — s.

Таким образом число неизвестных будет $n = r + 3c + d + s$.

Эти неизвестные могут быть определены при помощи 3 уравнений статического равновесия и численностью e всегда достаточных уравнений Клапейрона. Так что и $n = 3 + e$, отсюда следует нужное число уравнений Клапейрона:

$$e = r + 3c + d + s - 3. \tag{4}$$

Для каждого узла, в котором встречаются два бруса, как и для каждого защемления можно применить по одному уравнению Клапейрона. Если в одном узле встречаются N брусьев, тогда для соответствующего узла могут быть написаны $N-1$ уравнений Клапейрона.

Так же для любого изменения жесткости изгиба, или любого неизвестного прогиба балки можно написать по уравнению Клапейрона.

Для иллюстрации, берется пример рамного статически неопределенного сооружения (рис. 2), изготовленного из 35 брусков, 2 защемлений, одного шарнира, 4 узлов с 2 брусками, 9 узлов с 3 брусками и 8 узлов с 4 брусками.

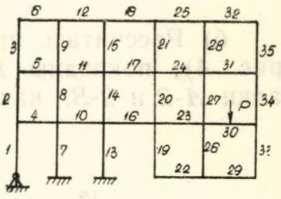


Рис. 2

Число внешних реакций $r = 2 \times 3 + 2 = 8$, а закрытых контуров $c = 12$, и отдельных перемещений $d = 4 + 3 = 7$, так как каждая горизонтальная непрерывная балка может иметь по одному горизонтальному перемещению, соответственно каждый вертикальный столб несвязанный прямо с неподвижным пространством, может иметь по одному вертикальному перемещению.

В таком случае число требуемых уравнений Клапейрона равне $e = 8 + 3 \times 12 + 7 - 3 = 48$ в этом случае когда не происходят изменения жесткости брусьев на известных участках.

Система располагает этими уравнениями, потому что имеет два защемления и четыре узла по двум брускам (6 уравнений), девять узлов с тремя брусьями (18 уравнений) и восемь узлов с четырьмя брусьями (24 уравнения), что и дает в действительности всего $6 + 18 + 24 = 48$ уравнений Клапейрона. Для каждого требуемого прогиба или изменения жесткости, с пролета одного бруска можно будет написать по одному уравнению Клапейрона.

Применения уравнений Клапейрона предполагает установление геометрических связей, существующих между перемещениями, для правильной оценки отдельных перемещений. В нашем примере эта связь между перемещениями выражается через равенство горизонтальных перемещений всех существующих узлов на некотором уровне, как и при равенстве вертикальных перемещений, существующих узлов на одном столбе несвязано с неподвижным пространством.

Отметим, что уравнение Клапейрона относится только к деформации изгиба, и не к деформациям произведенным продольной и поперечной силой.

В дальнейшем иллюстрируется метод обобщения уравнения Клапейро на некоторых конкретных примерах.

3. *Расчет прогибов при помощи уравнения Клапейрона*

а) Требуется рассчитать прогиб против силы для балки с переменной жесткостью (см. рис. 3). Уравнение применяется в выражении (3) для сечений *A-1-B*:

$$6E\left(2\frac{f}{l}+2\frac{f}{l}\right)=2\frac{Pl}{4}\left(\frac{l}{2I}+\frac{l}{2.2I}\right),$$

откуда следует:

$$f=\frac{Pl^3}{64EI}.$$

б) Рассчитать прогиб балки постоянной жесткости в сечении *2*, (рис. 4), показаны диаграммы изгибающих моментов для участков балки *A-2* и *2-B*, как если бы концы этих участков опирались.

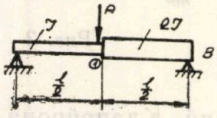


Рис. 3

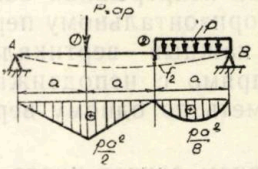


Рис. 4

Уравнение (3) в котором $I_1=I_2=I$ применяется для сечения *A-2-B*, следующим образом:

$$6EI\left(\frac{f_2}{2a}+\frac{f_2}{a}\right)=2\frac{2}{3}pa^2 3a+6\left(\frac{pa^3}{4}+\frac{pa^3}{24}\right),$$

потому что:

$$l_1=2a,\quad l_2=a,\quad M_1=0,\quad M_2=\frac{2}{3}pa^2,\quad M_3=0,$$

$$S_1=\frac{1}{2}2a\frac{pa^2}{2}a=\frac{pa^4}{2},\quad S_2=\frac{2}{3}a\frac{pa^2}{8}\frac{a}{2}=\frac{pa^4}{24},$$

следует:

$$f=\frac{23pa^4}{36EI}.$$

4. *Расчет некоторых простых рам*

в) Требуется раскрыть неопределенность одной равносторонней треугольной рамы (см. рис. 5). Произведя сечение рамы по углам треугольника, можно выявить неизвестные изгибающие моменты.

Благодаря симетрии $M_B = M_A$ и углы рамы неподвижны.

Таким образом уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{M_1 l_1}{I_1} + 2M_2\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) + \frac{M_3 l_2}{I_2} + 6\left(\frac{S_1}{l_1 I_1} + \frac{S_2}{l_2 I_2}\right) = 0.$$

Это уравнение применяется последовательно в областях *I-III* и *II-III*, как вытекает из:

$$\frac{M_A 2a}{2I} + 2M_B\left(\frac{2a}{2I} + \frac{2a}{I}\right) + \frac{M_C 2a}{I} + 6\frac{1}{2}\frac{2aP}{4}2a\frac{a}{2a2I} = 0;$$

$$M_A 2a + 2M_C 4a + M_B 2a = 0.$$

Отсюда следуют неизвестные изгибающие моменты:

$$M_A = -\frac{Pa}{8} \quad \text{и} \quad M_C = \frac{Pa}{16}.$$

г) Раскрыть неопределенность открытой рамы (см. рис. 6), зная что все брусья имеют постоянную изгибную жесткость.

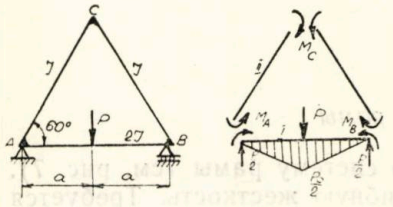


Рис. 5

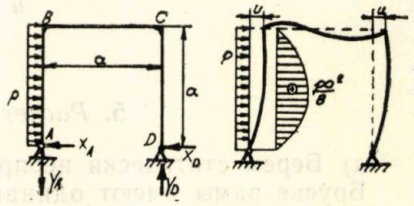


Рис. 6

Под влиянием силы, горизонтальный брус BC перемещается горизонтально на величину u.

Для раскрытия неопределенности нужны e уравнений вида Клапейрона $e = r + 3c + d - 3 = 4 + 1 - 3 = 2$, которые могут быть написаны вокруг двух узлов B и C рамы.

А именно:

1° на участке A-B-C: $6EI\frac{u}{a} = 2M_B 2a + M_C a + \frac{6}{a}\frac{2}{3}a\frac{pa^2}{8}\frac{a}{2}$;

2° на участке B-C-D: $-6EI\frac{u}{a} = M_B a + 2M_C 2a.$

При исключении перемещения получаем уравнение упругого равновесия, которое устраняет неопределенность:

$$M_B + M_C + \frac{pa}{20} = 0.$$

Расчет можно вести дальше введя реакции:

$$Y_A = Y_D = \frac{pa}{2} \text{ и } X_D = pa - X_A.$$

Выражаются изгибающие моменты для углов в зависимости от реакции:

$$M_B = \frac{pa^2}{2} - X_D a, \quad M_C = -X_D a.$$

Эти значения переносятся в уравнение упругого равновесия и следует:

$$X_A = \frac{29}{40} pa, \quad X_D = \frac{11}{40} pa.$$

Одновременно следует и горизонтальное перемещение узла B или C:

$$u = \frac{7pa^4}{48EI}.$$

5. *Расчет сложной рамы*

д) Берем статически неопределенную систему рамы (см. рис. 7). Брусья рамы имеют одинаковую изгибную жесткость. Требуется вычислить и начертить эпюры внутренних сил.

Рама представляет одну внешнюю неопределенность и три внутренних неопределенностей. Применив силу, брус BF может перемещаться горизонтально на величину u. Из соотношения (4) следует число нужных уравнений Клапейрона

$$e = 4 + 3 + 1 - 3 = 5.$$

Для применений уравнения были выявлены на вид изгибающие моменты, возникающие вокруг узла B и F. Между этими моментами существуют соотношения равновесия:

$$M_1 = M_2 + M_3 \text{ и } M_4 + M_5 = -2aP.$$

На рис. 7 представляется и одна эквивалентная статически определенная система, с четырьмя неизвестными нагрузками (X, Y, C и X_A).

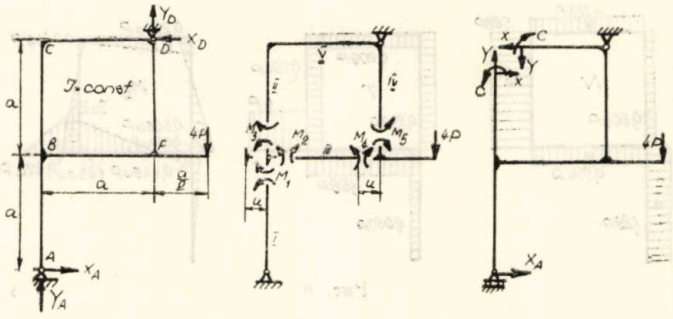


Рис. 7

Для устранения неопределенности применяется уравнение Клапейрона (2), пять раз, а именно:

1° область *I-II*: $6EI\left(-\frac{u}{a}-\frac{u}{a}\right)=2M_1 2a+M_C a+\frac{6}{a}\left(-\frac{1}{2}M_2 a\right)\frac{2}{3}a;$

2° область *I-III*: $6EI\left(-\frac{u}{a}\right)=2M_1 2a+M_4 a+\frac{6}{a}\left(-\frac{1}{2}M_3 a\right)\frac{2}{3}a;$

3° область *II-IV*: $6EI\left(\frac{u}{a}\right)=M_3 a+2M_C 2a+M_D a;$

4° область *III-IV*: $6EI\left(-\frac{u}{a}\right)=M_2 a+2M_4 2a+M_D a+\frac{6}{a}\left(\frac{1}{2}2aPa\right)\frac{2}{3}a;$

5° область *V-IV*: $6EI\left(-\frac{u}{a}\right)=M_C a+2M_D 2a+M_5 a.$

Исключая неизвестное перемещение u, получаем систему с четырьмя уравнениями неизвестных изгибающих моментов; система достаточна для устранения неопределенности:

$$2M_2+6M_3+9M_C+2M_D=0,\quad 4M_2+3M_3+M_4+4M_C+M_D=0,$$
$$M_2+M_3+4M_4+4M_C+2M_D+4aP=0,\quad M_3-M_4+5M_C+5M_D-2aP=0.$$

Каждый изгибающий момент может быть выражен в зависимости от статически неопределенных величин: X_A, X, Y, C. Следует:

$$2aX_A-15C+4aX+2aY=0,\quad -3aX_A+3C+2aX-2aP=0,$$
$$3aX_A+2C+4aX+2aY-4aP=0,\quad aX_A-12C+2aX+6aY=0.$$

Решив эту систему и применив уравнения равновесия, получим:

$$X=0{,}737P,\quad Y=0{,}209P,\quad C=0{,}232aP,\quad X_A=X_D=0{,}057P,$$
$$Y_A=-1{,}89P,\quad Y_D=5{,}89P.$$

Полученные значения способствуют представлению на рис. 8 эпюр внутренних сил.

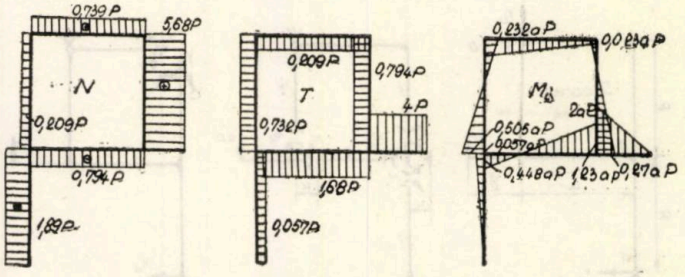


Рис. 8

Из любого Клапейронова уравнения следует теперь и неизвестное перемещение бруса BF: $u = 0{,}0743\,(Pa^3/EI)$.

6. *Выводы*

Из представленных примеров следует общий характер обобщенного уравнения Клапейрона.

В некоторых задачах применение уравнения представляет большую расчетную выгоду, в сравнении с обычными методами.

Хорошо потверждают это высказывание примеры а)...д).

Поступила 16 XII 1965 г.

Брашовский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Clapeyron B. P. E., *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*. C. R. Ac. Sci., Paris, 1857, 45.
2. George S. G., Rettger E. W., *Mechanics of Materials*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1943.
3. Mazilu P., *Statica construcţiilor*. Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1959.
4. Рабинович Ж. М., *Курс строительной механики*. Т. **II**, Госиздат, М., 1954.
5. Снитко Н. К., *Расчет рамных сооружений операционными методами*. Госстройиздат, М., 1962.
6. Blumenfeld M., *Calculul deformaţiilor barelor drepte prin metoda celor trei necunoscute*. Bul. Inst. polit. Bucureşti, 1961, **XXIV**, *1*.
7. Deutsch I., *Noi aplicaţii ale ecuaţiei celor trei momente*. Lucr. şt., fac. Industr. lemn., Braşov, 1965, **II**.

CARACTERUL GENERAL AL ECUAŢIEI LUI CLAPEYRON

(Rezumat)

Se prezintă ecuaţia lui Clapeyron sub formă generalizată. Se arată apoi că ecuaţia poate fi utilizată la calculul deplasărilor de încovoiere şi la ridicarea nedeterminării oricăror sisteme de grinzi drepte plane încărcate cu sarcini coplanare. Pentru ilustrarea modului de aplicare a ecuaţiei se dau cîteva exemple din care rezultă caracterul mai larg al ecuaţiei decît cel prezentat în lucrările de specialitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 624.218

CONSIDERAREA STĂRILOR DE COACŢIUNE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR METALICE

DE

ELENA NEACŞU, ADRIAN VULPE, AL. DUMITRAŞ şi N. UNGUREANU

1. Domeniul de comportare elastico-plastic determinat de fenomenele de adaptare pe secţiune şi între secţiuni, mai ales la structurile cu grad mare de nedeterminare static, reprezintă o rezervă importantă de capacitate portantă necesar a fi cunoscută în scopul aprecierii coeficientului real de siguranţă al elementului sau al structurii.

Cunoaşterea condiţiilor şi a legilor de distribuţie probabilă a eforturilor interioare în domeniul de comportare elastico-plastică, adică în etapele intermediare de lucru dintre domeniul elastic şi starea de cedare, poate da un răspuns discuţiilor teoretice privitoare la aspectul siguranţei, în legătură cu aplicarea metodelor de calcul elastic sau plastic, după cum la o structură, odată atinsă limita de comportare elastică este necesară numai o mică supraîncărcare pentru atingerea cedării plastice sau în cazul cînd supraîncărcarea are valori importante.

De asemenea stăpînirea domeniului elastico-plastic permite studierea posibilităţilor de folosire a rezervelor de capacitate portantă în sensul ridicării limitei de exploatare elastică a structurii, cu o reducere însemnată a consumului de material, măsura în care poate fi realizată această îmbunătăţire şi consecinţele sale asupra comportării ulterioare sub sarcină.

2. Din cercetările experimentale efectuate sînt prezentate numai unele rezultate obţinute pe grinzi simplu rezemate şi cadre portal metalice cu o singură deschidere, care ilustrează posibilităţile de îmbunătăţire a limitei de comportare elastică prin încărcări repetate într-un singur sens sau în sensuri alternative.

Fig. 1 reprezintă curba sarcină-deformaţie obţinută la încărcarea unei grinzi de oţel de 0,90 m deschidere încărcată cu o sarcină concentrată în mijlocul deschiderii.

La prima încărcare (A_1) limita de comportare elastică a fost depăşită cu 37,5%. La descărcarea şi încărcarea repetată în acelaşi sens (A_2) grinda s-a comportat elastic pînă la nivelul de încărcare anterior atins. Încărcarea în sens contrar (A_3) indică o micşorare a sarcinei elastice cu 37,5% faţă de sarcina elastică iniţială. Rezultatele ultimelor două încărcări evidenţiază faptul că intervalul de comportare elastică a fost deplasat, în sensul încărcării anterioare A_1, fără a-i fi modificată mărimea.

Încărcarea trepeată (A_4) a permis obținerea unei limite elastice superioară cu 37,5% limitei elastice calculate. Spre deosebire de încărcarea A_2, în acest ultim caz deformația remanentă înregistrată este de aproximativ patru ori mai mică. Se remarcă de asemenea că prin încărcări de sensuri alternative poate fi obținută o creștere a limitei de elasticitate de ordinul 35% față de sarcina elastică inițială fără deformații remanente.

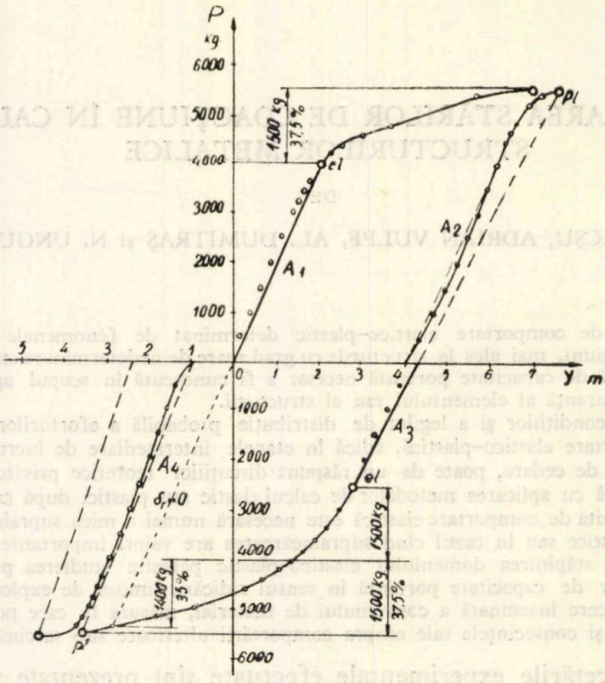


Fig. 1

3. Studierea grinzilor simplu rezemate a permis și efectuarea unor observații referitoare la valabilitatea rezultatelor teoretice acceptate în ceea ce privește extinderea zonelor plastice în diferite ipoteze de încărcare.

Astfel, în cazul grinzii simplu rezemate acționate de o sarcină concentrată în mijlocul deschiderii, ale cărei etape de plasticizare pot fi urmărite în fig. 2, repartiția teoretică a zonelor de plastifiere în vecinătatea secțiunii critice se manifestă pe o porțiune egală cu o treime din deschidere. Experimental se constată că plastifierea se produce pe un interval aproximativ egal cu jumătate din deschidere deoarece sîmburele elastic nefiind punctual împiedică deformația plastică a fibrelor învecinate și produce o extindere a deformațiilor plastice în zonele învecinate.

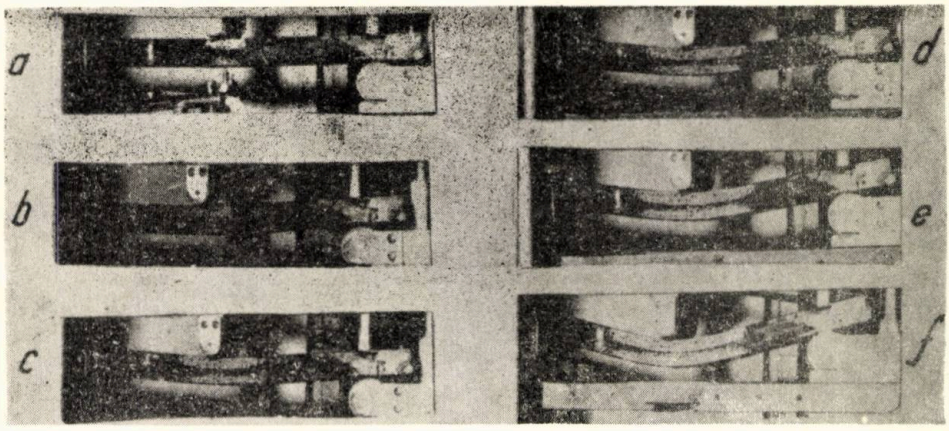


Fig. 2

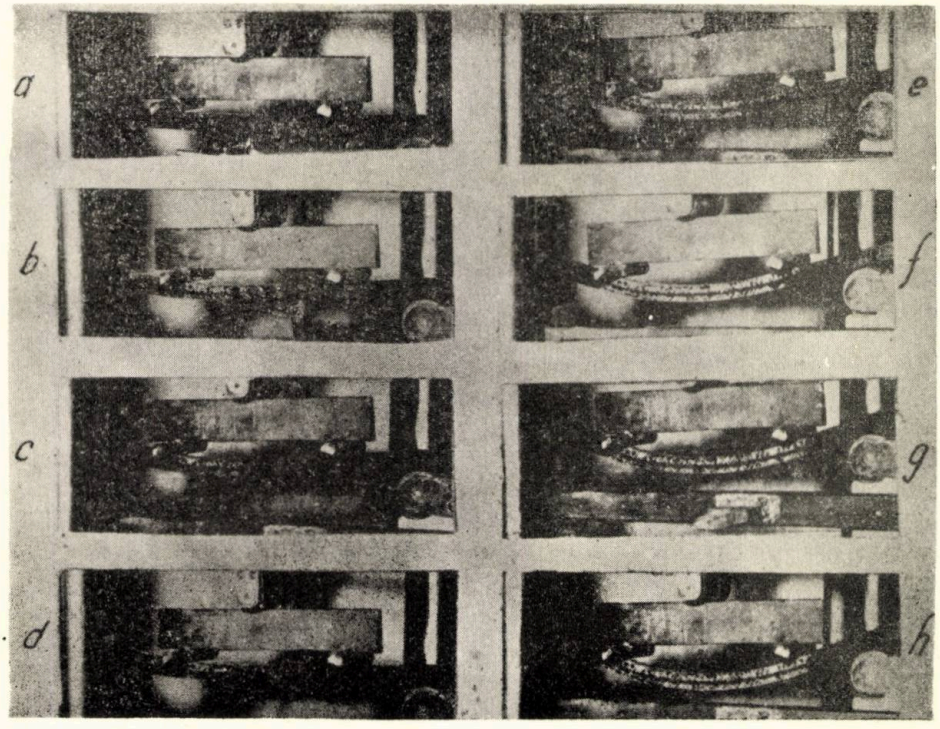


Fig. 3

Același fenomen de extindere a zonelor plastice reale față de cele teoretice se observă și în cazul încovoierii pure realizate la grinda din fig. 3. În acest caz se remarcă și faptul că deși încărcarea a fost riguros realizată, astfel încît pe porțiunea centrală grinda să fie solicitată la încovoiere pură, plasticizarea fibrelor nu este uniformă de-a lungul intervalului începînd în dreptul uneia din forțe, datorită neomogenității elementului încercat.

În fig. 4 sînt redate rezultatele înregistrate la încercarea unui cadru portal cu riglă frîntă, cu deschiderea de 0,60 m, înălțimea stîlpilor de 0,30 m și înălțimea la apex de 0,45 m, acționat de sarcini orizontale. La prima

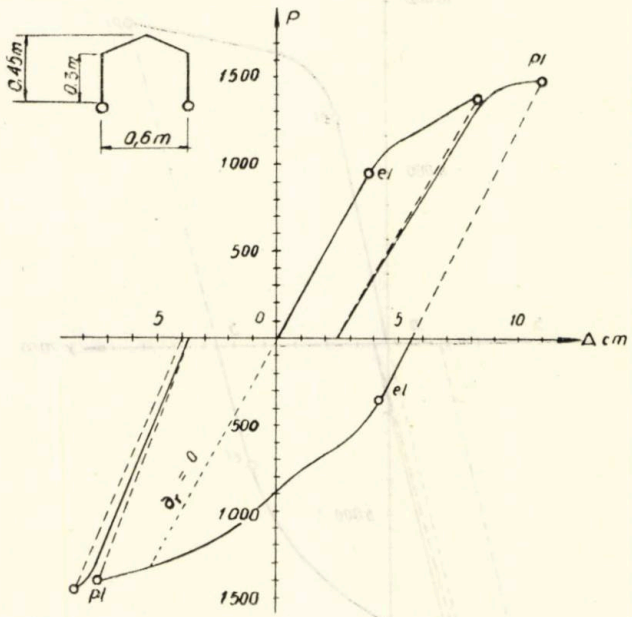


Fig. 4

încărcare sistemul a fost acționat cu o sarcină corespunzătoare celei de formare a mecanismului de cedare. La reîncărcarea sa cu o sarcină de sens contrar s-a înregistrat o limită de comportare elastică redusă, față de limita de comportare elastică constatată la prima încărcare, cu intervalul de sarcină corespunzător comportării elastico-plastice. Cedarea plastică s-a produs la aceeași valoare a sarcinii ca și în cazul primei încărcări obținîndu-se după descărcare aceeași valoare a deformației remanente. O nouă încărcare efectuată în primul sens indică o limită de comportare elastică egală cu valoarea obținută la cea de a doua încărcare. Rezultatele arată că prin încărcări repetate în același sens sau în sensuri opuse se poate obține o limită de comportare elastică a sistemul ridicată pînă la nivelul sarcinii de

cedare, cu reducerea în aceeași măsură a limitei de comportare elastică pentru încărcarea de sens invers.

Rezultatele prezentate în fig. 5, obținute pe un cadru portal cu riglă frîntă de 3 m deschidere acționat de sarcini orizontale, confirmă observațiile făcute anterior. Este demn de remarcat în acest caz că se poate obține o ridicare a limitei de comportare elastică cu 20% fără a modifica configurația geometrică a sistemului.

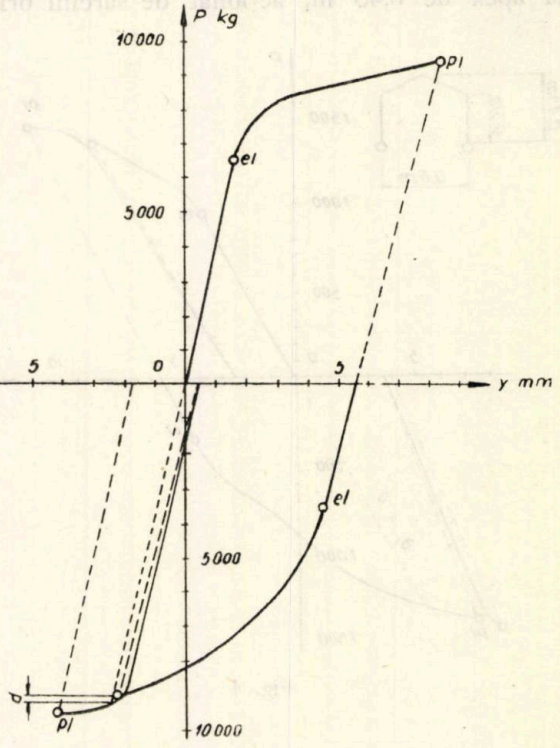


Fig. 5

4. Rezultatele experimentale obținute au permis schematizarea fenomenelor observate prin curba sarcină-deformație prezentată în fig. 6.

a) Curba $C_1 E_1 O_1 E_1 C_1$ pune în evidență faptul că pentru un element sau o structură acționate de un tip de încărcare, sarcinile corespunzătoare limitei de comportare elastică (E_1) și mecanismului de cedare (C_1) sînt aceleași indiferent de sensul de acționare al încărcării date. În acest caz rezerva de capacitate portantă, exprimată prin coeficientul de adaptare total, este aceeași pentru ambele sensuri de încărcare. Ea este determinată de forma

secțiunii, tipul de încărcare, punctul de aplicare a forțelor, cedarea legăturilor și mai ales de legăturile static nedeterminate ale sistemului.

b) În cazul încărcării elementului sau structurii numai pînă la o valoare a sarcinii cuprinsă în domeniul de comportare elastico-plastică — la

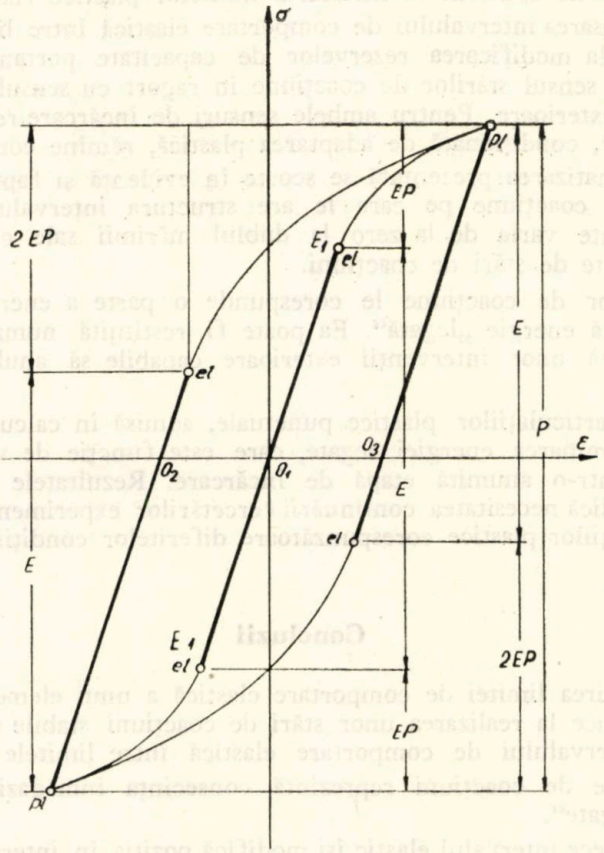


Fig. 6

limită pînă la nivelul sarcinii de cedare — deformațiile plastice nefiind congruente, la eliberarea de sarcina exterioară ia naștere un sistem de eforturi interioare în echilibru (stare de coacțiune). La o reîncărcare a sistemului stările de coacțiune vor modifica starea de tensiune datorită sarcinilor exterioare, determinînd ca în ansamblu sistemul să prezinte limite de comportare elastică diferite față de sistemul liber de stări de coacțiuni. Se constată o limită de comportare elastică ridicată la o încărcare în același sens și micșorată cu aceeași cantitate la o încărcare de sens invers.

Stările de coacțiune produse prin depășirea limitei de comportare elastică apar ca o mărire, respectiv o micșorare a omogenității structurii, neinfluențînd însă sarcina de cedare plastică a sistemului.

c) Intensitatea și sensul stărilor de coacțiune realizate determină deplasarea domeniului elastic constant în interiorul limitelor plastice fixe.

d) Deplasarea intervalului de comportare elastică între limitele plastice fixe conduce la modificarea rezervelor de capacitate portantă funcție de intensitatea și sensul stărilor de coacțiune în raport cu sensul de acționare al încărcării exterioare. Pentru ambele sensuri de încărcare rezerva de capacitate portantă, condiționată de adaptarea plastică, rămîne constantă.

În schematizarea prezentată se scoate în evidență și faptul că funcție de stările de coacțiune pe care le are structura intervalul de adaptare plastică α poate varia de la zero la dublul mărimii sale corespunzătoare structurii lipsite de stări de coacțiuni.

e) Stărilor de coacțiune le corespunde o parte a energiei potențiale totale denumită energie „legată". Ea poate fi restituită numai în anumite situații datorită unor intervenții exterioare capabile să anuleze stările de coacțiune.

Ipoteza articulațiilor plastice punctuale, admisă în calculul plastic, nu permite determinarea energiei legate, care este funcție de volumele ce se plasticizează într-o anumită etapă de încărcare. Rezultatele prezentate în fig. 2 și 3 indică necesitatea continuării cercetărilor experimentale legate de forma articulațiilor plastice corespunzătoare diferitelor condiții de solicitare.

Concluzii

1° Depășirea limitei de comportare elastică a unui element sau a unei structuri conduce la realizarea unor stări de coacțiuni stabile care determină deplasarea intervalului de comportare elastică între limitele plastice fixe.

2° Stările de coacțiuni reprezintă consecința înmagazinării energiei potențiale „legate".

3° Deoarece intervalul elastic își modifică poziția în interiorul limitelor plastice fixe rezultă că apariția și intervalul dintre articulațiile plastice depind de stările de coacțiune ale sistemului.

4° Stările de coacțiune pot conduce la ridicarea limitei de exploatare elastică cu 20 ... 40%, funcție de forma secțiunii transversale și de gradul de nedeterminare statică. Realizarea stărilor de coacțiune prin încărcări alternative poate determina ridicarea limitei de comportare elastică fără modificarea configurației geometrice a sistemului.

5° În calculul probabilistic al siguranței structurilor trebuie să se țină seama de rezerva de adaptare plastică a acestora, care se modifică funcție de intensitatea și sensul stărilor de coacțiune.

6° Pentru o folosire rațională a metalului este necesară ridicarea limitei de exploatare elastică a structurii prin crearea unor stări de coacțiune ca urmare a unor deformații mecanice inițiale.

Primită la 7 VII 1966

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statica construcțiilor

BIBLIOGRAFIE

1. Lynn B. S., *Plastic Design of Steel Frames.* John Wiley, N. Y., 1958.
2. * * * *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale.* INCERC, filiala Iași, 1962.
3. Șesan A., Manolovici M., *Asupra problemei de minim și maxim în echilibrul elastic, elastico-plastic și plastic al structurilor.* Bul. Inst. polit. Iași, 1963, **IX (XIII)**, *1–2*, pp. 343–348.
4. * * * *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale,* INCERC, filiala Iași, 1965.
5. Orlovschi N., Dumitraș Al., Amariei C., Ungureanu N., *Studiul în domeniul plastic al cadrelor metalice pe modele la scară redusă.* Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XV)**, *1–2*, pp. 435–442.

ÉTUDE DES EFFORTS RÉSIDUELS DANS LE CALCUL DES STRUCTURES MÉTALIQUES

(Résume)

On discute les modifications intervenues dans le comportement d'un structure, lorsqu'on dépasse sa limite de comportement élastique.

On montre que dans ce cas se produisent des efforts résiduels stables, comme conséquence du dépôt de l'énergie potentielle „liée", que détermine le déplacement du dômaine de comportement élastique constant, entre les limites plastiques fixes.

Par des charges alternatives on peut obtenir des limites de comportement élastique supérieures, sans changer l'aspect géometrique du système.

La modification des coefficients d'adaptation plastique, à la suite de l'existence des efforts résiduels, doit être prise en considération dans le calcul probabilistique de la sécurité des constructions.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 624.07 ; 621.1.01

PRINCIPE D'ANALOGIE ÉLECTRIQUE POUR L'ÉTUDE SIMPLIFIÉE DE LA DIFFUSION DES VAPEURS D'EAU ET DES ZONES DE CONDENSATION DANS LES ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTION

PAR

ADRIAN RADU

1. Introduction

L'étude de la diffusion des vapeurs d'eau et la détermination des zones de condensation dans les éléments de construction s'effectuent d'ordinaire par la voie simplifiée établie par Glaser [1], [2], en supposant nottament que l'influence exercée par la chaleur de condensation sur la répartition des températures reste négligeable et que les flux thermiques et de

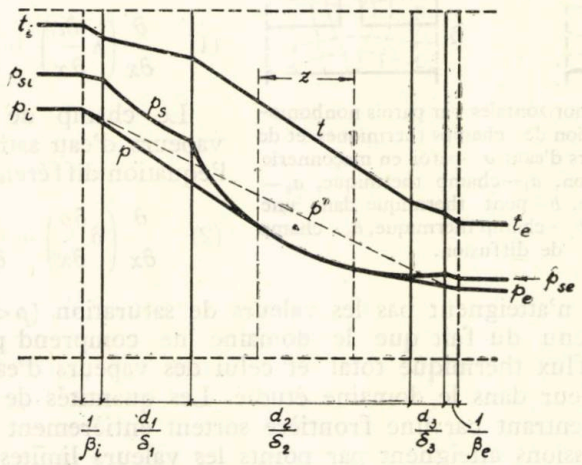


Fig. 1. — Procédé graphique proposé par Glaser [2] pour l'établissement des pressions des vapeurs d'eau et de l'étendue de la zone de condensation ; $t_{i,e}$ — températures de l'air environnant, t — variation des températures dans la paroi, p_s — pressions de saturation, p — pression effective des vapeurs d'eau, $\beta_{i,e}$ — coefficient d'échange des vapeurs d'eau à la surface de la paroi, $d_1 \dots d_3$ — épaisseurs des couches de la paroi, $\delta_1 \dots \delta_3$ — coefficients de conductivité des vapeurs d'eau, z — étendue de la zone de condensation.

diffusion sont unidirectionnels et stationnaires. Sous ces conditions, Glaser a démontré que l'étendue réele de la zone de condensation (fig. 1) doit être établie de telle manière que la ligne des pressions effectives (p) soit tangente à la courbe des pressions de saturation. Le calcul

peut être effectué par une méthode graphique très simple en représentant le mur à l'échelle des résistances thermiques et à la diffusion des vapeurs d'eau.

Nous nous sommes proposés de trouver un procédé pour l'étude du même problème dans le cas plus complexe de la diffusion à travers un domaine de forme géométrique quelquonque dont les caractéristiques thermiques et de perméabilité à la vapeur d'eau arient par zones. Cette situation intervient souvent dans la technique des constructions de bâtiments (fig. 2).

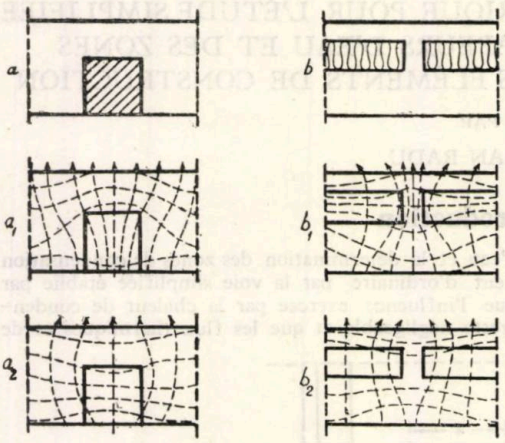


Fig. 2. — Sections horizontales par parois nonhomogènes avec l'indication des champs thermiques et de diffusion des vapeurs d'eau; a—paroi en maçonnerie avec noyau de béton, a_1—champ thermique, a_2—champ de diffusion, b—pont thermique dans une paroi préfabriquée, b_1—champ thermique, b_2—champ de diffusion.

2. Données générales du problème

Soit un domaine plan dont on veut étudier le champ de pressions des vapeurs d'eau pour déterminer les éventuelles zones de condensation. Les conditions aux limites sont du type Dirichlet, Neumann ou Fourier.

Le champ des températures satisfait à l'équation differentielle de Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) = 0 .$$

Le champ de pressions des vapeurs d'eau satisfait lui aussi l'équation différentielle de Laplace

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

si les pressions n'atteignent pas les valeurs de saturation ($p < p_s$).

Compte tenu du fait que le domaine ne comprend pas des sources intérieures, le flux thermique total et celui des vapeurs d'eau restent constants en grandeur dans le domaine étudié. Les quantités de chaleur ou de vapeurs d'eau entrant par une frontière sortent entièrement par une autre.

Si les pressions atteignent par points les valeurs limites de saturation, l'on peut délimiter dans le domaine considéré des zones distinctes, régies par des équations différentielles différentes.

Dans les régions où $p < p_s$, la relation (2) sera toujours satisfaite, tandis que dans celles où $p = p_s$, il y aura condensation des vapeurs d'eau. Le flux thermique sera majoré par l'apport de la chaleur de condensation, mais on peut négliger cette influence. Le flux des vapeurs d'eau diffusant en sens contraire au gradient des pressions sera diminué par la quantité d'eau condensée. L'équation différentielle s'écrira alors:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial p_s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\frac{\partial p_s}{\partial y}\right)=K(x,y), \tag{3}$$

où $K(x,y)$ — la quantité de vapeurs d'eau déposée par condensation au point $M(x,y)$.

Au limites des zones ainsi définies on pourra écrire la condition résultant de l'égalité des flux de diffusion

$$\delta\frac{\partial p}{\partial n}=-\delta\frac{\partial p_s}{\partial n}. \tag{4}$$

Si l'on représente par des surfaces la variation des pressions p et p_s, on constate qu'à la limite des zones, la surface des pressions p sera tangente à celle des pressions p_s.

Il est évident que toutes ces conditions se ramènent automatiquement à celles établies par Glaser [1] lorsqu'on revient au cas particulier de la diffusion unidirectionelle.

3. Résolution analogique

On connait la possibilité de représenter les champs laplaciens et poissoniens par des modèles rhéoélectriques et des réseaux de conductances. Grâce aux modèles électriques on peut établir les valeurs des températures t en chaque point du domaine [3]. En fonction de celles-ci on peut connaitre immédiatement la répartition des valeurs des pressions de saturation p_s aux mêmes points.

Pour l'établissement des valeurs des pressions p on utilise une représantation analogique, le tableau des valeurs homologues étant présenté ci-dessous :

Diffusion des vapeurs d'eau	Champ électrique
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c\frac{\partial V}{\partial y}\right)=0$
p — pression des vapeurs d'eau	v — potentiel électrique
p_i-p_e — chute de pression	v_i-v_e — différence de potentiel
δ — coefficient de conductivité pour les vapeurs d'eau	c — conductivité électrique
$g_v=-\delta$ grad p — densité du flux des vapeurs d'eau	$q=-c$ grad v — densité du flux électrique

Soit par exemple (fig. 3) la représentation analogique du domaine réalisée à l'aide d'un réseau de résistances. En remplaçant les équations différentielles des champs de diffusion $\Delta(p) = 0$ et électrique $\Delta(V) = 0$ par des relations aux différences finies, la détermination des pressions $p < p_s$ se

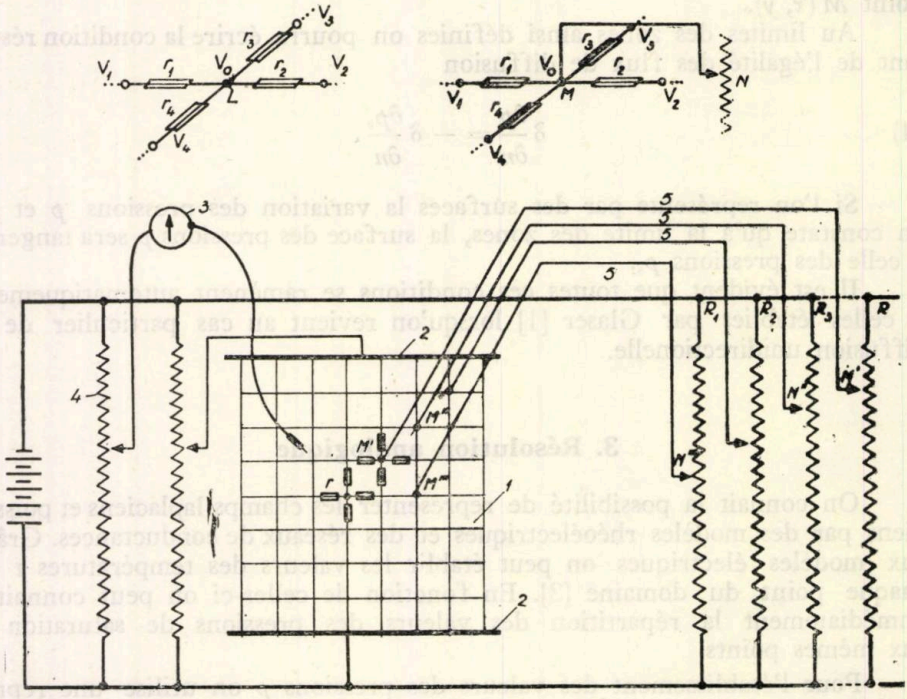


Fig. 3. — Schéma électrique analogique pour l'étude de la diffusion des vapeurs d'eau; *1*—réseau de résistances, *2*—électrodes, *3*—galvanomètre, *4*—diviseur de tension, *5*—connexions.

ramène, à un facteur près, à la mesure des potentiels électriques V au noeuds du réseau. A côté du réseau on installe une série de potentiomètres R sur lesquels sont fixées des prises correspondant aux valeurs des pressions de saturation connues en fonction de la température de chaque point du domaine. On impose la condition que les potentiomètres de résistence R soient tels que

$$R \ll r, \tag{5}$$

où r représente la résistence moyenne des mailles du réseau.

On commence d'abord par établir le champ des pressions p, par des mesures de potentiel électrique au noeuds du réseau, sans faire appel au potentiomètres R. On compare ensuite les valeurs des pressions p ainsi obtenues aux valeurs des pressions limites pour chaque point du réseau de

calcul. Si les valeurs de saturation ne sont pas atteintes, le résultat est définitif. Si au contraire, les valeurs des pressions de saturation p_s sont dépassées on doit faire appel au potentiomètres auxiliaires. On diminue d'abord la différence totale de potentiel jusqu'à ce qu'on obtient partout $p < p_s$. On relie directement les points M où $p = p_s$ aux points N des potentiomètres par des fiches. De cette manière on impose à ces points des tensions constantes correspondant aux pressions de saturation p_s ; ensuite on augmente de nouveau la différence totale de potentiel appliquée au réseau ce qui ne modifie pas les potentiels des points déja reliés au potentiomètres si la condition (5) est remplie Si de nouveaux points ont atteint des potentiels correspondant aux pressions de saturation on les relie aussi aux potentiomètres pour leur imposer les potentiels limite, et ainsi de suite. Pour obtenir de bons résultats il faut s'assurer que les tensions des points reliés aux potentiomètres n'aient pas avant leur rattachement des potentiels différents de ceux correspondant aux pressions limites.

Ces opérations doivent être poursuivies jusqu'à ce que les conditions aux limites sont remplies. À ce moment les potentiels électriques du réseau correspondent aux valeurs des pressions recherchées et les courants qui circulent entre les points M et N sont homologues aux quantités de vapeurs d'eau qui, en atteignant les pressions de saturation restent sur place sous forme liquide ou solide.

Les grandeurs électriques satisfont à des relations dont la forme est identique aux celles verifiées par le processus de diffusion, présentées ci-dessus.

Dans la région où la diffusion s'effectue sans condensation, les noeuds ne sont pas reliés aux potentiomètres et nous pouvons écrire:

$$\frac{V_1 - V_0}{r_1} + \frac{V_2 - V_0}{r_2} + \frac{V_3 - V_0}{r_3} + \frac{V_4 - V_0}{r_4} = 0, \tag{6 a}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0. \tag{6 b}$$

Dans la région où la diffusion s'effectue avec condensation, les potentiels ont été imposés de telle manière qu'ils correspondent aux pressions de saturation:

$$\frac{V_1 - V_0}{r_1} + \frac{V_2 - V_0}{r_2} + \frac{V_3 - V_0}{r_3} + \frac{V_4 - V_0}{r_4} = I, \tag{7 a}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = I, \tag{7 b}$$

où I représente le courant qui circule du réseau vers le potentiomètre attaché au noeud. La valeur de ce courant représente à un facteur près, la valeur de la quantité K de l'équation (3), ce qui nous permet de connaître l'ampleur du phénomène de condensation.

La condition $R \ll r$ peut être aisément satisfaite si l'on utilise une cuve électrolytique pour la représentation du domaine, la résistance électrique de l'électrolyte étant très grande vis-à-vis de celle des potentiomètres.

4. Conclusions

La méthode proposée permet l'étude du phénomène de diffusion des vapeurs d'eau à travers les éléments de constructions et d'autres structures compliquées. Jusqu'à présent elle est la seule méthode pratique que nous connaissons, susceptible d'être utilisée pour l'élaboration des projets de constructions.

Reçu le 26 XI 1966

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Constructions Civiles

BIBLIOGRAPHIE

1. Glaser H., *Vereinfachte Berechnung der Dampfdiffusion durch Geschichtete Wände bei Ausscheidung von Wasser und Eis.* Kältetechnik, 1958, *11—12*, S. 358—364, 386—390.
2. — *Graphisches Verfahren zur Untersuchung von Diffusionsvorgängen.* Kältetechnik, 1959, *10*, S. 345—349.
3. Focşa V., Radu A., Vereş Al., *Determinarea caracteristicilor termice ale zidăriilor din cărămizi eficiente prin analogie electrică.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 379—386.
4. Berthier J., *Les points faibles thermiques ou ponts thermiques.* Cahiers du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 1962, *57/455.*

METODĂ ANALOGICĂ PENTRU STUDIUL SIMPLIFICAT AL DIFUZIEI VAPORILOR DE APĂ ŞI PENTRU DETERMINAREA ZONELOR DE CONDENS ÎN ELEMENTELE DE CONSTRUCŢIE

(Rezumat)

Calculul elementelor de construcţie la difuz.a vaporilor de apă şi condens prin metoda propusă de Glaser [1], [2] nu se poate efectua decît în cazul cînd fluxul de vapori traversează straturi paralele perpendiculare pe direcţia fluxului.

Se prezintă o generalizare a principiilor de calcul la difuzia vaporilor de apă şi condens precum şi o metodă de modelare electrică pentru studiul elementelor de construcţie cu orice structură utilă, în special în cazul punţilor termice. Metoda de modelare este bazată pe utilizarea unei cuve electrolitice sau a unor reţele de rezistenţe precum şi a unor potenţiometre auxiliare care se folosesc printr-un procedeu de operaţii succesive.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Determinarea presiunilor vaporilor de apă şi zonei de condens prin metoda grafică propusă de Glaser [2]; $t_{i,e}$ — temperaturile aerului, t — variaţia temperaturii în perete, p_s — presiuni de saturaţie, p — presiunea efectivă a vaporilor, $\beta_{i,e}$ — coeficientul de trecere a vaporilor la suprafaţă, $d_1 \ldots d_3$ — grosimile straturilor, $\delta_1 \ldots \delta_3$ — coeficienţii de conductivitate la vaporii de apă, z — lăţimea zonei de condens.

Fig. 2. — Secţiuni orizontale prin pereţi neomogeni, cu indicarea cîmpurilor termice şi de difuzie a vaporilor de apă: a — perete din zidărie de cărămidă cu stîlp de beton, a_1 — cîmp termic, a_2 — cîmp de difuzie, b — perete din beton cu izolaţie termică, b_2 — cîmp de difuzie.

Fig. 3. — Schema electrică a instalaţiei analogice: *1* — reţea de rezistenţe, *2* — electrozi, *3* — galvanometru, *4* — divizor de tensiune, *5* — fişe de legătură.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 624.01

PRECOMPRIMAREA ELEMENTELOR LINIARE DIN BETON ARMAT PRIN INCĂRCARE

DE

ANATOLIE MIHUL, C. LEONTE, CHIMON CAPATU, MARCEL PATRAŞ
şi AUREL CUCIUREANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Cu privire la unele lipsuri pe care le prezintă sistemele de precomprimare folosite în practica asamblării elementelor prefabricate

Procedeele actuale de asamblare prin precomprimare a elementelor liniare de rezistenţă alcătuite din panouri (bolţari) prefabricate, uzinate cu ajutorul armăturilor postîntinse, pretensionate prin întinderea lor de la capete, prezintă unele dezavantaje privind tehnologia execuţiei şi asigurarea posibilităţilor de distribuire raţională a tensiunilor iniţiale în beton, în lungul elementelor.

Astfel, în ceea ce priveşte execuţia, pentru pretensionarea armăturii prin întinderea sa de la capete, sînt necesare dispozitive şi mijloace de realizare a forţei de pretensionare, blocaje şi ancoraje speciale. Dificultăţile principale ce apar în procesul de precomprimare sînt mai cu seamă consecinţa faptului că armătura este acţionată de presă în prima fază printr-un dispozitiv special montat la aceasta şi apoi transferată în stare întinsă capătului grinzii în general prin alt dispozitiv (blocaj).

De asemenea, la sistemele precomprimate cu armătura postîntinsă, executate după procedeele folosite astăzi, nu se poate asigura întotdeauna o precomprimare optimă în tot lungul elementelor. Acest dezavantaj este consecinţa limitării posibilităţilor de dispunere a armăturii pretensionate după traseele cele mai raţionale cît şi de imposibilitatea de a varia tensiunile în lungul armăturilor pretensionate, corespunzătoare distribuţiei tensiunilor produse de încărcările din timpul exploatării. În cazul cînd sînt folosite armăturile dispuse după trasee poligonale sau curbe, frecările care se produc între armături şi pereţii canalelor fac ca, în general, în regiunile în care eforturile de întindere produse de încărcările de exploatare sînt maxime, eforturile unitare în armătura postîntinsă să fie minime. Ca exemplu, în fig. 1 sînt prezentate diagramele de variaţie a forţei axiale produse de încărcările exterioare şi a efortului de pretensionare în lungul tălpii inferioare a unei grinzi cu zăbrele cu reazemele dispuse deasupra liniei centrului de greutate. Pentru a asigura forţa de precomprimare corespunzătoare în zonele în care întinderile produse de încărcările exterioare sînt maxime trebuie sporită secţiunea armăturii pretensionate, care, în celelalte zone, depăşeşte cu mult pe cea necesară. Acest procedeu are ca rezultat un consum sporit de oţel şi pierderi mari de tensiuni datorită curgerii lente a betonului în zonele mai puţin solicitate.

2. Descrierea procedeului de precomprimare propus

Pentru eliminarea dezavantajelor arătate în § 1 am experimentat un procedeu de precomprimare a elementelor alcătuite din panouri (bolţari) prefabricate, în care se substituie pretensionarea armăturii postîntinse prin întinderea ei de la capete cu întinderea acesteia prin încărcarea elementelor [1])

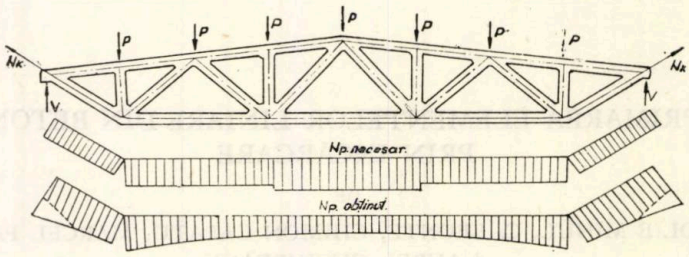


Fig. 1

cu sarcinile de exploatare, multiplicate cu un coeficient de supraîncărcare (prin care se iau în considerare pierderile de tensiuni posibile şi se realizează obţinerea siguranţei necesare la fisurare).

Procedeul a fost experimentat la grinzi cu zăbrele, care se descompun în panouri (*a* — fig. 2). După asamblarea panourilor *a* se dispune armătura pretensionată a tălpii inferioare sub forma unui tirant metalic ce trece prin golurile lăsate în nodurile inferioare ale grinzii şi care se ancorează în nodurile marginale (fig. 2).

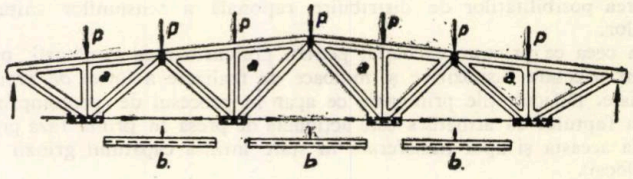


Fig. 2

Prin încărcarea grinzii cu sarcinile de exploatare, multiplicate cu un coeficient de supraîncărcare, în armătura pretensionată se dezvoltă eforturi de întindere, care sînt maxime la mijlocul deschiderii. Ulterior, menţinînd încărcarea constantă, se introduc barele prefabricate *b*, în formă de U, ale tălpii inferioare (fig. 2), care se fixează cu ajutorul unor şaibe metalice sau de beton armat. La descărcare armătura pretensionată precomprimă talpa inferioară a grinzii. Talpa inferioară poate fi realizată şi prin betonarea tirantului preîntins, descărcarea grinzii, în acest caz, făcîndu-se după întărirea betonului din tirant. În această situaţie armătura pretensionată este pre-

[1]) Dosar invenţie nr. 49 451/1965.

întinsă, standul fiind format de însăşi grinda care se precomprimă; modul de pretensionare a armăturii este asemănător cu cel folosit la executarea construcţiilor în arc la care betonarea tirantului se face după descintrarea construcţiei.

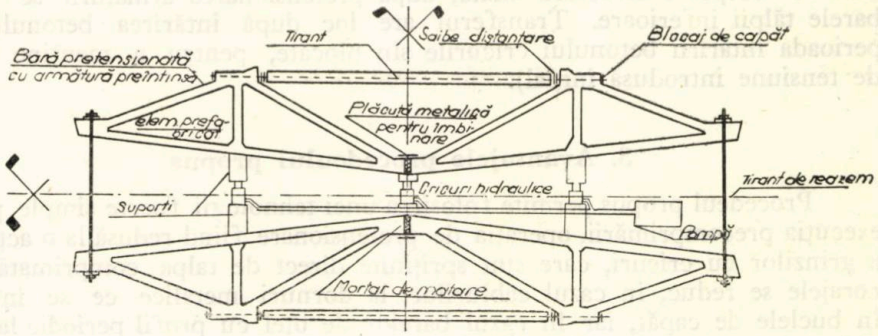


Fig. 3 a

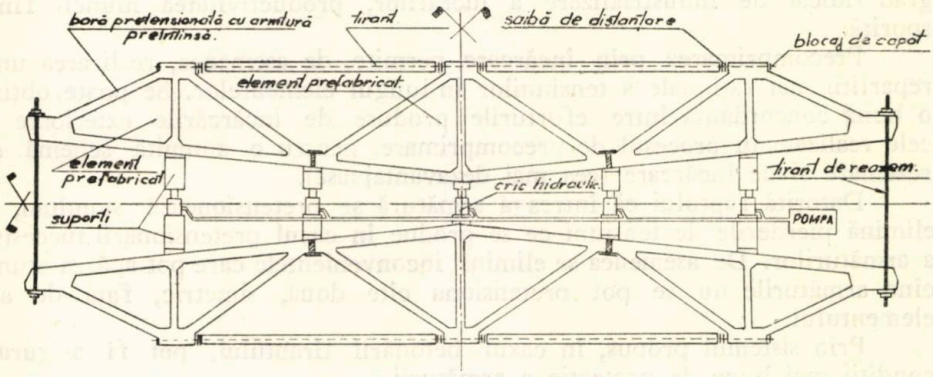


Fig. 3 b

Încărcarea cu sarcini a fiecărei grinzi în parte este dificilă, necesitînd standuri speciale. Această problemă se rezolvă însă uşor dacă se încarcă simultan două grinzi identice, fiecare constituind standul de încărcare pentru cealaltă. Pe o platformă orizontală se asamblează două grinzi aşezate cu tălpile superioare alăturate (fig. 3 a şi b), distanţate între ele atît cît este necesar pentru dispunerea cricurilor mecanice sau hidraulice, cu care se realizează încărcarea. Reazemele grinzilor se leagă între ele cu juguri metalice. Între grinzi, în dreptul nodurilor, se dispun cricurile care sînt legate toate la aceeaşi pompă (atunci cînd încărcările ce trebuie realizate sînt egale) sau la mai multe pompe (atunci cînd este necesar să se realizeze încărcări de valori diferite în dreptul nodurilor). După blocarea armăturilor

pretensionate urmează operaţia de încărcare a grinzilor. Cînd încărcările au ajuns la valorile stabilite, cricurile se blochează şi se introduc elementele prefabricate ale tălpii inferioare, care se fixează cu şaibe metalice sau de beton armat. Transferul se realizează prin descărcarea grinzilor. În cazul cînd se acceptă o structură mixtă, după pretensionarea armăturii se toarnă barele tălpii inferioare. Transferul are loc după întărirea betonului (în perioada întăririi betonului cricurile sîn blocate, pentru a menţine starea de tensiune introdusă iniţial).

3. Avantajele procedeului propus

Procedeul propus permite folosirea unei tehnologii foarte simple pentru execuţia precomprimării, operaţia de pretensionare fiind redusă la o acţionare a grinzilor cu cricuri, care sînt sprijinite direct de talpa comprimată. Ancorajele se reduc, în cazul cablurilor, la dornuri metalice ce se introduc în buclele de capăt, iar în cazul barelor de oţel cu profil periodic la eclise sudate la capetele lor. Precomprimarea se poate realiza în condiţiile oricărui şantier fără a fi necesare amenajări costisitoare. Se poate obţine un grad ridicat de industrializare a lucrărilor, productivitatea muncii fiind sporită.

Precomprimarea prin încărcare permite, de asemenea, realizarea unei repartiţii mai raţionale a tensiunilor în lungul elementelor. Se poate obţine o bună concordanţă între eforturile produse de încărcările exterioare şi cele realizate în procesul de precomprimare, pentru o anumită schemă de rezemare şi de încărcare (cea mai dezavantajoasă).

Datorită faptului că întreaga armătură se pretensionează simultan, se elimină pierderile de tensiuni ce se produc în cazul pretensionării succesive a armăturilor. De asemenea se elimină inconvenientele care pot apărea atunci cînd armăturile nu se pot pretensiona cîte două, simetric, faţă de axa elementului.

Prin sistemul propus, în cazul betonării tirantului, pot fi asigurate condiţii mai bune de protecţie a armăturii.

Un avantaj esenţial al sistemului propus constă în faptul că în procesul de precomprimare toate elementele sînt totodată încercate la sarcini care sînt apropiate sau chiar egale cu valoarea sarcinilor maxime probabile de exploatare. În acest mod se realizează verificarea fiecărui element în parte înainte de a fi montat în construcţie.

4. Caracteristicile grinzilor cu zăbrele experimentate

Pentru experimentarea procedeului de precomprimare arătat s-au confecţionat grinzi cu zăbrele cu deschiderea de 12 m (fig. 4), cu talpa inferioară poligonală, cu reazemele deasupra liniei centrului de greutate al grinzii, ale căror avantaje în ceea ce priveşte stabilitatea la montare cît şi comportarea sub sarcini în timpul exploatării sînt cunoscute.

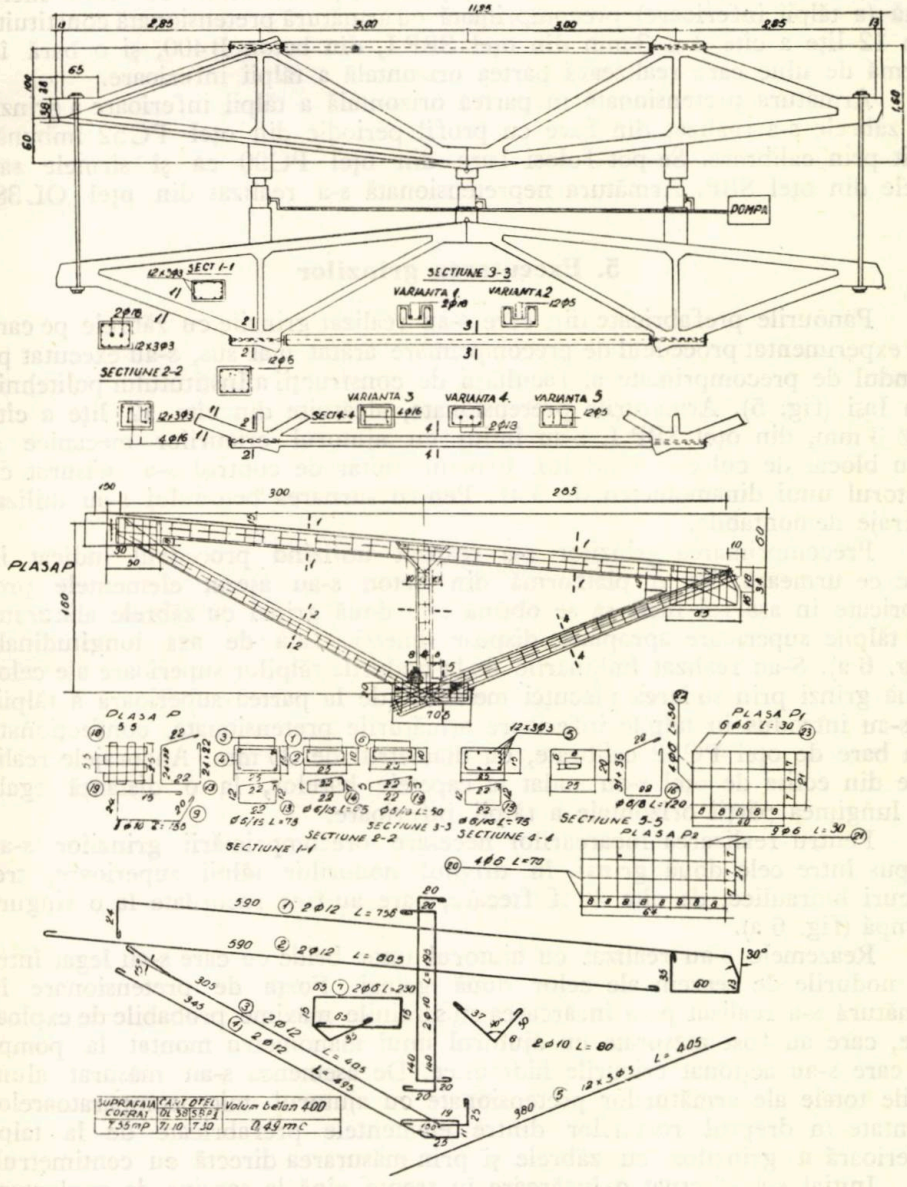

DOMPA
SECTIUNE 3-3
VARIANTA 1
VARIANTA 2
SECT 1-1
SECTIUNE 2-2
VARIANTA 3
VARIANTA 4
VARIANTA 5
SECT 4-4
PLASA P
PLASA P1
PLASA P2
SECTIUNE 1-1
SECTIUNE 2-2
SECTIUNE 3-3
SECTIUNE 4-4
SECTIUNE 5-5
SUPRAFAIA COFRAT
CANT OTEL
Volum beton 400
0,49 mc

Fig. 4

Grinda este constituită din două panouri prefabricate cu bara înclinată (a tălpii inferioare) precomprimată cu armătură pretensionată constituită din 12 liţe a cîte 3 ∅ 3 mm din oţel SBP I, din beton B 400, şi o bară în formă de uluc care realizează partea orizontală a tălpii inferioare.

Armătura pretensionată în partea orizontală a tălpii inferioare a grinzii cu zăbrele s-a realizat din bare cu profil periodic din oţel PC52 îmbunătăţit prin calibrare. Se pot folosi bare din oţel PC90 ca şi sîrmele sau liţele din oţel SBP. Armătura nepretensionată s-a realizat din oţel OL 38.

5. Executarea grinzilor

Panourile prefabricate din care s-au realizat grinzile cu zăbrele pe care s-a experimentat procedeul de precomprimare arătat mai sus, s-au executat pe standul de precomprimate al facultăţii de construcţii a Institutului politehnic din Iaşi (fig. 5). Armăturile pretensionate, alcătuite din cîte 12 liţe a cîte 3 ∅ 3 mm, din oţel SBP I, s-au întins cu ajutorul cricurilor mecanice şi s-au blocat de culeele standului. Efortul unitar de control s-a măsurat cu ajutorul unui dinamometru de 3 tf. Pentru turnarea betonului s-au utilizat cofraje demontabile.

Precomprimarea grinzilor s-a realizat utilizînd procedeul indicat în cele ce urmează. Pe o platformă din beton s-au aşezat elementele prefabricate în aşa fel încît să se obţină cîte două grinzi cu zăbrele alăturate, cu tălpile superioare apropiate, dispuse simetric faţă de axa longitudinală (fig. 6 a). S-au realizat îmbinările de la nodurile tălpilor superioare ale celor două grinzi prin sudarea plăcuţei metalice (de la partea superioară a tălpii) şi s-au introdus în tălpile inferioare armăturile pretensionate, confecţionate din bare de oţel PC52 calibrate, cu diametrul de 25 mm. Ancorajele realizate din eclise de oţel s-au sudat la capetele barelor, la o distanţă egală cu lungimea părţii orizontale a tălpii inferioare.

Pentru realizarea încărcărilor necesare precomprimării grinzilor s-au dispus între cele două grinzi, în dreptul nodurilor tălpii superioare, trei cricuri hidraulice, de cîte 40 tf fiecare, care au fost racordate la o singură pompă (fig. 6 a).

Reazemele s-au realizat cu ajutorul unor bride cu care s-au legat între ele nodurile de reazem ale celor două grinzi. Forţa de pretensionare în armătură s-a realizat prin încărcarea cu sarcinile maxime probabile de exploatare, care au fost măsurate cu ajutorul unui manometru montat la pompa cu care s-au acţionat cricurile hidraulice. De asemenea s-au măsurat alungirile totale ale armăturilor pretensionate cu ajutorul microcomparatoarelor montate în dreptul rosturilor dintre elementele prefabricate de la talpa inferioară a grinzilor cu zăbrele şi prin măsurarea directă cu centimetrul.

Iniţial s-a efectuat o încărcare în trepte pînă la sarcina de exploatare normată, pentru a cerceta modul în care se comportă sistemul; apoi s-a trecut la încărcarea în trepte pînă la sarcina maximă probabilă ce poate acţiona asupra grinzilor în timpul exploatării. În momentul cînd s-a atins

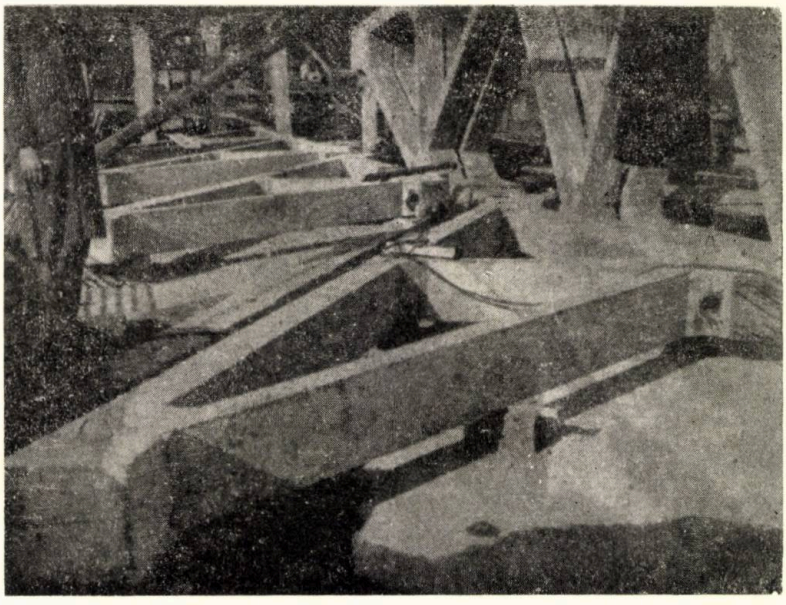


Fig. 5

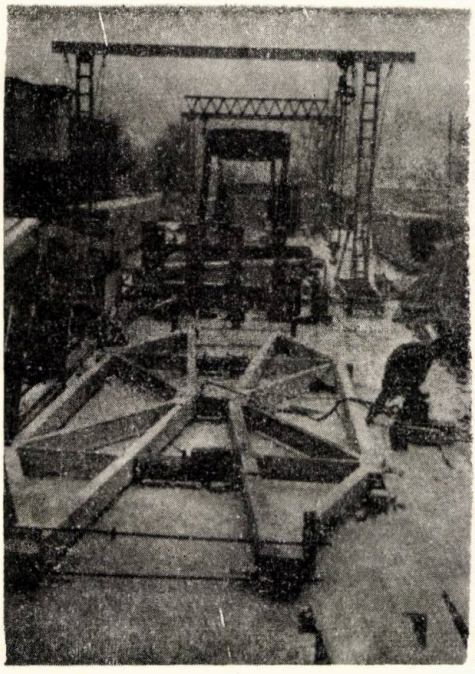


Fig. 6a

Fig. 6 b

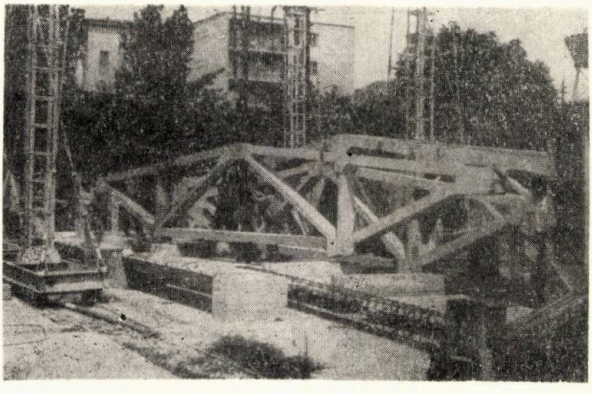


Fig. 7

sarcina maximă probabilă de exploatare s-a introdus elementul prefabricat cu secţiunea în U. Rosturile rămase între capătul elementului cu secţiunea în U şi nodul elementului grinzii cu zăbrele s-a completat cu şaibe de oţel executate după forma secţiunii transversale a tălpii inferioare a fermelor (fig. 6 b).

Transferul s-a realizat prin descărcarea sistemului. După transfer, canalul în care s-a dispus armătura pretensionată a fost umplut cu mortar.

Altă pereche de grinzi a fost obţinută prin betonarea armăturilor după pretensionarea lor, transferul fiind realizat după întărirea betonului din tirant. În intervalul în care s-a întărit betonul în tirant cricurile au fost blocate mecanic în poziţia de încărcare.

După transfer grinzile au fost ridicate în poziţia verticală (fig. 7), două dintre ele fiind încărcate pînă la pierderea capacităţii de rezistenţă.

6. Rezultate experimentale

Grinzile experimentale au fost calculate în ipoteza încărcării lor cu sarcinile normate transmise concentrat în noduri de către pane, avînd valoarea $P^n = 5{,}85$ tf. Sarcinile de calcul s-au considerat de 7,5 tf.

Corespunzător încărcării cu sarcinile de calcul rezultă în talpa inferioară o forţă axială de întindere $N = 26{,}7$ tf.

La această forţă de întindere se produce o alungire a tirantului, constituit numai din armătura pretensionată, fără conlucrarea cu betonul, de:

$$\Delta l_0 = \frac{N_0\, l}{E_p\, A_p} = 1{,}75 \text{ cm}.$$

Săgeata calculată, produsă de sarcinile de calcul, este:

$$f_{1/2} = 0{,}578 \text{ cm}.$$

Din măsurătorile efectuate la precomprimare, au rezultat pentru încărcarea cu sarcinile de calcul, următoarele alungiri:

1°. La grinzile cu tirantul prefabricat: a) la grinda *1*, $\Delta l_{0,1} = 17$ mm, b) la grinda 2, $\Delta l_{0,2} = 19$ mm.

2°. La grinzile cu tirantul executat din beton armat monolit: a) la grinda *1*, $\Delta l_{0,1} = 18{,}3$ mm, b) la grinda *2*, $\Delta l_{0,2} = 19{,}1$ mm.

Alungirile armăturilor, obţinute experimental, sînt apropiate de cele calculate.

Săgeata măsurată corespunzător încărcărilor de calcul a fost de 4,58 cm, aproximativ de 8 ori mai mare decît cea rezultată din calcule. Acest fapt se datoreşte deformaţiilor locale care s-au produs în rosturile de îmbinare dintre elemente.

La încercarea grinzilor în poziţie verticală pînă la pierderea capacităţii de rezistenţă s-au obţinut următoarele rezultate: a) sarcina de fisurare $3 \times 7{,}1$ tf, b) coeficientul de siguranţă $c_f = 1{,}39$, c) sarcina de rupere $3 \times 13{,}8$ tf, b) coeficientul de siguranţă $c = 2{,}4$.

7. Concluzii

1°. Procedeul experimentat se referă la pretensionarea armăturilor sistemelor liniare, alcătuite din panouri prefabricate, prin încărcarea simultană a două elemente identice utilizînd cricuri hidraulice dispuse în dreptul punctelor de aplicaţie ale forţelor exterioare.

2°. Pretensionarea armăturilor prin încărcarea sistemelor prezintă faţă de pretensionarea armăturilor prin întinderea lor de la capete, următoarele avantaje esenţiale: a) se simplifică tehnologia de pretensionare, b) se reduce sensibil volumul de manoperă, c) se elimină necesitatea prinderii armăturilor la corpul sau pistonul de acţionare al presei şi apoi de transmitere la grindă, d) se poate reduce numărul de blocaje la două, forma lor fiind foarte simplă (de ex. sub formă de bolţuri), e) se asigură realizarea unei distribuţii mai raţionale a tensiunilor din precomprimare în lungul elementului, f) odată cu precomprimarea se efectuează şi încercarea elementelor, piesă cu piesă, pînă la sarcina maximă probabilă de exploatare.

3°. Verificarea tehnologiei de execuţie a sistemului propus de precomprimare la grinzile cu zăbrele experimentate şi încercate pînă la pierderea capacităţii de rezistenţă, a scos în evidenţă posibilitatea introducerii sistemului studiat în practică.

4°. Datorită faptului că utilajul pentru precomprimare se reduce la utilizarea celor mai simple cricuri hidraulice, iar tehnologia de precomprimare este elementară, procedeul poate fi aplicat pe orice şantier din ţară, fiind accesibil tuturor întreprinderilor de construcţii.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de beton armat

PRESTRESSING OF REINFORCED CONCRETE MEMBERS
BY MEANS OF LOADINGS

(Summary)

A new prestress proceeding of strenght members and structures made of prestressed concrete is presented, which consists in prestressing the reinforcement by member loading up to the work loads, times a overload factor (which must cover the tension losses and carry out the necessary craking security).

The systems made of precasted members are prestressed two by two, in horizontal position, being binded in front of the supports by means of somme steel fixing-tapes, the prestressing being carried out by some presses which work between the members.

This proceeding was tried on trusses made of pannels and precasted-milled members, assambled by prestressing. By using this proceeding — compared with those used in our country and abroad up to date — one realises the simplification of prestressing technology, the replacing of presses and complicated anchorages by others ones more simple, cheaper, and easier to obtain by any construction site, one assures the possibility of getting a reliable prestressing, obtained by the very frictions which appear on the paths between the prestressed reinforcement and the channel walls, and more favorable conditions for the reinforcement protection is realised. The fact that the reinforcements can be disposed on other paths, than the linear ones, leads to about 30% steel and of about 20% concrete savings. For the system made of prestressed members assambled by compression the work-productivity is greatly increased and the manufacturing and tension time is reduced.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 625.8

CORELAREA TRAFICULUI SIMULAT CU CEL REAL DIN CALE CURENTĂ

DE

D. ATANASIU, VICTOR CIUBOTARU, HORIA ZAROJANU,
BENONIA COSOSCHI şi N. VLAD

Extras din comunicarea prezentată la Conferinţa unională interuniversitară de drumuri, Harkov, URSS, 11—14 aprilie 1967

1. Necesitatea valorificării rezultatelor experimentărilor sub traficul simulat de sistemul de rulare al pistei inelare de încercare a Facultăţii de construcţii din Iaşi, a impus corelarea acestuia cu traficul rutier real din cale curentă. Cu toate că problema reproducerii pe pista circulară a parametrilor circulaţiei rutiere reale de pe şosele este foarte complexă şi nu a fost încă rezolvată integral în nici una din instalaţiile de încercare construite pînă în prezent, se admite ca indice principal de comparaţie a celor două traficuri, tonajul total care trece prin secţiunile analizate, de pe drum şi de pe pista experimentală.

Ţinînd seama de particularitatea sistemului de rulare al staţiei din Iaşi, care permite decalajul automat al urmei roţilor şi aplicarea repetată a sarcinilor mobile pe o bandă circulată de 69 cm lăţime, s-a considerat că traficul simulat produce aceleaşi efecte asupra îmbrăcăminţii rutiere ca şi pe şosea, dacă într-un punct al secţiunii considerate traficul total simulat este echivalent cu traficul total real dintr-un punct aflat în zona de solicitare maximă a carosabilului drumului.

În scopul stabilirii relaţiei de echivalenţă s-au analizat, din acest punct de vedere, caracteristicile principale ale traficului simulat în staţia pilot şi cele ale traficului real dintr-o secţiune de drum modernizat în cale curentă.

2. Sistemul de rulare al instalaţiei cu care este echipată pista circulară experimentală este compus dintr-un braţ metalic de lungime egală cu diametrul mediu al pistei (10 m) avînd la capete două roţi de autocamion 1000×20, care transmit, fiecare, prin suprafaţa de contact, cîte 2,3 t. În-

trucît mişcarea de translaţie a roţilor în sensul lăţimii benzii circulate este asigurată de un motor cu turaţie constantă funcţionînd independent de sistemul mecanic care produce deplasarea roţilor în lungul pistei, rezultă că pentru a reproduce un număr cît mai mare de treceri pe aceeaşi urmă pe sistemul rutier experimentat, trebuie folosită viteza maximă de circulaţie. În aceste condiţii, la viteza longitudinală maximă de 23 km/h, la o translaţie a braţului mobil (roţile parcurg o singură dată în sens transversal lăţimea benzii circulate), fiecare din cele două pneuri ocupă 16 poziţii transversale succesive (fig. 1 a), adică în total 32 de treceri ale sarcinii prin fiecare secţiune a pistei. La fiecare 178 secunde roţile sistemului de rulare trec, la această viteză, din nou pe aceeaşi urmă.

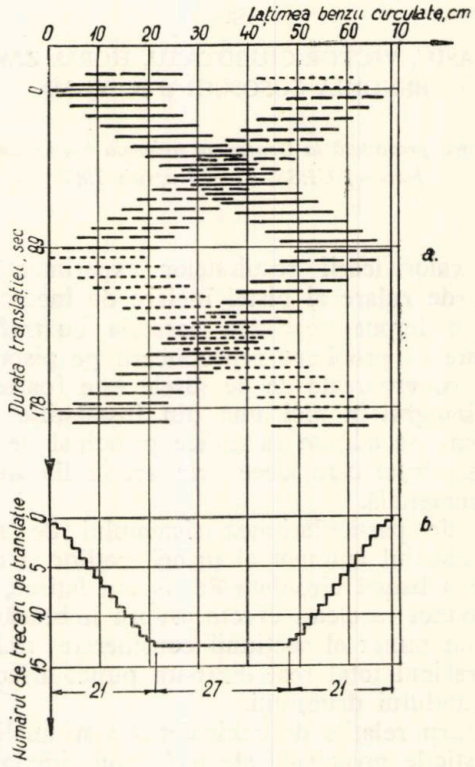


Fig. 1.—*a* — poziţiile succesive ale roţilor în timpul unei translaţii complete ; *b* — numărul de treceri pe aceeaşi urmă a sarcinii mobile în timpul unei translaţii.

În fig. 1 b este reprezentat grafic numărul de treceri pe lăţimea benzii circulate la fiecare translaţie a braţului mobil. Se constată că în 89 sec, cît durează trecerea roţilor în poziţiile extreme, uniformitatea circulaţiei

rutiere în cadrul traficului simulat se asigură numai în porţiunea centrală a pistei, de 27 cm lăţime, şi în care se realizează 40,7% din numărul total al trecerilor, adică 13 din totalul de 32 de treceri.

Notînd prin G — sarcina transmisă sistemului rutier de fiecare din cele două roţi, prin $2N$ — numărul total de treceri (înregistrate la contorul tabloului de comandă) ale sarcinilor mobile într-o secţiune oarecare a pistei şi într-un interval de timp dat şi prin p_1 — raportul dintre numărul de treceri pe aceeaşi urmă (n_1) în zona centrală a pistei cu circulaţie uniformă şi numărul total de treceri (n_2) printr-o secţiune oarecare a pistei la o translaţie completă şi pentru viteză longitudinală aleasă, traficul simulat pe pista inelară se poate stabili cu relaţia:

$$T_s = 2p_1 GN. \tag{1}$$

Exprimînd sarcina G în t, traficul simulat T_s rezultă în t. Ţinînd seama că pentru condiţiile de încercare din staţie:

$$p_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{13}{32}, \quad G = 2{,}3 \text{ t},$$

relaţia (1) devine:

$$T_s = 1{,}87N. \tag{1'}$$

Notînd prin p_2 probabilitatea trecerii pe aceeaşi urmă a sarcinilor mobile la traficul real de pe şosea, traficul echivalent în cale curentă (T_r) corespunzător traficului simulat efectiv realizat, devine:

$$T_r = \frac{T_s}{p_2}. \tag{2}$$

Determinarea mărimii p_2 a probabilităţii de trecere pe aceeaşi urmă, s-a efectuat printr-o recenzare vizuală a traficului real scurs printr-un profil transversal de pe drumul naţional nr. 28 Iaşi—Tg. Frumos. Secţiunea de recenzare are două benzi de circulaţie şi se află la 3 km distanţă de intrarea în oraşul Iaşi, într-o porţiune de aliniament care trece pe lîngă o mare denivelare de teren, favorabilă măsurătorilor de trafic.

Echipa de la staţia de cercetări rutiere, compusă din trei persoane, a înregistrat pentru fiecare sens de circulaţie următoarele date: a) tipul autovehiculului, b) sarcina utilă, c) poziţia amprentei pneului roţii din faţă din partea observatorului în raport cu axul drumului.

Considerînd fîşiile de 0,5 m lăţime, cîte 7 pentru fiecare sens de circulaţie, în tabelul 1 sînt prezentate datele corespunzătoare autovehiculelor cu $pD \geqslant 50$ kg/cm, recenzate în aceeaşi secţiune de şosea în patru zile diferite de măsurătoare, iar în tabelul 2 datele corespunzătoare traficului real total din care s-au exclus motocicletele, căruţele şi bicicletele. Din examinarea datelor din aceste tabele se constată că rezultatele ce se obţin

Tabelul 1

Nr. măsurătorii	Trafic recenzat: Autovehicule grele / Total autovehicule — Bucăţi	Trafic recenzat: Autovehicule grele / Total autovehicule — Tone	Rîndul	Total	Dinspre Iaşi: Fîşia nr. 1	2	3	4	5	6	7	Spre Iaşi: Fîşia nr. 7	6	5	4	3	2	1	Total
1	119 / 199	716 / 841	*a*	60,6	0,5	**17,0**	10,6	1,5	8,0	15,5	7,5	7,1	11,7	2,1	2,4	9,7	5,9	0,5	39,4
			b			24,0													
2	157 / 275	952 / 1 139	*a*	53,3	0,9	11,6	12,0	0,8	7,4	**15,6**	5,0	7,6	10,6	5,8	3,1	11,8	5,4	2,1	46,7
			b							14,0									
3	155 / 250	888 / 1 043	*a*	55,7	0,2	12,7	11,3	2,4	7,4	**14,6**	7,1	7,3	13,3	2,8	4,0	10,4	5,7	0,8	44,3
			b							7,0									
4	186 / 293	1 021 / 1 200	*a*	42,6	1,1	9,3	7,1	3,4	6,0	10,0	5,7	6,0	**15,4**	7,0	4,4	11,4	10,4	2,8	57,4
			b										13,0						
Total	617 / 1 017	3 577 / 4 223	*a*	52,3	0,7	12,3	10,2	2,1	7,1	**13,7**	6,2	7,0	12,9	4,6	3,6	10,9	7,0	1,7	47,7

Tabelul 2

Nr. măsurătorii	Trafic recenzat: Total autovehicule / Autovehicule grele — Bucăţi	Trafic recenzat: Total autovehicule / Autovehicule grele — Tone	Rîndul	Total	Dinspre Iaşi: Fîşia nr. 1	2	3	4	5	6	7	Spre Iaşi: Fîşia nr. 7	6	5	4	3	2	1	Total
1	199 / 119	841 / 716	*a*	59,6	0,5	**15,4**	10,9	2,4	8,0	15,0	7,4	6,6	12,0	2,8	2,7	10,1	5,8	0,4	40,4
			b			12,5													
2	275 / 157	1 139 / 952	*a*	53,4	0,7	10,8	11,9	1,7	7,9	**15,2**	5,2	7,8	10,7	6,0	3,7	11,3	5,3	1,8	46,6
			b							11,0									
3	250 / 155	1 043 / 888	*a*	55,8	0,2	11,8	11,7	3,0	7,7	**14,5**	6,9	7,5	12,9	3,0	4,7	10,2	5,2	0,7	44,2
			b							6,0									
4	293 / 186	1 200 / 1 021	*a*	44,2	0,9	8,8	8,2	3,6	6,4	10,7	5,6	6,0	**14,7**	7,1	4,6	11,2	9,8	2,4	55,8
			b										7,0						
Total	1 017 / 617	4 223 / 3 577	*a*	52,7	0,6	11,4	10,6	2,7	7,5	**13,7**	6,2	7,0	12,6	4,9	4,0	10,8	6,6	1,4	47,3

Rîndul *a* — traficul pe fîşia de solicitare maximă, (% din traficul total recenzat).
Rîndul *b* — depăşirea faţă de fîşia de solicitare maximă calculată pe baza traficului recenzat la toate măsurătorile (%).

din prelucrarea datelor traficului total (v. tabelul 2), în comparaţie cu cele ale traficului dat de autovehiculele care au $pD > 50$ kg/cm, sînt practic identice. Astfel procentul maxim de treceri pe aceeaşi urmă pentru totalul măsurătorilor, este egal cu 13,7 % în ambele cazuri, cu un maximum de 17 % la măsurătorile individuale.

Aceasta înseamnă că pentru condiţiile date, considerînd pentru traficul în cele două sensuri de circulaţie un coeficient de neuniformitate egal cu 1,5 (recomandat în literatura sovietică [1] şi confirmat prin măsurătorile noastre), probabilitatea p_2 devine egală cu 0,2. Această valoare trebuie precizată în continuare, în funcţie de cunoaşterea mai exactă a traficului real.

Este necesar de menţionat că mărimea determinată de noi corespunde unei circulaţii în aliniament pentru o frecvenţă de circa 80 vehicule/oră. Este de aşteptat ca valoarea probabilităţii p_2 să crească în curbe şi pentru frecvenţe mai mari în ambele sensuri.

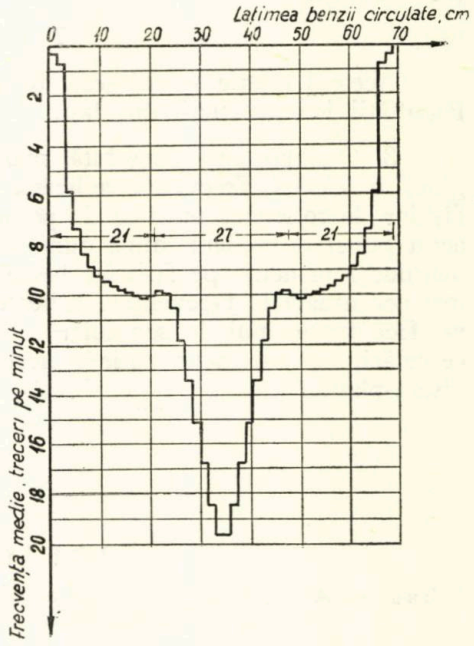


Fig. 2. — Frecvenţa medie ponderată a trecerilor pe aceeaşi urmă.

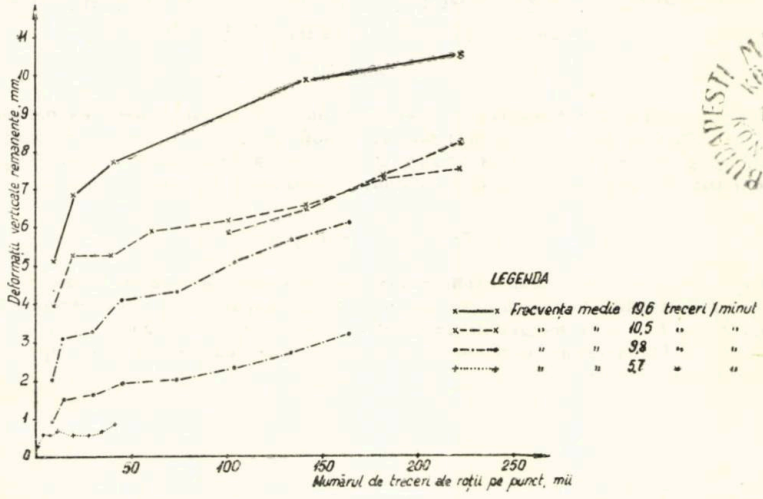


Fig. 3. — Acumularea deformaţiilor remanente în funcţie de trafic şi frecvenţa aplicării sarcinilor.

Luînd în consideraţie această valoare a probabilităţii, transformarea traficului simulat în trafic real din cale curentă, se poate calcula cu relaţia (2), rezultînd:

$$T_r = 9{,}35\,N. \tag{2'}$$

Această relaţie se foloseşte în prezent în staţia de cercetări rutiere a Facultăţii de construcţii din Iaşi.

3. O importanţă deosebită, mai ales în studiul sistemelor rutiere nerigide, o capătă frecvenţa aplicării sarcinilor mobile în fiecare punct al fîşiilor de solicitare maximă de pe şosea şi de pe pista experimentală. Din acest punct de vedere, după cum rezultă din fig. 2 şi 3, creşterea deformaţiilor remanente pe fîşii ale benzii circulate cu frecvenţe diferite, este mai accentuată la frecvenţele ridicate din centrul benzii, ceea ce explică şi verifică fenomenul de acumulare al acestor deformaţii, constatate şi în alte cercetări, la sistemele rutiere nerigide, care lucrează în stadiul elastic-vîscos-plastic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de drumuri şi poduri
şi
Staţia de cercetări rutiere

BIBLIOGRAFIE

1. Бируля А. К., *Конструирование и расчет нежестких одежд автомобильных дорог.* Изд. Транспорт, М., 1964.

КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ И СИМУЛИРОВАННЫМ ГРУЗООБОРОТОМ ОБЫЧНОЙ ДОРОГИ

(Резюме)

Авторы, желая использовать результаты опытов, проведенных на основе симулируемого грузооборота на кольцевой испытательной дорожке Ясского политехнического института, приводят на румынском языке выдержку из сообщения о корреляции между действительным и симулируемым грузооборотом обычной дороги.

Объяснение рисункоз

Рис. 1. — *a* — последовательные положения колес во время полной трансляции; *b* — число прохождений по тому же следу подвижной нагрузки во время одной трансляции.
Рис. 2. — Средняя нагруженная частота прохождений по одному и тому же следу.
Рис. 3. — Нарастание остаточных деформаций в зависимости от грузооборота и частоты приложения нагрузок.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 626.1

CONTRIBUŢII PRIVIND CALCULUL REŢELELOR DE CANAL ÎN CAZUL UNOR IPOTEZE GLOBALE ASUPRA DISTRIBUŢIEI VITEZEI ÎN LUNGUL LOR

DE

V. ZBEGAN, M. GIURCONIU, GH. POPA ŞI I. MIREL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5 — 7 februarie 1965

1. Introducere

Reţelele de canalizare pentru transportul apelor meteorice în cazul sistemului unitar sau divizor se dimensionează după metoda clasică, pe tronsoane, începînd din amonte spre aval, în funcţie de caracteristicile bazinelor de recepţie şi ale ploii de calcul. Canalele acestor reţele trebuie să transporte la plin debitul maxim ce trece printr-o secţiune, calculat după STAS 1846-50:

$$Q = m \frac{a}{\sqrt{t_p}} \Sigma S \varphi, \tag{1}$$

în care: Q — debitul maxim ce trece prin secţiune [m³/s], $m = 7{,}75.10^{-7}$ — un coeficient de transformare, a — o constantă ce se alege în funcţie de frecvenţa ploii de calcul şi de înălţimea medie a precipitaţiilor anuale, t_p — durata ploii de calcul [sec], ce se ia egală cu durata de scurgere t_s, considerîndu-se hidrograful debitelor un triunghi [1], S — suprafaţa bazinului de recepţie [m²], φ — coeficientul de scurgere al suprafeţei considerate.

După această metodă calculul reţelelor de canalizare necesită un timp mare de lucru şi numai după dimensionarea tronsoanelor din amonte se poate trece la dimensionarea tronsonului imediat următor. De asemenea numai după dimensionarea întregei reţele se pot trage concluzii asupra variaţiei secţiunii, profilului în lung şi vitezei apei din canalele reţelei calculate. Determinarea secţiunii şi vitezei apei dintr-un canal se face impunîndu-se panta radierului egală cu panta terenului şi o viteză de scurgere iniţială care se compară apoi cu viteza ce rezultă pentru transportul debitului la plin. Dacă între aceste două viteze rezultă o diferenţă mai mare de 20% calculul se reface. În funcţie de experienţa proiectantului se pot prevedea viteze iniţiale care să nu mai necesite refaceri de calcule.

După prima dimensionare a reţelelor de canalizare în funcţie de pantele terenului, existînd o vedere de ansamblu asupra tuturor caracteristicilor geometrice şi hidraulice, se trece la studiul diferitelor variante pe bază de considerente tehnico-economice. Pentru fiecare din aceste variante rezolvarea diferitelor situaţii critice (condiţii de viteză, de secţiune, de acoperire, de pantă etc.) necesită calculul întregii reţele, neexistînd un criteriu de alegere a variaţiei pantei sau a vitezei în lungul canalelor reţelei.

2. Metoda propusă

Pentru determinarea diferitelor elemente de ordin geometric şi hidraulic în oricare punct al unei reţele de canalizare se propune un calcul global.

Se consideră un canal (fig. 1) dintr-o reţea de canalizare, la distanţa x de punctul incipient, care colectează apele de pe un bazin de recepţie de suprafaţă iniţială S_0 şi având suprafaţa curentă S_x.

Panta canalului, pentru o secţiune considerată, este I_x; pentru transportul debitului maxim din ape meteorice este necesară o secţiune de canal A_x de înălţime H_x şi de lăţime B_x. Toate elementele se consideră că variază continuu în lungul canalelor.

Timpul de scurgere în secţiunea de calcul (x), se calculează cu relaţia:

$$t_s = \int \frac{dx}{v_x}. \tag{2}$$

Introducînd această valoare a lui t_s în relaţia (1) se obţine:

$$Q = m \frac{a}{\sqrt{\int \frac{dx}{v_x}}} S_x \varphi. \tag{3}$$

Pentru dimensionarea reţelei din punct de vedere hidraulic se pot scrie relaţia vitezei după Chezy în care se admite pentru C formula lui Manning, precum şi relaţia de continuitate:

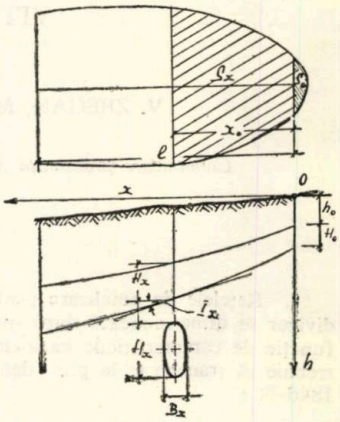


Fig. 1. — Schema în plan, profilul în lung şi secţiunea transversală la un canal colector.

$$v_x = \frac{1}{n} R_x^{2/3} I_x^{1/2}, \tag{4}$$

$$Q_x = \frac{1}{n} A_x R_x^{2/3} I_x^{1/2}. \tag{5}$$

Pentru orice formă de canal secţiunea transversală A_x şi raza hidraulică R_x corespunzătoare se pot exprima prin relaţiile:

$$A_x = \alpha B_x^2, \tag{6}$$

$$R_x = \delta B_x. \tag{7}$$

Introducînd relaţiile (6) şi (7) în (4) şi (5) se obţine:

$$v_x = \frac{1}{n} \delta^{2/3} B_x^{2/3} I_x^{1/2}, \tag{8}$$

$$Q_x = \frac{1}{n} \delta^{2/3} \alpha B_x^{8/3} I_x^{1/2}. \tag{9}$$

Debitul la plin trebuie să corespundă debitului apelor meteorice în secţiunea considerată; prin urmare:

$$\frac{1}{n}\delta^{2/3}\alpha B_x^{8/3} I_x^{1/2} = m\frac{a}{\sqrt{\int\frac{dx}{v_x}}} S_x\varphi. \tag{10}$$

Introducînd în relația (10) valoarea v_x din (8) se obține:

$$\int\frac{dx}{B_x^{2/3} I_x^{1/2}} = n\frac{m^2 a^2\varphi^2}{\alpha^2\delta^{2/3}}\frac{S_x^2}{B_x^{16/3} I_x} = M\frac{S_x^2}{B_x^{16/3} I_x}. \tag{11}$$

Relația (11) exprimă analitic legea de variație a mărimii B_x în lungul canalelor dacă se cunoaște forma bazinului ($S_x = S_x(x)$) și dacă se impune o anumită condiție pantei I_x.

Calculele pot fi efectuate, în continuare, considerînd că în lungul canalelor, I_x este o funcție de forma:

$$I_x = I_x(x). \tag{12}$$

Important de observat este faptul că relația (12) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dh}{dx} = f(x), \tag{13}$$

din care prin integrare și fixarea condițiilor la limită se definește adîncimea canalului într-un punct curent.

Relația (11) reprezintă o ecuație integrală în care funcția necunoscută este B_x. Prin derivarea acestei relații se obține:

$$\frac{1}{B_x^{2/3} I_x^{1/2}} = M\frac{2S_x\frac{dS_x}{dx}B_x^{16/3} I_x - S_x^2\left(\frac{16}{3} I_x B_x^{13/3}\frac{dB_x}{dx} + B_x^{16/3}\frac{dI_x}{dx}\right)}{B_x^{32/3} I_x^2}, \tag{14}$$

iar prin efectuarea calculelor se ajunge la expresia:

$$\frac{dB_x}{dx} - \left(\frac{3}{8}\frac{1}{S_x}\frac{dS_x}{dx} - \frac{3}{16}\frac{1}{I_x}\frac{dI_x}{dx}\right)B_x = -\frac{3}{16}\frac{1}{M}\frac{I_x^{1/2}}{S_x^2}B_x^{17/3}. \tag{15}$$

Introducînd în această relație notațiile:

$$G(x) = \frac{7}{8}\frac{1}{M}\frac{I_x^{1/2}}{S_x^2}, \tag{16}$$

$$F(x) = \frac{7}{4}\frac{1}{S_x}\frac{dS_x}{dx} - \frac{7}{8}\frac{1}{I_x}\frac{dI_x}{dx} \tag{17}$$

rezultă o ecuație de tip Bernoulli:

$$\frac{dB_x}{dx} - \frac{3}{14}F(x)B_x = -\frac{3}{14}G(x)B_x^{17/3}. \tag{18}$$

Pentru a obţine o ecuaţie liniară (în care membrul drept să nu depindă de B_x), se face o schimbare de variabilă de forma:

$$B_x = Z - \frac{3}{14}, \tag{19}$$

ecuaţia (18) devenind:

$$\frac{dz}{dx} + F(x)\, z = G(x). \tag{20}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este:

$$z = e^{-\int F(x)dx}\left[C_0 + G(x)\, e^{\int F(x)dx}\, dx\right], \tag{21}$$

în care C_0 este o constantă de integrare.

Pentru determinarea lui z se calculează:

$$\int F(x)\, dx = \int\left(\frac{7}{4}\frac{1}{S_x}\frac{dS_x}{dx} - \frac{7}{8}\frac{1}{I_x}\frac{dI_x}{dx}\right)dx = \ln\left(\frac{S_x}{I_x^{1/2}}\right)^{7/4}, \tag{22}$$

$$\int G(x)\, e^{\int F(x)dx}\, dx = \int\frac{7}{8}\frac{1}{M}\frac{I_x^{1/2}}{S_x^2}\left(\frac{S_x}{I_x^{1/2}}\right)^{7/4} dx = \frac{7}{8}\frac{1}{M}\int\frac{dx}{S_x^{1/4}\, I_x^{3/8}} = C_b, \tag{23}$$

în care C_b reprezintă o integrală de tip Cebîşev care fie se poate efectua, fie se poate determina din tabele atunci cînd se cunosc funcţiile S_x şi I_x.

Introducînd valorile date de relaţiile (22) şi (23) în expresia (21) se obţine:

$$z = \left(\frac{I_x^{1/2}}{S_x}\right)^{7/4}(C_o + C_b). \tag{24}$$

Revenind la funcţia B_x, din relaţia (19) se obţine:

$$B_x = \left(\frac{S_x}{I_x^{1/2}}\right)^{3/8}(C_0 + C_b)^{-3/14}. \tag{25}$$

Inlocuind această valoare în expresiile (8) şi (9) se obţin relaţiile utile pentru determinarea vitezei şi debitului într-o secţiune curentă:

$$v_x = \frac{1}{n}\delta^{2/3}\, I_x^{3/8}\, S_x^{1/4}\,(C_0 + C_b)^{-1/7}, \tag{26}$$

$$Q_x = \frac{\alpha}{n}\delta^{2/3}\, S_x\,(C_0 + C_b)^{-4/7}. \tag{27}$$

Dacă se impune o condiţie relativă la viteza în lungul canalului, din relaţia (25) se poate determina funcţia I_x.

Constanta de integrare C_0 se poate determina din condiţii la limită (pentru $x = 0$, $I_x = I_0$, $S_x = S_0$, $B_x = B_0$, $v_x = v_0$).

3. Exemplu de calcul

Se cere să se determine diametrul D, ($B_x = H_x = D$; $\alpha = \pi/4$, $\delta = 1/4$), viteza v și debitul Q al unui canal ce colectează apele meteorice de pe un bazin de recepție dreptunghiular ($S_x = S_0 + bx$). Se admit cunoscute următoarele elemente: $\varphi = 0{,}5$, $1/n = 74$, $a = 387$, $b = 500$ m. De asemenea se admite o lege de distribuție a vitezei în lungul canalului corespunzătoare unei pante constante $I_x = I_0 = 0{,}001$.

În acest caz se calculează din relația (23):

$$C_b = \frac{7}{8}\frac{1}{M}\int \frac{dx}{S_0^{1/4}\,[1+(b/S_0)\,x]^{1/4}\,I_0^{3/8}} = \frac{7}{8}\frac{1}{M}S_0^{3/4}\frac{1}{I_0^{3/8}}\frac{1}{b}\left(1+\frac{b}{S_0}x\right)^{3/4}\frac{4}{3}+C,$$

unde $M = \dfrac{m^2 a^2 \varphi^2}{n^{-1}\alpha^2\delta^{2/3}} = 12{,}5 \times 10^{-10}$; deci:

$$C_b = 2{,}5 \times 10^{10}(1 + 0{,}05\,x)^{3/4} + C.$$

Din relația (25) se determină constanta de integrare impunînd condiția ca pentru $x = 0$ să rezulte $S_0 = 10000$ m^2, ($B_x = B_0 = D = 0{,}3$ m); așadar:

$$C_0 + C_b = \left(\frac{S_0}{I_0^{1/2}}\right)^{7/4}\frac{1}{B_0^{14/3}} = 120 \times 10^{10},$$

iar pentru $x=0$ înlocuind valoarea C_b se obține $C_0+2{,}5 \times 10^{10}+C=120\times10^{10}$, de unde rezultă:

$$C_0 + C = 117{,}5 \times 10^{10}.$$

Tabelul 1

Valorile elementelor geometrice și hidraulice calculate după metoda propusă și după metoda clasică

Valorile x	După metoda propusă			După metoda clasică		
	$B_x = D$ m	v_x m/s	Q_x m^3/s	D m	v m/s	Q m^3/s
0	0,3	0,42	0,072	0,3	0,42	0,050
100	0,5	0,64	0,165	0,7	0,75	0,300
200	0,7	0,74	0,295	0,9	0,85	0,550
300	0,8	0,81	0,425	1,0	0,95	0,78
400	0,9	0,86	0,770	1,1	1,05	0,88
500	0,9	0,90	0,880	1,2	1,10	1,16
600	0,9	0,94	1,00	1,2	1,10	1,32
700	1,1	0,98	1,13	1,4	1,20	1,48
800	1,1	1,01	1,20	1,5	1,22	1,65
900	1,1	1,03	1,32	1,5	1,22	1,80
1 000	1,2	1,05	1,50	1,5	1,25	1,96
1 100	1,2	1,08	1,66	1,5	1,25	2,05
1 200	1,3	1,10	1,78	1,5	1,25	2,17
1 300	1,3	1,12	1,90	1,6	1,3	2,30
1 400	1,4	1,14	2,02	1,6	1,3	2,40
1 500	1,4	1,15	2,10	1,6	1,35	2,55

Relaţia (25) devine:

$$B_x = \left(\frac{S_x}{I_x^{1/2}}\right)^{3/8} [C_0 + C + 2{,}5 \times 10^{10} (1 + 0{,}05\,x)^{3/4}]^{-3/14}.$$

După efectuarea calculelor se obţine:

$$B_x = 0{,}665\,(1 + 0{,}05\,x)^{3/8} [47 + (1 + 0{,}05\,x)^{3/4}]^{-3/14}.$$

În mod analog relaţiile (26) şi (27) devin:

$$v_x = 0{,}72\,(1 + 0{,}05\,x)^{1/4} [47 + (1 + 0{,}05\,x)^{3/4}]^{-1/7},$$

$$Q_x = 0{,}26\,(1 + 0{,}05\,x) [47 + (1 + 0{,}05\,x)^{3/4}]^{-4/7}.$$

În tabelul 1 se dau comparativ valorile B_x, v_x şi Q_x determinate după metoda propusă şi după metoda clasică, pe tronsoane de cîte 100 m.

3. Concluzii

a) După metoda propusă se stabileşte o expresie analitică pentru secţiunea canalelor cu ajutorul căreia se pot determina în mod rapid, la orice distanţă faţă de punctul incipient, elementele geometrice şi hidraulice pentru orice canal. Totodată se obţine şi o imagine clară a variaţiei secţiunii în lungul canalelor.

b) Impunîndu-se anumite condiţii referitoare la variaţia globală a vitezei sau a pantei hidraulice în lungul canalelor se obţine o dimensionare raţională din punct de vedere hidraulic şi tehnico-economic.

c) Trasarea canalelor în mod continuu în profilul în lung se efectuează după determinarea funcţiei I_x.

d) Elementele geometrice stabilite prin calcule analitice, pe diferite tronsoane, se corectează după dimensiunile canalelor standardizate.

e) Pentru stabilirea elementelor geometrice şi hidraulice se va ţine seama în proiectare de secţiunile minime, acoperirile minime, vitezele minime şi timpii de scurgere minimi.

f) Relaţiile stabilite sînt foarte expeditive şi se pretează raţional la calcule tehnico-economice.

Institutul politehnic, Timişoara,
Catedra de hidrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Demidov L., Sigarin G., *Canalizarea*. Ed. tehn., Buc., 1952, (trad. din l. rusă).

К РАСЧЕТУ КАНАЛИЗАЦИОННЫХ СЕТЕЙ В СЛУЧАЕ ОБЩИХ ГИПОТЕЗ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ ПО ИХ ДЛИНЕ

(Резюме)

В работе представляется общий метод расчета канализационных сетей, исходя из аналитических законов распределения скоростей или уклонов по длине канала. Параметры входящие в формулировку законов, учитывают условия технической и экономической работы сети. Даются сравнительные выводы изложенного метода по отношению к данным существующим в литературе.

Объснение рисунков

Рис. 1. — Схема в плоскости, профиль по длине и поперечное сечение сборного водопровода.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 549.261

STUDIUL MINERALIZAŢIEI DE LA DELNIŢA CÎRLIGĂTURA (RAION CÎMPULUNG MOLDOVENESC)

OREST NICHITA, GH. BÎGU, E. CRUDU şi V. ERHAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Regiunea Delniţa-Cîrligătura este situată la marginea de est a cristalinului Munţilor Bistriţei, formînd o zonă paralelă cu rîul Moldova, care începe la circa 10 km în amonte de comuna Fundul Moldovei şi se întinde pînă în amonte de pîrăul Delniţa, afluent al văii Moldova, la intrarea în satul Botuş.

Asupra geologiei regiunii cît şi asupra mineralizaţiei au fost întreprinse o serie de studii încă din secolul trecut. Astfel se pot menţiona cercetările efectuate de K. M. Paul [5] care întocmeşte o hartă a Bucovinei la scara 1 : 288 000, în care sînt localizate şi zonele mineralizate.

Bruno Walter [1], pe lîngă o clasificare a şisturilor cristaline întreprinde şi un studiu detaliat al mineralizaţiilor din Carpaţii Orientali, dînd şi o serie de date asupra săpăturilor executate în acea vreme.

Mai pot fi amintite studiile efectuate de V. Uhlig [9], Th. Kräutner [3], Mircea Ilie [4], M. Savul [7], [8], I. Rădulescu [6], V. Erhan [2] etc.

În ultimul timp în această regiune au fost efectuate o serie de explorări de către Comitetul geologic în vederea depistării minereului de fier.

2. Consideraţii geologice

Complexul de roci din această regiune aparţine zonei cristalino-mezozoice, fiind reprezentat prin şisturi epimetamorfice peste care se găsesc transgresiv şi discordant formaţiuni sedimentare triasice.

În unitatea epimetamorfică pot fi identificate următoarele tipuri de roci: a) şisturi sericito-cloritoase, b) şisturi clorito-sericitoase, c) şisturi grafitoase, d) filite, e) roci albe porfirogene, f) calcare cristaline, g) cuarţite albe, h) cuarţite negre.

Şisturile sericito-cloritoase sînt cele mai răspîndite, constituind complexul predominant. În masa lor se pot separa o serie de varietăţi în funcţie de

compoziţia mineralogică. Subordonat mai pot fi depistate şi alte categorii de roci ca: cuarţite negre care apar sub forma unor iviri lentiliforme, roci albe porfirogene sub formă de benzi şi lentile cu lungimi şi grosimi variabile cît şi cuarţite albe sub formă lenticulară.

Peste unitatea epimetamorfică urmează transgresiv şi discordant depozite sedimentare de vîrstă triasică, reprezentate prin gresii şi conglomerate silicioase de culoare roşietică, de tip Verrucano, calcare dolomitice şi jaspuri.

În afară de studii geologice Bruno Walter (*op. cit.*) a întreprins şi o serie de lucrări miniere în această regiune, prin care a fost pusă în evidenţă prezenţa unei mineralizaţii de fier reprezentată prin siderită şi limonită.

Lucrările miniere au fost reluate în perioada anului 1950 de către Comitetul geologic, efectuîndu-se o serie de puţuri şi foraje. În urma rezultatelor obţinute s-au întreprins în ultimul timp prospecţiuni de amănunt cu lucrări miniere de suprafaţă. Pe baza acestor lucrări a putut fi descifrată tectonica regiunii, localizarea mineralizaţiilor şi s-au putut obţine indicaţii asupra extinderii zonelor cu minereu de fier, prin două profile şi o schiţă geologică (fig. 1 a, b, c).

Cunoscîndu-se aceste elemente s-a trecut în continuare la explorarea cu foraje de mică adîncime, amplasate pe un gabarit de 200/200 m².

Primele foraje au fost efectuate în calcarele triasice purtătoare de minereu şi au fost oprite în formaţiunile cristaline din baza calcarului.

Din observaţiile de la suprafaţă cît şi din unele foraje reiese că în această zonă formaţiunile cristaline încalecă calcarele triasice. În consecinţă s-au efectuat o serie de foraje care străbătînd formaţiunile cristaline, au pus în evidenţă calcare triasice mineralizate, şi după acestea din nou formaţiuni cristaline.

Din lucrările efectuate reiese că zona mineralizată este cantonată în baza calcarelor triasice, la contactul cu cristalinul şi este formată în partea de est din siderită, iar în partea de vest din hematită şi limonită. Mineralizaţia are caracter de lentile strat, prezentînd grosimi neuniforme şi chiar întreruperi.

3. Studiul mineralizaţiei

Din ceea ce se cunoaşte pînă în prezent, mineralizaţia de la Delniţa-Cîrligătura se prezintă sub formă de acumulări de carbonaţi şi oxizi de fier, cît şi din acumulări discontinue de sulfuri complexe, cantonate atît în calcarele triasice cît şi în conglomeratele şi gresiile de tip Verrucano din baza lor.

În cadrul zonei mineralizate se pot deosebi două sectoare:

a) Sectorul de est cuprins între pîrăul Cîrligătura şi pîrăul Delniţa, format din siderită, care apare sub formă de lentile strat şi care poartă la partea superioară lentile cu dimensiuni reduse de sulfuri complexe. Se extinde pe o lungime de aproximativ 1 km şi o lăţime de aproximativ 300 m, avînd o grosime cuprinsă între 1,20 m şi 13 m şi un conţinut în fier care variază

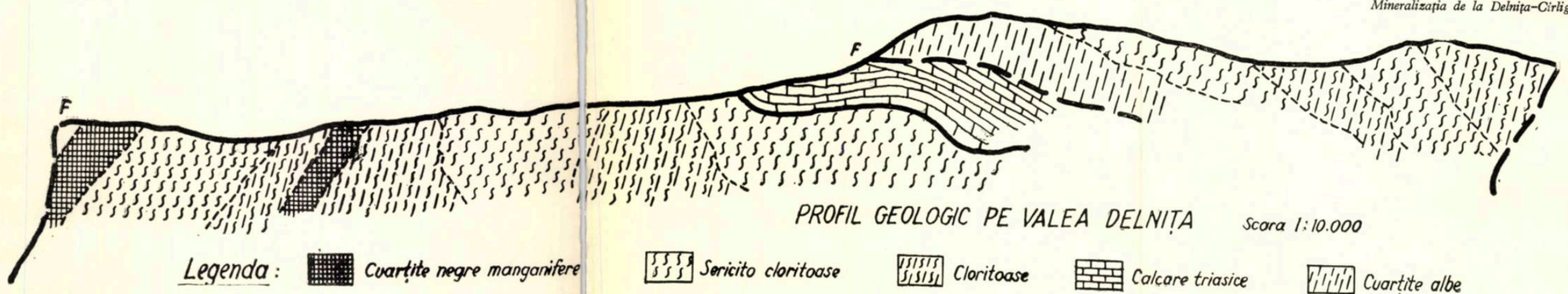


Fig. 1 a

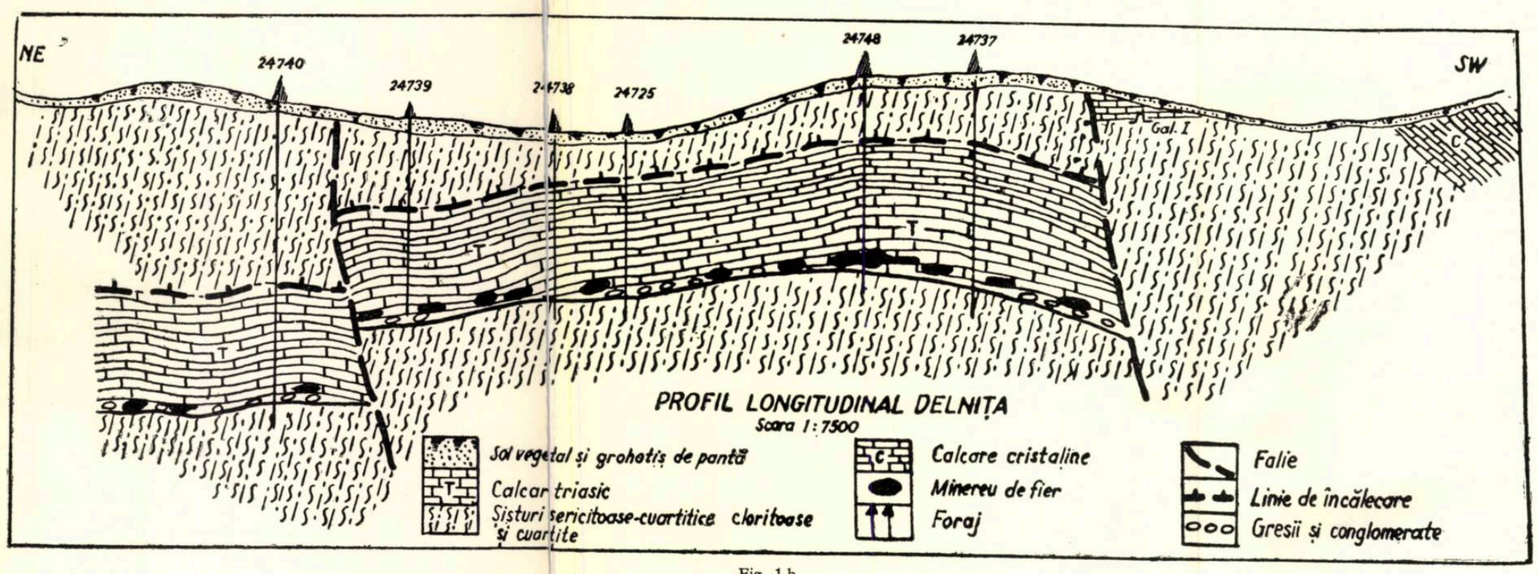


Fig. 1 b

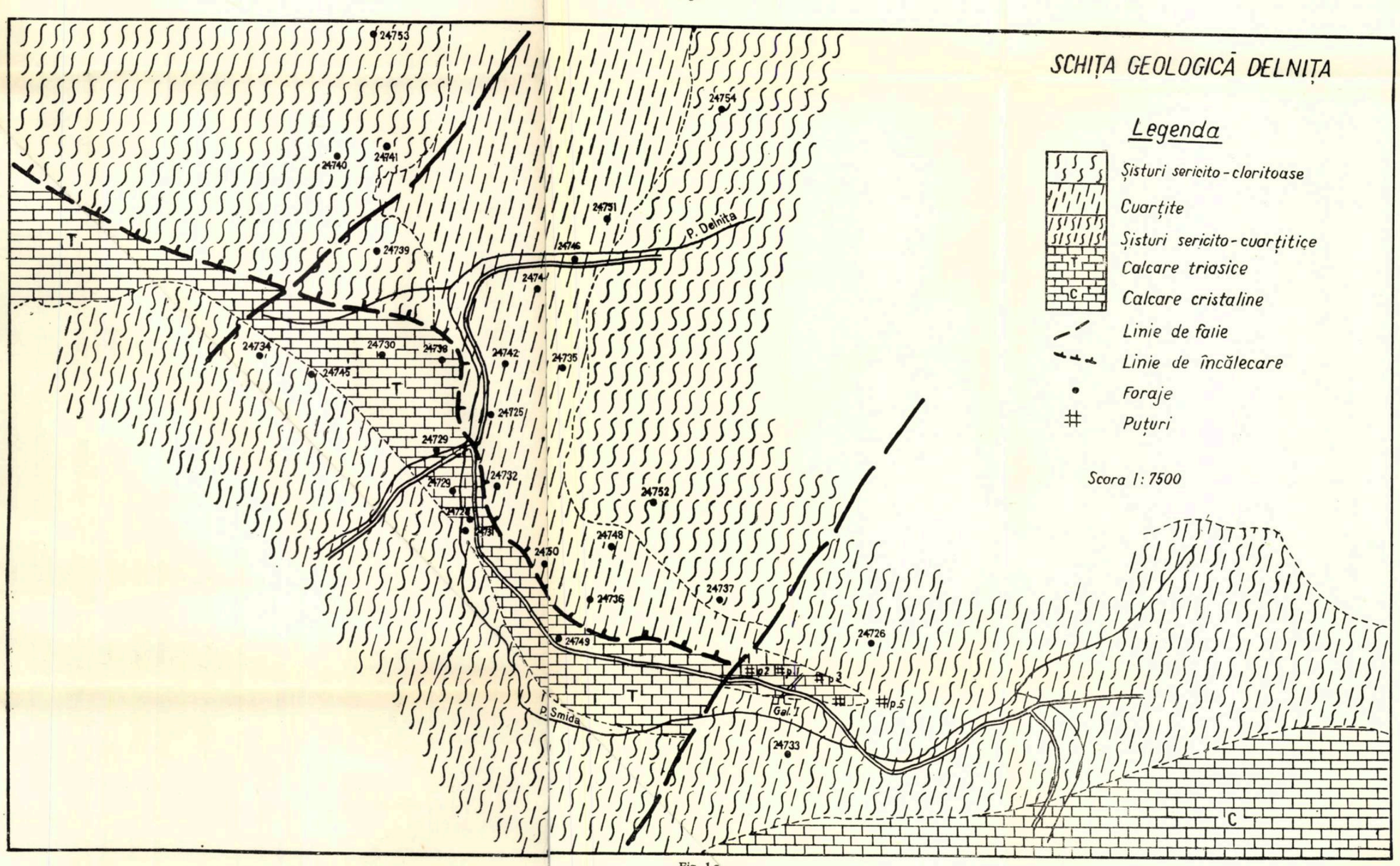


Fig. 1 c

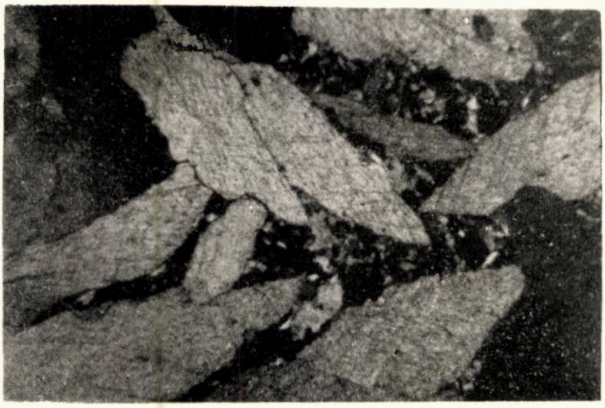


Fig. 2. — Romboedri de dolomit sideritizați. Nic. +, × 70.

Fig. 3. — Gresie cu ciment feruginos. Nic. +, × 20.

Fig. 4. — Forme colomorfe. Depuneri succesive de calcit, limonit, hematit şi siderit. Nic. +, × 100.

Fig. 5. — Romboedri de dolomit piritizaţi. Nic. II, × 10.

între 17% și 45%. Lentilele de sulfuri complexe de deasupra au grosimi cuprinse între 0,50 m și 14 m și ocupă o suprafață de 50×300 m².

b) Sectorul de vest cuprins între pîrîul Delnița și Bîtca Rea, constituit din calcare cu limonită și hematită, se extinde pe o suprafață de 600×300 m², avînd grosimi cuprinse între 1,50 m și 40 m și un conținut în fier care variază între 18% și 68%.

Se menționează faptul că la contactul dintre depozitele triasice și cele cuaternare se găsesc acumulări de limonită reziduală.

Roca sideritică apare compactă, de culoare cenușie-brună, străbătută rareori de diaclaze umplute cu calcită. Sub microscop siderita apare fie în cristale romboedrice cu forme ușor torsionate, fie în cristale mari complexe formate din indivizi mărunți (fig. 2).

Cristalele prezintă un pleocroism puternic și o refringență accentuată, cu un aspect tulbure ce atestă prezența unui amestec intim fie cu un material argilos, fie cu hidrotroilit. Dimensiunile cristalelor sînt cuprinse între 1,05/0,45 și 0,48/0,15 mm.

Sporadic în secțiune mai apare muscovitul sub formă de paiete fine cu dimensiuni cuprinse între 0,24/0,01 și 0,06/0,01 mm.

Limonitul are o culoare ce variază de la galben la roșu vișiniu. Sub microscop apare ca liant al gresiilor și conglomeratelor alături de siderit sau pigmentează calcarele colorîndu-le în roșu (fig. 3).

De asemenea apar și forme colomorfe cu depuneri succesive de calcit, limonit, hematit și siderit (fig. 4).

Hematitul are o culoare cenușie-brun roșcată uneori chiar cenușie de oțel. Are luciu caracteristic semimetalic cu reflexe albăstrui. În secțiune lustruită prezintă efecte de anizotropie pronunțată și reflexe roșietice. Apare compact în granule allotriomorfe.

Sulfurile apar compacte, fin cristalizate, uneori depuse în filoane subțiri, alteori sub formă de cuiburi prinse în masa calcarului.

Microscopic se pot deosebi asociațiile de pirită, calcopirită și blendă. Predomină însă pirita, care se prezintă uneori sub forma de plaje cu contururi ușor dantelate, iar alteori sub forma de granule dispersate în masa rocii. De asemenea, pirita substituie rareori metasomatic dolomita, observîndu-se în secțiune romboedri de dolomit piritizați (fig. 5).

4. Considerații asupra genezei

Acumulările de fier mulează un sinclinal vechi, peste care urmează, în continuare de sedimentare, calcare dolomitice. Minereul de fier s-a depus prin precipitare chimică determinată de un mediu anaerob, instalat într-un relief negativ. Transportul fierului de pe uscat în mediu marin s-a făcut sub formă de bicarbonați ce au provenit din descompunerea rocilor cristaline sub influența apelor încărcate cu CO_2. Totodată apele marine au fost îmbogățite în ioni de fier de către o serie de erupții submarine. Mediul

reducător a permis precipitarea sideritei înaintea precipitării calcarelor şi dolomitelor.

Spre vest sideritele sînt înlocuite treptat prin oxizi de fier, ceea ce indică o schimbare a condiţiilor de sedimentare, adică o mare mai puţin adîncă şi un mediu mai oxidant.

Din studiul întreprins asupra secţiunilor subţiri şi lustruite apare evident că în regiune au existat şi acţiuni hidrotermale care au pus în loc corpurile de sulfuri polimetalice, iar în unele zone au substituit roca calcaroasă cu siderită. Deci o parte din acumulările de fier şi în special sulfurile din regiunea Delniţa sînt rezultatul circulaţiei ulterioare a unor soluţii hidrotermale, care au înlocuit dolomitul cu sulfuri şi siderit (fig. 2 şi 5).

Prezenţa baritinei în unele regiuni întăreşte ipoteza unei circulaţii de soluţii hidrotermale care au contribuit la depunerea de sulfuri metalice şi sporadic al siderozei prin fenomene metasomatice.

5. Concluzii

Din cercetările efectuate se derprinde faptul că în zona Delniţa-Cîrligătura există acumulări de minereuri de fier ce se impun a fi explorate în continuare. Pînă în prezent s-a interceptat, prin foraje, un nivel mineralizat cu siderită, limonită, hematită şi sulfuri complexe, s-a stabilit localizarea lor, precum şi existenţa unei încălecări a formaţiunilor cristaline peste depozitele triasice.

Din punct de vedere al conţinuturilor în fier, valorile obţinute indică o variaţie în limite largi, care se înscriu însă într-o valoare medie pe zăcămînt de circa 25% Fe.

În lumina datelor furnizate de explorările geologice de la Delniţa, considerăm necesară prospectarea tuturor calcarelor triasice din regiune, în special în zonele unde sînt prezente şi formaţiunile eruptive.

Lucrarea prezintă importanţă economică naţională.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geologie şi geotehnică
şi
ISEM, Cîmpulung

BIBLIOGRAFIE

1. Walter B., *Die Erzlagerstätten der südlichen Bukowina.* Jahrb. d. geol. K. A. Wien, 1876.
2. Erhan V., *Raport asupra cercetărilor geologice din vara anului 1956 în reg. Valea Putnei-Delniţa.* Arhivele Institutului geologic.
3. Kräutner Th., *Cercetări geologice în cuveta marginală mezozoică a Bucovinei cu privire specială la regiunea Rarăului.* An. Inst. Geol., 1929, **XIV.**
4. Mircea D. Ilie, *Cercetări geologice în regiunea Rarău-Cîmpulungul Moldovei-Pîrîul Cailor.* An. Comit. Geol, 1957, **XXX.**
5. Paul K. M., *Grundzüge der Geologie der Bukowina.* Jahrb. d. geol. K. A. Wien, 1876.
6. Rădulescu I., Rădulescu L., *Raport geologic asupra prospecţiunilor pentru sulfuri complexe în regiunea Pojorîta-Fundul Moldovei-Breaza, 1959.* Arhivele Institutului geologic.

7. Savul M., *Le cristallin de Bistrița. La région Dorna-Broșteni.* Ann. sci. Univ. de Jassy, s. II, 1938, **XXIV**.
8. — *Cercetări asupra dezvoltării jaspurilor din sinclinalul marginal al Bucovinei.* Dări de seamă ale ședințelor Comit. geologic, 1952, **XXXIV**.
9. Uhlig V., *Über die Tektonik der Karpathen.* Sitzberg. d. Akad. Wiss. Natur., Wien, 1907.

ИССЛЕДОВАНИЕ МИНЕРАЛИЗАЦИОННОЙ ЗОНЫ ДЕЛНИЦА-КЫРЛИГЭТУРА (РАЙОН КЫМПУЛУНГ-МОЛДОВЕНЕСК)

(Резюме)

Устанавливается, на основе проведенных бурильных работ, наличие в исследуемой местности надвига кристаллических образований на осадочные триасовые отложения, представленные доломитовыми известняками.

Определяется также минерализованная зона, содержащая сидерит, лимонит, гематит и пирит и ее расположение в доломитовых известняках, на стыке последних с кристаллической зоной.

Минерализованная зона представляет экономический интерес как по содержанию железа в руде, так и по заключенным в зоне рудным запасам.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Геологический профиль минерализации зон области Дельница-Кырлигэтура.
Рис. 2. — Сидеритизированные доломитизированные ромбоэдры; Nic + × 70.
Рис. 3. — Песчаник с железистым цементом; Nic + × 20.
Рис. 4. — Коломорфные формы, последовательные отложения кальцита, лимонит, гематит и сидерит; Nic + × 100.
Рис. 5. — Пиритизированные ромбоэдры доломита; Nic II × 10.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 691.3

STUDIUL ADAOSURILOR TENSIOACTIVE LA CIMENTUL SILICIOS

DE

C. BRANIŞTE, ELENA CORLĂŢEANU şi ELENA BOTEZ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

1. Introducere

Aditivii plastifianţi, în raport cu modul lor de acţiune pot fi clasificaţi în : a) aditivi dispersanţi şi b) aditivi antrenori de aer [1]. Exemple de aditivi dispersanţi, care se folosesc ca adaose la ciment, sînt sărurile de calciu ale acizilor lignosulfonici, iar ca aditivi antrenori de aer sînt citate în literatură o serie de materiale, ca răşini naturale de arbori, tratate în prealabil cu sodă, răşini sintetice (de ex. vinisolul), grăsimi şi uleiuri sulfonate, naftenaţi de sodiu etc.

Acţiunea aditivilor dispersanţi, atunci cînd sînt introduşi în pasta apă-ciment, se manifestă în sensul următor : partea nepolară a moleculei este adsorbită de granula de ciment, datorită scăderii tensiunii superficiale, la suprafaţa de contact apă-ciment, iar partea polară a moleculei se îndreaptă către faza apoasă, deci în exterior. În acest caz pe granula de ciment se formează un strat dublu electric, încărcat cu electricitate de acelaşi semn, ceea ce are drept efect apariţia unor forţe de repulsie între granulele de ciment, ele manifestîndu-se în masa betonului ca dispersii stabile. Dacă într-un beton se micşorează valoarea raportul A/C, apa reziduală dispare, iar stratul de plastifiant adsorbit de granulele de ciment şi nisip joacă rolul de lubrefiant, eliminînd frecările, şi prin urmare lucrabilitatea betonului creşte. De asemenea, plastifianţii mai au rolul de a micşora tendinţa de segregare, care se manifestă prin separarea agregatelor de laptele de ciment.

În ceea ce priveşte acţiunea aditivilor antrenori de aer, cînd sînt adăugaţi la betoanele proaspete preparate, acestea devin mai plastice, mai lucrabile, nu mai segregă şi li se îmbunătăţeşte textura devenind compacte. Betonul întărit, lucrat cu antrenori de aer, este impermeabil faţă de apa sub presiune, devine rezistent la acţiunea îngheţului repetat, deoarece bulele de aer funcţionează ca nişte microrezervoare de descărcare a presiunii exercitate de apa care îngheaţă anulîndu-i efectul exercitat asupra betonului întărit.

Prin folosirea aditivilor antrenori de aer se poate reduce valoarea raportului A/C, însă rezistenţele la compresiune scad cu circa 12%. Cantitatea de aer antrenată în masa betonului nu trebuie să depăşească 3% deoarece o proporţie mai ridicată măreşte porozitatea betonului şi rezistenţele mecanice scad excesiv [2].

În lucrarea de faţă s-au folosit ca antrenori de aer, săpunurile din uleiuri sulfonate de dovleac, floarea soarelui, arahide, acizi naftenici şi naftenatul de sodiu. Uleiurile sulfonate au proprietatea de a se solvi în apă şi de a forma emulsii; solvirea şi emulsionarea uleiurilor

sulfonate este cu atît mai bună cu cît numărul grupelor ester-sulfurice şi sulfonice, în molecula uleiului, sînt mai numeroase. Gradul de sulfonare se stabileşte după cantitatea de acid sulfuric legat organic la materia grasă din uleiul sulfonat.

2. Metoda de lucru

Pentru a determina cantitatea de apă de amestecare a pastei de consistenţă normală, s-a folosit aparatul Vicat cu sonda Tetmeyer, conform prescripţiilor STAS 227-49. S-a luat în lucru cîte 300 g ciment, la care s-a determinat apa de amestecare, pentru pasta de consistenţă normală. Amestecul ciment-apă, a fost amestecat timp de $2\frac{1}{2}$ min şi după aceea a fost introdus în inelul aparatului Vicat şi lăsat în repaus jumătate de minut; apoi s-a pus în funcţiune aparatul prin pătrunderea sondei în pasta de ciment şi după jumătate de minut s-a făcut citirea pe scara gradată a aparatului. Încercările au fost efectuate variind raportul A/C pînă cînd sonda s-a oprit la o distanţă cuprinsă între 5 ... 7 mm de la placa de sticlă a aparatului, ce corespunde pastei de consistenţă normală. Cimentul folosit pentru determinări a fost de calitate P 400 şi B.S., atît pentru probele martor, cît şi pentru probele cu aditivi.

Rezultatele probelor cu adaos de săpun din ulei sulfonat de dovleac sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Ciment P 400 cu adaos de săpun din ulei sulfonat de dovleac

Denumirea probei	Ciment P 400 g	Apă de amestecare cm³	Timpul de amestecare (min)	Adaos		Pătrunderea sondei mm
				%	cm³	
Martor	300	85	3	—	—	7
I	300	85	3	0,01	0,6	4,5
II	300	85	3	0,05	3	5,33
III	300	85	3	0,1	6	6
IV	300	85	3	0,2	12	10
I	300	82	3	0,01	0,6	6
II	300	82	3	0,05	3	6,5
I	300	81	3	0,01	0,6	5,5
II	300	81	3	0,05	3	vîrtos

Aditivul a fost introdus în apa de amestecare sub formă de soluţie de concentraţie 5% şi pentru un raport $A/C=0,28$ (probele *I...IV*). Influenţa favorabilă exercitată de aditiv se manifestă între limitele cuprinse între 0,01...0,1%; o proporţie de aditiv ce depăşeşte 0,1% contribuie la învîrtoşirea pastei de consistenţă normală.

Prin scăderea apei de amestecare de la 85 cm³ la 81 cm³, respectiv $A/C=0,27$, aditivul poate fi folosit numai în proporţie de 0,01%.

Prin folosirea ca aditiv a săpunului din ulei sulfonat de dovleac apa se reduce cu 4,7%, ceea ce revine la 9,52 l/m³ de beton.

S-a trecut la folosirea ca aditiv a săpunului din ulei de arahide sulfonat. Rezultatele experimentale obţinute sînt date în tabelul 2.

Tabelul 2

Ciment P 400 cu adaos de săpun din ulei sulfonat de arahide

Denumirea probei	Ciment P 400 g	Apă de amestecare cm³	Timpul de amestecare min	Adaos %	Adaos cm³	Pătrunderea sondei mm
Martor	300	85	3	—	—	7
I	300	85	3	0,01	0,6	5
II	300	85	3	0,05	3	5,5
III	300	85	3	0,1	6	6
IV	300	85	3	0,2	12	7
I	300	81	3	0,01	0,6	6
II	300	81	3	0,05	3	7,5
I	300	80	3	0,01	0,6	vîrtos

Prin folosirea ca aditiv a săpunului din ulei sulfonat de arahide, la un raport $A/C=0{,}28$, aditivul poate fi introdus în proporţie pînă la 0,2%, iar la un raport $A/C=0{,}27$ proporţia de aditiv adăugat la ciment poate fi cuprinsă între limitele 0,05...0,02%. La un raport $A/C<0{,}27$ pasta de ciment devine vîrtoasă, chiar la un adaos de aditiv de 0,01%. Apa de amestecare se reduce cu 4,7% ceea ce revine la 9,521 l/m³ beton.

Săpunul din ulei sulfonat de arahide poate fi folosit ca aditiv, funcţie de raportul A/C, între limitele 0,05...0,2%.

Rezultatele obţinute la folosirea ca adaos la ciment a săpunului din ulei sulfonat de floarea soarelui sînt redate în tabelul 3.

Tabelul 3

Ciment P 400 cu adaos de săpun din ulei sulfonat de floarea soarelui

Denumirea probei	Ciment P 400 g	Apă de amestecare cm³	Timpul de amestecare min	Adaos %	Adaos cm³	Pătrunderea sondei mm
Martor	300	72	3	—	—	7
I	300	72	3	0,01	0,6	1
II	300	72	3	0,05	3	3,5
III	300	72	3	0,1	6	4,5
IV	300	72	3	0,2	12	6,5
I	300	68	3	0,01	0,6	4,5
II	300	68	3	0,05	3	7,5
I	300	67	3	0,01		6,5
II	300	67	3	0,05	3	vîrtos

Folosind ca aditiv la ciment săpunul din ulei sulfonat de floarea soarelui, pentru un raport $A/C = 24$ proporţia admisă de aditiv este de 0,2%, iar pentru raportul $A/C = 0,22$ proporţia de aditiv scade la 0,01%, în cazul unei aceleiaşi paste de consistenţă normală.

Apa de amestecare se poate reduce în proporţie de 6,94%, iar la 1 m³ de beton cu 13,60 l.

Săpunul din ulei sulfonat de floarea soarelui poate fi folosit ca aditiv funcţie de valoarea raportului A/C, între limitele 0,01%...0,2%.

Întrucît săpunul din ulei sulfonat de floarea soarelui, ca aditiv la ciment, a dat rezultate ceva mai bune, comparativ cu ceilalţi aditivi, s-au efectuat probe similare şi cu cimentul B.S. Rezultatele obţinute sînt date în tabelul 4.

Tabelul 4

Cimentul B.S. cu adaos de săpun din ulei sulfonat de floarea soarelui

Denumirea probei	Ciment B. S.	Apă de amestecare	Timpul de amestecare	Adaos		Pătrunderea sondei
	g	cm³	min	%	cm³	mm
Martor	300	75	3	—	—	7
I	300	75	3	0,01	0,6	0
II	300	75	3	0,03	1,8	1
III	300	75	3	0,05	3,0	3
IV	300	75	3	0,07	4,2	6,5
I	300	72	3	0,01	0,6	3
II	300	72	3	0,03	1,8	3,5
III	300	72	3	0,05	3,0	5
IV	300	72	3	0,07	4,2	8
I	300	70	3	0,01	0,6	3
II	300	70	3	0,03	1,8	6
III	300	70	3	0,05	3,0	7,5
I	300	69	3	0,01	0,6	vîrtos

Folosind ca aditiv la cimentul B. S. săpunul din ulei sulfonat de floarea soarelui, rezultă că la un raport $A/C = 0,25$ proporţia optimă de aditiv ce se poate adăoga la ciment este de 0,07% iar pentru raportul $A/C = 0,233$ proporţia de aditiv scade la 0,05%, pentru o aceeaşi pastă, de consistenţă normală.

Apa de amestecare se poate reduce în proporţie de 6,94%, iar la 1 m³ de beton cu 13,60 l.

Săpunul din ulei sulfonat de floarea soarelui, ca aditiv la cimentul B. S., se poate folosi funcţie de valorile raportului A/C, între limitele 0,01 ... 0,07%.

Pentru a cerceta modul în care se comportă ca aditivi uleiurile sulfonate în comparaţie cu naftenaţii de sodiu, s-au efectuat probe în aceleaşi condiţii, ale căror rezultate sînt consemnate în tabelul 5.

Dacă se folosesc naftenaţii de sodiu ca aditivi la cimentul P 400, pentru pasta de ciment de consistenţă normală, cantitatea optimă de aditivi ce se poate adăoga în apa de amestecare la o valoare a raportului $A/C = 0,25$, este de 0,1%; pentru raportul $A/C = 0,23$ proporţia de aditivi ce se poate adăoga este de 0,05%.

Tabelul 5

Ciment P 400 cu adaos de naftenaţi de sodiu

Denumirea probei	Ciment P 400	Apă de amestecare	Timpul de amestecare	Adaos		Pătrunderea sondei
	g	cm³	min	%	cm³	mm
Martor	300	75	3	—	—	7
I	300	75	3	0,01	0,6	2
II	300	75	3	0,05	3	6
III	300	75	3	0,1	6	7,5
I	300	72	3	0,01	0,6	3
II	300	72	3	0,05	3	4,5
I	300	71	3	0,01	0,6	6
II	300	71	3	0,05	3	6,5
I	300	69	3	0,01	0,6	6,5
II	300	69	3	0,05	3	7,5

Apa de amestecare se reduce cu 8%, iar la 1 m³ de beton cu 15,96 l.

Din studiile de laborator întreprinse rezultă că dintre aditivii folosiţi în această lucrare rezultatele cele mai bune se obţin cu naftenaţi de sodiu.

Cu scopul de a pune în evidenţă unele caracteristici ale cimentului cu adaose tensioactive s-au efectuat anumite determinări, ale căror rezultate sînt redate în tabelul 6.

Pentru determinarea unor caracteristici ale cimentului P 400 precum şi ale cimentului B.S., cu adaose de substanţe tensioactive (săpun din ulei sulfonat de dovleac, săpun din ulei sulfonat de arahide, săpun din ulei sulfonat de floarea soarelui, naftenaţi de sodiu şi acizi naftenici), s-au efectuat probe martor pentru fiecare tip de ciment silicios şi s-a determinat: raportul A/C, lucrabilitatea, dozajul, rezistenţa la compresiune, rezistenţa la tracţiune, timpul de priză şi gelivitatea.

Odată ridicate aceste date s-au efectuat probe cu adaose de substanţe tensioactive, păstrîndu-se invariantă proporţia de aditiv şi s-au determinat aceleaşi mărimi ca şi în cazul probei martor. Au rezultat următoarele observaţii:

a) Toate substanţele tensioactive folosite ca aditivi, micşorează rezistenţele mecanice ale cimentului. Anume, rezistenţa la compresiune scade într-o proporţie cuprinsă între 1...9% pentru 0,01% adaos, cu excepţia aditivului de ulei sulfonat de dovleac unde se înregistrează o scădere de 22%. Pentru celelalte tipuri de aditiv micşorarea rezistenţelor la compresiune se încadrează între limitele admisibile (12%). Scăderea rezistenţelor mecanice pune în evidenţă faptul că aditivii folosiţi sînt antrenori de aer.

b) Antrenorii de aer folosiţi duc la scăderea raportului A/C, ameliorînd lucrabilitatea betonului.

c) În ceea ce priveşte timpul de priză, aditivii folosiţi au proprietatea de a întîrzia priza cimentului, care pentru unii aditivi este aproape neglijabilă.

d) Rezistenţa la gelivitate pentru 25 de cicluri de îngheţ şi dezgheţ este bună.

Tabelul 6

Caracteristici ale cimentului P 400 și ale cimentului B.S. cu adaose tensioactive

Denumirea probei	Natura adaosului	Tipul cimentului	Lucrabilitatea			Dozaj	*A/C*	R_c la 28 zile	R_{tr} la 28 zile	Timpul de priză		Gelivitatea
			A/C %	Adaos %	Pătrunderea sondei mm			kgf/cm²	kgf/cm²	Începutul prizei	Sfîrșitul prizei	cicluri
Martor	Săpun din ulei sulfonat de dovleac	P 400	0,28	—	7	1 : 3	0,32	328	27,5	10′	4h05′	>25
I			0,27	0,01	5,5	1 : 3	0,30	286	24,32	7′	4h20′	>25
II			0,27	0,05	vîrtos	1 : 3	0,30	256	23,75	7′	4h25′	>25
Martor	Săpun din ulei sulfonat de arahide	P 400	0,28	—	7	1 : 3	0,32	400	32,00	10′	4h20′	>25
I			0,27	0,01	6	1 : 3	0,30	392	31,50	12′	5h25′	>25
II			0,27	0,05	7,5	1 : 3	0,30	364	28,95	10′	6h40′	>25
Martor	Săpun din ulei sulfonat de floarea soarelui	P 400	0,24	—	7	1 : 3	0,32	288	23,70	8′	4h30′	>25
I			0,22	0,01	6,5	1 : 3	0,30	277	22,50	7′	6h25′	>25
II			0,22	0,05	vîrtos	1 : 3	0,30	248	20,50	7′	6h45′	>25
Martor	Naftenați de sodiu	P 400	0,25	—	7	1 : 3	0,32	432	38,05	6′	5h05′	>25
I			0,23	0,01	6,5	1 : 3	0,30	389	34,20	9′	5h45′	>25
II			0,23	0,05	7,5	1 : 3	0,30	378	29,70	12′	6h12′	>25
Martor	Acizi naftenici	B.S.	0,25	—	7	1 : 3	0,32	408	36,55	5′	3h10′	>25
I			0,23	0,01	5	1 : 3	0,30	382	32,00	7′	3h45′	>25
II			0,23	0,05	8	1 : 3	0,30	347	26,25	10′	4h25′	>25
Martor	Naftenați de sodiu	B.S.	0,25	—	7	1 : 3	0,32	442	38,05	5′	4h10′	>25
I			0,23	0,01	3	1 : 3	0,30	408	36,00	7′	4h25′	>25
II			0,23	0,05	4	1 : 3	0,30	395	35,00	10′	4h50′	>25
Martor	Săpun din ulei sulfonat de floarea soarelui	B.S.	0,25	—	7	1 : 3	0,32	420	38,00	5′	4h51′	>25
I			0,23	0,01	3	1 : 3	0,30	395	36,5	4′	4h35′	>25
II			0,23	0,05	7,5	1 : 3	0,30	380	35,5	4′	4h50′	>25

3. Concluzii

1.1. Proporţia de săpun din uleiul sulfonat de seminţe de dovleac adăogat la pasta de ciment variază între limitele 0,01 ... 0,1%.

1.2. Apa de amestecare pentru pasta de címent se reduce cu 4,7%, ceea ce revine la 9,52 l/m³ beton.

1.3. Rezistenţa la compresiune scade în proporţie de 13%.

1.4. Timpul de priză faţă de proba martor este întîrziat cu 15 ...20 min.

2.1. Proporţia de săpun din uleiul sulfonat de arahide adăogat la pasta de ciment P 400, variază între limitele 0,05 ... 0,2%.

2.2. Apa de amestecare pentru pasta de ciment P 400 se reduce de asemenea cu 4,7%, ceea ce revine la 9,25 l/m³ beton.

2.3. Rezistenţa la compresiune scade cu 2 ... 9%.

2.4. Timpul de priză faţă de proba martor este întîrziat cu 1h 5′ ... 2h 20′.

3.1. Proporţia de săpun din uleiul sulfonat de seminţe de floarea soarelui, adăogat la pasta de ciment P 400, variază între limitele 0,01 ... 0,2%.

3.2. Apa de amestecare pentru pasta de ciment P 400 se reduce cu 6,94%, ceea ce revine la 13,60 l/m³ beton.

3.3. Rezistenţa la compresiune scade cu 1%.

3.4. Timpul de priză este întîrziat faţă de proba martor cu 1h 55′ ... 2h 15′.

4.1. Proporţia de săpun din uleiul sulfonat de seminţe din floarea soarelui, adăogat la pasta de ciment B.S., variază între limitele 0,05 ... 0,7%.

4.2. Apa de amestecare pentru pasta de ciment B.S. se reduce cu 6,94%, ceea ce revine la 13,60 l/m³ beton.

4.3. Rezistenţa la compresiune scade cu 6 ... 10%.

4.4. Timpul de priză, faţă de proba martor, este întîrziat cu 20 ... 30 min.

5.1. Proporţia de naftenaţi de sodiu adăogaţi la pasta de ciment P 400, variază între limitele 0,05 ... 0,1%.

5.2. Apa de amestecare se reduce cu 8%, ceea ce revine la 15,96 l/m³ beton.

5.3. Rezistenţa la compresiune scade cu 10 ... 13%.

5.4. Timpul de priză faţă de proba martor este întîrziat cu 40′ ... 1h 7′.

Prin folosirea ca aditivi la pasta de ciment P 400 a naftenaţilor de sodiu, apa de amestecare a fost redusă într-o proporţie mai ridicată în raport cu rezultatele obţinute cu ceilalţi aditivi utilizaţi, fapt ce ne-a determinat să efectuăm încercări şi cu cimentul B.S., atît cu acizi naftenici cît şi cu naftenaţi de sodiu.

Folosind acizi naftenici ca aditivi la pasta de ciment B.S., apa de amestecare se reduce în aceeaşi proporţie ca şi în cazul cînd s-au folosit naftenaţii de sodiu pentru pasta de ciment P 400; rezistenţa la compresiune se reduce cu 7 ... 15%, iar priza este întîrziată cu 35 ... 45 min, ceea ce dovedeşte că este vorba de un beton aditiv antrenor de aer (v. tabelul 6).

Folosind naftenaţii de sodiu ca aditivi la pasta de ciment B.S., apa de amestecare se reduce în aceeaşi proporţie ca şi în cazul folosirii pastei de ciment P 400, în schimb rezistenţa la compresiune se reduce cu un procent mai mic (6...9%); priza este întîrziată cu 15 ... 40 min.

Substanţele tensioactive utilizate se pot folosi ca aditivi atît la pasta de ciment P 400 cît şi la pasta de ciment B.S., în limitele procentuale stabilite în determinările noastre, încadrîndu-se în grupa aditivilor folosiţi în tehnica mortarelor şi betoanelor.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geologie şi geotehnică,
Laboratorul de materiale de construcţii
şi
Institutul pedagogic, Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Steopoe Al., *Materiale de Construcţii*. Ed. tehn. Buc., 1964. pp. 72-74, 217—219.
2. Manolescu O., Rev. Căilor Ferate, 1957, *6*, p. 295—300.
3. Duriez M., Arrambide J., *Nouveau Traité de Matériaux de Construction*. Vol. 1, Dunod, Paris, 1961, pp. 1107—1204.
4. Hutter D., *Adaosuri pentru betoane*. I.D.T., Buc., 1952, (trad. din l. germană).
5. Şestoperov S. V., Ivanov P. M., Zajcepin A. N., Lubimova P. I., *Betonul de ciment cu adaosuri plastifiante*. I.D.T., Buc., 1954, (trad. din l. rusă).
6. Foster B. E., J. of the Amer. Concrete Inst., 1963, *11*, p. 1481.
7. Скрамтаев Б. Г., Малинин, Цемент, 1953, *3*.
8. * * * *Materiale de Construcţii*. Caiet selectiv, 1963, *2*, p. 75.
9. * * * *Materiale de Construcţii*. Caiet selectiv, 1963, *10*, p. 555.
10. * * * *Materiale de Construcţii*. Caiet selectiv, 1956, *6*, p. 30.
11. * * * *Materiale de Construcţii*. Caiet selectiv, 1954, *5*, p. 42.

STUDIO DEGLI ADDENTI TENSIO-ATTIVI AL CEMENTO SILICOSO

(Sunto)

Si espongono alcuni risultati conseguiti negli studi degli addenti tensio-attivi al cemento silicoso.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 338.062.214

UNELE ASPECTE ALE EFICIENŢEI ECONOMICE A MECANIZĂRII LUCRĂRILOR DE CONSTRUCŢII

DE

EUGEN FLOREA, C. MIHĂILESCU şi AURORA DIMA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Mecanizarea lucrărilor de construcţii-montaj este o sarcină importantă, trasată de Directivele Congresului al VIII-lea al P.C.R.

Eficienţa economică a mecanizării lucrărilor de construcţii comportă aspecte multiple şi variate.

Dintre acestea, ne-am propus să studiem unele aspecte legate de creşterea gradului de mecanizare a lucrărilor, considerate de noi importante, pentru faptul că determină posibilitatea de a reduce necesarul de maşini.

2. Într-adevăr numărul necesar de maşini M poate fi determinat cu formula (1), care exprimă independenţa între factorii arătaţi mai sus, anume:

$$M = \frac{VG}{100\,P}, \tag{1}$$

în care: M — numărul necesar de maşini pentru îndeplinirea planului anual de lucrări, V — volumul lucrărilor de o anumită categorie (în unităţi naturale), prevăzut a fi executat în cursul anului, G — gradul de mecanizare al lucrărilor (în %) din totalul categoriei respective, P — productivitatea de exploatare anuală a unei maşini, în unităţi naturale.

Pentru a calcula eficienţa economică a creşterii gradului de mecanizare a unei anumite categorii de lucrări se determină influenţa acestui factor asupra preţului de cost al lucrărilor.

Dacă se cunoaşte preţul de cost mediu (cheltuieli directe) al unităţii de lucrare executată mecanizat (C_{mec}) şi manual (C_{man}), atunci preţul de cost mediu al unităţii din lucrarea dată în ansamblu, pentru o anumită perioadă şi pentru un grad de mecanizare dat, se propune a se determina cu formula:

$$C = C_{man} - \frac{G}{100}(C_{man} - C_{mec}). \quad (2)$$

Economia totală E (la cheltuieli directe) pentru categoria dată de lucrări, realizată în anul planificat, comparativ cu anul de bază, va fi dată de formula:

$$E = (C_b - C_p)\,V, \quad (3)$$

în care C_b şi C_p reprezintă preţul de cost mediu al unităţii din lucrarea dată în anul de bază şi respectiv în anul planificat, V — volumul total planificat, din categoria dată de lucrări.

Reducerea R, în procente, a preţului de cost mediu (cheltuieli directe) a categoriei date de lucrări în anul planificat, comparativ cu anul de bază, poate fi determinată cu relaţia:

$$R = \frac{100\,(C_b - C_p)}{C_p}. \quad (4)$$

Fiind determinată reducerea R a preţului de cost a unei categorii de lucrări şi cunoscînd ponderea U a preţului de cost al categoriei date de lucrări în preţul de cost total al obiectului, se poate determina procentul reducerii preţului de cost al obiectului (R_0), ca rezultat al creşterii gradului de mecanizare al categoriei date de lucrări, anume:

$$R_0 = \frac{RU}{100}. \quad (5)$$

3. În cele ce urmează vom urmări aplicarea formulelor de mai sus în cîteva exemple din activitatea T.R.C., Iaşi şi I.C.T., Iaşi.

Tabelul 1

Denumirea indicatorilor	Simbol	U/M	Anul	
			1964	1965
Volumul total al lucrărilor de pămînt la T.R.C.	V	mii m³	295	410
Gradul de mecanizare (săpături şi transportul pămîntului)	G	%	42	48
Preţul de cost mediu al săpării şi transportului unui m³ de pămînt (cheltuieli directe) prin procedeul				
a) mecanizat	C_{mec}	lei	2,93	2,93
b) manual	C_{man}	lei	8,41	8,41
Investiţii pentru lucrări de pămînt	I	mii lei	1,485	1,721

a) Prețul de cost mediu al săpării și transportului unui m³ de pământ (cheltuieli directe) în anul de bază, conform formulei (2), este

$$C_b = 6{,}11 \text{ lei.}$$

b) Prețul de cost mediu al săpării și transportului unui m³ de pământ (cheltuieli directe) în anul planificat va fi (v. rel. (2))

$$C_p = 5{,}87 \text{ lei.}$$

c) Economia totală pentru categoria dată de lucrări, va fi conform formulei (3):

$$E = 98\,400 \text{ lei.}$$

d) Reducerea, în procente, a prețului de cost mediu al categoriei date de lucrări va fi în baza relației (4):

$$R = 3{,}92\ \%.$$

În cazul lucrărilor de beton executate de T.R.C., Iași, eficiența creșterii gradului de mecanizare va fi cea indicată în tabelul 2.

Tabelul 2

Denumirea indicatorilor	Simbol	U/M	Anul	
			1964	1965
Volumul total al lucrărilor de beton din planul T.R.C.	V	mii m³	100	112
Gradul de mecanizare	G	%	88	90
Prețul de cost mediu al punerii în operă a unui m³ de beton (cheltuieli directe) prin procedeul				
a) mecanizat	C_{mec}	lei	155	153
b) manual	C_{man}	lei	160	160
Investiții pentru lucrări de beton	I	mii lei	2414	1768

a) Prețul de cost mediu al punerii în operă a unui m³ de beton, în anul de bază, va fi, conform formulei (2):

$$C_b = 155{,}60 \text{ lei.}$$

b) Prețul de cost mediu al punerii în operă a unui m³ de beton în anul planificat, va fi (v. rel. (2)):

$$C_p = 153{,}7 \text{ lei.}$$

c) Economia totală la lucrările de beton rezultă, în baza relației (3):

$$E = 212\,800 \text{ lei.}$$

d) Reducerea în procente a prețului de cost a lucrărilor de beton rezultă a fi, în virtutea relației (4):

$$R = 1{,}22\ \%.$$

Tabelul 3

Denumirea indicatorilor	Simbol	U/M	Anul	
			1964	1965
Volumul total al lucrărilor de pământ din planul I.C.T.	V	mii m³	1 000	1 100
Gradul de mecanizare (săpături şi transportul pământului)	G	%	65	70
Preţul de cost mediu al săpării şi transportului unui m³ de pământ (cheltuieli directe) prin procedeul				
a) mecanizat	C_{mec}	lei	8,80	8,80
b) manual	C_{man}	lei	12,05	12,05
Investiţii pentru lucrări de pământ	I	mii lei	930	550

a) Preţul de cost mediu al săpării şi transportului unui m³ de pământ (cheltuieli directe) în anul de bază, va fi, conform formulei (2):

$$C_b = 9{,}94 \text{ lei.}$$

b) Preţul de cost mediu al săpării şi transportului unui m³ de pământ (cheltuieli directe) în anul planificat:

$$C_p = 9{,}77 \text{ lei.}$$

c) Economia totală anuală pentru lucrări de pământ la I.C.T. rezultă (v. rel. (3)):

$$E = 187\,000 \text{ lei.}$$

d) Reducerea în procente a preţului de cost al lucrărilor de pământ va fi, în baza relaţiei (4):

$$R = 1{,}7 \ \%.$$

Deci, metodica prezentată în această Notă permite a se determina economia totală anuală precum şi reducerea preţului de cost al lucrărilor, ca rezultat al creşterii gradului de mecanizare a unei categorii date de lucrări de construcţii.

Creşterea gradului de mecanizare a lucrărilor constituie o particularitate specifică actuală a ramurii construcţiilor, care influenţează corespunzător metodele de apreciere a eficienţei economice a mecanizării construcţilor.

Dar creşterea gradului de mecanizare, pe lîngă economii este legată de cheltuieli de investiţii. Şi atunci, în final, eficienţa economică a creşterii gradului de mecanizare se determină prin calculul termenului de recuperare a investiţiilor, după formula:

$$t = \frac{I}{E}. \tag{6}$$

În cazul lucrărilor de pământ la T.R.C., $t = 17$ ani, iar la I.C.T., $t = 2{,}9$ ani.
În cazul lucrărilor de beton la T.R.C, $t = 8{,}3$ ani.

După cum se constată termenii de recuperare sînt mari la T.R.C. și aceasta constituie una din explicațiile faptului că în construcții civile creșterea gradului de mecanizare se poate realiza în mod treptat, în decursul unei perioade mai lungi de timp, aceasta fiind o particularitate a construcțiilor civile.

Creșterea gradului de mecanizare a lucrărilor de construcții-montaj influențează creșterea productivității muncii (fig. 1) [2].

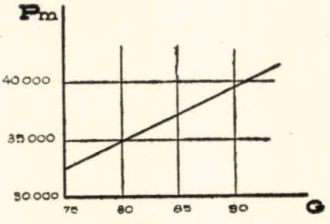


Fig. 1. — Dependența productivității muncii de gradul mediu de mecanizare a lucrărilor.

Din grafic rezultă că o creștere de 1% a gradului de mecanizare permite creșterea productivității muncii cu 1,6%.

Graficul din fig. 1 poate fi folosit pentru calculul nivelului planificat al productivității muncii, la trusturile de construcții.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de organizare și planificare

BIBLIOGRAFIE

1. Канторер С. Е., *Методы обоснования эффективности применения машин в строительстве.* Госстройиздат, М., 1961.
2. Ельгорт Е., Экономика строительства, 1963, *1*, стр. 37.

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕХАНИЗАЦИИ СТРОИТЕЛЬНЫХ РАБОТ

(Резюме)

Исследуется влияние роста степени механизации строительных работ на себестоимость и производительность труда, применительно к двум строительным предприятиям города Яссы, в которых это изучается способом сравнения механизация земляных и бетонных работ.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Влияния средней степени механизации работ на производительность труда.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 1—2, 1967

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1–2, 1967

D. K. 677

BEITRAG ZUM STUDIUM EINIGER PROBLEME DER LINEAREN PROGRAMMIERUNG IN DER TEXTILINDUSTRIE

VON

MALCA BERCOVICI und ANA TRIANDAF

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 5—7 Februar 1965

Das Problem bezieht sich auf die Verwendung der Methode der parametrischen linearen Programmierung zur Erzielung des optimalen Gewinnes bei zwei Erzeugnissen A und B der Fabrik „Suveica" in Bukarest.

Es wird verlangt den Vector X festzustellen, welcher $AX \geqslant b$ befriedigt und die Funktion $f = cX$ maximalisiert wo die Komponenten von b lineare Funktionen mit einem einzigen realen Parameter sind.

Die Daten des Problems verlangen, dass die Variabeln x_1 und x_2 folgendes System befriedigten:

$$\begin{cases} 44\,x_1 + 47\,x_2 \geqslant 2{,}226 - 2{,}3\,\lambda, \\ 12\,x_1 + 11\,x_2 \leqslant 0{,}006 + 2\,\lambda, \\ 192\,x_1 + 193\,x_2 \geqslant 0{,}57 + 19\,\lambda, \\ 640\,x_1 + 897\,x_2 \leqslant 936{,}34 + 17\,\lambda, \\ 12\,x_1 + 13\,x_2 = 0{,}62, \\ 80\,x_1 + 83\,x_2 = 0{,}3 + 10{,}7\,\lambda \end{cases}$$

und einen Maximalwert der Funktion $f = 0{,}828\,x_1 + 0{,}073\,x_2$ darstellen. Der Parameter λ bedeutet die maximale Zeit welche von einer Produktionsphase benötigt wird.

Durch Einführung schwacher Variabeln um die Ungleichungen in Gleichungen zu überführen und durch Einführung künstlicher Variabeln, um eine Grundlösung zu erhalten, gelangen wir zum folgendem System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-\ 44\,x_1 - \ 47\,x_2 + x_3 - x_9 &= -\ 2{,}226 + \ 2{,}3\,\lambda,\\
12\,x_1 + \ 11\,x_2 + x_4 &= \ 0{,}006 + \ 2\ \lambda,\\
-\ 192\,x_1 - 193\,x_2 + x_5 - x_{10} &= -\ 0{,}57 - 19\ \lambda,\\
640\,x_1 - 897\,x_2 + x_6 &= 936{,}34 - 17\ \lambda,\\
12\,x_1 + \ 13\,x_2 + x_1 &= \ 0{,}62,\\
80\,x_1 + \ 83\,x_2 + x_8 &= \ 0{,}3 + 10{,}7\,\lambda.
\end{aligned}$$

Es wird nun verlangt x_1 und x_2 zu bestimmen und zwar in Veränderungsinterwall des Parameters λ welcher für die Funktion $f = 0{,}328\,x_1 + + 0{,}073\,x_2$ ein Maximum ergibt.

Um die Werte des Parameters λ zu bestimmen, wurde die Methode der parametrischen Programmierung von Professor Robert Llewellyn [2] benützt. Um die extreme Funktion zu bestimmen wurde vom Parameter gleich Null ausgegangen und mehrere Iterationen durchgeführt. Für $\lambda = 0$ wird der Vektor der parametrischen Lösung durch Benützung der Matrize B^{-1} der Enditerationen und des parametrischen Begrenzungsvektors gefunden:

$$x = B_1^{-1}\,b = \begin{bmatrix}
1{,}7\,\lambda + \ 0{,}00009\\
-\ 21{,}7\,\lambda + \ 0{,}252\\
-\ 359{,}3\,\lambda + 24{,}4496\\
-\ 658{,}64\,\lambda + \ 0{,}516\\
-\ 22{,}809\,\lambda + \ 0{,}6188\\
-\ 147{,}08\,\lambda + 12{,}83
\end{bmatrix}.$$

Für $\lambda < 0{,}0007$ hat der Lösungsvektor nur positive Komponenten; über diesen Wert des Parameters bleiben alle Komponenten positiv mit Ausnahme der vierten, welche einen negativen Wert erhält.

Für $\lambda > 0{,}0007$ ist des Problem dem doppeltem Simplexproblem bevor man zur Lösung gelangt, ähnlich.

Für diesem Wert des Parameters müssen wir eine neue Lösung haben welche durch Bildung einer neuen Iteration erhalten werden kann.

Um die Veränderliche λ welche in die Lösung eingeführt wird zu wählen, rechnet man $\lambda = 0{,}0007 + \lambda'$ und erhält die Lösung

$$X = B_2^{-1}\,b = \begin{bmatrix}
1{,}0175\,\lambda' + \ 0{,}0013728\\
-\ 11{,}3\,\lambda' + \ 0{,}239024\\
-\ 216{,}21\,\lambda' + 23{,}851\\
34{,}9\,\lambda' + \ 0{,}52\\
-\ 38{,}757\,\lambda' + \ 0{,}568\\
-\ 94{,}637\,\lambda' + 12{,}729
\end{bmatrix}.$$

Für $\lambda' = 0{,}3744$ hat der Lösungsvektor nur positive Komponenten. Für $\lambda' = 0{,}3744 + \lambda''$ erhält man

$$X = B_3^{-1} b = \begin{bmatrix} 2{,}9588\,\lambda'' + 0{,}014632 \\ -0{,}2\,\lambda'' + 0{,}07488 \\ -19\,\lambda'' + 20{,}69644 \\ 83\,\lambda'' + 0{,}97758 \\ 925\,\lambda'' + 0{,}618 \\ 10\,\lambda'' + 11{,}33892 \end{bmatrix}.$$

Für $\lambda'' = 0{,}4319$ sind alle Komponenten des Lösungsvektors positiv. Für $\lambda'' > 0{,}4319$ sind auch alle Komponenten des Lösungsvektors positiv, ausser x_4 welche negativ ist. Für $\lambda'' = 0{,}4319 + \lambda'''$ erhält man:

$$X = B_4^{-1} b = \begin{bmatrix} -0{,}0164\,\lambda''' + 1{,}14432 \\ 6{,}922\,\lambda''' + 0{,}0109 \\ -15{,}478\,\lambda''' + 13{,}638 \\ 83{,}859\,\lambda''' + 31{,}017 \\ 941{,}158\,\lambda''' + 345{,}077 \\ -25{,}118\,\lambda''' + 7{,}509 \end{bmatrix}.$$

Für $\lambda''' = 0{,}6934$ sind alle Komponenten des Lösungsvektors positiv. Für $\lambda''' = 0{,}6934 + \lambda^{IV}$ erhält man den neuen Lösungsvektor:

$$X = B_5^{-1} b = \begin{bmatrix} 0{,}913\,\lambda^{IV} + 0{,}638 \\ 21{,}15\,\lambda^{IV} + 12{,}29 \\ 4{,}28\,\lambda^{IV} + 5{,}583 \\ 88{,}68\,\lambda^{IV} + 54{,}772 \\ 1\,187{,}91\,\lambda^{IV} + 481{,}896 \\ 0{,}121\,\lambda^{IV} + 0{,}659 \end{bmatrix}.$$

Für $\lambda^{IV} = 0{,}7896$ sind alle Komponenten des Lösungsvektors positiv und zwar über dem positiven Rang des Parameters.

Unter diesen Bedingungen ist das Problem gelöst. Es ist zu bemerken dass man für $X = 0$ die primäre Methode Simplex benützt. Bei dieser Methode sind die Iterationen beendet, wenn man für den Lösunksvektor ein positives Variationsintervall des Parameters λ erhält.

Für $\lambda \neq 0$ wird die duale Methode Simplex benützt weil der Parameter λ sich im Begrenzungsintervall befindet. Es werden die Matrizen B_2^{-1}, B_3^{-1}, B_4^{-1} je nach dem Intervall und den dualen Simplex Iterationen erhalten.

Die Lösungen, welche der gesetzten Aufgabe entsprechen sind $0{,}5618 < \lambda < 0{,}9413$, für welche man die Werte:

$$x_1 = 8{,}162 \text{ m/Minute}, \quad x_2 = 9{,}543 \text{ m/Minute}.$$

erhalten.

Dadurch erzielt das Unternehmen bei diesen Erzeugnissen einen Gewinn von 2,1% anstatt wie gegenwärtig 1,82%.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Mathematik I

LITERATURVEIZEICHNIS

1. Mihoc Gh., Urseanu V., *Matematici aplicate în statistică*. Ed. Acad. R. P. R., 1962.
2. Llewellyn R. W., *Linear Programming*. Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. Dantzing G. B., Fulkerson O. R., Johnson S. M., *On a Linear Programming Combinorial Approach to the Traveling-Salesman Problem.*

CONTRIBUŢII LA STUDIUL UNOR PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ ÎN INDUSTRIA TEXTILĂ

(Rezumat)

Se utilizează metoda de programare liniară parametrică pentru determinarea beneficiului optim la două produse fabricate de Intreprinderea Textilă „Suveica" din Bucureşti. Printr-o modificare adecvată a unei faze tehnologice se poate spori beneficiul de la 1,829% la 2,1 %.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

УДК 621-231 ; 677.05

К СИНТЕЗУ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПРИВОДА РЕМИЗОПОДЪЕМНОЙ КАРЕТКИ ТКАЦКИХ СТАНКОВ

П. А. ЛЕБЕДЕВ

1. Звенья пространственных механизмов находятся под действием сил, произвольно ориентированных в пространстве и могущих вызывать защемление валов в опорах. Принятое в теории плоских механизмов понятие об угле передачи недостаточно для оценки работоспособности пространственных механизмов и должно быть заменено учетом коэффициента полезного действия.

2. В этой статье выведено статическое условие существования кривошипа в пространственном четырехзвенном кривошипно-коромысловом механизме, которое наряду с геометрическим условием [1] должно быть учтено при конструктивно-геометрическом синтезе механизмов привода ремизоподъемных кареток ткацких станков, а также уравнения для определения их кпд, пригодные как для решения задач синтеза, так и анализа механизмов.

3. На рис. 1 представлена кинематическая схема и обозначения размеров механизма привода ремизоподъемной каретки с плавающим шатуном. Кинематические пары, составленные шатуном AB с кривошипом OA и коромыслом BC представлены сферическими шарнирами A и B. Полагая для общности решения задачи угол α между плоскостями вращения кривошипа и коромысла произвольным, выбираем систему $Sxyz$ косоугольных координат так, что плоскость xSz совпадает с первой плоскостью, а плоскость ySz — со второй. Центр O окружности кривошипа размещен на оси Sx. При этом l_1, l_2 и l_3 обозначены соответственно абсцисса точки O, ордината и апликата точки C, a, b и c — длины кривошипа, шатуна и коромысла, φ и ψ — углы поворота кривошипа и коромысла. Координаты точек A и B определяются равенствами:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_A = l_1 + a\cos\varphi, \quad y_A = 0, \quad z_A = a\sin\varphi, \\ x_B = 0, \quad y_B = l_2 + c\cos\psi, \quad z_B = l_3 + c\sin\psi. \end{cases}$$

Обозначим R'_t окружную силу, развиваемую в точке A. Проведем через конец вектора R'_t перпендикулярную к нему плоскость, которая отсечет на шатуне некоторый вектор, проекции которого на направления нормали и бинормали к окружности кривошипа обозначены R'_n и R'_b. Это означает, что реализация требуемой мощности

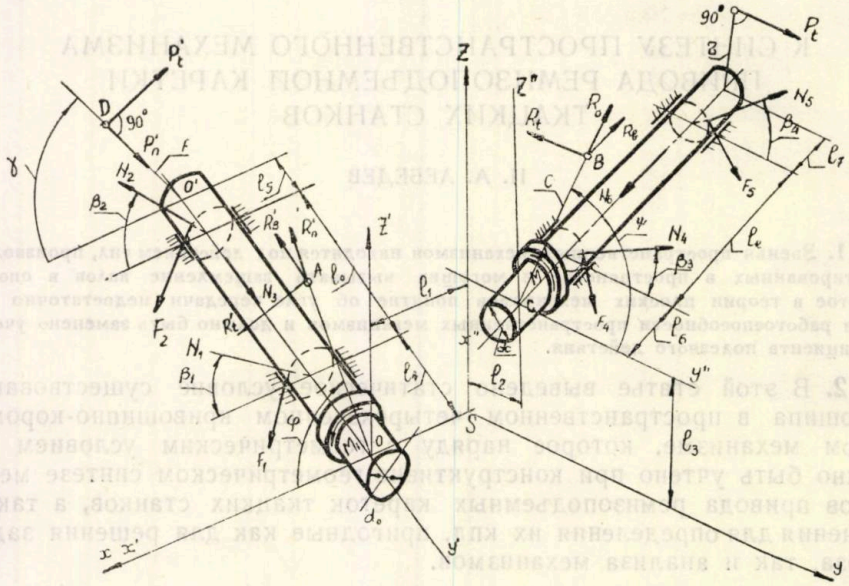


Рис. 2

силы R'_t сопровождается возникновением силы давления R вдоль шатуна и ее составляющих R'_n и R'_b. Перенесем вектор R в точку B и разложим его также на направления касательной R_t, нормали R_n и бинормали R_b окружности коромысла в точке B. Пусть G_0 — вес кривошипного вала с кривошипом: x'_0, y'_0 и z'_0 — координаты центра тяжести вала кривошипа в системе координат $Ox'y'z'$ (рис. 2), $\xi_{x'}$, $\xi_{y'}$ и $\xi_{z'}$ — углы, образованные вектором G_0 с осями координат Ox', Oy' и Oz'. Введем в рассмотрение две плоскости, проходящие через продольную ось симметрии кривошипа, причем первая вмещает в себе продольную ось кривошипа, а вторая — центр тяжести. Пусть ϑ — угол между этими плоскостями и r_0 — расстояние от центра тяжести кривошипного вала до оси его вращения. Аналогично введем соответственные величины веса G_c, угла ν и расстояния r_C для вала коромысла,

x_C'', y_C'', z_C'' — координаты центра тяжести и $\zeta_{x''}$, $\zeta_{y''}$, $\zeta_{z''}$ — углы, образованные вектором G_C с осями координат Cx'', Cy'', Cz''. Координаты центров тяжести валов связаны с введенными параметрами следующими равенствами:

$$(2)\quad \begin{cases} x_0' = r_0\cos(\varphi+\vartheta), & y_0', \quad z_0' = r_0\sin(\varphi+\vartheta), \\ x_C'', & y_C'' = r_C\cos(\psi+\nu), \quad z_C'' = r_C\sin(\psi+\nu). \end{cases}$$

Полагаем, что сила веса шатуна распределяется между головками кривошипа и коромысла в постоянной пропорции. Пусть b' и b'' — расстояния центра тяжести шатуна соответственно от точек A и B. В точке A действует часть $G_A = (b''/b)G_{AB}$ силы веса G_{AB} шатуна, а в точке B — $G_B = (b'/b)G_{AB}$. Силы G_A, G_B, G_O, G_C, G_{AB} направлены вертикально.

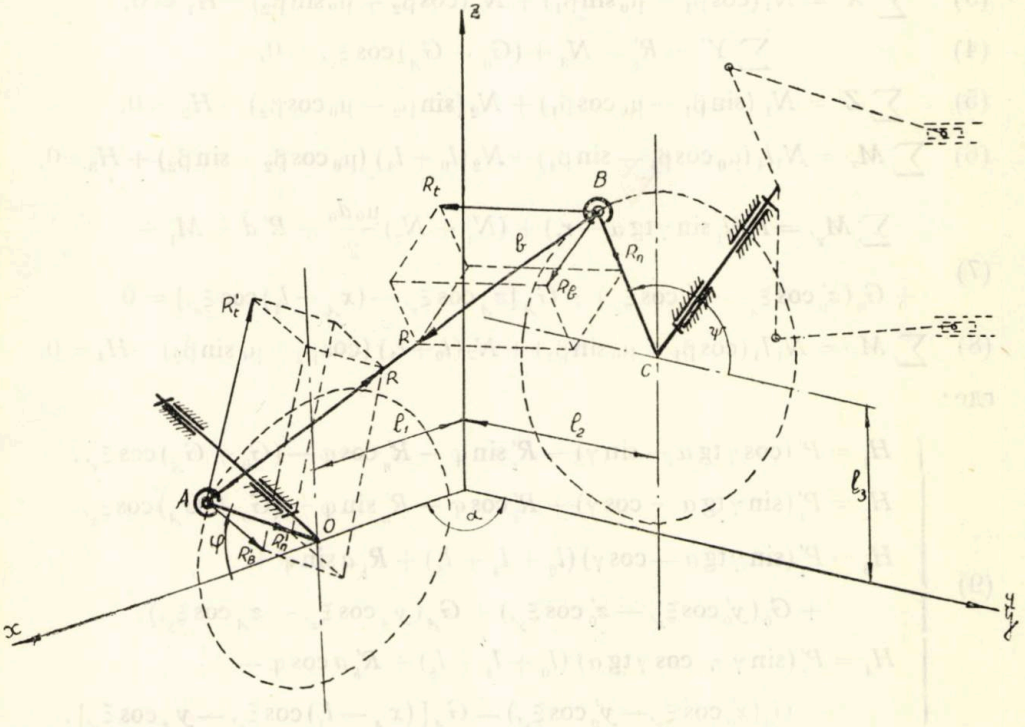


Рис. 2

Для определения сил реакций опор валов рассмотрим равновесие сил и моментов сил, нагружающих ведущий вал в системе координат $'y'z'$. На рис. 2 приведены силы, приложенные к кривошипному

валу от шатуна в точке A и от шестерни в точке D, причем P'_t и P'_n — касательная и нормальная составляющие силы давления шестерни на зубчатое колесо, насаженное на кривошипный вал. Считаем, что эти силы действуют в среднем сечении колеса, точка D отстоит от оси OO' на расстоянии f, а луч $O'D$ составляет с осью Ox' угол γ. N_1, N_2, F_1, F_2 — нормальные и тангенциальные реакции опор, причем $F_1 = \mu_0 N_1$, $F_2 = \mu_0 N_2$, где μ_0 — коэффициент трения вала о подшипники. Эти четыре силы действуют в плоскостях, параллельных координатной плоскости $x'Oz'$; N_3 и $M_1 \approx \mu_0 N_3 d_0/2$ — осевая реакция подпятника вала и соответствующий момент сил трения между поверхностями пяты и подпятника. Определим также β_1 и β_2 — углы наклона векторов N_1 и N_2 к плоскости $x'Oy'$. Составим уравнения равновесия проекций сил и моментов сил на оси прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$:

$$(3)\quad \sum X' = N_1(\cos\beta_1 + \mu_0 \sin\beta_1) + N_2(\cos\beta_2 + \mu_0 \sin\beta_2) - H_1 = 0,$$

$$(4)\quad \sum Y' = R'_b - N_3 + (G_0 + G_A)\cos\xi_{y'} = 0,$$

$$(5)\quad \sum Z' = N_1(\sin\beta_1 - \mu_0\cos\beta_1) + N_2(\sin\beta_2 - \mu_0\cos\beta_2) - H_2 = 0,$$

$$(6)\quad \sum M_{x'} = N_1 l_4(\mu_0\cos\beta_1 - \sin\beta_1) + N_2(l_0 + l_4)(\mu_0\cos\beta_2 - \sin\beta_2) + H_3 = 0,$$

$$(7)\quad \sum M_{y'} = P'_t(l_1 \sin\gamma \operatorname{tg}\alpha - r_1) + (N_1 + N_2)\frac{\mu_0 d_0}{2} + R'_t d + M_1 + G_0(z'_0\cos\xi_{x'} - x'_0\cos\xi_{z'}) + G_A[z_A\cos\xi_{x'} - (x_A - l_1)\cos\xi_{z'}] = 0,$$

$$(8)\quad \sum M_{z'} = N_1 l_4(\cos\beta_1 + \mu_0\sin\beta_1) + N_2(l_0 + l_4)(\cos\beta_2 + \mu_0\sin\beta_2) - H_4 = 0,$$

где:

$$(9)\quad \begin{cases} H_1 = P'_t(\cos\gamma\operatorname{tg}\alpha + \sin\gamma) - R'_t\sin\varphi - R'_n\cos\varphi - (G_0 + G_A)\cos\xi_{x'}, \\ H_2 = P'_t(\sin\gamma\operatorname{tg}\alpha - \cos\gamma) + R'_t\cos\varphi - R'_n\sin\varphi - (G_0 + G_A)\cos\xi_{z'}, \\ H_3 = P'_t(\sin\gamma\operatorname{tg}\alpha - \cos\gamma)(l_0 + l_4 + l_5) + R'_b a\sin\varphi + \\ \qquad + G_0(y'_0\cos\xi_{z'} - z'_0\cos\xi_{y'}) + G_A(y_A\cos\xi_{z'} - z_A\cos\xi_{y'}), \\ H_4 = P'_t(\sin\gamma + \cos\gamma\operatorname{tg}\alpha)(l_0 + l_4 + l_5) + R'_b a\cos\varphi - \\ \qquad - G_0(x'_0\cos\xi_{y'} - y'_0\cos\xi_{x'}) - G_A[(x_A - l_1)\cos\xi_{y'} - y_A\cos\xi_{x'}]. \end{cases}$$

В уравнениях (3)...(8) содержатся неизвестные N_1, N_2, β_1, β_2, N_3, P'_n и P'_t, причем $P'_n = P'_t\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha = 20°$ — угол зацепления зубчатых колес.

Из (4) определяем $N_3 = R'_b + (G_0 + G_A)\cos\xi_{y'}$. Далее определяем значения $N_2(\cos\beta_2 + \mu_0\sin\beta_2)$ из уравнения (3) и $N_2(\sin\beta_2 - \mu_0\cos\beta_2)$ из уравнения (5) и подставляем их соответственно в (8) и (6), после чего приходим к системе уравнений относительно N_1 и β_1 из которой находим:

$$(10)\quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{H}{l_0(1+\mu_0^2)}, \quad \sin\beta_1 = \dfrac{1}{H}[(H_2 + \mu_0 H_1)(l_0 + l_4) - \mu_0 H_4 - H_3], \\ \cos\beta_1 = \dfrac{1}{H}[(H_1 - \mu_0 H_2)(l_0 + l_4) + \mu_0 H_3 - H_4], \end{cases}$$

где

$$H = \pm\sqrt{(1+\mu_0^2)\{[H_1(l_0 + l_4) - H_4]^2 + [H_2(l_0 + l_4) - H_3]^2\}}.$$

Определяя теперь из уравнений (3) и (5) величины $N_1(\cos\beta_1 + \mu_0\sin\beta_1)$ и $N_1(\sin\beta_1 - \mu_0\cos\beta_1)$ после подстановки их соответственно в уравнения (8) и (6) и упрощений найдем:

$$(11)\quad \begin{cases} N_2 = \dfrac{G}{l_0(1+\mu_0^2)}, \quad \sin\beta_2 = \dfrac{1}{G}[H_3 - H_2 l_4 + \mu_0(H_4 - H_1 l_4], \\ \cos\beta_2 = \dfrac{1}{G}[H_4 - H_1 l_4 - \mu_0(H_3 - H_2 l_4)], \end{cases}$$

где

$$G = \pm\sqrt{(1+\mu_0^2)[(H_4 - H_1 l_4)^2 + (H_3 - H_2 l_4)^2]}.$$

Шестая неизвестная P'_t определяется подстановкой значений (10) и (11) в (7). Ввиду громоздкости коэффициентов преобразованного таким образом уравнения (7) предпочтительно его решать для конкретных задач в числовом виде. Все определенные выше неизвестные представлены как функции сил R'_t, R'_n и R'_b, а эти последние могут быть выражены через прямоугольные проекции вектора R на оси координат S_x, S_y и S_z:

$$(12)\qquad R_x = R\cos\delta_x, \quad R_y = R\cos\delta_y, \quad R_z = R\cos\delta_z.$$

Очевидно

$$(13)\quad \begin{cases} R'_t = R_x\sin\varphi - R_z\cos\varphi = R(\cos\delta_x\sin\varphi - \cos\delta_z\cos\varphi), \\ R'_n = R_x\cos\varphi + R_z\sin\varphi = R(\cos\delta_x\cos\varphi + \cos\delta_z\sin\varphi), \\ R'_b = \sqrt{R^2 - R'^2_t - R'^2_n} = R\sqrt{1 - \cos^2\delta_x - \cos^2\delta_z}, \end{cases}$$

где в принятой косоугольной системе координат направляющие косинусы отрезка AB (или вектора R) могут быть вычислены по нижеследующим равенствам:

$$(14)\quad \begin{cases} \cos\delta_x = \dfrac{1}{b}[x_B - x_A + (y_B - y_A)\cos\alpha], \\ \cos\delta_y = \dfrac{1}{b}[(x_B - x_A)\cos\alpha + y_B - y_A], \quad \cos\delta_z = \dfrac{z_B - z_A}{b}, \end{cases}$$

которые после подстановки значений (1) принимают вид:

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\delta_x = \dfrac{1}{b}[(l_2 + c\cos\psi)\cos\alpha - l_1 - a\cos\varphi], \\ \cos\delta_y = \dfrac{1}{b}[l_2 + c\cos\psi - (l_1 + a\cos\varphi)\cos\alpha], \\ \cos\delta_z = \dfrac{1}{b}[l_3 + c\sin\psi - a\sin\varphi]. \end{cases}$$

4. Аналогично определим силы реакций, приложенные к ведомому валу крестовины, подвергающейся действию силы P_t. Эта сила действует попеременно от верхнего и нижнего поводков. Составляем уравнения равновесия действующих на него сил, принимая во внимание, что P_t есть сила полезного сопротивления, а R_t — сила движущая:

$$(16)\quad \sum X'' = N_6 - R_b + (G_C + G_B)\cos\zeta_{x''} = 0,$$

$$(17)\quad \sum Y'' = N_4(\mu_C\sin\beta_3 + \cos\beta_3) + N_5(\mu_C\sin\beta_4 + \cos\beta_4) - E_1 = 0,$$

$$(18)\quad \sum Z'' = N_4(\sin\beta_3 - \mu_C\cos\beta_3) + N_5(\sin\beta_4 - \mu_C\cos\beta_4) - E_2 = 0,$$

$$(19)\quad \begin{aligned} \sum M_{x''} = &- P_t[r + l_2\cos(\psi + \delta)] - \mu_C\frac{d_c}{2}(N_4 + N_5) + R_t c - M + \\ &+ G_C(y''_C\cos\zeta''_z - z''_C\cos\zeta_{y''}) + G_B[(y - l_2)\cos\zeta_{z''} - (z_B - l_3)\cos\zeta_{y''}] = 0, \end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned} \sum M_{y''} = &N_4 l_6(\sin\beta_3 - \mu_C\cos\beta_3) + \\ &+ N_5(l_C + l_6)(\sin\beta_4 - \mu_C\cos\beta_4) - E_3 = 0, \end{aligned}$$

$$(21)\quad \begin{aligned} \sum M_{z''} = &- N_4 l_6(\cos\beta_3 + \mu_C\sin\beta_3) - \\ &- N_5(l_C + l_6)(\cos\beta_4 + \mu_C\sin\beta_4) + E_4 = 0, \end{aligned}$$

где

$$(22)\quad \begin{cases} E_1 = R_t \sin\psi - R_n \cos\psi - P_t \sin(\psi+\delta) - (G_C + G_B)\cos\zeta_{y''}, \\ E_2 = P_t \cos(\psi+\nu) - R_t \cos\psi - R_n \sin\psi - (G_C + G_B)\cos\zeta_{z''}, \\ E_3 = P_t(l_C + l_6 + l_7)\cos(\psi+\delta) + R_b c \sin\psi - \\ \quad - G_C(z''_C \cos\zeta_{x''} - x''_C \cos\zeta_{z''}) - G_B(z_B - l_3)\cos\zeta_{x''}, \\ E_4 = -P_t(l_C + l_6 + l_7)\sin(\psi+\delta) + R_b c \cos\psi - \\ \quad - G_C(y''_C \cos\zeta_{x''} - x''_C \cos\zeta_{y''}) - G_B(y_B - l_2)\cos\zeta_{x''}; \end{cases}$$

$N_4, F_4 = \mu_C N_4, N_5, F_5 = \mu_C N_5$ — нормальные и тангенциальные реакции опор, μ_C — коэффициент трения вала коромысла в опорах, N_6 — осевая реакция подпятника, $M \approx \mu_C N_6 d_c/2$ — момент сил трения пяты о подпятник, δ — угол, составленный плечом крестовины с продольной осью симметрии коромысла. Остальные обозначения ясны из рис. 2.

Решая систему (16)...(21) аналогично системе (3)...(8), имеем:

$$(23)\quad \begin{cases} N_6 = R_b - (G_C + G_B)\cos\zeta_{x''}, \\ N_4 = \dfrac{E}{l_C(1+\mu_C^2)}, \quad \sin\beta_3 = \dfrac{1}{E}\left[(E_2 + \mu_C E_1)(l_C + l_6) - \mu_C E_4 - E_3\right], \\ \cos\beta_3 = \dfrac{1}{E}\left[(E_1 - \mu_C E_2)(l_C + l_6) + \mu_C E_3 - E_4\right], \end{cases}$$

где

$$E = \sqrt{1+\mu_C^2}\sqrt{[E_1(l_C + l_6) - E_4]^2 + [E_2(l_C + l_6) - E_3]^2},$$

$$(24)\quad \begin{cases} N_5 = \dfrac{F}{l_C(1+\mu_C^2)}, \quad \sin\beta_4 = \dfrac{1}{F}\left[E_3 - E_2 l_6 + \mu_C(E_4 - E_1 l_6)\right], \\ \cos\beta_4 = \dfrac{1}{F}\left[E_4 - E_1 l_6 - \mu_C(E_3 - E_2 l_6)\right], \end{cases}$$

где

$$F = \sqrt{1+\mu_C^2}\sqrt{(E_1 l_6 - E_4)^2 + (E_2 l_6 - E_3)^2};$$

$P_t, N_4, N_5, N_6, \beta_4$ и β_5 определены как функции сил прямоугольных проекций R_t, R_n, R_b вектора R на оси координат:

$$(25)\quad \begin{cases} R_t = -R_y \sin\psi + R_z \cos\psi = R(\cos\psi\cos\delta_z - \sin\psi\cos\delta_y), \\ R_n = R_y \cos\psi + R_z \sin\psi = R(\cos\psi\cos\delta_y + \sin\psi\cos\delta_z), \\ R_b = \sqrt{R^2 - R_t^2 - R_n^2} = \sqrt{1 - \cos^2\delta_y - \cos^2\delta_z}. \end{cases}$$

Уравнения (23) и (24) справедливы и для случая обратного движения крестовины, если в них изменить знаки R_t, R_n, R_b, F_4, F_5, N_6, P_t и δ на обратные.

5. Установившееся движение механизма при полнооборотном вращении кривошипа OA будет возможно, если во всех его положениях мощность силы движущей не меньше суммарной мощности сил полезных и вредных сопротивлений, т. е.

$$(26)\quad P_t' f \frac{d\varphi}{dt} \geqslant \left[P_t r + \mu_C (N_4 + N_5)\frac{d_C}{2} + M\right]\frac{d\psi}{dt} + \left[\mu_0 (N_1 + N_2)\frac{d_0}{2} + M_1\right]\frac{d\varphi}{dt}.$$

После сокращения на R и $d\varphi/dt$ неравенство (26) будет содержать лишь постоянные параметры системы и переменные углы φ и ψ и представимо в следующей форме:

$$(27)\quad P_t' f \geqslant \left[P_t r + \mu_C (N_4 + N_5)\frac{d_C}{2} + M\right]\frac{d\psi}{d\varphi} + \mu_0 (N_1 + N_2)\frac{d_0}{2} + M_1,$$

где $d\psi/d\varphi$ — передаточная функция механизма, определяемая из равенства:

$$(28)\quad b^2 = x_A^2 + y_B^2 - 2x_A y_B \cos\alpha + (z_B - z_A)^2,$$

которое после подстановки значений (1) принимает вид:

$$(29)\quad \begin{aligned} b^2 = {} & (l_1 + a\cos\varphi^2) + (l_2 + c\cos\psi)^2 - 2(l_1 + a\cos\varphi)(l_2 + c\cos\psi)\cos\alpha + \\ & + (l_3 + c\sin\psi - a\sin\varphi)^2. \end{aligned}$$

Дифференцируя по φ равенство (29), находим

$$(30)\quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{(l_1 - l_2\cos\alpha)\sin\varphi + c(\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi\cos\alpha) + l_3\cos\varphi}{(c/d)\left[(l_1\cos\alpha - l_2)\sin\psi + a(\sin\psi\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\cos\psi) + l_3\cos\psi\right]}.$$

Угол ψ является функцией независимой переменной φ и также определяется из квадратного уравнения (29)

$$(31)\quad \psi = \arcsin\left\{\frac{1}{k^4 + h^4}\left[(b^2 - g^2 - m^2)h^2 \pm k^2\sqrt{k^4 + h^4 - (b^2 - g^2 - m^2)^2}\right]\right\},$$

где

$$g^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + a^2 + c^2 - 2l_1 l_2\cos\alpha,\quad m^2 = 2a\left[(l_1 - l_2\cos\alpha)\cos\varphi - l_3\sin\varphi\right],$$
$$h^2 = 2c(l_3 - a\sin\varphi),\quad k^2 = 2c(l_2 - l_1\cos\alpha - a\cos\alpha\cos\varphi).$$

Подставляя значение ψ по равенству (31) в неравенство (26) исключим величину ψ. При этом неравенство (26) должно быть выполнено для всех значений φ (для чего достаточно, чтобы оно было

выполнено в точках максимумов правой части и в точках минимумов левой части). Приведение неравенства (26) к форме, содержащей лишь геометрические параметры механизма и анализ экстремумов каждой из его частей в общем виде громоздко. Поэтому при анализе механизмов, размеры которых известны, целесообразно сначала упростить его путем подстановки числовых значений постоянных параметров. При синтезе предпочтительнее использовать неравенство (25) для проверки размеров механизма, найденных по другим условиям. Это, однако, не исключает возможность включения в систему уравнений синтеза механизма и условия (25) тем более, что решение задачи синтеза пространственных механизмов почти всегда требует применения последовательных приближений при числовых расчетах.

6. Коэффициент полезного действия исследуемого механизма

$$\eta = \frac{P_t r}{P_t' f}\eta_A \eta_B \frac{d\psi}{d\varphi}, \tag{32}$$

откуда следует, что η зависит от всех постоянных параметров механизма и является функцией φ, т. е. его положения η_A и η_B — коэффициенты полезного действия сферических пар A и B, значения которых могут быть приняты равными второй степени кпд цилиндрических пар.

При ситнезе рассматриваемого механизма по заданной величине кпд $[\eta]$ к уравнениям синтеза добавляется условие:

$$\frac{P_t r}{P_t' f}\eta_A \eta_B \frac{d\psi}{d\varphi} \geqslant [\eta]. \tag{33}$$

Для определенности может быть введено уточнение, например,

$$\min\left(\frac{P_t r}{P_t' f}\eta_A \eta_B \frac{d\psi}{d\varphi}\right) \geqslant [\eta]. \tag{34}$$

При синтезе механизма кпд следует рассматривать как функцию его параметров, получающих в результате синтеза фиксированные значения. Значения кпд в отдельных положениях механизма не определяют расход полезно реализуемой энергии за один цикл его движения. Поэтому можно ввести в рассмотрение средне цикловое значение кпд механизма

$$\eta_{\text{ц}} = \frac{1}{2\pi}\eta_A \eta_B \int_0^{2\pi} \frac{P_t r}{P_t' f}\psi(\varphi)\, d\varphi, \tag{35}$$

причем $d\psi$ определяется по равенству (30).

Приведем последовательность определения кпд механизма, размеры которого известны. Для этого следует вычислить:

1° Значения ψ по равенству (31). 2° Координаты точек A и B по равенствам (1). 3° Координаты точек O и C по равенствам (2).

4° Направляющие косинусы вектора R по равенствам (15). 5° Проекции вектора R по равенствам (13) и (25) как функции R. 6° Величины N_3, а затем N_1, $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$, N_2, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$ по равенствам (10) и (11) как функции P_t' и R. 7° Величины N_6 а затем N_4, $\sin\beta_3$, $\cos\beta_3$, N_5, $\sin\beta_4$, $\cos\beta_4$ по равенствам (23) и (24) как функции P_t и R. 8° Силу R из уравнения (19) по известной величине силы P_t. 9° Силу P_t' из уравнения (7). 10° Передаточную функцию по равенству (30). 11° Значение кпд механизма по равенству (32), приняв значения η_A и η_B. По дискретным значениям кпд, вычисленным в различных положениях механизма, строят его график.

Выводы

1. Понятие об угле давления или угле передачи недостаточно для оценки работоспособности пространственных механизмов и должно быть заменено понятием о коэффициенте полезного действия.

2. Установлено в аналитической форме статическое условие (26) существования кривошипа в пространственных четырехзвенных кривошипно-коромысловых механизмах привода ремизоподъемных кареток ткацких станков, с учетом сил веса звеньев, необходимое для их конструктивно-геометрического синтеза.

3. Дан алгоритм вычисления кпд механизма, необходимый для составления программ для вычислительных машин.

4. Разработан один из самых лаконичных способов анализа движения рассматриваемого механизма (уравнения (29)...(31)), основанный на введении косоугольной системы координат.

Поступила 26 X 1966 г.

Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности им. С. М. Кирова, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев П. А., *Условие существования кривошипа в пространственных четырехзвенниках.* Технол. легкой пром., 1966, *5*.

ASUPRA SINTEZEI MECANISMULUI SPAŢIAL DE ACŢIONARE A RĂTIEREI MAŞINII DE ŢESUT

(Rezumat)

Se stabileşte condiţia de existenţă a manivelei în mecanisme patrulatere de bielă-manivelă spaţiale. Luarea în consideraţie a condiţiei stabilite, asociată cu o condiţie geometrică pusă în evidenţă într-o lucrare recentă [1], este indispensabilă în problema de sinteză geometrică-constructivă a mecanismului spaţial de acţionare a ratierei maşinii de ţesut.

Se stabileşte, în fine, sistemul de ecuaţii din care se deduce randamentul mecanismului studiat, deosebit de util atît în rezolvarea problemelor de sinteză, cît şi de analiză a mecanismelor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. Z. 677.3

MODIFICĂRI CHIMICE ALE LÎNEI TRATATE CU HIDROXIZI ALCALINI

DE

SAVEL IFRIM

1. Introducere

Lîna este o materie primă importantă, care în sectoarele de finisare din industria textilă este de foarte multe ori prelucrată în mediu alcalin.

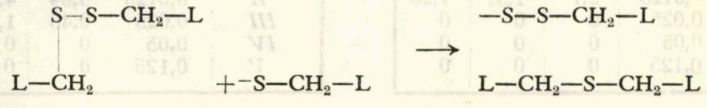
Agenții alcalini produc cheratinei modificări de structură, care se manifestă în primul rînd prin acțiuni exercitate asupra punților de hidrogen, a legăturilor tip sare, asupra acizilor aminici cu sulf, iar în cazul cînd lîna este tratată cu soluții mai concentrate în acești alcalini pot avea loc și fenomene hidrolitice. Rezultă că problema tratării lînii cu agenți alcalini prezintă un interes teoretic și practic deosebit. În literatura de specialitate au apărut un număr mare de lucrări care au ca temă de cercetare tocmai aceste aspecte [1].

Modificările de structură ale cheratinei se pun în evidență prin testurile de solubilitate în diverși reactivi, cum sînt: acidul clorhidric 4 *n*, uree-bisulfit, caprolactamă-bisulfit și alții [2]. Cantitatea de cheratină dizolvată depinde esențial de starea legăturilor peptidice, de punțile cistinice și de interacțiunile de hidrogen, care asigură în mod normal coeziunea lanțurilor.

Este bine cunoscut faptul că tratamentele alcaline determină o scădere a solubilității lînii în uree-bisulfit și caprolactamă-bisulfit, fenomen care se explică prin formarea de legături transversale lantioninice în macromoleculele cheratinei, rezistente la acțiunea reducătoare a bisulfitului.

Inițial se explica formarea lantioninei din cistină, pierzîndu-se sulf. În anul 1960 profesorul H. Zahn și colaboratorii săi au arătat că lîna tratată cu carbonat de sodiu *n*/10 la 45°C, are solubilitatea în uree-bisulfit mult mai redusă decît lîna netratată, fără ca să se producă modificări în conținutul de cistină [3].

Acest fapt demonstrează că lantionina apărută în timpul tratamentului alcalin nu se poate forma din cistină. Unele date din literatură [4] precum și anumite probe practice au condus la părerea după care trebuie să existe o legătură între formarea lantioninei și conținutul în grupe tiolice libere din lînă. Profesorul Zahn și colaboratorii săi presupun că reacția de formare a lantioninei în mediu slab alcalin are loc prin interacțiunea dintre cisteină și cistină, adică printr-o reacție de substituție nucleofilă de tip SN_2, conform schemei:



Această schemă de reacţie pune în evidenţă faptul că lantionina se formează din grupele tiolice libere ale cheratinei (aceasta dispărînd ca atare), iar conţinutul în cistină şi în sulf total rămîne constant.

Plecînd de la aceste consideraţii, într-o lucrare recentă [5], urmărind cantitatea de sulf total, conţinutul în grupe tiolice libere, solubilitatea în uree-bisulfit şi în caprolactamă-bisulfit, am arătat că formarea lantioninei din cisteină are loc în lîna tratată cu carbonat de sodiu de diferite concentraţii şi pînă la temperatura de 70°C. La temperaturi ce depăşesc 70°C, deoarece se semnalează şi pierderi de sulf (în condiţiile lucrării noastre) se poate admite formarea lantioninei şi din cistină după schema:

$$R'-S-S-R'' \longrightarrow R'-S-R''+S$$

În lucrarea de faţă ne-am propus să urmărim dacă formarea lantioninei se petrece după aceleaşi mecanisme şi în cazul tratării lînii cu hidroxizi alcalini (LiOH, NaHO, KOH). În acest scop probe de lînă au fost tratate cu hidroxizi alcalini în diverse condiţii, iar modificările chimice s-au urmărit prin determinări de sulf total, conţinutul în grupe mercaptanice, solubilitatea în uree-bisulfit şi solubilitatea în caprolactamă-bisulfit.

2. Partea experimentală

Probele experimentale s-au efectuat pe o lînă merinos, purificată prin extracţie cu tetraclorură de carbon şi apoi spălată de repetate ori cu apă distilată la 35°C. Impurităţile rămase au fost îndepărtate manual şi final s-a spălat din nou cu tetraclorură de carbon.

Tratarea cu soluţii alcaline s-a efectuat la termostat timp de 60 min şi cu un raport de flotă de 1/50, variindu-se concentraţia în hidroxizi alcalini (exprimată în toate cazurile în moli/l) şi temperatura de lucru. S-a lucrat cu concentraţii cuprinse între 0,005 ... 0,125 moli/l, menţinîndu-se constantă temperatura de 50°C şi apoi s-a variat temperatura între 45° ... 70°C păstrîndu-se constantă concentraţia de 0,05 moli/l. Probele de lînă au fost apoi spălate cu apă distilată pînă la neutralitate şi lăsate să se usuce la temperatura camerei.

Solubilitatea în uree-bisulfit s-a determinat după metoda lui K. Less şi F. F. Elsworth [6], rezultatele, exprimate în procente, fiind consemnate în tabelul 1.

Aceloraşi probe de lînă li s-a determinat şi solubilitatea în caprolactamă-bisulfit [7], rezultatele, exprimate în procente, fiind indicate în tabelul 2.

Tabelul 1

Probele de lînă	Concentraţia moli/l	LiOH	NaOH	KOH
I	0,005	2,3	2,2	2,81
II	0,0125	2,1	1,31	1,25
III	0,025	0	0	0
IV	0,05	0	0	0
V	0,125	0	0	0

Tabelul 2

Probele de lînă	Concentraţia moli/l	LiOH	NaOH	KOH
I	0,005	5,45	7,10	5,55
II	0,0125	3,04	4,02	4,06
III	0,025	0,40	1,45	0,47
IV	0,05	0	0	0
V	0,125	0	0	0

În cazul probelor de lînă tratată cu o concentrație constantă în hidroxizi alcalini (0,05 moli/l) și la temperaturile de 45°; 50°; 60° și 70°C, solubilitatea în uree-bisulfit și în caprolactamă-bisulfit este nulă. Solubilitatea lînii netratate este de 18% în reactivul uree-bisulfit și de 13,80% în reactivul caprolactamă-bisulfit.

S-a urmărit apoi, pe cale experimentală, variația conținutului de sulf total în probele de lînă și a conținutului în grupe mercaptanice. Determinarea conținutului în sulf total s-a efectuat prin metoda iodometrică, iar determinarea conținutului în grupe mercaptanice s-a întreprins după metoda profesorului Zahn [8], folosind ca reactiv analitic hidroxifenilmercurul.

Rezultatele determinărilor conținutului în sulf total, exprimate în procente, sînt prezentate în tabelele 3 și 4, iar rezultatele determinărilor conținutului în grupe mercaptanice, exprimate în μ moli/g, sînt redate în tabelele 5 și 6.

Pentru lîna netratată conținutul în sulf total este de 4,38%, iar conținutul în grupe mercaptanice este de 13,5 μ moli/g.

Tabelul 3

Probele de lînă	Concentrația moli/l	LiOH	NaOH	KOH
I	0,005	4,33	4,19	4,12
II	0,0125	4,18	4,06	4,08
III	0,025	4,14	4,00	3,80
IV	0,05	3,84	3,91	3,76
V	0,125	3,52	3,57	3,46

Tabelul 4

Probele de lînă	Temperatura de lucru °C	LiOH	NaOH	KOH
I	45	3,96	3,84	3,80
II	50	3,84	3,91	3,76
III	60	3,52	3,45	3,38
IV	70	3,20	3,24	3,30

Tabelul 5

Probele de lînă	Concentrația moli/l	LiOH	NaOH	KOH
I	0,005	9,60	8,40	9,00
II	0,0125	5,40	6,75	6,60
III	0,025	4,50	4,50	4,25
IV	0,05	3,40	3,75	3,50
V	0,125	2,10	3,00	2,50

Tabelul 6

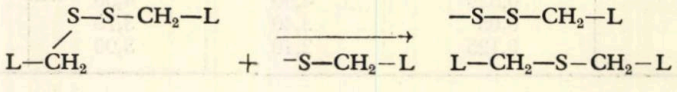
Probele de lînă	Temperatura de lucru °C	LiOH	NaOH	KOH
I	45	6,00	5,25	5,40
II	50	3,40	3,75	3,50
III	60	2,80	3,00	2,75
IV	70	1,38	1,20	1,15

3. Interpretarea rezultatelor

Urmărind datele cuprinse în tabelele 1 şi 2 rezultă că solubilitatea lînii tratate cu hidroxizi alcalini (LiOH, NaOH şi KOH) scade foarte mult chiar la probele de lînă tratată cu soluţii diluate de hidroxizi. (Lîna netratată are solubilitatea în uree-bisulfit de 18% iar în caprolactamă-bisulfit de 13,80%, în timp ce la probele din seria *I* din tabelele 1 şi 2 ajunge la valori mai mici decît 3% şi respectiv mai mici decît 7%). Scăderea solubilităţii se accentuează cu creşterea concentraţiei şi lîna devine total insolubilă la concentraţii de 0,05 moli/l. Ca şi în alte cazuri de tratare alcalină a lînii solubilitatea acesteia în uree-bisulfit scade mai repede decît în caprolactamă-bisulfit [7]. In cazul probelor de lînă tratată cu soluţii de concentraţie constantă în hidroxizi alcalini (0,05 moli/l) şi la temperaturi cuprinse între 45° ... 70°C, toate probele au solubilitatea nulă în reactivii menţionaţi. Aceste testuri de solubilitate duc la concluzia că prin tratarea lînii cu hidroxizi alcalini are loc o reticulare pronunţată a macromoleculelor de cheratină şi că gradul de reticulare creşte odată cu creşterea concentraţiei în hidroxizi alcalini. Punţile noi ce se formează interlanţuri sînt punţi lantioninice.

Dacă se analizează datele referitoate la dozările de sulf total cuprinse în tabelele 3 şi 4 se observă că scăderea conţinutului în sulf este redusă, funcţie de concentraţia în hidroxizi alcalini, iar la concentraţii joase (probele *I*, *II* şi *III* din tabelul 3) se poate aprecia, din datele experimentale, că această scădere este neesenţială, putînd fi neglijată.

Datele experimentale corelate cu solubilitatea aceloraşi probe în uree-bisulfit şi caprolactamă-bisulfit nu permit explicarea reticulării cheratinei prin formarea lantioninei din cistină. Analizînd însă datele din tabelul 5, care indică variaţia conţinutului în grupe mercaptanice pentru aceleaşi probe de lînă, se observă că acesta scade destul de pronunţat şi deci se poate admite că lantionina s-a format din grupele mercaptanice ale cheratinei după mecanismul de mai jos :



Dacă se urmăresc şi datele experimentale din tabelul 6, unde sînt indicate variaţiile conţinutului în grupe mercaptanice funcţie de temperatură, se constată că şi în cazul de faţă acesta scade, cu alte cuvinte grupele mercaptanice contribuie la reticularea cheratinei tratate cu hidroxizi alcalini în mod diferit, funcţie de temperatura de tratare.

Determinările de sulf total a probelor de lînă tratată la diverse temperaturi, redate în tabelul 4, arată că acesta scade cu creşterea temperaturii. O scădere a conţinutului de sulf total se constată şi în cazul probelor de lînă tratată cu soluţii mai concentrate în hidroxizi alcalini (seriile de probe *IV* şi *V* din tabelul 3). În aceste condiţii de tratare a lînii, cînd solubilitatea în caprolactamă-bisulfit şi uree-bisulfit este practic nulă, se poate concepe că are loc formarea lantioninei şi din cistină după mecanismul:

$$R'-S-S-R'' \longrightarrow R'-S-R''+S$$

deoarece există pierderi de sulf. Rezultă că în condiţii mai severe de concentraţii şi temperatură formarea lantioninei are loc atît din grupele mercaptanice libere din cheratină cît şi din cistină.

Rezultă aşadar că în condiţiile experimentale folosite în această lucrare formarea lantioninei se datoreşte în mai mare măsură grupelor mercaptanice libere şi în mai mică măsură transformării punţilor cistinice, prin pierderea sulfului.

Datele experimentale obţinute nu pun în evidenţă comportări diferite ale lînii faţă de hidroxizii folosiţi. De altfel nici nu este de aşteptat să se producă modificări chimice diferenţiate în fibra de lînă tratată în condiţii identice (concentraţie, temperatură de lucru etc.), cu hidroxizi alcalini diferiţi, deoarece disocierea acestora în soluţii apoase fiind totală este greu de conceput că ionul metalic ar exercita singur vre-o influenţă asupra cheratinei.

4. Concluzii

Studiind influenţa hidroxizilor alcalini asupra lînii (LiOH, NaOH, KOH) cu ajutorul testelor de solubilitate în uree-bisulfit şi în caprolactamă-bisulfit precum şi prin dozări de sulf total şi a conţinutului în grupe mercaptanice, rezultă următoarele concluzii:

1. Lîna tratată cu hidroxizi alcalini are solubilitatea în reactivul uree-bisulfit şi caprolactamă-bisulfit deosebit de scăzută şi în multe cazuri nulă.

2. Variaţia conţinutului în sulf total al probelor de lînă tratată cu hidroxizi alcalini este foarte mică sau neglijabilă, funcţie de concentraţia în hidroxizi. Conţinutul în sulf total scade mai sensibil odată cu creşterea temperaturii de tratare a probelor de lînă.

3. Conţinutul în grupe mercaptanice din lîna tratată cu hidroxizi alcalini scade sensibil atît cu creşterea concentraţiei cît şi cu creşterea temperaturii de lucru.

4. Prin tratarea lînii cu hidroxizi alcalini grupele mercaptanice ale cheratinei contribuie în mare măsură la reticularea lanţurilor macromoleculare, atît funcţie de creşterea concentraţiei în hidroxizi alcalini cît şi funcţie de creşterea temperaturii de lucru.

5. Datorită faptului că în condiţii mai severe de concentraţie şi mai ales de temperatură au loc pierderi de sulf, se poate concepe formarea lantioninei şi din cistină.

6. Insolubilizarea accentuată a lînii în reactivii uree-bisulfit şi caprolactamă-bisulfit, mai ales funcţie de temperatură, se poate explica prin aceea că reticularea cheratinei s-a produs concomitent, formîndu-se lantionină atît din grupele mercaptanice cît şi din cistină.

7. Nu se constată modificări chimice diferite ale lînii tratate cu hidroxizi alcalini funcţie de natura hidroxidului, respectiv funcţie de cationi.

Primită la 20 X 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Grindea M., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, p. 189.
2. — Ind. text., 1964, *12*, p. 671.
3. Zahn H., Kunitz F. W., Hildebrand P., J. Text. Inst., 1960, **51 A**, *12*, p. 740.
4. Schöberl A., Wagner A., Proc. internat. Wool Text. Res. Conf. Australia, 1955, **C**, p. 11.
5. Ifrim S., Grindea M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, p. 509.
6. Less K., Elsworth F. F., Proc. Internat. Wool Text. Res. Conf. Australia, 1955, **C, p. 363.**
7. Grindea M., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, p. 415.
8. Zahn H., G-erthsen T., Meichebeck H., Mel. Textber., 1962, **43**, S. 1179.

MODIFICATIONS CHIMIQUES DE LA LAINE TRAITÉE AVEC DES HIDROXYDES ALCALINES

(Résumé)

On étudie la variation cu contenu des groupes thyoliques et du soufre total de la laine traitée avec des hydroxydes alcalines (LiOH, NaOH, KOH).

On a fait varier la concentration en agents alcalines et la température de travail.

Les données obtenues sont correlées avec la solubilité de la laine dans l'urée-bisulphite et caprolactame-bisulphite.

On montre que dans le cas du traitement alcaline de la laine la cistéyne contribue à la réticulation de la kératyne.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

Tomul XIII (XVII)

FASC. 3—4

1967

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Conf. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)

Lector ing. H. ROSMAN (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XIII (XVII), fasc. 3—4 1967

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XVI

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

AL. CLIMESCU, Aplicaţie la ecuaţiile funcţionale a unor construcţii de algebră universală (I) (franc., rez. rom.) 1
V. V. TOPENTCHAROV (R. P. Bulgaria), Asupra algebrelor universale şi definiţia categoriilor (franc., rez. rom.). 5
C. BENZAKEN (Franţa), Pseudo-latice distributive şi aplicaţii (II) (franc., rez. rom.) 11
G. BOULAYE (Franţa), Homomorfisme de relaţii binare (I) (franc., rez. rom.) 17
I. ENESCU, Asupra algebrelor asociative, comutative şi cu unitate principală de ordin cinci peste cîmpul real (II) (franc., rez. rom.) 23
A. BRAIER, Forma exponenţială a elementelor unor sume directe de algebre şi unele aplicaţii (engl., rez. rom.) 31
D. TEPPER HAIMO (SUA), Transformarea redusă a lui Poisson-Hankel (I) (engl., rez. rom.) 39
R. MÜLLER (Noua Zeelandă), Integrale şi serii conţinînd funcţiile lui Bessel (I) (engl., rez. rom.) 43
D. D. BAINOV (R. P. Bulgaria), O formulă relativă la produsul a n serii de puteri (rus., rez. rom.) 47
F. V. TOMAŞEVICI, S. U. KURTEAKOV (URSS), Asupra dezvoltării după un sistem neortogonal de elemente (rus., rez. rom.) 49
H. HARUKI (Canada), Asupra ecuaţiei funcţionale $|f(x+iy)| = |g(x)+h(iy)|$ (engl., rez. rom.) 57
N. FORBAT, A. HUAUX (Belgia), Soluţii periodice ale ecuaţiilor diferenţiale neliniare (II) (franc., rez. rom.) 67
N. APOSTOLATOS (RFG), Generalizarea noţiunii de ecuaţie diferenţială de ordin n în complex şi teoremele de existenţă şi de unicitate (I) (germ., rez. rom.) 71
A. CORDUNEANU, Spectrul operatorului Volterra în anumite spaţii de funcţiuni (franc., rez. rom.) 77
E. BOMPIANI (Italia), Elemente principale ale unei varietăţi tridimensionale a spaţiului proiectiv cu şase dimensiuni (ital., rez. rom.) 83
V. MURGESCU, Invarianţi la transport paralel în spaţii 4-dimensionale cu torsiune (I) (rom., rez. franc.) 91
Ş. RIMER, Reprezentare vectorială a cuadricelor de rotaţie (I) (franc., rez. rom.) 99
T. POPOVICIU, Observaţii asupra restului anumitor formule de aproximare a unei diferenţe divizate prin derivate (franc., rez. rom.) 103
D. V. IONESCU, Formule de cubatură cu un număr redus de noduri (I) (franc., rez. rom.) 111
PH. NOËL (Franţa), O metodă de rezolvare a sistemelor liniare mari prin supraiteraţie polinomială (I) (franc., rez. rom.) 119

D. MANGERON, Problematica actuală relativă la metoda colocației (I) (ital., rez. rom.) 123
H. KNAPP (Austria), Metoda lui Gröbner și aplicațiile ei la calculul numeric al orbitelor în mecanica cerească (I) (germ., rez. rom.) 129
L. CIOBANU, Aproximarea funcțiilor de două variabile $f(x, y)$ prin polinoame de forma $P(z)$, unde $z = xy$ (rus., rez. rom.) 135
M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), Contribuții la studiul problemelor de reglare optimală a timpului (II) (engl., rez. rom.) 139
A. M. KRALL (SUA), Un criteriu general de stabilitate pentru sistemele cu reacție (engl., rez. rom.) 145
C. ACKER, Cîteva clase de curgeri transversale ale unui fluid compresibil pe o varietate neolonomă (franc., rez. rom.) 153
L. de BROGLIE (Franța), Asupra dinamicii corpului cu masă proprie variabilă și a formulei de transformare relativistă a căldurii (franc., rez. rom.) 161
S. S. SANNIKOV (URSS), Spinul complex și reprezentările grupului rotațiilor (rus., rez. rom.) 165
E. G. BUBELEV (URSS), Analiză preliminară a rezultatelor relative la unele jeturi de înaltă energie cu ajutorul diagramei vitezelor a lui Lobacevski (engl., rez. rom.) 169
I. POP, Scurgerea hidromagnetică cu sucțiune variabilă în stratul limită periodic (engl., rez. rom.) 173
V. PETRESCU, N. REZLESCU, E. CUCIUREANU, Asupra magnetorezistenței feritelor Ni-Zn (germ., rez. rom.) 179

CHIMIE

W. F. LIBBY (SUA), Chimie spațială (II) (engl., rez. rom.) 183
A. HEDVALL (Suedia), Considerații asupra dezvoltării chimiei solidelor (II) (engl., rez. rom.) 195
M. ȘCHIOPU, O. BOȚ, GH. IONESCU, C. NISTOR, O. ROMAN, Echilibrul de distribuție în sistemul ternar tetraclorură de carbon — acetat de *n*-butil — apă (rus., rez. rom.) 203
A. BORDEA, O nouă metodă fotoclorimetrică și fluorimetrică pentru dozarea indiului (rom., rez. franc.) 209
I. ANTONESCU, M. CARAMLĂU, F. MATEI, O metodă fotometrică extractivă pentru dozarea unor oxidanți (I) (rom., rez. engl.) . . . 217
V. K. AKIMOV, S. I. BRAGHINA, A. I. BUSEV (URSS), Determinarea ionilor de sulfați în substanțele de spălat și superficial active (rus., rez. rom.) 223
I. HÎNCU, A. LUCA, Studii asupra unor cimenturi cu ajutorul metodelor fizico-chimice (rom., rez. franc.) 231
EL. PĂUNEL, F. VASILESCU, C. CARAMAN, I. BURLACU, I. MUNTEANU, Ipsosul cu adaosuri de polimeri sau lianți minerali (I) (rom., rez. franc.) 237
ȘT. IVĂȘCANU, V. FILIP, Despre efectele inhibitorului tiouree asupra coroziunii oțelului OLC 45 în acid sulfuric (rom., rez. franc.) . . . 247
C. CALISTRU, I. GRIGORIU, Asupra macrocineticii procesului corodării oțelului în acid sulfuric (rom., rez. engl.) 253
I. MATEI, M. GRIGORAȘ, Polimeri analogi vinilici cu activitate biologică (rom., rez. franc.) 261
G. NATTA, F. SEVERINI, M. PEROGARO, E. BEATI, G. AURELLO, S. TOFFANO, (Italia), Polimeri din clorură de vinil grefați pe elastomeri olefinici, cu rezistență la șoc (II) (ital., rez. rom.) . . . 269
EL. CALISTRU, N. VOICULESCU, Cercetări în domeniul fibrelor hidratcelulozice tip viscoză (germ., rez. rom.) 275
M. GRIGORAȘ, A. CERNĂTESCU-ASANDEI, GH. ROZMARIN, Dinamica și structura componentelor chimice principale ale țesuturilor vegetale normale și tumorale (I) (rus., rez. rom.) 281

M. POPOVICI, AL. PETRESCU, AL. REDEŞ, E. POPOVICI, Metode de cercetare a materialelor plastice prin examenul de fluorescenţă (rom., rez. germ.) 287
CH. POPESCU, A. ANDRONESCU, M. ŢIBU, Acţiunea cîmpurilor magnetice asupra cîtorva soiuri de grîu (rom., rez. franc.) 293

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

E. LUCA, O. SCUTARU, A. VASILIU, Asupra teoriei aprinderii în cazul descărcării intermitente (rom., rez. franc.) 299
V. I. KRÎLOVICI, O. I. IASKO (URSS). Unele probleme ale calculului ingineresc al instalaţiilor cu arc (rus., rez. rom.,) 307
N. POEATA, GH. VASILIU, C. ANDRONE, Traductor de unghi folosind metoda sondei magnetice (rom., rez. rus.) 319
L. PREDA, Asupra măsurării puterii şi energiei de nesimetrie (rom., rez. rus) 329
N. GAVRILAŞ, R. OLAH, Asupra preciziei modelării fizice a fenomenelor de impuls în transformatorul cu două înfăşurări (rom. rez. franc.) . . 337
C. ONU, V. PRISĂCARU, L. TURIC, GH. CREŢEANU, V. BEJAN, Aspecte noi privind metodologia şi extinderea aplicaţiilor semnalelor dreptunghiulare în practica medicală (rom., rez. rus) 347
D. SANDU, Contribuţie la studiul experimental al schemelor de impulsuri cu tranzistori complementari (franc., rez. rom.) 351
I. de LOTTO, A. GHIRARDI, R. MORPURGO (Italia), Descrierea unui compilator sintactic cu caracteristici universale (ital., rez. rom.) . 361
E. SIMION, I. POPESCU, Contribuţii la îmbunătăţirea caracteristicilor unor tipuri de stabilizatoare ferorezonante (rom., rez. franc.) . . 373
V. N. NEDELCU, O nouă metodă de încercare a motoarelor asincrone (germ., rez. rom.) 379
G. A. GHEGHEŞIDZE (URSS), Asupra automatizării procesului de montaj al colectoarelor maşinilor electrice cu ajutorul maşinilor matematice de calcul (rus., rez. rom.) 385
I. BERGMAN, Cu privire la posibilitatea apariţiei autoexcitării la o maşină trifazată cu colector (germ., rez. rom.) 391
H. ROSMAN, Asupra rezonanţei în circuite cuplate (rom., rez. franc.) . 403

MECANICĂ TEHNICĂ

C. TRUESDELL (SUA), Problematica mecanicii deformaţiei şi curgerii (I) (engl., rez. rom.) 415
D. MANGERON (R. S. România), M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), L. E. KRIVOŞEIN (URSS), O teoremă relativă la fenomene generalizate de transfer de căldură (engl., rez. rom.) 419
M. N. CHANNABASAPPA (India), Transmisia căldurii într-o curgere laminară într-un inel cu pereţi poroşi, cu flux termic variabil (engl., rez. rom.) . 423
N. IRIMICIUC, M. STANCU, Exprimarea printr-o nouă relaţie a principiului lui Gauss (franc., rez. rom.) 429
N. ŢARVENKOV (R. P. Bulgaria), O proprietate a cîmpului de acceleraţii reduse de ordin n în mişcarea plană (franc., rez. rom.) 435
K. YAMAUCHI, K. OGAWA (Japonia), Metoda acceleraţiilor reduse de ordin oarecare şi aplicaţii (II) (engl., rez. rom.). 439
N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIŢEANU, Contribuţii la noi metode de încercare a rulmenţilor (II, III) (franc., rez. rom.) 445
C. LINDE, V. BAUŞIC, N. IRIMICIUC, Asupra calculului rezistenţei la deplasare a roţilor de rulare conduse în cazul unei mişcări de rostogolire cu patinare şi alunecare (franc., rez. rom.) 455

D. PERETZ, F. MARCUS. Dependența presiunii maxime și vitezei de creștere a presiunii de legea de ardere în motoarele cu aprindere prin scînteie (germ., rez. rom.) 465

R. AŠKOVIČ (Canada), Asupra unei metode de calcul a stratului limită termic de scurgere laminară a unui fluid incompresibil în regim nestaționar în trei dimensiuni (franc., rez. rom.) 475

C. CIOBANU, E. BILIUȚĂ, I. RUSU, Asupra calculului hidraulic al conductelor din material plastic (rom., rez. franc.) 485

I. M. CRUDU, V. GH. NECULĂIASA, M. AVRAM, C. BRĂTESCU, R. MORAID, GH. ȘTEFĂNESCU, Încercarea la uzură a unor cupluri din fontă maleabilă perlitică și oțel carbon de calitate, în condiții uscate (I), (rom., rez. franc.) 489

GH. CAȘLER, AL. RENER, D. ZETU, Determinarea coeficienților și exponenților din relațiile momentului de torsiune și a forței axiale la burghierea oțelurilor românești, STAS 600–65 (rom., rez. franc.) . . 499

M. NICULAE, A. DIMA, C. RUSU, Contribuții la calculul duratei ciclului de fabricație în construcția de mașini (rom., rez. franc.) . . . 501

CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

J. GOLECKI, J. WALCZAK (R. P. Polonă), Cîmpul de deplasări și starea de tensiune într-un inel elastic greu, sprijinit într-un punct (III) (engl., rez. rom.) 505

N. MIZUHATA (Japonia), Analiza dinamică a turnurilor înalte ancorate, supuse la acțiunea vîntului (I) (engl., rez. rom.) 515

N. UNGUREANU, D. DIACONU, Particularitățile calculului la acțiuni seismice a structurilor fundate pe piloți (rom., rez. franc.) . . . 521

A. RADU, Aplicarea modelării electrice a cîmpurilor de difuzie pentru studiul pereților sandwich (franc., rez. rom.) 533

EL. PĂUNEL, F. CONSTANTINESCU, F. VASILESCU, C. CARAMAN, N. SAVA, Nisipurile de Dunăre ca material pentru construcții (I) (rom., rez. rus.) 539

A. I. LASIS (URSS), Algoritm de calcul al conductelor inelare de apă (rus., rez. rom.) 549

M. GIURCONIU, C. JURA, GH. POPA, I. MIREL, Contribuții la metodica de calcul a bazinelor de retenție în canalizări (rom., rez. germ.) . 553

E. BLIDARU, V. BLIDARU, Contribuții la problema îmbunătățirii aspersoarelor cu presiune medie și mare, folosite în irigații (rom., rez. franc.) . 559

P. MÎLCOMETE, G. MEDRIHAN, Cu privire la criteriile repartizării teritoriale a forțelor de producție în țara noastră (rom., rez. franc.) . . 573

INDUSTRIE UȘOARĂ

A. TRIANDAF, M. BERCOVICI, Rezolvarea unei probleme de producție de la uzinele textile „Vasia Vasilescu", Mediaș, pentru determinarea beneficiului optim la produsul Finet (rom., rez. rus.) 581

I. VLAD, Cercetări privind influența alungirii constante repetate, asupra capacității de revenire a unor fibre textile (rus., rez. rom.) . . . 585

B. D. SEMAK (URSS), Studiul influenței structurii și finisării țesăturilor asupra uzurii lor la spălat (rus., rez. rom.) 591

C. RUSU, O. JABA, Aspecte privind determinarea duratei ciclului de fabricație în întreprinderile textile (rom., rez. franc.) 595

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XIII (XVII), fasc. 3—4 1967

CONTENTS

	Pag.
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS	XVI
MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS	
AL. CLIMESCU, Application aux équations fonctionnelles de certaines constructions d'algèbre universelle (I) (french, rom. summ.)	1
V. V. TOPENTCHAROV (Bulgarie), Sur les algèbres universelles et la définition des catégories (french, rom. summ.)	5
C. BENZAKEN (France), Pseudo-treillis distributifs et applications (II) (french, rom. summ.)	11
G. BOULAYE (France), Homomorphismes de relations binaires (I) (french, rom. summ.)	17
I. ENESCU, Les algèbres d'ordre cinq, associatives, commutatives et à unité principale à scalaires réels (II) (french, rom. summ.)	23
A. BRAIER, Exponential Form for the Elements of Directs Sums of Algebras and somes Applications (engl., rom. summ.)	31
D. TEPPER HAIMO (USA), The Reduced Poisson-Hankel Transform (I) (engl., rom. summ.)	39
R. MÜLLER (New Zealand), Integrals and Series involving Bessel Functions (I) (engl., rom. summ.)	43
D. D. BAINOV (Bulgaria), Formola spettante al prodotto di n serie di potenze (russ., rom. summ.)	47
F. V. TOMASHEVICZ, S. U. KURTIAKOV (USSR), Development upon a Non Orthogonal System of Elements (russ., rom. summ.)	49
H. HARUKI (Canada), On the Functional Equation $\lvert f(x+iy)\rvert = \lvert g(x)+h(iy)\rvert$ (engl., rom. summ.)	57
N. FORBAT, A. HUAUX (Belgique), Sur les solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires (II) (french, rom. summ.)	67
N. APOSTOLATOS (Deutsche Bundesrepublik), Verallgemeinerung des Begriffes einer gewöhlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung im Komplexen sowie Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen (I) (germ., rom. summ.)	71
A. CORDUNEANU, Le spectre de l'opérateur Volterra dans certains espaces de fonctions (french, rom. summ.)	77
E. BOMPIANI (Italia), Elementi principali di una varietà tridimensionale dello spazio proiettivo a sei dimensioni (ital., rom. summ.)	83
V. MURGESCU, Invariants au transport parallèle dans les espaces 4-dimensionnels à torsion (II) (rom., french summ.)	91
Ş. RIMER, Représentation vectorielle des quadriques de rotation (I) (french, rom. summ.)	99
T. POPOVICIU, Remarques sur le reste de certaines formules d'approximation d'une différence divisée par des dérivées (french, rom. summ.)	103

D. V. IONESCU, Formules de cubature avec un nombre réduit de noeuds (I) (french, rom. summ.) 111
PH. NÖEL (France), Une méthode de résolution des grands systèmes linéaires par suritération polynômiale (I) (french, rom. summ.) . . . 119
D. MANGERON, Problematica attuale spettante al metodo di collocazione (I) (ital., rom. summ.) 123
H. KNAPP (Österreich), Die Gröbnersche Methode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelsmechanik (I) (germ., rom.summ.) 129
L. CIOBANU, Approssimazione tramite $P(z)$, ove $z = xy$, delle funzioni continue a due variabili $f(x, y)$ (russ., rom. summ.) 135
M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), Studies concerned with Time Optimal Control Problems (II) (engl., rom. summ.) 139
A. M. KRALL (USA), A General Stability Criterion for Feedback Systems (engl., rom. summ.) 145
C. ACKER, Quelques mouvements transversaux d'un fluide compressible sur une variété anholonôme (french, rom. summ.) 153
L. de BROGLIE (France), Sur la dynamique du corps à masse propre variable et la formule de transformation relativiste de la chaleur (french, rom. summ.). 161
S. S. SANNIKOV (USSR), Complex Spin and Representation of Rotation Group (russ., rom. summ.) 165
E. G. BUBELEV (USSR), Preliminary Results on the Analysis of some High Energy Jets by the Lobachevsky's Velocity-Plot (engl., rom. summ.) . 169
I. POP, Hydromagnetic Flow with Variable Suction in Laminar Periodic Boundary Layers (engl., rom. summ.) 173
V. PETRESCU, N. REZLESCU, E. CUCIUREANU, Zur magnetischen Widerstandsänderung von Ni-Zn Ferriten (germ., rom. summ.) . . . 179

CHEMISTRY

W. F. LIBBY (USA), Space Chemistry (II) (engl., rom. summ.) . . 183
J. A. HEDVALL (Sweden), On the Start and Glimpses of Development of the Chemistry of Solids (II) (engl., rom. summ.) 195
M. ŞCHIOPU, O. BOŢ, GH. IONESCU, C. NISTOR, O. ROMAN, Equilibrium Distribution in the Ternary System: Carbon Tetracloride—*n*-butyl-Acetate—Water (russ., rom. summ.) 203
A. BORDEA, Une nouvelle méthode photocolorimétrique et fluorométrique pour le dosage de l'indium (rom., french summ.) 209
I. ANTONESCU, M. CARAMLĂU, F. MATEI, Extractive Photometric Method for the Determination of several Oxidants (I) (rom., french summ.) . 217
V. K. AKIMOV, S. I. BRAGHINA, A. I. BUSEV (URSS), Determinazione degli ioni dei solfati nelle sostanze di lavaggio superficialmente attive (russ., rom. summ.) 223
I. HÎNCU, A. LUCA, Étude par les méthodes chimiques et physiques de certaines types de ciments (rom., french summ.) 231
EL. PĂUNEL, F. VASILESCU, C. CARAMAN, I. BURLACU, I. MUNTEANU, Le gyps à additions de polymères ou de liants minéraux (I) (rom., french summ.) 237
ŞT. IVĂŞCANU, V. FILIP, Sur les effets de l'inhibition de la corrosion de l'acier OLC 45 dans H_2SO_4 0,5 *n* par la thiourée (rom., french summ.). 247
C. CALISTRU, I. GRIGORIU, On Macrokinetics of the Corrosion Process of Steel in Sulphuric Acid (rom., engl. summ.) 253
I. MATEI, M. GRIGORAŞ, Polymères analogues vinyliques ayant une action biologique (rom., french summ.) 261
G. NATTA, F. SEVERINI, M. PEROGARO, E. BEATI, G. AURELLO, S. TOFFANO (Italia), Polymeri del cloruro di vinile innestati su elastomeri olefinici, dotati di elevata resistenza all'urto (II) (ital., rom. summ.) 269
EL. CALISTRU, N. VOICULESCU, Untersuchungen im Bereiche der Hydratcellulosefasern von Viscosetypus (germ., rom. summ.) 275

M. GRIGORAŞ, A. CERNĂTESCU-ASANDEI, G. ROZMARIN, Dinamica e struttura dei costituenti chimici principali normali e tumorali dei tessuti vegetali (I) (russ., rom. summ.). 281
M. POPOVICI, AL. PETRESCU, AL. REDEŞ, E. POPOVICI, Forschungsmethoden der plastischen Materiale durch die Fluoreszenz-Analyse (rom., germ. summ.) 287
CH. POPESCU, E. ANDRONESCU, M. TIBU, Action des champs magnétiques sur certaines variétés de blé (rom., french summ.) 293

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA, O. SCUTARU, A. VASILIU, Sur la théorie de l'amorçage dans le cas des décharges intermittentes (rom., french summ.) . . . 299
V. I. KRYLOVICZ, O. I. JASKO (USSR), Some Problems concerned with Electric Arcs Characteristics Computation (russ., rom. summ.) . . 307
N. POEATĂ, GH. VASILIU, C. ANDRONE, Traducteur angulaire basé sur la méthode de la sonde magnétique (rom., russ. summ.) , . . 319
L. PREDA, Sur la mesure de la puissance et de l'énergie de nonsymétrie (rom., russ. summ.) 329
N. GAVRILAŞ, R. OLAH, Sur la précision de simulation des phénomènes de choc dans le transformateur à deux enroulements (rom., french summ.) . 337
C. ONU, V. PRISĂCARU, L. TURIC, GH. CREŢEANU, V. BEJAN, Novel Aspects concerning Methodology and Diffusion of Rectangular Signals Applications in Medical Practice (rom., russ. summ.) . . . 347
D. SANDU, Contribution à l'étude expérimentale des circuits impulsionnels à transistors complémentaires (french, rom. summ.) 351
I. de LOTTO, A. GHIRARDI, R. MORPURGO (Italia), Descrizione di un compilatore sintattico con caratteristiche universali (ital., rom. summ.) . 361
E. SIMION, I. POPESCU, Contributions à l'amélioration des caractéristiques de quelques types de stabilisateurs ferrorésonants (rom., french summ.) . 373
V. N. NEDELCU, Ein neues Prüfungsverfahren für Asynchronmotoren (germ., rom. summ.) 379
G. A. GUÉGUÉCHIDZÉ (URSS), Sur l'automatisation des montages des collecteurs des machines électriques à l'aide de l'utilisation des calculateurs électroniques (russ., rom. summ.) 385
I. BERGMAN, Über die Erscheinungsmöglichkeit der Selbsterregung einer Drehstrom-Stromwendermaschine (germ., rom. summ.) . . . 391
H. ROSMAN, Sur la résonance dans les circuits couplés (rom., french summ.) . 403

MECHANICAL ENGINEERING

C. TRUESDELL (USA), Rational Mechanics of Deformation and Flow (I) (engl., rom. summ.) 415
D. MANGERON (R. S. Romania), M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), L. E. KRIVOSHEIN (USSR), A Theorem concerned with Generalized Heat Transfer Phenomena (engl., rom. summ.) 419
M. N. CHANNABASAPPA (India), Heat Transfer by Laminar Flow in an Annulus of Porous Walls with Variable Circumferential Heat Flux (engl., rom. summ.) 423
N. IRIMICIUC, M. STANCU, Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss (french, rom. summ.) 429
N. TSARVENKOV (Bulgarie), Une propriété du champs des accélérations réduites d'ordre n dans le mouvement plan (french, rom. summ.) . . 435
K. YAMAUCHI, K. OGAWA (Japan), Mangeron's any Order Reduced Accelerations Method and Applications for Determining the Second Acceleration in a plane Lincage Mechanism with One Degree of Freedom (II) (engl., rom. summ.) 439

N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIȚEANU, Contributions concernant les méthodes nouvelles d'essai pour les roulements (II, III) (french, rom. summ.) 445
C. LINDE, V. BAUȘIC, N. IRIMICIUC, Sur la résistance au déplacement des roues menées dans le cas d'un mouvement de roulement avec patinage et glissement (french, rom. summ.) 455
D. PERETZ, F. MARCUS, Die Abhängigkeit des Höchstdrucks und Druckanstiegs von der Verbrennungsgeschwindigkeit in Ottomotoren (germ., rom. summ.) 465
R. AŠKOVIĆ (Canada), Sur une méthode de calcul de la couche limite thermique de l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible en régime instationnaire à trois dimensions (french, rom. summ.) . . . 475
C. CIOBANU, E. BILIUȚĂ, I. RUSU, Sur le calcul hydraulique des tuyaux plastiques (rom., french summ.) 485
I. M. CRUDU, V. GH. NECULĂIASA, M. AVRAM, C. BRĂTESCU, R. MORAID, GH. ȘTEFĂNESCU, Essai d'usure de quelques couples de fonte maléable perlitique et d'aciers carbon non lubrifiés (I) (rom., french summ.) 489
GH. CAȘLER, AL. RENER, D. ZETU, Détermination des paramètres des forces de coupe et des moments concernant le perçage des aciers roumains standardisées, STAS 600–65. 499
M. NICULAE, A. DIMA, C. RUSU, Contributions au calcul de la durée du cycle de production dans le domaine de la construction des machines (rom., french summ.) 501

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

J. GOLECKI, J. WALCZAK (Poland), Displacement Field and State of Stress in a Heavy Elastic Ring Supported at a Point (III) (engl., rom. summ.) . 505
K. MIZUHATA (Japan), Dynamic Analysis of Multi-level Guyed Towers subject to Wind Action (I), (engl., rom. summ.) 515
N. UNGUREANU, D. DIACONU, Particularités du calcul des structures fondées sur pieux, soumises aux actions séismiques (rom., french summ.) . 521
A. RADU, Application de la représentation analogique des champs de diffusion à l'étude des parois sandwiches (french, rom. summ.) 533
EL. PĂUNEL, F. CONSTANTINESCU, F. VASILESCU, C. CARAMAN, N. SAVA, Donausand als Baumaterial (I) (rom., russ. summ.) . . 539
A. I. LASIS (UdSSR), Algorithmus zur Berechnung von Wasserleitungs-Ringnetzen (russ., rom. summ.) 549
M. GIURCONIU, C. JURA, GH. POPA, I. MIREL, Beitrag zur Berechnungsmethode der Rückhaltebecken in Kanalen (rom., germ. summ.) . . 553
E. BLIDARU, V. BLIDARU, Recherches concernant l'amélioration des appareils d'arrosage utilisés en irrigations (rom., french summ.) . . . 559
P. MÎLCOMETE, G. MEDRIHAN, Sur les critères de répartition territorielle des forces de production dans la République Populaire de Roumanie (rom., french summ.) 573

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

A. TRIANDAF, M. BERCOVICI, La résolution d'un problème de production de l'industrie textile „Vasia Vasilescu", Mediaș, pour obtenir la solution optimale du tissu „Finet" (rom., russ. summ.) 581
I. VLAD, Recherches concernant l'influence de l'allongement constant répété sur la capacité de récuperation élastique de certaines fibres textiles (russ., rom. summ.) 585
B. D. SEMAK (URSS), Étude de l'influence de la structure et du finissage des tissus sur leur usure au lavage (russ., rom. summ.) . . . 591
C. RUSU, O. JABA, Aspects concernant la détermination de la durée du cycle de fabrication dans les entreprises textiles (rom., french summ.) . . 595

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIII (XVII), вып. 3—4 1967 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XV

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, Применение к функциональным уравнениям некоторых построений универсальной алгебры (франц., рез. рум.) . . 1

В. В. ТОПЕНЧАРОВ (Н. Р. Болгария), Универсальные алгебры и определение категорий (франц., рез. рум.) 5

К. БЕНЗАКЕН (Франция), Распределительные псевдоструктуры и приложения (II) (франц., рез. рум.) 11

Ж. БУЛЭЙ (Франция), Гомоморфизмы бинарных соотношений (I) (франц., рез. рум.) 17

И. ЕНЕСКУ, Ассоциативные и коммутативные алгебры с главной единицей 5-го порядка над действительным полем (II) (франц., рез. рум.) . 23

А. БРАЙЕР, Экспоненциальная форма элементов некоторых прямых сумм алгебр (англ., рез. рум.) 31

Д. ТЕППЕР ХАИМО (США), Сокращенное преобразование Лапласа-Ганкеля (I) (англ., рез. рум.) 39

Р. МЮЛЛЕР (Новая Зеландия), Интегралы и ряды содержащие функции Бесселя (I) (англ., рез. рум.) 43

Д. Д. БАЙНОВ (Н. Р. Болгария), Одна формула для произведения n степенных рядов (русск., рез. рум.) 47

Ф. В. ТОМАШЕВИЧ, С. У. КУРТЯКОВ (СССР), О разложении по неортогональной системе элементов (русск., рез. рум.) 49

Х. ХАРУКИ (Канада), О функциональном уравнении $|f(x+iy)| = |g(x)+h(iy)|$ (англ., рез. рум.) 57

Н. ФОРБА, А. ГЮО (Бельгия), О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений (II) (франц., рез. рум.) . . . 67

Н. АПОСТОЛАТОС (ГФР), Обобщение понятия дифференциального уравнения n-го порядка в комплексной области и формулирования теорем существования и единственности (I) (нем., рез. рум.) . . 71

А. КОРДУНЯНУ, Спектр оператора Вольтерра в некоторых функциональных пространствах (франц., рез. рум.) 77

Е. БОМПЪЯНИ (Италия), Главные элементы трехмерного многообразия проэктивного пространства шести измерений (итал., рез. рум.) . 83

В. МУРДЖЕСКУ, Инварианты параллельного переноса в 4-х мерных пространствах с кручением (II) (рум., рез. франц.) . . . 91

Ш. РИМЕР, Векторное представление квадрик вращения (I) (франц., рез. рум.) 99

Т. ПОПОВИЧУ, Замечания касающиеся остатка некоторых приближенных формул деленной разности при помощи производных (франц., рез. рум.) 103

Д. В. ИОНЕСКУ, Кубатурные формулы с малым числом узлов (I) (франц., рез. рум.) 111

Ф. НОЕЛЬ (Франция), Метод решения больших линейных систем многочленным сверхитерированием (франц., рез. рум.) . . . 119
Д. МАНЖЕРОН, Современная проблематика относящаяся к методу коллокации (I) (итал., рез. рум.) 123
Г. КНАПП (Австрия), Метод Гребнера и его применение в вычислении орбит небесной механики (I) (нем., рез. рум.) . . . 129
Л. ЧОБАНУ, Аппроксимация многочленами $P(z)$, где $z = xy$, непрерывных функций двух переменных $f(x, y)$ (русск., рез. рум.) . . . 135
М. Н. ОГЮСТОРЕЛИ (Канада), Оптимальные проблемы контроля по времени (II) (англ., рез. рум.) 139
А. М. КРАЛЛ (США), Общий критерий устойчивости в исследовании систем автоматического регулирования (англ., рез. рум.) . . . 145
К. АКЕР, Некоторые поперечные движения сжимаемой жидкости на неголономном многообразии (франц., рез. рум.) 153
Л. де БРОЛЬИ (Франция), О динамике тела с собственной переменной массой и о формуле релятивистического преобразования тепла (франц., рез. рум.) 161
С. С. САННИКОВ (СССР), Комплексный спин и представления группы вращения (русск., рез. рум.) 165
Е. Г. БУБЕЛЕВ (СССР), Предварительные результаты анализа нескольких струй высокой энергии при помощи диаграммы скоростей Лобачевского (англ., рез. рум.) 169
И. ПОП, Гидромагнитное истечение с переменным всасыванием в периодическом граничном слое (англ., рез. рум.) 173
В. ПЕТРЕСКУ, Н. РЕЗЛЕСКУ, Е. КУЧУРЯНУ, Изменение магнитного сопротивления феррита Ni-Zn (нем., рез. рум.) . . . 179

ХИМИЯ

В. Ф. ЛИББИ (США), Химия мирового пространства (II) (англ., рез. рум.) 183
Ж. А. ХЕДВАЛЛ (Швеция), О развитии химии твердых тел (II) (англ., рез. рум.) 195
М. ШКИОПУ, О. БОЦ, Г. ИОНЕСКУ, К. НИСТОР, О. РОМАН, Равновесие распределения в тройной системе: тетрахлорметан—*н*-бутилацетат—вода (русск., рез. рум.) 203
А. БОРДЯ, Новый фотоколориметрический и флуориметрический метод для дозировки индия (рум., рез. франц.) 209
И. АНТОНЕСКУ, М. КАРАМЛЭУ, Ф. МАТЕЙ, Фотометрический экстрактивный метод для дозировки некоторых окислителей (I) (рум., рез. англ.) 217
В. К. АКИМОВ, С. И. БРАГИНА, А. И. БУСЕВ (СССР), Определение сульфат-ионов в поверхностноактивных и моющих веществах (русск., рез. рум.) 223
И. ХЫНКУ, А. ЛУКА, Исследование некоторых сортов цемента физико-химическими методами (рум., рез. франц.) 231
ЕЛ. ПЭУНЕЛ, Ф. ВАСИЛЕСКУ, К. КАРАМАН, И. БУРЛАКУ, И. МУНТЯНУ, Гипс с добавками полимеров или вяжущих минеральных веществ (рум., рез. франц.) 237
ШТ. ИВЭШКАНУ, В. ФИЛИП, Об эффектах тиомочевины в качестве ингибитора коррозии для стали OLC 45 в серной кислоте (рум., рез. франц.) 247
К. КАЛИСТРУ, И. ГРИГОРИУ, О макрокинетике процесса коррозии стали в серной кислоте (рум., рез. англ.) 253
И. МАТЕЙ, М. ГРИГОРАШ, Аналогичные виниловые полимеры с биологической активностью (рум., рез. франц.) 261
Г. НАТТА, Ф. СЕВЕРИНИ, М. ПЕРОГАРО, Е. БЕАТИ, Г. АУРЕЛЛО, С. ТОФФАНО, (Италия), Хлорвиниловые полимеры привитые на олефиновых эластомерах с высоким сопротивлением удару (II) (итал., рез. рум.) 269

Ел. КАЛИСТРУ, Н. ВОЙКУЛЕСКУ, Исследование гидратцеллюлозных волокон, типа вискозы (нем., рез. рум.) 275
М. ГРИГОРАШ, А. ЧЕРНЭТЕСКУ-АСАНДЕЙ, Г. РОЗМАРИН, Динамика и структура главных химических компонентов здоровых и туморальных растительных тканей (I) (русск., рез. рум.) 281
М. ПОПОВИЧ, АЛ. Д. ПЕТРЕСКУ, А. РЕДЕШ, Е. ПОПОВИЧ, Флюоресцентные методы исследования пластических материалов (рум., рез. нем.) 287
К. ПОПЕСКУ, Е. АНДРОНЕСКУ, М. ТИБУ, Влияние магнитных полей на некоторые сорта пшеницы (рум., рез. нем.) 293

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Э. ЛУКА, О. СКУТАРУ, А. ВАСИЛИУ, К теории зажигания в случае прерывной разрядки (рум., рез. франц.) 299
В. И. КРЫЛОВИЧ, О. И. ЯСЬКО (СССР), Некоторые вопросы инженерного расчета электродуговых установок (русск., рез. рум.) . . 307
Н. ПОЯТЭ, Г. ВАСИЛИУ, К. АНДРОНЕ, Угловой датчик по методу магнитного зонда (рум., рез. русск.) 319
Л. ПРЕДА, Об измерении мощности и энергий несимметрий (рум., рез. русск.) 329
Н. ГАВРИЛАШ, Р. ОЛАХ, О точности физического моделирования импульсных явлений в трансформаторах с двумя обмотками (рум., рез. франц.) 337
К. ОНУ, В. ПРИСЭКАРУ, Л. ТУРИК, Г. КРЕЦЯНУ, В. БЕЖАН, Новые аспекты в методологии и распространении применения прямоугольных сигналов в медицинской практике (рум., рез. русск.) 347
Д. САНДУ, К экспериментальному исследованию импульсных схем с дополнительными транзисторами (франц., рез. рум.) 351
И. де ЛОТТО, А. ДЖИРАРДИ, Р. МОРПУРГО (Италия), Описание синтаксического компилятора с универсальными характеристиками (итал., рез. рум.) 361
Е. СИМИОН, И. ПОПЕСКУ, К улучшению характеристик некоторых типов феррорезонантных стабилизаторов (рум., рез. франц.) . . . 373
В. Н. НЕДЕЛКУ, Новый метод испытания асинхронных двигателях (нем., рез. рум.) 379
Г. А. ГЕГЕШИДЗЕ (СССР), Об автоматизации сборки коллекторов электрических машин с применением вычислительных устройств (русск., рез. рум.) 385
И. БЕРГМАН, О возможности появления автовозбуждения в трехфазной машине с коллектором (нем., рез. рум.) 391
Г. РОСМАН, О резонансе в связанных цепях (рум., рез. франц.) . . 403

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

К. ТРЮСДЕЛЛ (США), Теоретическая механика деформации и течения (I) (англ., рез. рум.) 415
Д. МАНЖЕРОН (С. Р. Румыния), М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (Канада), Л. Е. КРИВОШЕИН (СССР), О теореме обобщенных феноменов теплопередачи (англ., рез. рум.) 419
М. Н. ЧАННАБАСАППА (Индия), Передача тепла в ламинарном течении в кольце с пористым стенками с переменным тепловым потоком (англ., рез. рум.) 423
Н. ИРИМИЧУК, М. СТАНКУ, Новое выражение принципа Гаусса (франц., рез. рум.) 429
Н. ЦАРВЕНКОВ (Н. Р. Болгария), Свойство поля приведенных ускорений n-ного порядка в плоскостном движении (франц., рез. рум.) . . 435
К. ИАМАУЧИ, К. ОГАВА (Япония), Метод приведенных ускорений любого порядка Манжерона и применения к определению ускорений второго порядка плоских механизмов с одной степенью свободы (II) (англ., рез. рум.) 439

Н. Г. ПОПИНЧЯНУ, М. Д. ГАФИЦЯНУ, К вопросу новых методах испытания подшипников (II, III) (франц., рез. рум.) . . . 445
К. ЛИНДЕ, В. БАУШИК, Н. ИРИМИЧУК, К расчету сопротивления движению ведомого колеса в случае качения с проскальзыванием (франц., рез. рум.) 455
Д. ПЕРЕЦ, Ф. МАРКУС, Зависимость максимального давления и скорости роста давления от закона горения в моторах с искровым зажиганием (нем., рез. рум.) 465
Р. АШКОВИЧ (Канада), Метод исчисления пограничного термического слоя ламинарного истечения несжимаемой жидкости в нестационарном режиме трех измерений (франц., рез. рум.) 475
К. ЧОБАНУ, Е. БИЛИУЦЭ, И. РУСУ, О гидравлических расчетах пластмассовых трубопроводов (рум., рез. франц.) 485
И. М. КРУДУ, В. Г. НЕКУЛЭЯСА, М. АВРАМ, К. БРЭТЕСКУ, Р. МОРАИД, Г. ШТЕФЭНЕСКУ, Исследование изнашивания некоторых пар ковкого перлитового чугуна и углеродистой стали без смазки (I) (рум., рез. франц.) 489
Г. КАШЛЕР, АЛ. РЕНЕР, Д. ЗЕТУ, Определение коэффициентов и экспонентов момента кручения и аксиальной силы в резание румынской стали, СТАС 600-65 (рум., рез. франц.) 499
М. НИКУЛАЕ, А. ДИМА, К. РУСУ, К исчислению длительности фабрикационного цикла в машиностроении (рум., рез. франц.) . . 501

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

И. ГОЛЕЦКИЙ, И. ВАЛЬЧАК (Польша), Поле смещения и состояние напряжения в тяжелом упругом кольце с одной точкой упора (III) (англ., рез. рум.) 505
К. МИЗУХАТА (Япония), Динамический анализ многоэтажных закрепленных башень подверженных напору ветра (I) (англ., рез. франц.) . 515
Н. УНГУРЯНУ, Д. ДЬЯКОНУ, Особенности расчета сооружений на сваях с учетом сейсмических воздействий (рум., рез. франц.) . . 521
А. РАДУ, Применение электрических моделей полей диффузии при проектировании многослойных стен (франц., рез. рум.) 533
ЕЛ. ПЭУНЕЛ, Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, Ф. ВАСИЛЕСКУ, К. КАРАМАН, Н. САВА, Исследование дунайских песков как строительного материала (I) (рум., рез. русск.) 539
А. Я. ЛАСИС (СССР), Алгоритм расчета кольцевых водопроводных сетей (русск., рез. рум.) 549
М. ДЖУРКОНИУ, К. ЖУРА, Г. ПОПА, И. МИРЕЛ, К методике расчета водосборных колодцев в канализации (рум., рез. нем.) . . 553
Е. БЛИДАРУ, В. БЛИДАРУ, К вопросу улучшения поливных установок используемых в полевых работах (рум., рез. франц.) 559
П. МЫЛКОМЕТЕ, Г. МЕДРИХАН, О критериях территориального распределения продуктивных сил в нашей стране (рум., рез. франц.) . 573

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

А. ТРИАНДАФ, М. БЕРКОВИЧ, Решение одной из производственных задач по определению максимальной прибыли с готовой продукции на текстильной фабрике им. Васия Василеску, Медиашь (рум., рез. русск.) 581
И. ВЛАД, Исследование влияния повторного постоянного удлинения на обратимость некоторых текстильных волокон (русск., рез. рум.) . 585
Б. Д. СЕМАК (СССР), Исследование влияния структуры и отделки тканей на их износ от стирок (русск., рез. рум.) 591
К. РУСУ, О. ЖАБА, Об определении срока цикла фабрикации в текстильном предприятии (рум., рез. франц.) 595

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

REDACŢIONALE

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS

ОТ РЕДАКЦИИ

Articole ale colaboratorilor externi primite la redacţia revistei *Buletinul Institutului politehnic din Iaşi*

Papers received from the external collaborators by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

Статьи внеинститутских сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

TOPENTCHAROV V. V., (Institut supérieur de Mécanique appliquée et d'Electrotechnique, Sofia, Bulgarie), *Sur les algèbres universelles et la définition des catégories.*

HARUKI H., (University of Waterloo, Canada), *On the Functional Equation* $|f(x+iy)| = |g(x)+hiy)|$.

BOMPIANI E., (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia), *Elementi principali di una varietàtridimensionale dello spazio proiettivo a sei dimensioni.*

NOËL PH., (Institut Universitaire de calcul automatique, Nancy, France), *Une méthode de résolution des grands systèmes linéaires par suritération polynômiale.*

OĞUZTÖRELI M. N., (University of Alberta, Edmonton, Canada), *Studies concerned with Time Optimal Problems* (II. *Properties of Optimal Strategies*).

de BROGLIE L., (Académie des Sciences, Paris, France), *Sur la dynamique du corps à masse propre variable et la formule de transformation relativiste de la chaleur.*

ГЕГЕШИДЗЕ Г. А., (Тбилисский научно-исследовательский институт приборостроения и средств автоматизации ГрузССР, СССР), *Об автоматизации сборки коллекторов электрических машин с применением вычислительных устройств.*

TRUESDELL C., (The John Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA), *Rational Mechanics of Deformation and Flow.*

MANGERON D., (Polytechnic Institute of Jassy, Romania), OĞUZTÖRELI M. N., (University of Alberta, Edmonton, Canada), KRIVOSHEIN L. E., (Kirgizian Academy of Sciences, Frunze, USSR), *A Theorem concerned with Generalized Heat Transfer Phenomena.*

SCHMID E., (Österreichische Akademie der Wissenschaften, Wien, Österreich), *Verfestigung durch Ultraschall und ihr thermischer Abbau.*

OĞUZTÖRELI M. N., (University of Alberta, Edmonton, Canada), *A Class of Nonlinear Integro-Differential Equations of Parabolic Type with a Delayed Argument.*

APOSTOLATOS N., (Universität Karlsruhe, Bundesrepublik Deutschland), *Über einige überbestimmte Systeme partieller Differentialgleichungen.*

COLES W. J., TUCKER D. H., (University of Utah, Salt Lake City, USA), *Zeros of Solutions of Complex Differential Equations.*

BOYER P., Mlle CASTINEL G., NOUGARO J., (Institut de Mécanique des fluides, Toulouse, France), *Répartition du débit le long d'un déversoir latéral à mince paroi.*

Mlle PICCARD S., (Université de Neuchâtel, Suisse), *Le groupe des relations reliant entre eux les éléments d'un ensemble de générateurs d'un groupe multiplicatif.*

KRALL ALLAN M., (Pennsylvania State University, University Park, Penna, USA), *Bounds for the Zeros of a Polynominal and its Derivatives.*

MÜLLER M. W., (Universität Stuttgart, Bundesrepublik Deutschland), *Von links schräge Approximation durch Bernsteinsche Potenzreihen.*

GATIGNOL PH., (Université de Paris, France), *Sur la forme et la recherche des densités invariantes associées à certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires.*

PICONE M., (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia), MANGERON D., (Istituto Politecnico di Iaşi, Romania), *Teoremi di unicità per le soluzioni di talune equazioni funzionali e separazione degli autovalori di un parametro de cui quelle dipendono.*

MOUNTFORD G. C., (University of Adelaide, South Australia), *The Propagation of Acoustic Radiation through Finite Smooth Ducts.*

MAJEED A., (University of the Panjab, New Campus, Lahore, West Pakistan), *Existence Theorems for Generalized free Products of Groups.*

SUD V. K., (Mathematics Department, Indian Institute of Technology, Hauz Khas, New Delhi, India), *Hydromagnetic Drag of a Sphere oscillating in a Rotating Conducting Viscous Medium.*

de BROGLIE L., (Académie des Sciences, Paris, France), *Sur les discussions relatives à la formule* $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ *et la définition de la pression en Thermodynamique relativiste.*

ИВАНОВ В. К., (Свердловский Государственный университет), *О применении метода Пикара к решению интегральных уравнений первого рода.*

СЕМАК Б. А., (Львовский торгово-экономический институт, СССР), *Исследование влияния структуры и отделки тканей на их износ от стирки.*

ГЕРШУН В. А., САННИКОВ С. С., (Физико-технический институт АН УССС, Харьков, СССР), *Двухкомпонентная модель Томаса-Ферми.*

ЛАСИС А. Я., (Латвийская сельскохозяйственная академия, Рига, СССР), *Алгоритм расчета кольцевых водопроводных сетей.*

БАЙНОВ Д. Д., (Механо-электротехнический институт, София, Н. Р. Болгария), *Одна формула для ироизведения n степенных рядов.*

ХАМУДХАНОВ М. З., УСМАНХОДЖАЕВ Н. М., (Узбекский научно-исследовательский институт энергетики и автоматики, Ташкент, СССР), *Графоаналитический способ расчета основных характеристик и выявление регулировочных свойств однофазного конденсаторного асинхронного двигателя при переменной частоте.*

ЕРЕМЕЕВ И. С., (Конструкторско-технологический институт городского хозяйства, Киев, СССР), *Об одном пути повышения качества линеаризованных систем.*

CHAMBERS LL. G., (University College of North Wales, England), *Variational Principles associated with Charge Creation.*

MIZUHATA K., (Architectural Institute of Japan, Tokyo), *Dynamic Analysis of Multi-level Guyed Towers subject to Wind Action.*

GHOSHAL S., (Jadavpur University, Calcutta, India), *On Symilarity Solution of an Unsteady Laminar Boundary Layer Long a Flat Plate.*

BANERJEE B., (Jalpaiguri Engineering College, India), *Note on the Deflection of Inhomogeneous Annular Plates.*

MUKHERJEE A., (Jadavpur University, Calcutta, India), *Effect of Gravity on Axially Symmetrical Jet.*

MILLER S., (Polytechnic Institute, Wroclaw, Poland), *Structural Analysis of Plane Mechanisms containing Variable Length Members.*

KONSTANTINOFF M., ZENOFF P., (Akademie der Wissenschaften, Sofia, Bulgarien), *Isochronische Wälzkurvenpendel.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 3—4, 1967

Математика, Теоретическая механика, Физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

C. D. 517.948

APPLICATION AUX ÉQUATIONS FONCTIONNELES DE CERTAINES CONSTRUCTIONS D'ALGÈBRE UNIVERSELLE (I)

PAR

AL. CLIMESCU

1. Le but de cette Note est la démonstration de certains résultats que nous appellerons théorèmes de transfert du type suivant:

Une équation fonctionnelle étant donnée, supposons qu'elle puisse être formulée sans que la puissance de l'ensemble M sur lequel elle est définie y entre explicitement et supposons en outre qu'on connaisse une solution sur un M donné; alors on peut trouver par une procédure uniforme, en partant de la solution donnée, au moins une solution définie sur un autre ensemble N, la puissance de N étant largement arbitraire.

On peut obtenir de cette façon des solutions définies sur des ensembles M infinis en partant des solutions connues sur les ensembles finis, qui sont, du moins en principe, déterminables par voie algorithmique. Alors surgit presque spontanément le problème suivant: caractériser ces solutions, qu'on peut appeler solutions à caractère fini, et trouver, s'il est possible de déterminer, certaines équations fonctionnelles qui n'aient que des solutions à caractère fini. C'est, croyons nous, dans cette direction qu'il faut chercher la résolution du problème de la détermination des équations fonctionnelles dont on puisse déterminer toutes les solutions, problème qu'on ne saurait attaquer sans accepter une logique plus forte que la logique habituelle.

2. Passons à l'énumération de deux procédés de transfert.

a) Soit $M \subsetneq N$, $M \neq \emptyset$, et une équation fonctionnelle exprimée seulement à l'aide de compositions d'applications partout définies (le nombre des applications et des variables étant fini). Alors

I. *Si l'on connaît une solution de l'équation sur M, on peut réaliser le prolongement de la solution sur N de manière que l'ancienne solution soit l'image homomorphe de la nouvelle solution.*

Soit a_m, $m \in M$, et choisissons les ensembles A_m de la manière suivante:

$$a_m \in A_m,\ A_m \cap A_{m'} = \emptyset \quad \text{si} \quad m \neq m',\ \bigcup_{m \in M} A_m = N.$$

Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une application qui figure dans la solution connue, posons pour $(y_1, y_2, \ldots, y_p) \in N^p$

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_p) = f[(\varphi(y_1), \varphi(y_2), \ldots, \varphi(y_p)],$$

où $\varphi(y) = a_m$ si $y \in A_m$.

Il est clair que l'on obtient ainsi une solution qui répond aux conditions de l'énoncé, φ réalisant l'homomorphisme demandé.

b) Soit A un semitreills avec 0 (en notations additive on a $x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x + x = x$, $x + 0 = x$). Soit M un ensemble donné et Φ, $M \xrightarrow{\varphi} A$ la classe d'applications φ qui satisfont à la condition $\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$ pour un nombre fini de $x \in M$. Alors

II. *Si l'on connaît sur M une solution d'une équation fonctionnelle formée seulement à l'aide de compositions d'applications partout définies et de permutations de variables, on obtient une solution correspondante sur Φ* (nombre de fonction et nombre de variables finis, condition désormais sous-entendue).

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ définie sur M^p; à la fonction f on fait correspondre $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$, définie sur Φ^p, par la règle $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p) = \varphi$, où

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sum\limits_{(x_1, x_2, \ldots, x_p)} (\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_p(x_p)) \text{ si } f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = x, \\ 0 \text{ si } f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \neq x, \text{ pour tous les } (x_1, x_2, \ldots, x_p). \end{cases}$$

Evidemment $\varphi \in \Phi$ et il suffit de démontrer séparément le transfert de chacune des deux propriétés, puisqu'elles sont permutables.

Pour les permutations, on peut se borner aux transpositions et, par conséquent, supposer qu'il s'agisse seulement de deux variables. Soit donc $g(x, y) = f(y, x)$; il faut prouver que $G(\varphi_1, \varphi_2) = F(\varphi_2, \varphi_1)$. Or on a:

$$F(\varphi_2, \varphi_1) = \bar{\varphi} \quad \text{où} \quad \bar{\varphi}(u) = \begin{cases} \sum\limits_{(x_1, x_2)} [(\varphi_1(x_1) + \varphi_1(x_2)] \quad \text{si} \quad f(x_1, x_2) = u, \\ 0 \text{ autrement.} \end{cases}$$

D'autre part $G(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi$, où

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sum [\varphi_1(x_2) + \varphi_2(x_1)] \text{ si } g(x_2, x_1) = f(x_1, x_2) = u, \\ 0 \quad \text{autrement,} \end{cases}$$

ce qui entraîne $G(\varphi_1, \varphi_2) = F(\varphi_2, \varphi_1)$.

Il suffit de même de démontrer le transfert pour une seule composition, ce qui se fait par un calcul simple. Soit par ex. $h(x, y, z) = f(x, g(y, z))$ et $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \alpha$, où

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sum[\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3)] & \text{si } f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, g(x_2, x_3)) = x, \\ 0 \quad \text{autrement,} \end{cases}$$

$$G(\varphi_2, \varphi_3) = \beta, \text{ où } \beta(y) = \begin{cases} \sum(\varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3)) & \text{si } g(x_2, x_3) = y, \\ 0 \quad \text{autrement,} \end{cases}$$

$$F(\varphi_1, G(\varphi_2, \varphi_3)) = \gamma, \text{ où } \gamma(x) = \begin{cases} \sum(\varphi_1(x_1) + \beta(y)) \text{ si } f(x_1, y) = \\ \quad = \lambda \equiv \sum'[\varphi_1(x_1) + \sum(\varphi_2(x_2) + \\ \quad + \varphi_3(x_1)] \text{ si } f(x_1, g(x_2, x_3)) = x, \\ 0 \quad \text{autrement,} \end{cases}$$

ce qui entraîne $\alpha = \gamma$, à cause de l'idempotence de l'opération somme et du fait que la somme s'étend sur un nombre fini de termes.

Donnons l'exemple suivant : Soit A l'intervalle $0 \leqslant x < 1$ et $x + y = \max(x, y)$. Si M est le groupe cyclique à deux éléments, cette construction donne la somme associative

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = [\max(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad \max(x_1, x_2, y_1, y_2)].$$

En posant

$$\varphi[(x_1, x_2)] = x_1 \text{ si } 0 \leqslant x_2 < x_1 < 1, \quad \varphi[(x_1, x_2)] = 1 + x_2 \text{ si } 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 < 1,$$

on obtient l'image homomorphe (donc associative) définie par

$$x + y = 1 + \max(x', y), \text{ où } 0 \leqslant x, y < 2, \; x' = x \text{ si } 0 \leqslant x < 1$$
$$\text{et } x' = x - 1 \text{ si } 1 \leqslant x < 2.$$

3. *Remarques finales*

a) Les deux constructions ci-dessus indiquées appartiennent par leur nature à l'algèbre universelle, pour laquelle nous renvoyons à l'exposé [2].

b) La deuxième construction pourrait être présentée en supposant que A est muni de deux opérations identiques, ce qui présente une certaine analogie avec l'extension de l'union directe donnée pour la première fois par A. L. Foster [1].

c) Nous espérons revenir prochainement sur cette question en employant deux opérations, ce qui généralisera la construction de Foster.

d) Étant donné la liberté de choix pour les deux constructions, on peut dire qu'une seule solution donne naissance à une infinite d'autres (au moins une pour chaque puissance supérieure).

Par itération du procédé on peut construire encore d'autres solutions et il est possible que parmi elles on trouve des solutions qui ne peuvent pas être directement obtenues.

La question de l'obtention de toutes les solutions d'une équation fonctionnelle est donc en permanence ouverte et inépuisable et cette observation nous semble pleinement justifier *a posteriori* les limitations habituelles.

Reçue le 25 VI 1967

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Foster A. L., *p-rings and their Boolean-vector Representations.* Acta Math., 1950, **84**, pp. 231–261.
2. Grätzer G., *Universal Algebra* (preprint). 1966, 570 pp.

APLICAȚIE LA ECUAȚIILE FUNCȚIONALE A UNOR CONSTRUCȚII DE ALGEBRĂ UNIVERSALĂ

(Rezumat)

Se indică două construcții cu ajutorul cărora dintr-o soluție cunoscută a unei ecuații funcționale de un anume tip se pot găsi o infinitate de soluții ale aceleași ecuații.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 519.56

SUR LES ALGÈBRES UNIVERSELLES ET LA DÉFINITION DES CATÉGORIES

PAR

V. V. TOPENTCHAROV

1. Introduction

Les catégories étant des structures algébriques au sens de [1], elles peuvent être définies à partir d'algèbres universelles, dont la définition sera précisée ci-dessous. Une définition intrinsèque des catégories et n-catégories en résulte, qui met en évidence les liens de celles-ci avec des structures classiques. La terminologie est en principe celle de [2] et [6].

2. Algèbres universelles

Soit $\mathfrak{M}_0$ un univers et $\mathfrak{M}$ la classe des applications associée à $\mathfrak{M}_0$. Étant donnée la classe de classes $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I,\ C_i \in \mathfrak{M}_0,\ I \in \mathfrak{M}_0\}$, considérons l'application

$$\Pi : \mathcal{C} \to \Pi(\mathcal{C}),$$

où $\Pi(\mathcal{C}) = \overline{\mathcal{C}^*}$ est la classe des produits finis entre éléments de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^* = \mathfrak{P}(\overline{\mathcal{C}^*})$ — classe des parties de $\overline{\mathcal{C}^*}$. Soit $C \in \mathcal{C}$ fixée dans la suite, appelée *classe-support*, et notons $\overline{\mathbf{W}} = C.\mathfrak{M}.\mathcal{C}^* \subset \mathfrak{M}$, $\mathbf{W} = \mathfrak{P}(\overline{\mathbf{W}})$. On peut généraliser la notion d'algèbre universelle de [3] et préciser celle de [4] par la:

Définition 1. *Une algèbre universelle est un couple* $\mathbf{A} = (C, \Omega)$, *où* $C \in \mathfrak{M}_0$, $\Omega \in \mathbf{W}$. *La famille* Ω *est la* $\mathfrak{M}_0$*-préesquisse de* $\mathbf{A}$. *La classe des algèbres universelles sur* $\mathfrak{M}_0$ *est notée* $\mathfrak{A}_m$.

Si $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\overline{\mathbf{W}}} = C.\mathfrak{M}.\overline{\mathcal{C}^*}$, i. e. si $\overline{\mathbf{W}}$ ne contient que des applications partout définies sur un élément de $\mathcal{C}$, (D. 1) se réduit à la définiton de [3].

Soit une application $a : \mathbf{W} \to N$ (= ensemble des entiers naturels), qui à tout $w \in \mathbf{W}$ associe la puisance du produit dans $\mathcal{C}$ dont la sous-classe est la source de w. Alors:

Définition 2. $a(\mathbf{w}) \in N$ est *l'arité (poid)* de $\mathbf{w} \in \Omega$.

Cette définition „justifie" la notion suivante:

Définition 3. *Le code d'arité de* $\mathbf{A} = (C, \Omega)$ *est la suite d'entiers naturels, image de* Ω *par* $a: K(\mathbf{A}) = a(\Omega)$.

Le code d'arité définit une relation d'équivalence dans $\mathfrak{A}_M$ et deux algèbres universelles sont *équicodes* si l'on a:

$$\mathbf{A}' \sim \mathbf{A}'' \pmod{R_K} \text{ ou } (\mathbf{A}', \mathbf{A}'') \in R_K \Leftrightarrow a(\Omega') = a(\Omega'').$$

Notons que $a(\Omega') = a(\Omega'')$ n'entraine pas $\Omega' = \Omega''$, sauf au cas des algèbres universelles selon [3].

Définition 4. *Une algèbre universelle sous-jassente à une structure algèbrique* [1] *sur* C, *définie par les applications de* Ω *et d'axiomes explicites, est le couple* $\mathbf{A} = (C, \Omega)$.

Proposition 1. *Toute structure algébrique a au moins une algèbre universelle sous-jassente.*

Remarque 1. Une structure algébrique peut avoir plus d'une algèbre universelle sous-jassente; dans ce cas à toute algèbre universelle est associée une classe d'axiomes pour la définition complète de la structure et ces classes sont différentes.

À partir d'une application de C' vers C'', où $C' \in \mathfrak{M}_0$ et $C'' \in \mathfrak{M}_0$ sont les classes-support de $\mathbf{A}' \in \mathfrak{A}_m$ et $\mathbf{A}'' \in \mathfrak{A}_m$, on définit:

Définition 5. *Un homomorphisme de l'algèbre universelle* $\mathbf{A}'$ *vers l'algèbre universelle* $\mathbf{A}''$ *est un triplet* $H = (\mathbf{A}'', \underline{H}, \mathbf{A}')$, *tel que* $(C'', \underline{H}, C') \in \mathfrak{M}$, *avec* $\alpha(H) = C'$ *et* $\beta(H) = C''$, H *étant compatible avec les applications de* Ω' *et de* Ω''.

Exemples. (a) Les homomorphismes entre groupes sont des homomorphismes selon (D.5), compatibles avec les applications nulaires $u' = u'' = u: H.u(f) = u.H(f)$, $\forall f \in G$. Un homomorphisme fort [7] est un homomorphisme au sens de (D.5).

Soit $\mathfrak{K}'_{K0}$ la classe des algèbres universelles internes ($\mathfrak{C} = \{C\}$) équicodes sur $\mathfrak{M}_0$. On démontre[1]):

Théorème 1. *La classe* $\mathfrak{K}_K$ *des morphismes entre éléments de* $\mathfrak{K}_{K0}$ *est une catégorie pour la loi de composition* $(\mathbf{A}'', \underline{H}', \mathbf{A}'_1) . (\mathbf{A}', \underline{H}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}'', \underline{H}' . \underline{H}, \mathbf{A})$ *si et seulement si* $\mathbf{A}'_1 = \mathbf{A}'$; *la clase des unités* $(\mathfrak{K}_K)_0$ *de* $\mathfrak{K}_K$ *s'identifie à la classe des algèbres universelles* $\mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{K}_K)_0$ *et on pose* $\mathfrak{K}_K = \mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{K}_{K0} = \mathfrak{A}_0$.

Soit $\hat{\mathfrak{M}}_0$ un univers, tel que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$; alors $\mathfrak{M} \to\to \hat{\mathfrak{M}}$. Notons p_H le foncteur canonique $p_H = (\mathfrak{M}, \underline{p}_H, \mathfrak{K})$ et si $\hat{\mathfrak{K}}$ est la catégorie d'homomorphismes entre algèbres universelles de la classe $\hat{\mathfrak{K}}_0$ on note $p_{\hat{H}} = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{p}_{\hat{H}}, \hat{\mathfrak{K}})$ le foncteur canonique de $\hat{\mathfrak{K}}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$. On a:

[1]) Dans les démonstrations et les énoncés des théorèmes on suppose connue la théorie classique des catégories [2].

Théorème 2. *Le foncteur p_H est un foncteur d'homomorphismes résolvant à droite, à $\mathfrak{M}_0$-limites projectives. Le foncteur $p_{\hat{H}}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$.*

Corollaire. *$\mathfrak{N}_K$ est à $\mathfrak{M}_0$-limites inductives.*

De ces deux théorèmes découlent plusieurs résultats sur les produits, sommes, sous-structures et produits d'algèbres universelles, obtenues par la technique de [3] et [4], en généralisant des résultats de [3] et [8].

3. Définition des catégories et des n-catégories

Soit $\mathcal{C}=\{C\}$, $C\in\mathfrak{M}_0$; alors on a $\bar{\mathcal{C}}^\star=\{C, C^2,..., C^n,...\}$ et $\mathcal{C}^\star=\{\mathfrak{A}(C), \mathfrak{A}(C^2),..., \mathfrak{A}(C^n),...\}$. On a la définition suivante:

Définition 6. *Une catégorie $C^\cdot$ est une algèbre universelle à code d'arité $K(A_{C^\cdot})=(0,0,2,3)$, notée $(C;\beta,\alpha,k',k_3)$, pour laquelle sont vérifiés les axiomes suivants:*

(K.1) *La sous-algèbre à code d'arité $K(A'_{C^\cdot})=(0,0)$, notée $(C;\beta,\alpha)=(C;U)$ où $U=(\beta,\alpha)$, est un graphe orienté;*

(K.2) *La sous-algèbre de code d'arité $K(A''_{C^\cdot})=(2)$, notée $A''_{C^\cdot}=(C,k')$, est une classe multiplicative;*

(K.3) $\bar{\alpha}(k')=\mathsf{V}U=\alpha\mathsf{V}\beta=C^\cdot\divideontimes C^\cdot=\{(g,f)\mid\beta(f)=\alpha(g)\}$;

(K.4) $\beta.k'=\beta.pr_1\ \&\ \alpha.k'=\alpha.pr_2$;

(K.5) $(U(f),f)_j\in C^\cdot\divideontimes C^\cdot\Rightarrow k'(U(f),f)_j=f$, où $j=1,2$;

(K.6) *L'application ternaire k_3 associée à k' est unique.*

Les notations de cette définition sont conformes à [2] et [10].

Théorème 3. *La définition* (D.6) *et celle donnée par le système d'axiomes* (*G*) *de* [2] *sont équivalentes.*

Remarque 2. Dans le cas des catégories la condition $(U(f),f)_j\in C^\cdot\divideontimes C^\cdot$ est toujours vérifiée, puisque $(U(f),f)_j$ donne pour $j=1,2$: $(\beta(f),f)$ et $(f,\alpha(f))$, d'où, en vertu des propriétés de β et α, on a $\beta(f)=\alpha(\beta(f))=\beta(f)$ et $\alpha(f)=\beta(\alpha(f))=\alpha(f)$.

Remarque 3. Par suppression d'axiomes de manière convenable on obtient les notions de *quasi-catégorie, (quasi-)catégorie non-associative, (quasi-)graphe multiplicatif*, dont l'équivalence avec les définitions de [2], [3] est évidente.

Soient encore les classes $\mathcal{C}=\{C\}$, $C\in\mathfrak{M}_0$, $\bar{\mathcal{C}}^\star$ et $\mathcal{C}^\star$ qui correspondent à $\mathcal{C}$. Avec la terminologie de [10], [11] on a la définiton suivante:

Définition 7. *Une n-catégorie (abréviation de catégorie n-aire) $C^\cdot_n$ sur $C\in\mathfrak{M}_0$ est une algèbre universelle $\mathbf{A}(C^\cdot_n)$ à code d'arité $(K(C^\cdot_n)=(0,...(n\ fois)...,0,n,2n\text{-}1)$, notée $(C;\{u_i\mid i\in I\},k'_n,k_{2n-1})$ et pour laquelle sont vérifiés les axiomes suivants:*

(K_n.1) *La sous-algèbre $\mathbf{A}'(C^\cdot_n)$ à code d'arité $K(\mathbf{A}'_{C^\cdot_n})=(0,...(n\ fois)...,0)$, notée $(C,\{u_i\mid i\in I\})=(C,U)$ est un n-graphe;*

(K_n.2) *La sous-algèbre* $\mathbf{A}''(C_n^{\cdot})$ *à code d'arité* $K(\mathbf{A}''_{C_n^{\cdot}}) = n$, *notée* (C, k'_n), *est une n-classe;*

(K_n.3) $\overline{\alpha}(k'_n) = \mathsf{V}_n U = \{(f_i \mid i \in I) \in \overset{n}{\Pi} C \;\&\; u_i(f_j) = u_j(f_i),\ \forall (i,j)\}$;

(K_n.4) $u_i . k_n = u_i . pr_i$, $\forall i \in I$ et $u_i \in U$;

(K_n.5) $(U(f), f)_j \in \overset{n}{\divideontimes} C \Rightarrow k'_n((U(f), f)_j) = f$, $\forall j \in I$;

(K_n.6) *L'application* $2n-1$*-aire* k_{2n-1} *associée à* k'_n *est unique.*

Comme pour les catégories (D.6) on démontre le:

Théorème 4. *La définition de n-catégories* (D.7) *est équivalente à celle donnée dans* [10], [11].

Remarque 4. Par suppression de certains, axiomes on obtient les *n-catégories non-associatives,* les *n-graphes multiplicatifs* et les structures de type „*quasi*-"correspondentes; les équivalences avec les définitions données dans [10], [11] sont une conséquence du théorème 4.

4. Classes structurées

Notons conformément à [10], [11] la classe des n-classes unitaires associatives par $\widetilde{\mathfrak{N}}_{n0}$ et celle des n-graphes par $\mathcal{G}_{n0}$; les classes de morphismes correspondantes sont les catégories $\widetilde{\mathfrak{N}}_n$ et $\mathcal{G}_n$. Avec la terminologie et les méthodes indiquées dans [4], [5] on a le théorème suivant:

Théorème 5. *Une n-catégorie est une n-classe unitaire associative* $\mathcal{G}_n$*-structurée et qui vérifie la condition:*

$$\alpha(k'_n) = \overset{n}{\divideontimes} C^{\cdot} = \mathsf{V}_n U.$$

Corollaire. *Si* $n = 2$, *on retrouve la notion de catégorie au sens classique, comme classe multiplicative unitare et associative* $\mathcal{G}$*-structurée et qui vérifie la condition*

$$\alpha(k') = C^{\cdot} \divideontimes C^{\cdot} = \alpha \mathsf{V} \beta .$$

Remarque 5. En première vue ce corollaire est banal dans le sens que la théorie des catégories structurée (ou plus généralement la théorie de la structuration) est construite par l'utilisation systématique de la technique des catégories. Il est évident néanmoins que cette théorie est en fait indépendante de la technique des catégories, celle-ci n'étant qu'un language commode et pas une méthode de base pour la théorie de la structuration. Donc le corollaire ci-dessus fournit une définition des catégories.

5. Conclusion

Les liens très étroits qui existent entre les algèbres universelles selon notre définition, les catégories et les n-catégories trouvent une explication dans la théorie des idées de structures de Ehresmann. Si une algèbre

universelle est une structure définie à partir de l'esquisse $(U^{\cdot}, \{\varnothing\})$ à classe de foncteurs $t = Id$, les structures de catégories et de n-catégories sont déjà des structures algébriques $\mathcal{J}$-projectives, où la classe est formée par des catégories discrètes finies à produits homogènes, à savoir tout produit dans une telle catégorie est construit à partir d'une seule unité, répétée un nombre fini de fois. Pour les idées de structures et les structures algébriques $\mathcal{J}$-projectives en général voir [4], [6].

Reçue le 28 II 1967

Institut supérieur de Mécanique appliquée et d'Electrotechnique, Sofia, Bulgarie

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N., *Algèbre.* 3-e, éd., Paris, Hermann, 1961, ch. I.
2. Ehresmann Ch., *Catégories et structures.* Paris, Dunod, 1965.
3. — *Structures quasi-quotient* (à l'impression dans Math. Ann., actuellement polycopié à Paris), 1965, 85 pp.
4. — *Introduction to the Theory of Structured Catégories.* Univ. of Kansas, Techn. Report, *10,* July 1966.
5. — *Catégories structurées.* Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup., 3° série, 1963, **80**, pp. 349—426.
6. — *Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires.* C. R. de l'Ac. Sci., Paris, **264**, pp. 273-276.
7. Cohn P. M., *Universal Algebra.* Harper, New-York, 1965.
8. Kuros A. G., *Leçons d'algèbre générale.* Paris, Dunod, 1967, (traduit du russe).
9. Вагнер В. В., В Сб. тр. по теории полугрупп. СГУ, Саратов, 1965, стр. 3—179.
10. Topentcharov V. V., *Élémznts d'une théorie de cathégories n-aires.* C. R. de l'Ac. Sci., Paris, **264**,pp. 269—272.
11. — *Théorie des n-catégories.* Travaux du seminaire Ehresmann, Paris, Janvier 1967.

ASUPRA ALGEBRELOR UNIVERSALE ŞI DEFINIŢIA CATEGORIILOR

(Rezumat)

Categoriile fiind structuri algebrice în sensul precizat în [1], pot fi definite luînd ca punct de plecare algebrele universale, a căror definiţie este precizată în textul lucrării. Rezultă o definiţie intrinsecă a categoriilor şi a n-categoriilor. Astfel se pun în evidenţă legăturile ce există între acestea din urmă şi structurile clasice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. D. 519.56

PSEUDO-TREILLIS DISTRIBUTIFS ET APPLICATIONS
NOTE II

PAR

C. BENZAKEN

1. Introduction

Dans notre Note antérieure [1], insérée dans le même *Bulletin*, nous nous sommes occupé de l'étude des pseudo-treillis distributifs. Dans ce que suit, tout en conservant les notations de celle-ci, nous exposerons : matrices sur un pseudo-treillis, obtention de pseudo-treillis à partir d'un monoïde ordonné et finirons par donner nombre d'applications.

2. Matrices sur un pseudo-treillis

Considérons un pseudo-treillis E et $\mathfrak{M}_{n,p}(E)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, dont les éléments sont dans E.

Sur $\mathfrak{M}_{n,p}(E)$ on peut définir la somme de deux matrices A, B, notée $C = A + B$, et dont les éléments c_{ij} sont tels que :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = 1,...,n;\ j = 1,...,p).$$

Cette somme est associative, commutative et idempotente et fait de $\mathfrak{M}_{n,p}(E)$ un demi-treillis avec l'ordre habituel :

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A + B = B.$$

Il y a une matrice nulle de l'opération si E admet un zéro ; c'est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

On peut définir également un produit d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(E)$ par une matrice $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(E)$. C'est une matrice $C \in \mathfrak{M}_{n,q}(E)$ notée par $C = A \times B$ et dont les éléments sont :

$$c_{ij} = (a_{i1}.b_{1j}) + (a_{i2}.b_{2j}) + ... + (a_{ip}.b_{pj}), \quad (i = 1,...,n;\ j = 1,...,q).$$

On peut vérifier aisément que le produit est associatif et distributif par rapport à la somme. Ce produit devient, loi interne partout définie, si l'on se place sur $\mathfrak{M}_{n,n}(E)$.

Notons que nous n'avons pas (en général) $A + (A \times B) = A$.

Si E admet des unités 0, 1 il y a une unité pour le produit matriciel. C'est la matrice notée I dont les éléments diagonaux valent 1, les autres étant nuls.

Une matrice A sera dite *surunitaire* dans ce cas si $A \geqslant I$.

Nous noterons A^k (k entier) la matrice égale à $A \times A \times \ldots \times A$ (k facteurs).

Nous avons alors le résultat suivant (connu par ailleurs dans des cas particuliers [3], [4]):

Théorème 1. *A étant une matrice carrée $\in \mathfrak{M}_{n,n}(E)$, la suite des matrices $S_k = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$ devient stationnaire à partir d'un certain rang k_0 (borné par une fonction de n).*

Cela veut dire qu'il existe un entier k_0 tel que $S_{k_0+p} = S_{k_0}$ (quel que soit $p \geqslant 0$).

a) Notons tout d'abord que:

$$S_{k+1} = S_k + (A \times S_k) = S_k + (S_k \times A)\ .$$

b) S'il existe k_0 tel que $S_{k_0+1} = S_{k_0}$, alors $S_{k_0+p} = S_{k_0}$, $(\forall\, p > 0)$. En effet, par récurrence, on déduit de $S_{k_0+p-1} = S_{k_0}$ que:

$$S_{k_0+p} = S_{k_0+p-1} + (A \times S_{k_0+p-1}) = S_{k_0} + (A \times S_{k_0}) = S_{k_0+1} = S_{k_0};$$

c) Le théorème se démontre par récurrence sur l'ordre n des matrices.

Il est vrai pour $n = 1$ car $a + a^2 = a$ (loi d'absorption de E). S'il est vrai pour $n - 1$, on découpera la matrice A et les matrices $S_k \in \mathfrak{M}_{n,n}(E)$ selon:

$$A = \begin{vmatrix} B & C \\ L & f \end{vmatrix}, \qquad S_k = \begin{vmatrix} B_k & C_k \\ L_k & f_k \end{vmatrix},$$

avec

$$B,\ B_k \in \mathfrak{M}_{n-1,\,n-1}(E)\ ;\quad C,\ C_k \in \mathfrak{M}_{n-1,\,1}(E)\ ;\quad L,\ L_k \in \mathfrak{M}_{1,\,n-1}(E)\ ;\quad f,\ f_k \in E.$$

En utilisant les produits par blocs et les relations de récurrence a) on obtient:

$$B_{k+1} = B_k + (B \times B_k) + (C \times L_k),\ B_1 = B, \tag{1}$$

$$C_{k+1} = C_k + (C \times C_k) + (C \times f_k),\ C_1 = C, \tag{2}$$

$$L_{k+1} = (L_k \times B) + (f_k \times L) + L_k,\ L_1 = L, \tag{3}$$

$$f_{k+1} = f_k + (L_k \times C) + (f_k . f) = f_k + L_k \times C,\ f_1 = f. \tag{4}$$

La relation (3) montre que $L_{k+1} \geqslant L_k \geqslant L_{k-1} \ldots \geqslant L_1 \geqslant (f_k \times L)$. Donc on peut écrire plus simplement $L_{k+1} = L_k + (L_k \times B)$, d'où il en resulte

$$L_{k+1} = L_1 + L_1 \times (B + B^2 + \cdots + B^k),$$

si $k_0 - 1$ est l'ordre de stationnarité de $B \in \mathfrak{M}_{n-1,n-1}(E)$.

On voit que L_k est stationnaire à partir de k_0.

La relation (4) prouve que $f_{k+1} = (L_k + L_{k-1} + \cdots + L_1) \times C + f$ et f_k est stationnaire à partir de $k_0 + 1$. De même, la relation (2) prouve que $C_{k+1} \geqslant C_k \geqslant C_{k-1} \geqslant \cdots \geqslant C \geqslant C \times f_k$ soit $C_{k+1} = C_k + (B \times C_k)$ et donc

$$C_{k+1} = C + C \times (B + B^2 + \cdots + B^k) ;$$

C_k devient donc stationnaire à partir du rang k_0.

Enfin la relation (1) montre qu'à partir du rang k_0 et en désignant par L_∞ la quantité L_{k_0} on a :

$$B_{k_0+p} = B_{k_0} + (B + B^2 + \cdots + B^p) \times B_{k_0} + C \times L_\infty +$$
$$+ (B + B^2 + \cdots + B^{p-1}) \times C \times L_\infty$$

et B_{k_0+p} est stationnaire dès que $p = k_0$, donc B_k est stationnaire dès que $k = 2 \times k_0$.

Si l'on désigne par k_n l'ordre maximum de stationnarité des matrices d'ordre n, on a donc $k_n \leqslant 2 \times k_{n-1}$ avec $k_1 = 1$, donc $k_n \leqslant 2^{n-1}$.

Remarques :

a) Si A est surunitaire ($A \geqslant I$) (dans le cas où E a des unités) alors $S_k = A^k$.

b) Si on considère la relation de récurrence $S'_p = S'_{p-1} + (S'_{p-1})^2$ avec $S'_1 = A$ on a

$$S'_p = S_{2^p-1} .$$

La stationnarité sera plus vite atteinte.

3. Permutants d'une matrice carrée d'ordre n

Soient deux indices entiers α, $\beta \in [1, n]$. Considérons toutes les suites d'indice $\alpha, i_1, i_2, \ldots i_p, \beta$, où $i_k \in [1, n]$, p pouvant être nul $\rightarrow (\alpha, \beta)$; α et β seront l'origine et l'extrémité de la suite. $p + 1$ sera par définition la *longueur de la suite.*

Une telle suite est dite *élémentaire* si

$$\begin{cases} i_k \neq \alpha, \ i_k \neq \beta \text{ pour tout } k, \\ i_k \neq i_{k'} \text{ si } k \neq k'. \end{cases}$$

L'ensemble des suites élémentaires entre α et β est évidemment fini. Notons que si une suite entre α, β n'est pas élémentaire, elle admet une sous-suite élémentaire entre α et β.

A étant une matrice carrée d'ordre n sur E on définit :

a) *sous-terme de permutant de A entre* α *et* β la quantité $a_{\alpha i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_p \beta}$ associée à toute suite $\alpha, i_1, i_2, \ldots, i_p, \beta$;

b) *terme de permutant de A entre α et β* le sous-terme de permutant associé à une suite élémentaire entre α et β;

c) *permutant de A entre α et β* la somme sur E de tous les termes de permutant de A entre α et β (cette somme comporte un nombre fini d'éléments). On notera cette quantité par $P_{\alpha\beta}$.

Propriété. Si s est un sous-terme de permutant de A entre α et β alors $P_{\alpha\beta} + s = P_{\alpha\beta}$.

En effet, s a été construit à partir d'une suite $\alpha I \beta$ admettant au moins une sous-suite élémentaire $\alpha \mathcal{J} \beta$ à laquelle on associe un terme de permutant t et on peut vérifier que à cause de la loi d'absorption de E $s \leqslant t$ et comme $t \leqslant P_{\alpha\beta}$, $s \leqslant P_{\alpha\beta}$.

Théorème 2. *Les permutants $P_{\alpha\beta}$ de A sont les termes de la suite stationnaire S_k associée à A. Cette suite est effectivement stationnaire à partir du rang au plus n* (n est l'ordre de la matrice A).

Désignons par S la matrice stationnaire associée à A et par P la matrice d'éléments P_{ij} (permutant de A entre i et j). Nous désignerons également par $p_{\alpha\beta}^{(k)}$ la somme de tous les sous-termes de permutant de A entre α et β, associés aux suites de longueur k et par $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ l'élément de la ligne α, colonne β, de A^k.

Nous pouvons démontrer que

$$a_{\alpha\beta}^{(k)} = p_{\alpha\beta}^{(k)}.$$

Cela est en effet vrai pour $k = 1$, car $a_{\alpha\beta}^{(1)} = a_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}^{(1)}$. Si cela est vrai pour $k-1$, $a_{\alpha\beta}^{(k-1)} = p_{\alpha\beta}^{(k-1)} = \sum_{\alpha I \beta} t_{\alpha I \beta}$ quel que soit $\alpha, \beta \in [1, n]$, en désignant par $t_{\alpha I \beta}$ un sous-terme de permutant associé à la suite $\alpha I \beta$ de longueur $k-1$.

Tout sous-terme de permutant de longueur k s'écrit $t_{\alpha I \beta} = t_{\alpha I_1 i} \cdot a_{i\beta}$ et la suite $\alpha I_1 i$ est de longueur $k-1$; par suite $\sum_{|\alpha I \beta| = k} t_{\alpha I \beta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|\alpha I_1 i| = k-1} t_{\alpha I_1 i} \right) \cdot a_{i\beta}$,

donc $p_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}^{(k-1)} \cdot a_{i\beta} = a_{\alpha\beta}^{(k)}$.

Cela étant, nous savons que toute suite de longueur $> n$ est non élémentaire et comme seules les suites élémentaires servent à former les permutants, nous avons (matriciellement) $P = A + A^2 + \cdots + A^n$; par ailleurs $S = A + A^2 + \cdots + A^{k_0}$ si k_0 est l'ordre de stationnarité. Par suite $P = A + A^2 + \cdots + A^{\sup(n, k_0)}$ et de même $S = A + A^2 + \cdots + A^{\sup(n, k_0)}$, donc $S = P$.

Ceci prouve que l'ordre de stationnarité est au plus n.

Remarque:

Nous pouvons affiner un peu plus dans le cas particulier d'une matrice surunitaire A. Dans ce cas en effet, $P_{\alpha\alpha} = 1 = a_{\alpha\alpha}$; par ailleurs pour la formation de $P_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, seules les suites de longueur $n-1$ sont à considérer, donc $P = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ et l'ordre de stationnarité est $\leqslant n-1$.

4. Réduction d'une matrice

Soit A une matrice carrée $n \times n$ sur E. Nous définirons la matrice A_n^* carrée $(n-1) \times (n-1)$ sur E de la manière suivante:

$$a_{ij}^* = a_{ij} + a_{i,n} \cdot a_{n,j}, \quad (i, j \in [1, n-1]).$$

A_n^* sera dite réduite de A par rapport au dernier indice n.

Proposition 1. *Si $P_{\alpha\beta}$ désigne un permutant de A avec $\alpha, \beta \neq n$ et $R_{\alpha\beta}$ le permutant correspondant de A_n^* alors $P_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}$.*

Soit un terme de $R_{\alpha\beta}$; il est associé à une suite simple $\alpha, i_1, i_2, \ldots, i_q, \beta$, $(i_k \neq n)$, donc $a^*_{\alpha i_1} \cdot a^*_{i_1 i_2} \ldots a^*_{i_q \beta}$; en remplaçant les a^* par leur valeur on obtient 2^{q+1} termes qui correspondent tous à des termes ou des sous-termes de permutant de A entre α et β, donc le terme lui-même est inclus dans $P_{\alpha\beta}$.

Réciproquement, un terme t de $P_{\alpha\beta}$ est associé à une suite simple $\alpha I \beta$; si n ne fait pas partie de cette suite, cette même suite donne un terme plus grand dans $R_{\alpha\beta}$. S'il y fait partie, alors c'est que

$$t = a_{\alpha i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_q n} \cdot a_{n j_1} \cdot a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_r \beta};$$

la suite $\alpha, i_1, i_2, \ldots, i_q, j_1, j_2, \ldots j_r, \beta$ donne un terme s de $R_{\alpha\beta}$ tel que

$$s \geqslant a^*_{\alpha i_1} \cdot a^*_{i_1 i_2} \ldots (a_{i_q n} \cdot a_{n j_1}) \cdot a^*_{j_1 j_2} \ldots a_{j_r \beta} \geqslant t .$$

La propriété est démontrée.

Reçue le 17 IX 1965

Université de Grenoble, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Benzaken C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3 – 4*, pp. 13 – 18.
2. Birkhoff, G. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1961.
3. Лунц А. Г., ИАН СССР, 1962, **16**, стр. 405 – 426.
4. Seshu S., Reed M. B., *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1961.

PSEUDO-LATICE DISTRIBUTIVE ŞI APLICAŢII

Nota II

(Rezumat)

În această parte a lucrării, luîndu-se ca punct de plecare structura algebrică a pseudo-laticelor distributive, expusă în lucrarea precedentă a autorului, înserată în acelaşi *Buletin* [1], se expune un procedeu de construcţie a pseudo-laticelor plecînd de la monoizi ordonaţi. Se expun apoi unele aplicaţii la studiul grafurilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 519.56

HOMOMORPHISMES DE RELATIONS BINAIRES (I)

PAR

G. BOULAYE

1. Relation binaire, rappel de la définition

Considérons un ensemble fini E. Une relation binaire R sur E consiste en la donnée d'un ensemble de couples d'éléments de E, qui sont dits satisfaire la relation alors que les autres sont dits ne pas la satisfaire. Nous considérons exclusivement des relations binaires itérables, c'est-à-dire que $\forall A,\ \exists B,\ R(A, B)$.

2. Recurrence, rappel de la définition

C'est une relation binaire particulière, telle que, pour tout X_n, il existe un et un seul X_{n+1} tel que $R(X_n, X_{n\in 1})$; on notera plutôt $X_{n+1} = F(X_n)$, les X_i appartenant à un même ensemble fini fixe E. X_{n+1} est le successeur de X_n. $\hat{F}(X_n) = F(X_n) \cup F^2(X_n) \cup F^3(X_n) \ldots$ est la descendance de X_n. Graphiquement une récurrence se présente sous la forme d'un ou plusieurs cycles sur lesquels aboutissent éventuellement des arborescences dont la racine est élément de cycle.

3. Homomorphisme de récurrence. Définition. Treillis des homomorphismes de récurrence

Soit E et E_1 deux ensembles sur lesquels sont définies re pectivement les récurrences F et F_1 telles que :

$$\forall \{X, Y_1\},\quad X \in E,\quad X \in E_1,\quad \exists \{F(X),\ F_1(X_1)\}.$$

Une application de E sur E_1 est un homorphisme du point de vue de la structure de récurrence si :

$$\forall \{X, Y\} \in E, \quad X \to X_1, \quad Y \to Y_1, \quad Y = F(X) \Rightarrow Y_1 = F_1(X_1)\}.$$

L'équivalence d'homomorphisme est telle que :

$$X \equiv Y \Rightarrow F(X) \equiv F(Y).$$

Ainsi, la partition correspondante est compatible avec la relation $X_{n+1} = F(X_n)$. Inversement, toute partition de E compatible avec la relation $X_{n+1} = F(X_n)$ définit une relation d'équivalence d'homomorphisme et, donc, un homomorphisme de E, du point de vue de sa structure de récurrence , sur l'ensemble quotient ou un ensemble isomorphe à ce dernier.

On montre facilement que si H_1 et H_2 sont des homomorphismes d'une récurrence, on peut définir une relation d'ordre, une réunion $H_1 \cup H_2$ et une intersection $H_1 \cap H_2$ (au sens de la théorie des partitions). Les homomorphismes d'une récurrence forment un treillis pour ces deux opérations.

À propos des homomorphismes de récurrences, on dispose de résultats utiles.

Théorème 1. *Si deux éléments, dont l'un est le successeur immédiat de l'autre, sont dans une même classe, alors, tous leurs descendants sont dans cette même classe qui contient, entre autre, le cycle correspondant.*

Remarque. Nous appelons classe „stable" une classe telle que celle du théorème précédent.

4. Homomorphismes sur le cycle d'une récurrence simple

Les éléments du cycle sont notés 1, 2,..., n et répartis régulièrement sur un cercle. Une classe est alors représentée par un contour fermé contenant certains points (fig. 1).

Puisque chaque élément i du cercle admet un seul successeur immediat $i+1$, la classe C_{i+1} a le même nombre d'éléments que la classe C_i. Les classes ont ainsi le même nombre d'éléments et le nombre de classes est un diviseur du nombre n d'éléments du cycle.

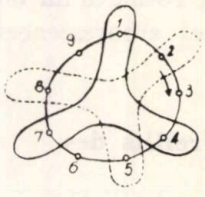


Fig. 1

Par ailleurs, si i et $i+p$ sont dans une même classe C_1, $i+1$ et $i+p+1$ sont dans une même classe C_{i+1} etc ..., $i+2p$, $i+p$ et i sont dans la même classe. Les éléments d'une même classe sont répartis régulièrement sur le cercle et il existe k tel que $i + k.p = i$. La relation d'équivalence attachée à cette partition est la congruence arithmétique modulo p. Ainsi, sur le cycle, on ne peut définir que des classes de congruence et, compte tenu du théorème 1 il en resulte le

Théorème 2. *Dans une partition des éléments d'une récurrence correspondant à un homomorphisme, on ne peut avoir sur le cycle que des classe*

de congruence ou une classe stable et on ne peut avoir en même temps, dans la partition, classe de congruence et classe stable (sauf le cas de la classe stable n'englobant que le cycle et qui coïncide avec la congruence banale modulo n).

5. Éléments apparentés

X et Y sont apparentés s'il existe z, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ tels que $S = F^p(X) = F^q(Y)$.

Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait, dans l'ensemble E sur lequel porte une récurrence $Y = F(X)$, un homomorphisme ayant A pour classe, $A \leqslant E$, est que A satisfasse à la condition :*

$$(\alpha) : \forall p > q \qquad F^q(A) \geqslant F^p(A),$$

où $F^q(A) \cap F^p(A) = \emptyset$.

La condition est nécessaire puisque si $A \cap F(A) \neq \emptyset$, (α) exprime que $A \geqslant F(A)$ (faire $p = 1$).

La condition est suffisante. En effet, définissons la relation R_A.

a) Si A ne contient pas d'éléments apparentés

$$R_A \begin{cases} X \equiv Y \Leftrightarrow X, Y \leqslant A \text{ ou } F(A) \text{ ou } F^2(A) \text{ ou ...,} \\ X \equiv Y \Leftrightarrow S = Y \text{ si } X, Y \subset A \cup \hat{F}(A). \end{cases}$$

b) Si A contient des éléments apparentés et si p est alors le plus petit p tel que $\{X, F^p(X)\} \subset A$,

$$R_A \begin{cases} X \equiv Y \Leftrightarrow X, Y \subseteq A \text{ ou } F(A) \text{ ou } F^2(A) \text{ ou ... ou } F^{p-1}(A), \\ X \equiv Y \Leftrightarrow X = Y \text{ si } \{X, Y\} \subset A \cup F(A) \cup F^2(A) \cup \ldots \cup F^{p-1}(A). \end{cases}$$

En vertu de (α), $A \cap F(A) \neq \emptyset$ et $X \in A \Rightarrow \hat{F}(X) \leqslant A$ et R_A est bien une relation d'équivalence d'homomorphisme. De plus, par définition, R_A est la plus fine équivalence d'homomorphisme admettant A pour classe.

Si $A \cap F(A) = \emptyset$, supposons $X = F^p(Y)$ et $\{X, Y\} \subseteq A$, soit alors $Z \in A$,

$$Y \equiv Z \Rightarrow F^p(Z) \equiv F^p(Y) \Rightarrow F^p(Z) \in A,$$

c'est bien ce qu'exprime (α).

Enfin remarquons que si A ne contient pas d'éléments apparentés (α) n'apporte aucune restriction. Donc, dans le cas où $A \cap F(A) = \emptyset$, R_A est aussi une relation d'équivalence d'homomorphisme, et c'est même la plus fine, admettant A pour classe.

Remarque. Considérons, pour la classe A précédente, la relation d'équivalence $\mathfrak{R}_A$ ainsi définie :

a) A est classe d'équivalence ; b) pour $\{C, D\} \overline{\subset} A$ et $\hat{F}(C) \cap \hat{F}(D) \subseteq A$, $(F(C) \cap F(D) \neq \emptyset)$: $C \equiv D \Leftrightarrow \exists_p$ tel que $\{F^p(C), F^p(D)\} \subset A$, tendis que $F^{p-1}(C) \overline{\subset} A$ et $F^{p-1}(D) \overline{\subset} A$; c) $\{X_i, \hat{F}(X_i) \cap A = \emptyset\}$ est classe d'équivalence.

Alors $\mathfrak{Q}_A$ est la moins fine des équivalences d'homomorphismes admettant A pour classe, par suite :

Théorème. *Lorsque A satisfait à la condition* (α), *les équivalences d'homomorphismes admettant A pour classe sont les équivalences d'homomorphismes du segment* $[\mathfrak{R}_A, \mathfrak{Q}_A]$.

5. Indice d'un éléments d'une récurrence

Indicions les éléments d'un cycle de n ($\neq 1$) éléments avec les nombres 0, 1, 2,..., $n-1$, de telle sorte que l'élément i a pour successeur l'élément $i+1$, avec $0 = F(n-1)$.

Déterminons de proche en proche les indices des éléments des arborescences en remontant le long de celles-ci, appliquant la règle: si un élément a l'indice i, son prédécesseur aura pour indice $i-1$, modulo n.

Si $n = 1$, partant de l'élément du cycle, que nous numéroterons 0, nous numéroterons successivement -1 les éléments jointifs au cycle, -2 les éléments jointifs à un élément -1 etc.

6. Longueur d'un cycle dans une récurence homomorphe

Supposons connus tous les éléments d'une classe dans un homomorphisme. Cherchons, dans la récurrence homomorphe, la longueur du cycle auquel appartient l'homomorphe de la classe.

Soit $n_1, n_2, \ldots, n_1$ les longueurs $\neq 1$ des cycles contenant des éléments de la classe ou auxquels aboutissent des arborescences contenant de ces éléments.

Pour chaque cycle n_i des cycles ci-dessus, soit d_i la valeur absolue de la plus petite des différences 2 à 2, non nulles, des indices des éléments de la classe qui sont contenus dans le cycle n_i dans leur descendance. S'il n'y a qu'un élément de la classe dont la descendance soit contenue dans le cycle, on prend $d_i = n_1$ et de même si aucune différence est non nulle. Alors :

Théorème. *La longueur du cycle appartenant à la descendance de l'homomorphe de la classe est un diviseur commun de* $d_1, d_2, \ldots, d_1$.

Preuve. Il suffit de remarquer d'abord que si l'on met dans une même classe deux éléments X_i et X_n dont la descendance contient le même cycle de longueur n, la longueur n_1 du cycle homomorphe est un diviseur commun de n et $(i-h)$.

Ainsi dans une même classe, on trouve des éléments qui, modulo n_1, ont le même indice. D'autre part, si plusieurs cycles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ ont le même homomorphe, la longueur de ce dernier est un diviseur commun aux longueurs des cycles $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$

Remarque. Si $n_j = 1$, le cycle homomorphe est de longueur 1.

7. Homomorphisme minimal

Nous nommerons ainsi un homomorphisme tel que tout homomorphisme plus fin soit l'isomorphisme de la récurrence.

Pour trouver de tels homomorphismes, nous allons chercher à mettre deux éléments dans le même classe et étudier les conséquences que cela entraîne.

1 e r c a s. Les deux éléments C et D, mis dans la même classe, ont même indice et il existe p tel que $F^p(C) = F^p(D)$.

On obtient un homomorphisme au moins aussi fin en mettant dans la même classe leurs successeurs immédiats, s'ils sont distincts. En continuant, on trouve donc les homomorphismes de finesse maximale suivants. On met dans la même classe deux certains éléments ayant le même successeur immédiat; toutes les autres classes sont formées d'un seul élément.

2 è m e c a s. Les deux éléments C et D mis dans la même classe ont des indices différents et $\hat{F}(C)$ et $\hat{F}(D)$ contiennent le même cycle. On les remplace par des successeurs d'ordre convenable situés dans le cycle. On obtient alors des homomorphismes qui consistent en une division de la longueur du cycle par un nombre d avec conservation des arborescences. Un tel homomorphisme est de finesse maximale si d est premier.

3 è m e c a s. Dans le cas d'un cycle de longueur 1, on aboutit à un résultat différent. On pourra remplacer les deux éléments par certains de leurs successeurs de manière que l'un des éléments soit celui du cycle et l'autre un élément d'indice -1. Un tel homomorphisme est encore minimal.

4 è m e c a s. Les deux éléments, C et D, mis dans la même classe, sont tels que $\hat{F}(C) \cap \hat{F}(D) = \emptyset$. On peut remplacer C et D, chacun par un successeur dont l'homomorphe soit dans le cycle homomorphe.

L'homomorphisme n'est de finesse maxi nale que si les deux cycles ont même longueur et l'homomorphisme consiste alors à confondre les cycles avec conservation des têtes.

8. Treillis à branches pondérées

Nous nommerons branche d'un treillis un couple de deux éléments du treillis a et b avec $a > b$ et $\exists x$, $a > x > b$. Nous attacherons à une telle branche un poids.

Un treillis sera dit à *branche pondérée* s'il a la propriété suivante : la somme des poids de toutes les branches formant une chaîne simple entre deux éléments p et q du treillis, $p > q$, est la même pour toute les chaînes (elle ne dépend que de p et q).

9. Deux pondérations du treillis des homomorphismes

Nous allons indiquer pour ce treillis deux pondérations indépendantes.

a) Remarquons que les homomorphismes minimaux de 1ère et 3ème espèce diminuent de 1 le nombre total des éléments de tête alors que les homomorphismes minimaux de 2ème et 4ème espèce les laissent invariants. Il en résulte immédiatement que l'on obtient une pondération des branches du treillis, en mettant 1 sur les branches de 1ère et 3ème espèce, 0 sur les branches de 2ème et 4ème espèce.

b) Remarquons que les homomorphismes de 4ème espèce réduisent de 1 le nombre des cycles. Il en résulte immédiatement que l'on obtient une pondération en mettant 1 sur les branches de 4ème espèce et 0 sur les autres. D'une manière générale, on cherche à compter les éléments.

10. Autres pondérations

Nous n'avons pas encore pris en considération les homomorphismes de 2ème espèce. Ils définissent des pondérations de la manière suivante. Considérons un cycle bien déterminé et celles des opérations qui réduisent sa longueur. On arrive à une pondération de la manière suivante: on pondère par $\log P$ une branche qui réduit la longueur du cycle considéré par division par p. On pondère par 0 toutes les autres branches.

Remarque. Le cycle peut, au cours des homomorphismes, fusionner avec d'autres.

Voici une dernière pondération. Considérons le nombre d'éléments de cycles.

a) Un homomorphisme de 1ère et 3ème espèce le laisse inchangé. Nous donnerons aux branches correspondantes le poids 0.

b) Un homomorphisme de 2ème espèce le fait passer de n à $n' = n/d$. Nous donnerons à la branche correspondante le poids n/d.

c) Un homomorphisme de 4ème espèce le fait décroitre de n si les cycles confondus sont de longueur n. Nous donnerons à la branche correspondante le poids n.

Reçue le 30 XII 1965

CNRS et Université de Grenoble, France

HOMOMORFISME DE RELAŢII BINARE (I)

(Rezumat)

Se demonstrează un număr de teoreme relative la homomorfisme de relaţii binare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 519.4

LES ALGÈBRES D'ORDRE CINQ, ASSOCIATIVES, COMMUTATIVES ET À UNITÉ PRINCIPALE, À SCALAIRES RÉELS

Note II

ALGÈBRES DÉCOMPOSABLES

PAR

I. ENESCU

Extrait de la communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de Jassy, 29—30 octobre 1966

1. Dans [1] ont été déterminées toutes les algèbres non-isomorphes indécomposables Peirce, ayant les propriétés indiquées dans le titre. Nous allons déterminer maintenant les types décomposables d'algèbres d'ordre cinq, associatives, commutatives et à unité principale, à scalaires réels. Les notations utilisées seront celles introduites dans [1].

2. L'algèbre A a tout au plus cinq composantes Peirce. Nous examinerons chaque cas de décomposition en somme directe, compte tenu de toutes les possibilités correspodantes.

$$\text{I. } A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 \dot{+} A_4 \dot{+} A_5 \,. \qquad \text{S}$$

Toutes les algèbres A_i, $(i = 1,...,5)$, ayant l'ordre un, sont isomorphe au corps réel. Alors l'algebre A est polynômiale [2], générée par le polynôme $\prod_1^5 (\lambda - \lambda_i)$, pouvant être représentée par une table de la forme [3] :

(1)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0
e_3	0	0	e_3	0	0
e_4	0	0	0	e_4	0
e_5	0	0	0	0	e_5

II. $A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 \dot{+} A_4$.

Une composante, par exemple A_1, a l'ordre deux, toutes les autres ayant l'ordre un.

II. 1°. $A_1 = R + N$,

$n_1 = 1$, $n_2 = 0$; $\delta = 1$. N est l'algèbre nulle d'ordre un, ce qui démontre que A est polynômiale [2], avec le polynôme générateur $(\lambda - \lambda_1)^2$ et, représentée dans la base de potences par la table

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	0

,

ce qui démontre que A_1 est l'algèbre des nombres duals.

Alors, A est donnée par la table

(2)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	0	0	e_3	0	0
e_4	0	0	0	e_4	0
e_5	0	0	0	0	e_5

et, évidemment elle est polynômiale, générée par $(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$.

II. 2°. $A_1 = K + N$,

$n_1 = 0$, donc A_1 est le corps complexe et alors A est donnée par la table

(3)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0	0
e_3	0	0	e_3	0	0
e_4	0	0	0	e_4	0
e_5	0	0	0	0	e_5

,

étant polynômiale, générée par $(\lambda^2 + 1)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$.

III. $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Une composante, soit elle A_3, a l'ordre trois, les autres deux ayant l'ordre un.

III. 1°. $A_3 = R + N$,

$n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$; $\delta = 1$. N est potentielle et A_3 est polynômiale, générée par le polynôme $(\lambda - \lambda_0)^3$, ayant dans la base de potences la table

	e_3	e_4	e_5
e_3	e_3	e_4	e_5
e_4	e_4	e_5	0
e_5	e_5	0	0

Alors l'algèbre A est aussi polynômiale, générée par le polynôme $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)^3$, étant représentée par la table

(4)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	e_5
e_4	0	0	e_4	e_5	0
e_5	0	0	e_5	0	0

III. 2°. $A_3 = R + N$,

$n_1 = 2$, $n_2 = 0$, donc N est l'algèbre nulle d'ordre deux et A_3 a la table

	e_3	e_4	e_5
e_3	e_3	e_4	e_5
e_4	e_4	0	0
e_5	e_5	0	0

et alors A est donnée par la table

(5)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	e_5
e_4	0	0	e_4	0	0
e_5	0	0	e_5	0	0

III. 3° $A_3 = K + N$,

$n_1 = 1$, $n_2 = 0$; N est l'algèbre nulle d'ordre un, donc A_3 peut être représentée par une table de la forme

	e_3	e_4	e_5
e_3	e_3	e_4	e_5
e_4	e_4	$-e_3$	αe_5
e_5	e_5	αe_5	0

Mais, compte tenu de la condition $(e_4\, e_4)\, e_5 = e_4\, (e_4\, e_5)$, il en resulte que $\alpha^2 = -1$, ce qui démontre que ce cas n'existe pas.

IV. $A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3$.

Une composante, par exemple A_3, a l'ordre un, les deux autres ayant chaqune l'ordre deux.

IV. 1°. A_1 et A_2 sont de type A_1 du cas II.1° et, alors, l'algèbre A est polynômiale ayant une table de la forme:

(6)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	0
e_4	0	0	e_4	0	0
e_5	0	0	0	0	e_5

avec le polynôme générateur $(\lambda - \lambda_1)^2\, (\lambda - \lambda_2)\, (\lambda - \lambda_3)$.

IV.2°. A_1 ou A_2 est respectivement de type A_1 du cas II.1°, ou de type A_1 du cas II.2° et, alors, A est polynômiale, générée par $(\lambda_2 + 1) \times (\lambda - \lambda_1)^2\, (\lambda - \lambda_2)$, ayant la table

(7)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	0
e_4	0	0	e_4	$-e_3$	0
e_5	0	0	0	0	e_5

IV.3°. A_1 et A_2 sont de type A_1 du cas II.2° et alors A est polynômiale générée par un polynôme de la forme $(\lambda - \lambda_1)(\lambda^2 + a^2)(\lambda^2 + b^2)$, étant donnée par la table

(8)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	0
e_4	0	0	e_4	$-e_3$	0
e_5	0	0	0	0	e_5

V. $A = A_1 + A_2$.

Une composante, soit elle A_2, a l'ordre trois, l'autre ayant l'ordre deux.

V.1°. A_1 est de type A_1 du cas II.1° et A_2 de type A_3 du cas III.2°. Alors, l'algèbre A est donnée par la table :

(9)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	0
e_4	0	0	e_4	0	e_5
e_5	0	0	e_5	0	0

V.2° A_1 est de type A_1 du cas II.1° et A_2 de type A_3 du cas III.3° et alors l'algèbre A à scalaires réels, n'existe pas.

V.3° A_1 est de type A_1 du cas II.2° et A_2 de type A_3 du cas III.2°. Alors, l'algèbre A est donnée par la table

(10)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	0	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4	e_5
e_4	0	0	e_4	0	0
e_5	0	0	e_5	0	0

V.4°. A_1 est de type A_1 du cas II.2° et A_2 de type A_3 du cas III.3°, de sorte que l'algèbre A n'existe pas.

VI. $A = A_1 + A_2$.

Une composante, A_1 par exemple, a l'ordre un et l'autre l'ordre quatre.

VI.1° $A_2 = R + N$,

$n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$; $\delta = 1$. N est potentielle et A_2 est polynômiale, générée par le polynôme $(\lambda - \lambda_0)^4$. Alors, l'algèbre A est aussi polynômiale, générée par $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_0)^4$, étant donnée par la table

(11)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	0	0	0	0
e_2	0	e_2	e_3	e_4	e_5
e_3	0	e_3	e_4	e_5	0
e_4	0	e_4	e_5	0	0
e_5	0	e_5	0	0	0

VI.2°. $A_2 = R + N$,

$n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$; $\delta = 1$ et on voit que c'est la situation présentée au cas II.2° traité dans [1], ce qui démontre que l'algèbre A n'existe pas.

VI.3°. $A_2 = R + N$,

$n_1 = 3$, $n_2 = 0$. N est l'algèbre nulle d'ordre trois et alors A est donnée par la table

(12)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	0	0	0	0
e_2	0	e_2	e_3	e_4	e_5
e_3	0	e_3	0	0	0
e_4	0	e_4	0	0	0
e_5	0	e_5	0	0	0

VI.4°. $A_2 = K + N$,

$n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$; $\delta = 1$. N est potentielle et alors, A_2 a nécessairement une base, dans laquelle la table de multiplication a la forme

	e_2	e_3	e	e_5
e_2	e_2	e_3	e_4	e_5
e_3	e_3	$-e_2$	$\sum_4^5 \alpha_i e_i$	$\sum_4^5 \beta_i e_i$
e_4	e_4	$\sum_4^5 \alpha_i e_i$	e_5	0
e_5	e_5	$\sum_4^5 \beta_i e_i$	0	0

La condition $(e_3 e_5) e_4 = e_3 (e_5 e_4)$, attire que $\beta_4 = 0$. Puis, imposant la condition $e_3 (e_3 e_4) = (e_3 e_3) e_4$, il en résulte $\alpha_4^2 = -1$ et, par conséquence l'algèbre A n'existe pas dans ce cas.

VI.5°. $A_2 = K + N$,

$n_1 = 2$, $n_2 = 0$. N est l'algèbre nulle d'ordre deux et alors A_2 est polynômiale, générée par le polynôme $(\lambda^2 + 1)^2$, c'est-à-dire l'algèbre de Sobrero [4]. Il en résulte que l'algèbre A est polynômiale, générée par le polynôme $\lambda (\lambda^2 + 1)^2$, étant donnée dans la base de potences par la table [3]:

(13)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e	e_1	0	0	0	0
e_2	0	e_2	e_3	e_4	e_5
e_3	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$
e_4	0	e_4	e_5	0	0
e_5	0	e_5	$-e_4$	0	0

3. Les types obtenus sont évidemment non-isomorphes comme il en résulte compte tenu du fait qu'ils diffèrent, soit par les valeurs de n_i, soit par la structure du polynôme générateur. Ont été déterminés treize types d'algèbres décomposables, dont neuf sont polynômiales (données respectivement par les tables (1), (2), (3), (4), (6), (7), (8), (11) et (13)), fait prévisible ayant en vue les types de factorisation sur le corps réel et les résultats établis en [2] et [3]. Parmi eux, ceux données par les tables (1), (3) et (8) sont sémi-simples, étant les seules algèbres, parmi celles étudiées, qui ont cette propriété [2]. Compte tenu des résultats trouvés dans [1], on voit qu'il existe 26 types d'algèbres d'ordre cinq, associatives, commutatives, à unité principale, à scalaires réels et encore un type possible (il s'agit du type (a) signalé dans [1]). Les types trouvés étant déterminés à l'isomorphisme près épuisent complètement la classe d'algèbres qui ont constitué l'objet de cette étude.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Enescu I., *Les algèbres d'ordre cinq, associatives, commutatives et à unité principale, à scalaires réels. Note I. Algèbres indécomposables.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 13—22.
2. — *Asupra algebrelor polinomiale* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3-4*, pp. 25—28.
3. — *Asupra algebrelor polinomiale* (II). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1-2*, pp. 17—20.
4. — *Asupra algebrei numerelor hipercomplexe de ordin finit peste corpul real.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1-2*, pp. 39—43.

ASUPRA ALGEBRELOR ASOCIATIVE, COMUTATIVE ŞI CU UNITATE PRINCIPALĂ DE ORDIN CINCI PESTE CÎMPUL REAL

Nota II

Algebre decompozabile

(Rezumat)

Ţinînd seama că o algebră cu proprietăţile indicate în titlu se descompune într-o sumă directă de cel mult cinci componente Peirce, se determină toate tipurile neizomorfe, studiindu-se toate posibilităţile de descompunere.

S-au obţinut 13 tipuri, dintre care nouă sînt polinomiale, iar dintre acestea trei sînt semisimple (1), (3) şi (8). Considerînd şi cazul indecompozabil tratat în [1], s-au găsit 26 de tipuri neizomorfe de astfel de algebre, precum şi un tip posibil (indicat cu (a) în [1]), care epuizează întreaga clasă de algebre ce au format obiectul acestui studiu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 521.91

EXPONENTIAL FORM FOR THE ELEMENTS OF DIRECTS SUMS OF ALGEBRAS AND SOME APPLICATIONS

BY

ALFRED BRAIER

1. În [1] was introduced an exponential representation for the elements of some associative algebras, with unit, on the real field, which presents a noted importance in the Mechanics of Vibrations [2]...[6].

Let be ε an element of the basis of such an algebra and u its unit, and suppose that

$$\varepsilon^2 = \lambda u, \tag{1}$$

where λ is real. Then defining [1] $e^{x\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \varepsilon^k$, ($x$ real and $\varepsilon^0 = u$), it follows

$$e^{xu} = e^x u, \quad e^{y\varepsilon} = \varphi_\lambda(y)\, u + \psi_\lambda(y)\, \varepsilon, \tag{2}$$

(with y real), where

$$\begin{cases} \varphi_\lambda(y) = \cos(\sqrt{|\lambda|}\, y), & \psi_\lambda(y) = \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \sin(\sqrt{|\lambda|}\, y), \quad \text{if} \quad \lambda < 0, \\ \varphi_\lambda(y) = 1, & \psi_\lambda(y) = y, \quad \text{if} \quad \lambda = 0, \\ \varphi_\lambda(y) = \cosh(\sqrt{\lambda}\, y), & \psi_\lambda(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \sinh(\sqrt{\lambda}\, y), \quad \text{if} \quad \lambda > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Among the applications we point out that for the complex numbers,

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = -\varepsilon_1, \tag{4}$$

it results obviously the usual exponential form

$$w = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 = e^{x\varepsilon_1} e^{y\varepsilon_2} = e^x (\cos y\, \varepsilon_1 + \sin y\, \varepsilon_2),$$
$$e^x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \tan y = \frac{a_2}{a_1}. \tag{5}$$

Likewise, for the $\mathcal{P}$-polynions [2], [5], with

(6)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_4	$-\varepsilon_3$,
ε_3	ε_3	ε_4	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$
ε_4	ε_4	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_2$	ε_1

we have obtained

$$
(7)\quad \begin{cases} w = \sum_{i=1}^{4} a_i \varepsilon_i = e^{X\varepsilon_1} e^{Y\varepsilon_2} e^{Z\varepsilon_3} e^{T\varepsilon_4} = \\ \qquad = e^{X}(\cos Y\,\varepsilon_1 + \sin Y\,\varepsilon_2)(\cos Z\,\varepsilon_1 + \sin Z\,\varepsilon_3)(\cosh T\,\varepsilon_1 + \sinh T\,\varepsilon_4), \\ e^{X} = \sqrt[4]{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - 4(a_1 a_4 - a_2 a_3)^2}, \\ \cosh T, \sinh T = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a_1 + a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2} \pm \sqrt{(a_1 - a_4)^2 + (a_2 + a_3)^2}\right] e^{-X}, \\ \tan Y = \frac{a_2 + a_3 \tanh T}{a_1 - a_2 \tanh T}, \qquad \tan Z = \frac{a_3 + a_2 \tanh T}{a_1 - a_4 \tanh T}, \end{cases}
$$

only for the polynions with

$$
(7')\qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 2\,|\,a_1 a_4 - a_2 a_3\,|\,.
$$

If

$$
(8)\qquad a_1 a_4 = a_2 a_3,
$$

then $T = 0$ and

$$
(9)\qquad w = e^{X\varepsilon_1} e^{Y\varepsilon_2} e^{Z\varepsilon_3}, \quad e^{X} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \quad \tan Y = \frac{a_2}{a_1}, \quad \tan Z = \frac{a_3}{a_1}.
$$

In this paper we prove that the exponential form of the elements of an algebra which is a direct sum of algebras (associative, with unit, on the real field), can be obtained immediately from the exponential form of their elements (if they admet such a form). Also we indicate applications of the results for the symbolic representation of many important driving functions with harmonic amplitude modulation, of interest in mechanics, feedback systems etc.

2. Let be $\mathcal{A}_{m+n}$ an algebra of order $m + n$, direct sum of monomial associative algebras on the real field $\mathcal{A}_m$ and $\mathcal{A}_n$, of order m and respectively n, with ε_1' and ε_1'' their units and

$$
(10)\qquad \varepsilon_j'^2 = \begin{cases} \varepsilon_1', & \text{if } j = 1, \\ \lambda_j' \varepsilon_1', & \text{if } j = 2,\ldots, m; \end{cases} \qquad \varepsilon_k'' = \begin{cases} \varepsilon_1'', & \text{if } k = 1, \\ \lambda_1'' \varepsilon_1'', & \text{if } k = 2,\ldots, n, \end{cases}
$$

with λ_j', $(j = 2,\ldots, m)$, and λ_k'', $(k = 2,\ldots, n)$, real numbers.

Taking into account (1), (2) and (10), we can obtain the exponential form [1] for the elements w' and w'' of $\mathcal{A}_m$ and $\mathcal{A}_n$, namely

$$w' = \sum_{j=1}^{m} a'_j \varepsilon'_j = \prod_{j=1}^{m} e^{x'_j \varepsilon'_j}, \quad w'' = \sum_{k=1}^{n} a''_k \varepsilon''_k = \prod_{k=1}^{n} e^{x''_k \varepsilon''_k}, \tag{11}$$

with

$$\begin{cases} e^{x'_1 \varepsilon'_1} = e^{x'_1} \varepsilon'_1, \quad e^{x'_j \varepsilon'_j} = \varphi_{\lambda'_j}(x'_j)\, \varepsilon'_1 + \psi_{\lambda'_j}(x'_j)\, \varepsilon'_j, \quad (j = 2,\ldots, m); \\ e^{x''_1 \varepsilon''_1} = e^{x''_1} \varepsilon''_1, \quad e^{x''_k \varepsilon''_k} = \varphi_{\lambda''_k}(x''_k)\, \varepsilon''_1 + \psi_{\lambda''_k}(x''_k)\, \varepsilon''_k, \quad (k = 2,\ldots, n), \end{cases} \tag{11'}$$

where x'_j, $(j = 1, 2,\ldots, m)$, and x''_k, $(k = 1, 2,\ldots, n)$, are real numbers.

Obviously, the multiplication table of the algebra $\mathcal{A}_{m+n}$ is

	ε_1	ε_2	ε_3	. . .	ε_m	ε_{m+1}	ε_{m+2}	. . .	ε_{m+n}
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	. . .	ε_m	0	0	. . .	0
ε_2	ε_2	$\lambda_2 \varepsilon_1$	. . . . .			0	0	. . .	0
ε_3	ε_3	. . .	$\lambda_3 \varepsilon_1$	. . . .		0	0	. . .	0
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$		
ε_m	ε_m	. . . . .			$\lambda_m \varepsilon_m$	0	0	. . .	0
ε_{m+1}	0	0	0	. . .	0	ε_{m+1}	ε_{m+2}	. . .	ε_{m+n}
ε_{m+2}	0	0	0	. . .	0	ε_{m+2}	$\lambda_{m+2} \varepsilon_{m+2}$	. . . . .	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			
ε_{m+n}	0	0	0	. . .	0	ε_{m+n}	. . . . .		$\lambda_{m+n} \varepsilon_{m+n}$

(12)

i. e.

$$\varepsilon_j^2 = \begin{cases} \lambda_j \varepsilon_j, & \text{if } j = 1, 2,\ldots, m; \\ \lambda_j \varepsilon_{m+1}, & \text{if } j = m+1, m+2,\ldots, m+n, \end{cases} \tag{13}$$

where

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 1, m+1; \\ \lambda'_j, & \text{if } j = 2,\ldots, m; \\ \lambda''_{j-m}, & \text{if } j = m+1,\ldots, m+n. \end{cases} \tag{13'}$$

The unit of $\mathcal{A}_{m+n}$ (12) is

$$u = \varepsilon_1 + \varepsilon_{m+1}. \tag{14}$$

In view of (1), (2) and (13), (14)

$$e^{x_1 \varepsilon_1} = e^{x_1} \varepsilon_1 + \varepsilon_{m+1}, \quad e^{x_{m+1} \varepsilon_{m+1}} = \varepsilon_1 + e^{x_{m+1} \varepsilon_{m+1}},$$

$$(15) \qquad e^{x_j \varepsilon_j} = \begin{cases} \varphi_{\lambda_j}(x_j)\, \varepsilon_1 + \psi_{\lambda_j}(x_j)\, \varepsilon_j + \varepsilon_{m+1}, & \text{if} \quad j = 2, 3, \ldots, m; \\ \varphi_{\lambda_j}(x_j)\, \varepsilon_{m+1} + \psi_{\lambda_j}(x_j)\, \varepsilon_j + \varepsilon_1, & \text{if} \quad j = m+1, \ldots, m+n. \end{cases}$$

We peose now

$$(16) \qquad \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} = \begin{cases} e^{x_j \varepsilon_j} - \varepsilon_{m+1}, & \text{if} \quad j = 1, 2, \ldots, m; \\ e^{x_j \varepsilon_j} - \varepsilon_1, & \text{if} \quad j = m+1, \ldots, m+n, \end{cases}$$

i. e. (s. (16) and (14))

$$(16') \qquad \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} = \begin{cases} e^{x_1} \varepsilon_1, & \text{if} \quad j = 1; \\ \varphi_{\lambda'_j}(x_j)\, \varepsilon_1 + \psi_{\lambda'_j}(x_j)\, \varepsilon_j, & \text{if} \quad j = 2, 3, \ldots, m; \\ e^{x_{m+1}} \varepsilon_{m+1}, & \text{if} \quad j = m+1; \\ \varphi_{\lambda''_{j-m}}(x_j)\, \varepsilon_{m+1} + \psi_{\lambda''_{j-m}}(x_j)\, \varepsilon_j, & \text{if} \quad j = m+2, \ldots, m+n. \end{cases}$$

One proves easily that

$$(17) \qquad e^{x_j \varepsilon_j} e^{x_k \varepsilon_k} = \begin{cases} \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} \tilde{e}^{x_k \varepsilon_k} + \varepsilon_{m+1}, & \text{if} \quad j, k = 1, 2, \ldots, m; \\ \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} \tilde{e}^{x_k \varepsilon_k} + \varepsilon_1, & \text{if} \quad j, k = m+1, \ldots, m+n; \\ \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} + \tilde{e}^{x_k \varepsilon_k}, & \text{if} \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = m+1, \ldots, m+n, \end{cases}$$

since (s. (12))

$$\varepsilon_k \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} = \begin{cases} \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j}, & \text{if} \quad k = 1, j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{and} \quad k = m+1, \ j = m+1, \ldots, m+n; \\ 0, & \text{if} \quad k = 1, j = m+1, \ldots, m+n \quad \text{and} \quad k = m+1, \ j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Then, because $\prod_{i=1}^{m+n} e^{x_i \varepsilon_i}$ gives an element $w = \sum_{i=1}^{m+n} a_i \varepsilon_i$ of the algebra $\mathcal{A}_{m+n}$ (12), from (17) it follows

$$(18) \qquad w = \prod_{i=1}^{m+n} e^{x_i \varepsilon_i} = \prod_{j=1}^{m} \tilde{e}^{x_j \varepsilon_j} + \prod_{k=m+1}^{m+n} \tilde{e}^{x_k \varepsilon_k} = \sum_{i=1}^{m+n} a_i \varepsilon_i \left(= \sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_j + \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \varepsilon_k \right).$$

Comparing (10) with (13) as well as (11), (11′) with (18), (16′) we conclude that *if an algebra $\mathcal{A}_{m+n}$ is a direct sum of associative algebras $\mathcal{A}_m$ and $\mathcal{A}_n$, with unit, on the real field, whose elements can be writen under the exponential form introduced in* [1], *than the same elements of $\mathcal{A}_{m+n}$ can take such a form. The quantities which occur in the exponential form are*

effectivelly determined at the level of $\mathcal{A}_m$ (namely the first m quantities x_i) and $\mathcal{A}_n$ (the remaining n).

The result is most valuable in the Theory of Vibrations, where numerous driving functions are sums of other more simple. According to [2], the algebra which is capable to represent symbolically the first driving functions, is the direct sum of those which represent the latest. Than, knowing their exponential forms, one can establish effectivelly, without new calculations, the required exponential form of the given driving function.

3. Let us consider some applications.

a) In order to obtain the exponential form of the elements of the algebra which represent symbolically the function [1]

$$f(t) = [A + B\sin(\omega t + \alpha)]\,e^{ht}, \tag{19}$$

it should be remarked that $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, where $f_1(t) = Ae^{ht}$ and $f_2(t) = B\,e^{ht}\sin(\omega t + \alpha)$ are representable by respectivelly the real and the complex algebras ($\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1'$ and $\varepsilon_1''^2 = \varepsilon_1''$, $\varepsilon_1''\varepsilon_2'' = \varepsilon_2''\varepsilon_1'' = \varepsilon_2''$, $\varepsilon_2''^2 = -\varepsilon_1''$).

Therefore

$$w = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\varepsilon_i = e^{X\varepsilon_1}e^{Y\varepsilon_2}e^{Z\varepsilon_3} = \tilde{e}^{X\varepsilon_1} + \tilde{e}^{Y\varepsilon_2}\tilde{e}^{Z\varepsilon_3} = \tag{20}$$

$$= e^{X}\,\varepsilon_1 + e^{Y}(\cos Z\,\varepsilon_2 + \sin Z\,\varepsilon_3).$$

In view of [1], [3], in this case

$$a_1 = A, \quad a_2 = B\cos\alpha, \quad a_3 = B\sin\alpha. \tag{20'}$$

Then

$$e^{X} = A, \quad e^{Y} = B, \quad Z = \alpha, \tag{21}$$

therefore, the exponential form of the element which can be attached to the function (19) is $w = A\varepsilon_1 + B\tilde{e}^{\alpha\varepsilon_3}$, ($\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2\varepsilon_3 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_3^2 = -\varepsilon_1$).

b) The important oscillations with amplitude modulation are described by

$$f(t) = Ae^{ht}[1 + \mu\sin(\omega t + \alpha)]\sin(pt + \beta), \tag{22}$$

which can be regarded as resulting from the addition of $Ae^{ht}\sin(pt + \beta)$, representable by complex numbers, and $A\mu e^{ht}\sin(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta)$, representable by $\mathcal{P}$-polynions (s., for instance, [1]). The functions (22) are representable by elements of the direct sum of the complex and $\mathcal{P}$-poly-

nions algebras. The particular element $w = \sum_{i=1}^{6} a_i \varepsilon_i$ attached to (22) is characterised by [1]

$$(23)\quad \begin{cases} a_1 = A\cos\beta, & a_2 = A\sin\beta, & a_3 = A\mu\cos\beta\cos\alpha, \\ a_4 = A\mu\sin\beta\cos\alpha, & a_5 = A\mu\cos\beta\sin\alpha, & a_6 = A\mu\sin\beta\sin\alpha, \end{cases}$$

with obviously

$$(23')\qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_5}{a_6}.$$

The exponential form (18) of some element of the analysed algebra is (s. (5) and (7))

$$(24)\qquad w = e^{X\varepsilon_1} e^{Y\varepsilon_2} e^{Z\varepsilon_3} e^{P\varepsilon_4} e^{Q\varepsilon_5} e^{T\varepsilon_6} = \tilde{e}^{X\varepsilon_1}\tilde{e}^{Y\varepsilon_2} + \tilde{e}^{Z\varepsilon_3}\tilde{e}^{P\varepsilon_4}\tilde{e}^{Q\varepsilon_5}\tilde{e}^{T\varepsilon_6},$$

where

$$(25)\quad \begin{cases} e^X = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \tan Y = \dfrac{a_2}{a_1}, \quad e^Z = \sqrt[4]{(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)^2 - 4(a_3 a_6 - a_4 a_5)^2}, \\ \cos T, \ \sinh T = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(a_3 + a_6)^2 + (a_4 - a_5)^2} \pm \sqrt{(a_3 - a_6)^2 + (a_4 + a_5)^2}\right] e^{-Z}, \\ \tan P = \dfrac{a_4 + a_5 \tanh T}{a_3 + a_6 \tanh T}, \quad \tan Q = \dfrac{a_5 + a_4 \tanh T}{a_3 - a_6 \tanh T}. \end{cases}$$

With the $a_1, \ldots, a_6$ (23), the relations (25) give

$$(25')\qquad e^X = A, \quad Y = P = \beta, \quad e^Z = A\mu, \quad Q = \alpha, \quad T = 0;$$

therefore the element attached to (22) has the following exponential form

$$(26)\qquad w = A\left(\tilde{e}^{\beta\varepsilon_2} + \mu\tilde{e}^{\beta\varepsilon_4}\tilde{e}^{\alpha\varepsilon_5}\right),$$

which underlines the direct connection between the quantities which intervene in the exponential form and the amplitude, degree of modulation, phase angles.

The elements of the analysed algebra $\mathcal{A}_6$ which do not satisfy the particular condition (23'), and have

$$(25'')\qquad |a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2| > 2|a_3 a_6 - a_4 a_5|,$$

---

[1] The quantities h, ω and p occur only in the derivation operator $d = h(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \omega\varepsilon_2 + p\varepsilon_4$, which multiplies w and gives $w(') = dw$, which represent symbolically, in the same conditions, the derivative with respect to t of the function (22) (s. [2]...[4] for more details connected with this symbolic representations of functions).

may be put easily under the form of a sum of two elements of this kind, by remarking, for instance, that $\widetilde{e}^{T\varepsilon_6} = \cosh T\varepsilon_3 + \sinh T\varepsilon_6$, with $\varepsilon_6 = \varepsilon_4\,\varepsilon_5$ and $\varepsilon_4 = \widetilde{e}^{\frac{\pi}{2}\varepsilon_4}$, $\varepsilon_5 = \widetilde{e}^{\frac{\pi}{2}\varepsilon_5}$.

If we write

$$w = A_1(\widetilde{e}^{\beta\varepsilon_2} + \mu_1\widetilde{e}^{\beta\varepsilon_4}\widetilde{e}^{\alpha\varepsilon_5}) + \tag{27}$$
$$+ A_2[\widetilde{e}^{(\beta+\pi/2)\varepsilon_2} + \mu_2\widetilde{e}^{(\beta+\pi/2)\varepsilon_1}\widetilde{e}^{(\alpha+\pi/2)\varepsilon_5}] = \sum_{i=1}^{6} a_i\,\varepsilon_i$$

and carry out the necessary calculations, it results the following equations which give A_1, A_2, μ_1, μ_2, β and α:

$$\begin{cases} A_1\cos\beta - A_2\sin\beta = a_1, \quad A_1\sin\beta + A_2\cos\beta = a_2, \\ A_1\mu_1\cos\beta\cos\alpha + A_2\mu_2\sin\beta\sin\alpha = a_3, \\ A_1\mu_1\sin\beta\cos\alpha - A_2\mu_2\cos\beta\sin\alpha = a_4, \\ A_1\mu_1\cos\beta\sin\alpha - A_2\mu_2\sin\beta\cos\alpha = a_5, \\ A_1\mu_1\sin\beta\sin\alpha + A_2\mu_2\cos\beta\cos\alpha = a_6. \end{cases} \tag{28}$$

One obtains

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\Gamma_\beta^2+1} - \Gamma_\beta, \quad \text{with} \quad \Gamma_\beta = \dfrac{a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2}{2\,(a_3\,a_4 + a_5\,a_6)}, \\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\Gamma_\alpha^2+1} - \Gamma_\alpha, \quad \text{with} \quad \Gamma_\alpha = \dfrac{a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2}{2\,(a_3\,a_5 + a_4\,a_6)}, \\ A_1 = \dfrac{a_1 + a_2\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}, \quad A_2 = \dfrac{a_2 - a_1\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}, \\ A_1\mu_1,\ A_2\mu_2 = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(a_3+a_6)^2+(a_4-a_5)^2} \pm \sqrt{(a_3-a_6)^2+(a_4+a_5)^2}\right]. \end{cases} \tag{29}$$

Therefore, a certain element of the analysed algebra represents symbolically the function

$$f(t) = A_1[1+\mu_1\sin(\omega t+\alpha)]\sin(pt+\beta) + A_2[1+\mu_2\cos(\omega t+\alpha)]\cos(pt+\beta) \tag{30}$$

(the negative values of A_1, A_2, μ_1 or μ_2 show an opposite phase of the respective oscillation); if (23′) holds, $A_2 = 0$.

The result (30) reflects some new properties of the oscillatory motion with amplitude modulation. We shall see in an other paper, that these

properties present an obvious interest from a cinematic point of view (composition of such motions) as well as, particularly, from a dynamic one (response of a linear constant coefficient system under the action on his input of a driving force of type (22)).

Received the 25 VI 1967

Polytechnic Institute of Jassy,
Departement of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *Exponential Form of the Elements of some Algebras.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 115—122.
2. — *Sur la représentation par des nombres hypercomplexes des fonctions réelles d'une variable.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XVI)**, *1—2*, pp. 89—96.
3. — *La représentation des fonctions qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XVI)**, *3—4*, pp. 93—100.
4. — *Représentation symbolique des produits de fonctions.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 63—70.
5. Braier A., Rosman H., *Utilizarea polinioniilor pentru studiul unor mişcări forţate ale sistemelor liniare.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 308—320.
6. — *Mişcarea forţată a oscilatorului liniar supus la perturbaţii modulate în amplitudine.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 315—325.

FORMA EXPONENŢIALĂ A ELEMENTELOR UNOR SUME DIRECTE DE ALGEBRE ŞI UNELE APLICAŢII

(Rezumat)

Se demonstrează că dacă algebra $\mathcal{A}_{m+n}$ este suma directă a algebrelor asociative $\mathcal{A}_m$ şi $\mathcal{A}_n$, cu unitate, pe corpul real, ale căror elemente pot fi puse sub forma exponenţială introdusă în [1], atunci şi elementele lui $\mathcal{A}_{m+n}$ pot fi scrise sub această formă. Mărimile care intervin însă aici sînt efectiv determinate la nivelul algebrelor $\mathcal{A}_m$ şi $\mathcal{A}_n$.

Ca aplicaţie se stabileşte forma exponenţială a elementelor algebrei care reprezintă simbolic oscilaţiile modulate în amplitudine (22).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

D. C. 517.56

THE REDUCED POISSON-HANKEL TRANSFORM (I)

BY

DEBORAH TEPPER HAIMO *)

1. Introduction

The generalized heat equation is given by

$$\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t), \tag{1.1}$$

where $\Delta_x f(x) = f''(x) + (2\nu/x) f'(x)$, ν a fixed positive number. The fundamental solution of this equation is the function

$$G(x, y; t) = \left(\frac{1}{2t}\right)^{\nu+1/2} e^{-(x^2+y^2)/4t} \vartheta\left(\frac{xy}{2t}\right), \tag{1.2}$$

where

$$\vartheta(z) = 2^{\nu-1/2}\,\Gamma(\nu + 1/2)\, z^{1/2-\nu}\, I_{\nu-1/2}(z),$$

$I_\alpha(z)$ being the Bessel function of imaginary argument of order α. We write $G(x, 0; t)$ as $G(x; t)$. With $G(x, y; t)$ as kernel, we define the Poisson–Hankel integral transform of a function φ, integrable on every finite interval, as the function $u(x, t)$ given by

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x, y; t)\, \varphi(y)\, d\mu(y), \qquad d\mu(y) = \frac{y^{2\nu}}{2^{\nu-1/2}\,\Gamma(\nu + 1/2)}\, dy,$$

whenever the integral converges. In a recent paper of F. M. Cholewinski and D. T. Haimo [1], inversion and representation theorems were established for this transform.

It is our aim here to obtain similar results for the reduced Poisson-Hankel transform derived by taking $G(y; t)$ as kernel, that is, for

$$f(t) = \int_0^\infty G(y; t)\, \varphi(y)\, d\mu(y), \tag{1.4}$$

extending, in part, some of the theorems established by D. V. Widder in [7].

---

*) The research was supported by a National Science Foundation fellowship at Harvard University.

2. Inversion

In order to derive an inversion theory for the transform (1.4), we need two preliminary lemmas.

Lemma 2.1. *For* $0<x,\ y<\infty,\ 0<t<\infty$,

$$G(x,y;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}x^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}G(y;t). \tag{2.1}$$

Proof. The lemma is readily established on expanding $G(y,x;t)$ in powers of x and noting that

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n}G(x,y;t)\Big|_{x=0}=\frac{(2n)!\,\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}G(y;t).$$

Lemma 2.2. *For* $0\leqslant y<\infty,\ 0<t<\infty$,

$$\text{(a)}\quad\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}G(y;t)\right|\leqslant A\left(\frac{n+\nu-1/2}{t}\right)^{n+\nu}e^{-n}t^{-1/2}e^{-y^2/8t}, \tag{2.2}$$

$$\text{(b)}\quad\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}G(y;t)\right|\leqslant A\left(\frac{n+\nu-1/2}{t}\right)^{n+\nu}e^{-n}t^{-3/2}ye^{-y^2/8t}, \tag{2.3}$$

for some constant A.

Proof. The first fact follows from (2.15) and (3.11) of [5], and the second is a result of the identity

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}G(y;t)=(2t)^{-2n}yG(y;t)\left[2nP_{n-1,\nu+1}(y,-t)-\frac{1}{2t}P_{n,\nu}(y,-t)\right],$$

where the $P_{n,\nu}(x,t)$ are the generalized heat polynomials, and of the estimate (3.10) of [5].

We now may establish the principal result.

Theorem 2.3. *Let* φ *be a function integrable on every finite interval, and let*

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}G(y;t)\,\varphi(y)\,d\mu(y), \tag{2.4}$$

the integral converging absolutely for $0<t<\varrho$. *If*

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[\varphi(y)-\varphi(x)]\,d\mu(y)=0, \tag{2.5}$$

then

$$\varphi(y)=\lim_{t\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}y^{2n}f^{(n)}(t). \tag{2.6}$$

Proof. Consider

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x,y;t)\,\varphi(y)\,d\mu(y), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2.7}$$

with $\varphi(y)$ satisfying the conditions of the theorem. Since the integral (2.4) converges absolutely for $0 < t < \varrho$, so does the integral (2.7). As a consequence of lemma 2.1, we then have

$$u(x,t) = \int_0^\infty \varphi(y)\,d\mu(y) \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\,x^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(y;t) = \tag{2.8}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\,x^{2n}\int_0^\infty \varphi(y)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(y;t)\,d\mu(y),$$

provided that termwise integration is valid. That this is so follows from the fact that

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\,x^{2n}\int_0^\infty |\varphi(y)|\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(y;t)\right| d\mu(y) \tag{2.9}$$

is dominated by

$$C_\nu(t)\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-n}\,x^{2n}}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\left(\frac{n+\nu-1/2}{t}\right)^{n+\nu}\int_0^\infty e^{-y^2/8t}\,|\varphi(y)|\,d\mu(y), \tag{2.10}$$

which is finite since the absolute convergence of the integral (2.4) for $0 < t < \varrho$ assures the convergence of the integral of (2.10) for $0 < t < \varrho/2$, and the ratio test establishes the finiteness of the sum of (2.10) for $0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$. Further, since the integral of (2.8) converges uniformly for $0 < t < \varrho/2$, we have that

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\,x^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \int_0^\infty G(y;t)\,\varphi(y)\,d\mu(y) = \tag{2.10}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\,x^{2n} f^{(n)}(t).$$

By an appeal to theorem 6.1 of [1], we have that

$$\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = \varphi(x) \tag{2.12}$$

and hence the proof is complete.

Received the 24 X 1965

Southern Illinois University
and
Harvard University,
USA

BIBLIOGRAPHY

1. Cholewinski F. M., Haimo D. T., *The Weierstrass-Hankel Convolution Transform.* J. d'Anal. Math., (to appear).
2. — *Integral Representations of Solutions of the Generalized Heat Equation,* (to appear).
3. Haimo D. T., *Generalized Temperature Functions.* Duke Math. J., (to appear).
4. — *Functions with the Huygens Property.* Bull. Amer. Math. Soc., 1965, pp. 528—532.
5. — *Expansions in Terms of Generalized Heat Polynomials and of their Appell Transforms.* J. Math. and Mech., (to appear).
6. Hirschman I. I., Widder D. V., *The Convolution Transform.* Princeton Univ. Press, 1955.
7. Widder D. V., *The Inversion of a Transform related to the Laplace Transform and to Heat Conduction.* J. Australian Math. S., 1964, pp. 1—14.
8. — *The Laplace Transform.* Princeton Univ. Press, 1941.

TRANSFORMAREA REDUSĂ A LUI POISSON-HANKEL

(Rezumat)

Autorul, ţinînd seama de unele rezultate proprii [3], [4] referitoare la studiul unor funcţii de temperatură generalizate, precum şi de literatura actuală în domeniul ecuaţiilor de transfer a căldurii, expune, în legătura cu ecuaţia calorică generalizată (1.1), un număr de probleme referitoare la transformarea redusă a lui Poisson-Hankel.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

D. C. 517.564.3

INTEGRALS AND SERIES INVOLVING BESSEL FUNCTIONS (I) [1]

BY

REINHARD MÜLLER

1. Notation

We denote two different Cylinderfunctions of the same order ν by $C_\nu(z)$ and $\widetilde{C}_\nu(z)$, respectively. k, l, m, n are integers; λ, μ, ν real or complex numbers.

The function of the second kind is used in the form

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \quad Y_n(z) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z).$$

We write for the derivatives

$$\frac{\partial}{\partial z} C_\nu(z)\Big|_{z=z_0} = C'_\nu(z_0), \quad \frac{\partial}{\partial \nu} C_\nu(z)\Big|_{\nu=\mu} = \frac{\partial}{\partial \nu} C(\mu, z).$$

The constants of integration of indefinite integrals are omitted.

$$(1)\quad \int z^{-3/2} C_\nu(z)\cos z\,dz = \frac{2z^{1/2}}{4\nu^2-1}\left[2\sin z\, C_\nu(z) + \cos z\left(C_{\nu-1} + \frac{C_\nu}{z} - C_{\nu+1}\right)\right],$$

$$(2)\quad \int z^{-3/2} C_\nu(z)\sin z\,dz = \frac{2z^{1/2}}{4\nu^2-1}\left[-2\cos z\, C_\nu(z) + \sin z\left(C_{\nu-1} + \frac{C_\nu}{z} - C_{\nu+1}\right)\right].$$

Using the multiplication theorem, we find

---

[1]) Various extensions concerning Bessel functions, partially published in this *Bulletin*, belong to N. Ciorănescu, D. Mangeron and their pupils [1]...[3].

$$\int_0^z z^\nu e^{\alpha z} \cos \beta z \, J_\nu(z) \, dz =$$

$$(3) \quad = \frac{\lambda^\nu}{2} e^{(\alpha+i\beta)z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right)^k \frac{1}{k!} \frac{z^{\nu+k+1}}{2\nu+2k+1} \left[J_{\nu+k}\left(\frac{z}{\lambda}\right) - iJ_{\nu+k+1}\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda'^\nu}{2} e^{(\alpha-i\beta)z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda'^2}{2\lambda'}\right)^k \frac{1}{k!} \frac{z^{\nu+k+1}}{2\nu+2k+1} \left[J_{\nu+k}\left(\frac{z}{\lambda'}\right) - iJ_{\nu+k+1}\left(\frac{z}{\lambda'}\right)\right],$$

where

$$\lambda = \frac{i}{\alpha + i\beta}, \quad \lambda' = \frac{i}{\alpha - i\beta}.$$

Provided that $|1 - \lambda^2| < 1$, we may replace in Eq. (3) J_ν by C_ν. A similar expansion for the integral (3) with $\sin \beta z$ instead of $\cos \beta z$ is readily obtained.

Since

$$\int e^z \left| z^\nu C_\nu(z) - \frac{2}{2\nu+1} z^{\nu+1} C_{\nu+1}(z) \right| dz = \frac{e^z z^{\nu+1}}{2\nu+1} (C_\nu - C_{\nu+1}),$$

$$\int e^{-z} \left| z^\nu C_\nu(z) - \frac{2}{2\nu+1} z^{\nu+1} C_{\nu+1}(z) \right| dz = \frac{e^{-z} z^{\nu+1}}{2\nu+1} (C_\nu + C_{\nu+1}),$$

$$\int e^z \left| z^{-\nu} C_\nu(z) - \frac{2\nu+1}{2} z^{-(\nu+1)} C_{\nu+1}(z) \right| dz = \frac{e^z z^{-\nu}}{2} (C_\nu + C_{\nu+1}),$$

$$\int e^{-z} \left| z^{-\nu} C_\nu(z) - \frac{2\nu+1}{2} z^{-(\nu+1)} C_{\nu+1}(z) \right| dz = \frac{e^{-z} z^{-\nu}}{2} (-C_\nu + C_{\nu+1}),$$

we get by writing such equations for ν, $\nu + 1$,..., multiplying them by appropriate factors, and adding them

$$\int e^z z^\nu J_\nu(z) \, dz = e^z 2^{-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{z^{\nu+1}(J_\nu - J_{\nu+1})}{\Gamma(\nu + 3/2)} + \right.$$

$$(4) \quad \left. + \frac{z^{\nu+2}(J_{\nu+1} - J_{\nu+2})}{\Gamma(\nu + 5/2)} + \ldots \right],$$

$$\int e^{-z} z^\nu J_\nu(z) \, dz = e^{-z} 2^{-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{z^{\nu+1}(J_\nu + J_{\nu+1})}{\Gamma(\nu + 3/2)} + \right.$$

$$(5) \quad \left. + \frac{z^{\nu+2}(J_{\nu+1} + J_{\nu+2})}{\Gamma(\nu + 5/2)} + \ldots \right],$$

$$\int e^z z^{-\nu} J_\nu(z)\,dz = \frac{e^z 2^{-1}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) z^{-\nu}(J_\nu + J_{\nu+1}) + \right. \tag{6}$$
$$\left. + \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{-(\nu+1)}(J_{\nu+1} + J_{\nu+2}) + \cdots\right],$$

$$\int e^{-z} z^{-\nu} J_\nu(z)\,dz = \frac{e^{-z} 2^{-1}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) z^{-\nu}(-J_\nu + J_{\nu+1}) + \right. \tag{7}$$
$$\left. + \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) z^{-(\nu+1)}(-J_{\nu+1} + J_{\nu+2}) + \cdots\right].$$

By linear combination we may obtain from (4)...(7) similar integrals for the functions of the second kind, using the equation which defines $Y_\nu(z)$.

We have the equation

$$\int\left[z^\mu C_\nu(z) - \frac{z^{\mu+1} C_{\nu+1}(z)}{\mu+\nu+1}\right] dz = \frac{z^{\mu+1} C_\nu(z)}{\mu+\nu+1},$$

whence

$$\int z^\mu J_\nu(z)\,dz = z^\mu \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\left[\frac{(z/2) J_\nu(z)}{\Gamma((\mu+\nu+3)/2)} + \right. \tag{8}$$
$$\left. + \frac{(z/2)^2 J_{\nu+1}(z)}{\Gamma((\mu+\nu+5)/2)} + \cdots\right].$$

Changing ν into $-\nu$ and proceeding as above indicated, we get a formula for the integral $\int z^\mu Y_\nu(z)\,dz$.

Received the 21 XII 1965

University of Otago,
Dunedin, New Zealand

LITERATURE

1. Soni R. P., J. Math. and Phys., 1965, **44**, pp. 406—407.
2. Streifer W., J. Math. Phys., 1965, **44**, pp. 403—405.
3. Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *1—2*, pp. 21—27.

INTEGRALE ŞI SERII CONŢINÎND FUNCŢIILE LUI BESSEL (I)

(Rezumat)

Autorul stabileşte, în cadrul problemei de evaluare a integralelor şi a seriilor conţinînd funcţiile lui Bessel, unele evaluări noi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 1—2, 1967

УДК 517.521

ОДНА ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ n СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Д. Д. БАЙНОВ

В этой заметки докажем формулу

$$(1)\qquad \prod_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(p)} x^k = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k-n+1}\prod_{s=1}^{n-2}{}^{*}\sum_{r_{s+1}=r_s+1}^{k-n+s+1} b_{r_1}^{(1)} b_{k-r_{n-1}}^{(n)} b_{r_{s+1}-r_s}^{(s+1)} x^k$$

для $n \geqq 2$, где

$$(2)\qquad \prod_{s=1}^{n-2}{}^{*} = \begin{cases} 1 & \text{при } n > 2, \\ \prod\limits_{s=1}^{n-2} & \text{при } n > 2. \end{cases}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Непосредственной проверкой можно установить, что формула (1) верна для $n = 2$. Допускаем, что она справедлива для некоторого целого числа n. Докажем, что справедлива и дла следующего целого числа — $n + 1$. Для этой цели умножаем равенство (1) на степенный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^{(0)} x^k$ и получаем

$$\prod_{p=}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(p)} x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(0)} x^k\right)\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k-n+1}\prod_{s=1}^{n-2}{}^{*}\sum_{r_{s+1}=r_s+1}^{k-n+s+1} b_{r_1}^{(1)} b_{k-r_{n-1}}^{(n)} b_{r_{s+1}-r_s}^{(s+1)} x^k =$$

$$(3)\qquad = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{r_0=1}^{k-n}\prod_{s=0}^{n-2}{}^{*}\sum_{r_{s+1}=r_s+1}^{k-n+s+1} b_{r_0}^{(0)} b_{k-r_{n-1}}^{(n)} b_{r_{s+1}-r_s}^{(s+1)} x^k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{r_0=1}^{k-n}\prod_{s=0}^{n-2}{}^{*}\sum_{r_{s+1}=r_s+1}^{k-(n+1)+(s+1)+1} b_{r_0}^{(0)} b_{k-r_{n-1}}^{(n)} b_{r_{s+1}-r_s}^{(s+1)} x^k.$$

Полагаем

$$b_k^{(p)} = \bar{b}_k^{(p+1)}, \quad r_p = \bar{r}_{p+1}, \quad (p = 0, 1, \ldots, n),$$

и получаем

$$\prod_{p=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k^{(p)} x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\bar{r}_1=1}^{k-n} \prod_{s=0}^{n-2}{}^{*} \sum_{\bar{r}_{s+2}=\bar{r}_{s+1}+1}^{k-(n+1)+(s+1)+1} \bar{b}_{\bar{r}_1}^{(1)} \bar{b}_{k-\bar{r}_n}^{(n+1)} \bar{b}_{\bar{r}_{s+2}-\bar{r}_{s+1}}^{(s+2)} x^k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\bar{r}_1=1}^{k-n} \prod_{s=1}^{n-1}{}^{*} \sum_{\bar{r}_{s+1}=\bar{r}_{s+1}}^{k-(n+1)+s+1} \bar{b}_{\bar{r}_1}^{(1)} \bar{b}_{k-\bar{r}_n}^{(n+1)} \bar{b}_{\bar{r}_{s+1}-\bar{r}_s}^{(s+1)} x^k.$$

Этим доказательство выполнено.

Поступила 24 I 1967 г.

Институт механики и электротехники, София, Н. Р. Болгария

O FORMULĂ RELATIVĂ LA PRODUSUL A *n* SERII DE PUTERI

(Rezumat)

Autorul expune în această Notă unul din rezultatele obținute cu prilejul elaborării tezei sale de doctorat, susținută la Universitatea „M. V. Lomonosov" din Moscova (martie 1967), și anume, o formulă relativă la produsul a *n* ser.i de puteri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 517.512

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Ф. В. ТОМАШЕВИЧ и С. У. КУРТЯКОВ

Определим векторное пространство $\mathcal{K}$ как множество точек и векторов посредством системы Вейля-Рашевского [1, гл. **I**, § 6], в которой отсутствует аксиома размерности. Пусть пространство полно, то есть всякая последовательность векторов

$$\{\mathbf{a}_k\}, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

сходящаяся в себе, сходится к некоторому вектору пространства $\mathcal{K}$ (т. е. из $|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n| < \varepsilon$ при $m > n > N$ следует, что $|\mathbf{a} - \mathbf{a}_k| < \varepsilon'$ при $k > N'$).

Пусть заданы вектор $\mathbf{b}$ и линейно не зависимая последовательность (1) (т. е. определитель Грама $g_n = g(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \neq 0$ при любом n), причем векторы $\mathbf{b}$ и (1) имеют общее начало. Спроектируем вектор $\mathbf{b}$ на n-плоскость, натянутую на n первых векторов (1). Тогда

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}'(n) + \mathbf{b}''(n), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{b}'(n) = -\frac{1}{g_n}\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{b}) & & \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}) & & g_n \\ \ldots\ldots & & \\ (\mathbf{a}_n\mathbf{b}) & & \end{vmatrix} \tag{3}$$

— проекция вектора $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}''(n)$ — вектор, проектирующий конец $\mathbf{b}$ на n-плоскость, и $|\mathbf{b}''(n)|^2 = g_n^0/g_n$, $g_n^0 = g(\mathbf{b}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n)$ — определить Грама.

Так как последовательность $|\mathbf{b}''(n)|^2$ монотонно убывает и ограничена снизу, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{b}''(n)|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n^0}{g_n} = |\mathbf{b}|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{e_n^0}{e_n}, \tag{4}$$

(e_n^0 — единичный определитель Грама, построенный на векторах $\mathbf{b}$ и (1), предварительно нормированных).

Этот предел (4) может быть положительным или равным нулю. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n^0}{e_n} > 0, \tag{5}$$

то неравенство (5) представляет обобщенное неравенство Бесселя. Если же

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n^0}{e_n} = 0, \tag{6}$$

то равенство (6) является обобщенной формулой замкнутости (Ляпунова-Парсеваля). В случае, когда векторы $\mathbf{a}_k$ ортонормированы, тогда $e_n = 1$,

$$e_n^0 = \begin{vmatrix} (\mathbf{bb}) & (\mathbf{ba}_1) & (\mathbf{ba}_2) & \dots & (\mathbf{ba}_n) \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{b}) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{a}_n\mathbf{b}) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (\mathbf{bb}) - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{ba}_k)^2$$

и равенство (6) представляет обычную формулу замкнутости для системы $\{\mathbf{a}_k\}$.

Величина $|\mathbf{b}''(n)|^2 = |\mathbf{b}|^2 e_n^0/e_n$ служит мерой отклонения вектора $\mathbf{b}$ от n-плоскости; если $|\mathbf{b}''(n)|^2 = 0$, то вектор $\mathbf{b}$ принадлежит n-плоскости. Принимая предел (4) за меру отклонения, приходим к понятию бесконечномерной плоскости.

Определение. Множество всех векторов $\mathbf{b}$ с общим началом, удовлетворяющих условию замкнутости (6), назовем ∞-плоскостью с базисом $\{\mathbf{a}_k\}$.

Формула замкнутости является таким образом условием принадлежности вектора $\mathbf{b}$ ∞-плоскости. При этом необходимым условием является равенство:

$$\lim_{n\to\infty} e_n^0 = 0. \tag{7}$$

Если же

(8) $$\lim_{n\to\infty} e_n > 0,$$

то равенство (7) является необходимым и достаточным условием этой принадлежности (последовательность e_n сходится как монотонно убывающая, ограниченная снизу).

Теорема А. *Каков бы ни был вектор* $\mathbf{b}$ *пространства* $\mathcal{H}$, *существует*

(9) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{b}'(n) = \mathbf{b}',$$

причем вектор $\mathbf{b}'$ *принадлежит* $\mathcal{H}$ *и*

(10) $$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{b}'(n)| = |\mathbf{b}'|.$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$; пусть $m > n$.

$$|\mathbf{b}'(m) - \mathbf{b}'(n)|^2 = |\mathbf{b}'(m)|^2 + |\mathbf{b}'(n)|^2 - 2(\mathbf{b}'(m), \mathbf{b}'(n)).$$

Но $\mathbf{b}'(m) = \mathbf{b}'(n) + \mathbf{b}''(n) - \mathbf{b}''(m)$, причем векторы $\mathbf{b}''(n)$, $\mathbf{b}''(m)$ перпендикулярны n-плоскости векторов $\mathbf{a}_k, (k = 1, \ldots, n)$. Поэтому $(\mathbf{b}'(m), \mathbf{b}'(n)) = |\mathbf{b}'(n)|^2$ и

(11) $$|\mathbf{b}'(m) - \mathbf{b}'(n)|^2 = |\mathbf{b}'(m)|^2 - |\mathbf{b}'(n)|^2.$$

Числовая последовательность $|\mathbf{b}'(n)|^2$ монотонно возрастает и ограничена сверху (числом $|\mathbf{b}|^2$), поэтому она сходится, то есть при $m > n > N$, $|\mathbf{b}'(m)|^2 - |\mathbf{b}'(n)|^2 < \varepsilon^2$ и согласно (11) $|\mathbf{b}'(m) - \mathbf{b}'(n)| < \varepsilon$.

Таким образом, последовательность $\mathbf{b}'(n)$ сходится в себе и, в силу полноты пространства $\mathcal{H}$, существует в $\mathcal{H}$ ее предел, то есть вектор (9).

Из неравенства $|\mathbf{b}'| - |\mathbf{b}'(n)| \leqslant |\mathbf{b}' - \mathbf{b}'(n)| < \varepsilon$, при $n > N$ следует (10). Теорема доказана.

Вектор $\mathbf{b}'$ естественно назвать проекцией вектора $\mathbf{b}$ на ∞-плоскость. Тогда теоремой А утверждается существование этой проекции для любого вектора $\mathbf{b}$.

Для вектора $\mathbf{b}$, принадлежащего ∞-плоскости, по условию замкнутости $\lim_{n\to\infty} \mathbf{b}''(n) = 0$ и согласно (2), $\lim_{n\to\infty} \mathbf{b}'(n) = \mathbf{b}$.

То есть имеем разложение вектора $\mathbf{b}$ в бесконечный определитель по неортогональной системе векторов:

(12) $$\mathbf{b} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{g_n} \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{b}) & & \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}) & & g_n \\ \ldots\ldots & & \\ (\mathbf{a}_n\mathbf{b}) & & \end{vmatrix},$$

при этом

$$|\mathbf{b}|^2 = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{g_n}\begin{vmatrix} 0 & (\mathbf{ba}_1) & (\mathbf{ba}_2)\ldots(\mathbf{ba}_n) \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{b}) & & \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}) & & g_n \\ \ldots\ldots & & \\ (\mathbf{a}_n\mathbf{b}) & & \end{vmatrix}.$$

Числа $(\mathbf{a}_k\mathbf{b})$ называются коэффициентами Фурье вектора $\mathbf{b}$. В случае, когда векторы $\mathbf{a}_k$ ортонормированы, равенство (12) представляет разложение в ряд Фурье.

Для вектора $\mathbf{b}$, не принадлежащего ∞-плоскости (например, при $\lim\limits_{n\to\infty} e_n^0 \neq 0$), вектор-проекция

$$\mathbf{b}' = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{g_n}\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n \\ (\mathbf{a}_1\mathbf{b}) & & \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}) & g_n & \\ \ldots\ldots & & \\ (\mathbf{a}_n\mathbf{b}) & & \end{vmatrix}$$

осуществляет среди всех векторов ∞-плоскости наилучшее приближение к вектору $\mathbf{b}$; при этом погрешность приближения равна

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n^0}{g_n} = |\mathbf{b}|^2\lim_{n\to\infty}\frac{e_n^0}{e_n}.$$

Примеры разложений функций по неортогональным системам функций

Будем интерпретировать вектор $\mathbf{b}$ и систему $\{\mathbf{a}_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, как функции соответственно $f(x)$ и $\{\varphi_k(x)\}$ в интервале $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, принимая за скалярное произведение (с весом $\varphi(x)$)

$$(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_l) = \int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad (\mathbf{ba}_k) = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

1. Пусть $f(x) = x^q$, $\varphi_k(x) = x^{p_k}$ в интервале $(0, 1)$, где $q > 0$, p_k — положительная сходящаяся последовательность. Здесь

$$(\mathbf{a}_k\mathbf{a}_l)=\frac{1}{p_k+p_l+1},\quad (\mathbf{b}\mathbf{a}_k)=\frac{1}{q+p_k+1},\quad (\mathbf{b}\mathbf{b})=\frac{1}{2q+1},$$

$$\frac{g_n^0}{g_n}=\frac{1}{2q+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q-p_k)^2}{(q+p_k+1)^2}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q-p_k}{q+p_k+1}<1,\ \text{то}\ \lim_{n\to\infty}\frac{g_n^0}{g_n}=0.$$

Следовательно, имеет место разложение:

$$x^q=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{g_n}\begin{vmatrix} 0 & x^{p_1} & x^{p_2} & \dots & x^{p_n}\\ \frac{1}{p_1+q+1} & \frac{1}{p_1+p_1+1} & \frac{1}{p_1+p_2+1} & \dots & \frac{1}{p_1+p_n+1}\\ \frac{1}{p_2+q+1} & \frac{1}{p_2+p_1+1} & \frac{1}{p_2+p_2+1} & \dots & \frac{1}{p_2+p_n+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{p_n+q+1} & \frac{1}{p_n+p_1+1} & \frac{1}{p_n+p_2+1} & \dots & \frac{1}{p_n+p_n+1} \end{vmatrix},$$

или

$$x^q=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{(q-p_k)(p_i+p_k+1)}{(p_i-p_k)(q+p_k+1)}x^{p_i}.$$

Это разложение естественно считать завершением примера 14 [2].

2. Пусть $f(x)=\mathrm{ci}\,qx$ (интегральный косинус), $1<q<2$, $\varphi_k(x)=\mathrm{ci}\,kx$ в интервале $(0,\infty)$. Здесь

$$\frac{g_n^0}{g_n}=\frac{\pi}{2q^2}(q-1)(2-q)\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{g_n^0}{g_n}=\frac{\pi}{2q^2}(q-1)(2-q).$$

Обозначим через $P_nf(x)$ и $Pf(x)$ функции, интерпретирующие векторы $\mathbf{b}'(n)$ и $\mathbf{b}'$ ($P_nf(x)$ реализует наилучшее приближение к $f(x)$ среди функций $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(x)$, функция $Pf(x)$ — среди функций $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(n)\varphi_k(x)$).

Тогда

$$P_n \operatorname{ci} qx = -\frac{1}{g_n}\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{ci}x & \operatorname{ci}2x & \operatorname{ci}3x & \dots & \operatorname{ci}nx \\ \frac{\pi}{2q} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{6} & \dots & \frac{\pi}{2n} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{6} & \dots & \frac{\pi}{2n} \\ \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \dots & \frac{\pi}{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\pi}{2n} & \frac{\pi}{2n} & \frac{\pi}{2n} & \frac{\pi}{2n} & \dots & \frac{\pi}{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2}{q} - 1\right)\operatorname{ci}x + 2\left(1 - \frac{1}{q}\right)\operatorname{ci}2x,$$

откуда

$$P\operatorname{ci} qx = \left(\frac{2}{q} - 1\right)\operatorname{ci}x + 2\left(1 - \frac{1}{q}\right)\operatorname{ci}2x.$$

Погрешность приближения $f(x) \cong Pf(x)$ (или отклонения от $\mathbf{b}'$ вектора $\mathbf{b}$) удобно оценивать посредством угловой величины:

$$\sin^2\alpha = \frac{|\mathbf{b}''|^2}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{1}{|\mathbf{b}|^2}\lim_{n\to\infty}\frac{g_n^0}{g_n}.$$

Так, в примере

$$\sin^2\alpha = \frac{(q-1)(2-q)}{q} \text{ и } \alpha < 24°.$$

3. Рассмотрим теперь разложение $f(x)$ по *переменной* системе $\varphi_k(x, n)$. В этом случае предел (4) может и не существовать. Но если он существует, то в случае (6) мы получаем точное разложение функции $f(x)$, в случае (5) — приближение $Pf(x) \approx f(x)$ с ошибкой (4).

Пусть

$$f(x) = xe^{-x},$$

$$\varphi_k(x, n) = \begin{cases} \dfrac{x}{n} & \text{при } 1 < x \leqslant k+1, \\ 0 & \text{при } k+1 < n, \end{cases}$$

$\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$ в интервале $(1, \infty)$.

Так как существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n^0}{g_n}=\frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{e-1}{e+1}\right),$$

то существует и $Px\,e^{-x}$:

$$Px\,e^{-x}=-\lim_{n\to\infty}n^{2n}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1(x,n) & \varphi_2(x,n) & \dots & \varphi_n(x,n)\\ \frac{1-e^{-1}}{ne} & \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \dots & \frac{1}{n^2}\\ \frac{1-e^{-2}}{ne} & \frac{1}{n^2} & \frac{q}{n^2} & \dots & \frac{q}{n^2}\\ \frac{1-e^{-3}}{ne} & \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & \dots & \frac{3}{n^2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1-e^{-n}}{ne} & \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & \dots & \frac{n}{n^2} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{e}\right)^2\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}\varphi_k(x,n),$$

$$Px\,e^{-x}=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{x}{e} & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{x}{e^2} & \text{при } 2<x\leqslant 3,\\ \dots\dots\dots & \\ \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{x}{e^k} & \text{при } k<x\leqslant k+1.\end{cases}$$

При этом

$$\sin^2\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\frac{e-1}{e+1}\right)\approx 0{,}075,\quad \alpha\approx 16^\circ.$$

Поступила 26 X 1966 г.

Таганрогский радиотехнический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А., *Неэвклидовы геометрии.*
2. Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации.* Изд. „Наука", М., 1965.
3. Томашевич Ф. В., Куртяков С. У., *О плоскостях и углах между объектами векторного пространства.* Укр. геом. сб., 1966, 2.

ASUPRA DEZVOLTĂRII DUPĂ UN SISTEM NEORTOGONAL DE ELEMENTE

(Rezumat)

Autorii, luînd la bază sistemul de axiome Weyl-Raşevski ([1], cap. I, § 6) prin care se defineşte spaţiul vectorial $\mathcal{H}$ ca fiind o mulţime de puncte şi vectori în care lipseşte axioma dimensiunii, stabilesc un ansamblu de formule referitoare la dezvoltări după un sistem neortogonal de elemente. Lucrarea se termină cu un număr de exemple [2], [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 517.948

ON THE FUNCTIONAL EQUATION $|f(x+iy)| = |g(x)+h(iy)|$

BY
HIROSHI HARUKI

1. Introduction

In 1903 J. V. Pexider solved the generalizations of Cauchy's functional equations

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad f(x+y) = g(x)\,h(y),$$
$$f(xy) = g(x) + h(y), \quad f(xy) = g(x)\,h(y)$$

for three unknown functions. (See [1], [2]).

In this paper we shall solve the following functional equation of Pexider's type for three unknown functions:

$$|f(x+iy)| = |g(x)+h(iy)|, \tag{1}$$

where x, y are real variables and $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are entire functions of z which are real on the real axis.

We shall use the following

Lemma. *Suppose that $f(z)$, $g(z)$ are entire functions of z. If $f(z)g(z)=0$ in $|z|<+\infty$, then $f(z)=0$ in $|z|<+\infty$ or $g(z)=0$ in $|z|<+\infty$.*

Proof. Since the proof is easy, we omit it.

2. Solution of the Functional Equation (1)

Theorem. *Suppose that $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are entire functions of z and are real on the real axis. The solutions of the preceding functional equations* (1) *are the following and only these:*

(i)
$$\begin{cases} f(z) = az^2 + bz + c, & g(z) = az^2 + bz + c - d, \\ h(z) = -az^2 + \sqrt{b^2 - 4ac}\,z + d, \end{cases}$$

or

(ii) $$\begin{cases} f(z) = az^2 + bz + c, & g(z) = az^2 + bz + c - d, \\ h(z) = -az^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}\, z + d, \end{cases}$$

or

(iii) $$\begin{cases} f(z) = az^2 + bz + c, & g(z) = -az - bz - c + d, \\ h(z) = az^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}\, z - d, \end{cases}$$

or

(iv) $$\begin{cases} f(z) = az^2 + bz + c, & g(z) = -az^2 - bz - c + d, \\ h(z) = az^2 + \sqrt{b^2 - 4ac}\, z - d, \end{cases}$$

where $a, b, c, d,$ are arbitrary real constants with $b^2 - 4ac \geqslant 0$, or

(v) $$f(z) = c, \quad g(z) = c - d, \quad h(z) = c \exp[\psi(z)] - c + d,$$

or

(vi) $$f(z) = c, \quad g(z) = -c + d, \quad h(z) = -c \exp[\psi(z)] + c - d,$$

where $c, d,$ are arbitrary real constants and $\psi(z)$ is an arbitrary odd entire function of z which is real on the real axis, or

(vii) $$\begin{cases} f(z) = a \sin \alpha z + b \cos \alpha z + c, & g(z) = a \sin \alpha z + b \cos \alpha z + c - d, \\ h(z) = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sin \alpha z + c \cos \alpha z - c + d, \end{cases}$$

or

(viii) $$\begin{cases} f(z) = a \sin \alpha z + b \cos \alpha z + c, & g(z) = -a \sin \alpha z - b \cos \alpha z - c + d, \\ h(z) = -\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sin \alpha z - c \cos \alpha z + c - d, \end{cases}$$

where a, b, c, d, α are arbitrary real constants with $a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0$, or

(ix) $$\begin{cases} f(z) = a \sin h\, \alpha z + b \cos h\, \alpha z + c, & g(z) = a \sin h\, \alpha z + b \cos h\, \alpha z + c - d, \\ h(z) = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} \sin h\, \alpha z + c \cos h\, \alpha z - c + d, \end{cases}$$

or

(x) $$\begin{cases} f(z) = a \sin h\, \alpha z + b \cos h\, \alpha z + c, & g(z) = -a \sin h\, \alpha z - b \cos h\, \alpha z - c + d, \\ h(z) = -\sqrt{a^2 - b^2 + c^2} \sin h\, \alpha z - c \cos h\, \alpha z + c - d, \end{cases}$$

where a, b, c, d, α are arbitrary real constants with $a^2 - b^2 + c^2 \geqslant 0$.

Proof. Putting $y = 0$ in (1), we have

(2) $$|f(x)| = |g(x) + h(0)|.$$

If $f(z) = 0$ in $-\infty < x < +\infty$, by the identity theorem we have $f(z) = 0$ in $|z| < +\infty$. Hence, by (1) we have in $-\infty < x < +\infty$ and in $-\infty < y < +\infty$, $g(x) + h(iy) = 0$.

Hence we have $g(z) \equiv \text{const.} = l$ in $-\infty < x < +\infty$ and $h(iy) \equiv \equiv \text{const.} \equiv -l$ in $-\infty < y < +\infty$. By the identity theorem we have $g(z) = l$ in $|z| < +\infty$ and $h(z) = -l$ in $|z| < +\infty$.

Next, if $f(z) \not\equiv 0$ in $-\infty < x < +\infty$, there exists a real constant x_0 such that $f(x_0) \neq 0$. Since $f(x)$ is continuous at $x = x_0$, there exists a positive real constant δ such that $f(x) \neq 0$ in $-\delta < x - x_0 < \delta$.

By (2) we have in $-\delta < x - x_0 < \delta$

$$\left| \frac{g(x) + h(0)}{f(x)} \right| = 1. \tag{3}$$

Since $[g(x) + h(0)]/f(x)$ is real and continuous in $-\delta < x - x_0 < \delta$, by (3) we have $[g(x)+h(0)]/f(x)=1$ in $-\delta < x-x_0 < \delta$ or $[g(x)+h(0)]/f(x) = -1$ in $-\delta < x - x_0 < \delta$. Hence, by the identity theorem we have $g(z) = f(z) - h(0)$ in $|z| < +\infty$ or $g(z) = -f(z) - h(0)$ in $|z| < +\infty$.

CASE A :

$$g(z) = f(z) - h(0). \tag{4}$$

Substituting (4) in (1) and putting

$$k(z) = h(z) - h(0), \tag{5}$$

we have

$$|f(x+iy)| = |f(x) + k(iy)|. \tag{6}$$

By (6) we have

$$f(x+iy)\overline{f(x+iy)} = [f(x) + k(iy)][\overline{f(x) + k(iy)}]. \tag{7}$$

On the other hand $f(z)$, $k(z)$ are real on the real axis. Hence we have

$$\overline{f(x+iy)} = f(x-iy), \tag{8}$$

$$\overline{k(iy)} = k(-iy). \tag{9}$$

By (7) ... (9) we have

$$f(x+iy)f(x-iy) = [f(x) + k(iy)][f(x) + k(-iy)]. \tag{10}$$

Differentiating both sides of (10) twice with respect to y and putting $y = 0$, we have ($k(0) = 0$ by (5)) in $-\infty < x < +\infty$

$$f(x)f''(x) - f'(x)^2 = k''(0)f(x) - k'(0)^2. \tag{11}$$

Differentiating both sides of (11) with respect to x, we have in $-\infty < x < +\infty$

$$f(x)f'''(x) - f'(x)f''(x) = k''(0)f'(x). \tag{12}$$

Since $f(x) \neq 0$ in $-\delta < x - x_0 < \delta$, by (12) we have in $-\delta < x - x_0 < \delta$

$$\frac{f(x)f'''(x) - f'(x)f''(x)}{f(x)^2} = k''(0)\frac{f'(x)}{f(x)^2}. \tag{13}$$

Hence, by (13) we have in $-\delta < x - x_0 < \delta$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f''(x)}{f(x)}\right] = -k''(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f(x)}\right].$$

So we have in $-\delta < x - x_0 < \delta$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -k''(0)\frac{1}{f(x)} + C,$$

where C is a real constant.

Hence we have in $-\delta < x - x_0 < \delta$

$$f''(x) = Cf(x) - k''(0), \tag{14}$$

where C, $k''(0)$ are real constants. By (14) and the identity theorem we have in $|z| < +\infty$

$$f''(z) = Cf(z) - k''(0), \tag{15}$$

where $C, k''(0)$ are real constants.

Solving this differential equation (15), we have

$$f(z) = az^2 + bz + c, \text{ or } f(z) = a\sin\alpha z + b\cos\alpha z + \mathrm{c}, \text{ or}$$
$$f(z) = \sin\mathrm{h}\,\alpha z + b\cos\mathrm{h}\,\alpha z + c,$$

where $a, b, c, \alpha\,(\neq 0)$ are real constants.

CASE A_1:

$$f(z) = az^2 + bz + c, \tag{16}$$

where a, b, c are real constants.

By (10), (16) we have

$$(ax^2 - ay^2 + bx + c)^2 + (2axy + by)^2 = (ax^2 + bx + c)^2 + \\ + (ax^2 + bx + c)\,[k(\mathrm{i}y) + k(-\mathrm{i}y)] + k(\mathrm{i}y)\,k(-\mathrm{i}y). \tag{17}$$

CASE A_{11} $(b \neq 0)$

Differentiating both sides of (17) with respect to x and putting $x=0$, we have

$$2(-ay^2 + c)\,b + 4aby^2 = 2bc + b\,[k(\mathrm{i}y)) + k(-\mathrm{i}y)].$$

Since $b \neq 0$, we have

$$k(\mathrm{i}y) + k(-\mathrm{i}y) = 2ay^2. \tag{18}$$

By (17), (18) we have (by putting $x=0$ in (17))

$$k(iy)\,k(-iy) = (a^2y^2 + b^2 - 4ac)\,y^2. \tag{19}$$

By (18), (19) we have

$$k(iy)^2 - 2ay^2\,k(iy) + (a^2y^2 + b^2 - 4ac)\,y^2 = 0. \tag{20}$$

By (20) and the identity theorem we have in $|z| < +\infty$

$$k(iz)^2 - 2az^2\,k(iz) + (a^2z^2 + b^2 - 4ac)\,z^2 = 0. \tag{21}$$

By (21) we have $(z \to -iz)$

$$k(z)^2 + 2az^2k(z) - (-a^2z^2 + b^2 - 4ac)\,z^2 = 0. \tag{22}$$

Since $k(z)$ is an entire function of z and is real on the real axis, by (22) and Lemma in § 1 we have in $|z| < +\infty$

$$k(z) = -az^2 + \sqrt{b^2 - 4ac}\,z, \quad \text{or } k(z) = -az^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}\,z,$$

where a, b, c, are real constants with $b^2 - 4ac \geqq 0$.

Thus, in this case (A_{11}) $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are determined. (See (i), (ii) in Theorem).

CASE A_{12} $(b=0,\ a\neq 0)$

In this case, by (17) we have

$$\begin{aligned}(ax^2 - ay^2 + c)^2 + 4a^2x^2y^2 &= (ax^2 + c)^2 + \\ &+ (ax^2 + c)\,[k(iy) + k(-iy)] + k(iy)\,k(-iy).\end{aligned} \tag{23}$$

Differentiating both sides of (23) with respect to x, putting $x = 1$ and using $a \neq 0$, we have $k(iy) + k(-iy) = 2ay^2$. Hence, by the result of Case A_{11} we have in $|z| < +\infty$

$$k(z) = -az^2 + \sqrt{-4ac}\,z, \quad \text{or } k(z) = -az^2 - \sqrt{-4ac}\,z,$$

where a, c are real constants with $-4ac \geqq 0$.

Thus, in this case (A_{12}) $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are determined. (See (i), (ii) in Theorem).

CASE A_{13} $(b=0,\ a=0,\ c\neq 0)$

In this case, by (17) we have

$$[k(iy) + c]\,[k(-iy) + c] = c^2. \tag{24}$$

By (24) and the identity theorem we have in $|z| < +\infty$

$$[k(iz) + c]\,[k(-iz) + c] = c^2. \tag{25}$$

By (25) we have $(z \to iz)$

$$[k(z) + c][k(-z) + c] = c^2. \tag{26}$$

Putting $\varphi(z) = [k(z) + c]/c$, by (26) we have in $|z| < +\infty$

$$\varphi(z)\varphi(-z) = 1. \tag{27}$$

On the other hand

$$\varphi(0) = \frac{k(0) + c}{c} = \frac{0 + c}{c} = 1. \tag{28}$$

By (27) we have $\varphi(z) \neq 0$ in $|z| < +\infty$. By assumption we can conclude that $\varphi(z)$ is real on the real axis. Hence, by (28) there exists an entire function $\psi(z)$ which is real on the real axis such that we have in $|z| < +\infty$

$$\varphi(z) = \exp[\psi(z)], \tag{29}$$

with $\psi(0) = 0$.

By (27), (29) we have in $|z| < +\infty$

$$\exp[\psi(z) + \psi(-z)] = 1. \tag{30}$$

Differentiating both sides of (30), we have $[\psi(z) + \psi(-z)]' = 0$. Hence we have

$$\psi(z) + \psi(-z) = K, \tag{31}$$

where K is a real constant.

Putting $z = 0$ in (31) and using $\psi(0) = 0$, we have $K = 0$. Hence, by (31) we have in $|z| < +\infty$, $\psi(-z) = -\psi(z)$. So $\psi(z)$ is an odd entire function of z which is real on the real axis.

Thus, in this case (A_{13}) $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are determined. (See (v) in Theorem).

CASE A_{14} ($b=0$, $a=0$, $c=0$)

In this case, by (17) or (6) we have $k(iy) = 0$. Hence, by the identity theorem we have $k(z) = 0$ in $|z| < +\infty$.

Thus, in this case (A_{14}) $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are determined.

CASE A_2:

$$f(z) = a \sin \alpha z + b \cos \alpha z + c, \tag{32}$$

where a, b, c, α $(\neq 0)$ are real constants.

By (10), (32) we have

$$(a\sin\alpha x\cos\mathrm{h}\,\alpha y+b\cos\alpha x\cos\mathrm{h}\,\alpha y+c)^2+$$
$$+(a\cos\alpha x\sin\mathrm{h}\,\alpha y-b\sin\alpha x\sin\mathrm{h}\,\alpha y)^2=(a\sin\alpha x+b\cos\alpha x+c)^2+ \tag{33}$$
$$+(a\sin\alpha x+b\cos\alpha x+c)\,[k(iy)+k(-iy)]+k(iy)\,k(-iy).$$

CASE A_{21} $(a\neq 0)$

Differentiating both sides of (33) with respect to x and putting $x=0$, we have

$$2(b\cos\mathrm{h}\,\alpha y+c)\,a\alpha\cos\mathrm{h}\,\alpha y+2a\sin\mathrm{h}\,\alpha y(-b\alpha\sin\mathrm{h}\,\alpha y)=$$
$$=2(b+c)\,a\alpha+a\alpha\,[k(iy)+k(-iy)].$$

Since $a\alpha\neq 0$, we have

$$k(iy)+k(-iy)=2c(\cos\mathrm{h}\,\alpha y-1). \tag{34}$$

By (33), (34) we have (by putting $x=0$ in (33))

$$k(iy)\,k(-iy)=(a^2+b^2)\sin^2\mathrm{h}\,\alpha y-2c^2(\cos\mathrm{h}\,\alpha y-1). \tag{35}$$

By (34), (35) we have

$$k(iy)^2-2c(\cos\mathrm{h}\,\alpha y-1)\,k(iy)+(a^2+b^2)\sin^2\mathrm{h}\,\alpha y-2c^2(\cos\mathrm{h}\,\alpha y-1)=0. \tag{36}$$

By (36) and the identity theorem we have in $|z|<+\infty$

$$k(iz)^2-2c(\cos\mathrm{h}\,\alpha z-1)\,k(iz)+(a^2+b^2)\sin^2\mathrm{h}\,\alpha z-2c^2(\cos\mathrm{h}\,\alpha z-1)=0. \tag{37}$$

By (37) we have $(z\to -iz)$

$$k(z)^2-2c(\cos\alpha z-1)\,k(z)-(a^2+b^2)\sin^2\alpha z-2c^2(\cos\alpha z-1)=0. \tag{38}$$

Since $k(z)$ is an entire function of z and is real on the real axis, by (38) and Lemma in § 1 we have in $|z|<+\infty$

$$k(z)=\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sin\alpha z+c\cos\alpha z-c,$$

(or

$$k(z)=-\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sin\alpha z+c\cos\alpha z-c),$$

where $a, b, c, \alpha\,(\neq 0)$ are real constants with $a^2+b^2-c^2\geqq 0$ (the solution in the round bracket is contained in the first solution).

Thus, in this case (A_{21}) $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are determined. (See (vii) in Theorem).

CASE A_{22} $(a=0,\ b\neq 0)$

In this case, by (33) we have (by $b\alpha\neq 0$)

$$k(iy)+k(-iy)=2c(\cos\mathrm{h}\,\alpha y-1).$$

Hence, by the result of case A_{21} we have in $|z|<+\infty$

$$k(z)=\sqrt{b^2-c^2}\sin\alpha z+c\cos\alpha z-c,$$

(or

$$k(z)=-\sqrt{b^2-c^2}\sin\alpha z+c\cos\alpha z-c),$$

where b, c, α $(\neq 0)$ are real constants with $b^2-c^2\geqq 0$ (the solution in the round bracket is contained in the first solution).

Thus, in this case (A_{22}) $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ are determined. (See (vii) in Theorem).

CASE A_{23} $(a=0,\ b=0,\ c\neq 0)$

See case A_{13}.

CASE A_{24} $(a=0,\ b=0,\ c=0)$

See case A_{14}.

CASE A_3 $(f(z)=a\sinh\alpha z+b\cosh\alpha z+c)$

In this case we can discuss in the same way as case A_2. (See (ix n Theorem).

In case A we get the solutions (i), (ii), (v), (vii), (ix) in Theorem.

CASE B :

$$g(z)=-f(z)-h(0). \tag{39}$$

If we put $G(z)=-g(z)$, $H(z)=-h(z)$, then by (39) we have $G(z)=f(z)-H(0)$ and by (1) we have $|f(x+iy)|=|G(x)+H(iy)|$, where x, y are real variables and $f(z)$, $G(z)$, $H(z)$ are entire functions of z which are real on the real axis.

Hence case B is reduced to case A, getting the solutions (iii), (iv), (vi), (viii), (x) in Theorem.

(Direct substitution shows that the ten functions given in Theorem satisfy our original functional equation (1)).

Application. By using the above Theorem we can solve the following functional equation

$$|f(x+iy)|=|f(x)+f(iy)|, \tag{40}$$

where x, y are real variables and $f(z)$ is an entire function of z. (See [3], [4]).

We may assume that $f(z)\not\equiv$ const. By (40) we have $f'(0)\neq 0$. (See [3], [4]). Further we can prove that $F(z)=f(z)/f'(0)$ is real on the real axis (see [4]) and by (40) we have

$$|F(x+iy)|=|F(x)+F(iy)|, \tag{41}$$

where x, y are real variables and $F(z)$ is an entire function of z which is real on the real axis. Hence, selecting from the solutions in the Theorem those functions which satisfy (41) with $F'(0) = 1$, we have $F(z) = z$ or $F(z) = \alpha^{-1} \sin \alpha z$ or $F(z) = \alpha^{-1} \sin h\, \alpha z$, where $\alpha\ (\neq 0)$ is a real constant. Hence the solutions of (40) are the following and only these:

$$f(z) = Az, \text{ or } f(z) = A \sin \alpha z, \text{ or } f(z) = a \sin h\, \alpha z,$$

where A is an arbitrary complex constant and α is an arbitrary real constant.

Received the 21 III 1967

University of Waterloo,
Ontario, Canada

REFFRENCES

1. Pexider J. V., *Notiz über Funktional-theoreme.* Monatsh. Math. Phys. 1903, **14**, S. 293—301.
2. Aczél J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York & London, 1966, pp. 141—165.
3. Robinson R. M., *A Curious Trigonometric Identity.* Am. Math. Monthly, 1957, 64, pp. 83—85.
4. Haruki H., *On the Functional Equations* $|f(x+iy)| = |f(x)+f(iy)|$ *and* $|f(x+iy)| = |f(x)-f(iy)|$ *and on Ivory's Theorem.* Canad. Math. Bull., 1966, **9**, pp. 473—480.

ASUPRA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE $|f(x+iy)| = |g(x)+h(iy)|$

(Rezumat)

Se determină soluția ecuației funcționale indicată în titlu, de tipul lui J. P. Pexider [1], x și y fiind variabile reale, iar $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ funcț.i întregi de z, reale pe axa reală.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. D. 517.934

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

Note II

STABILITÉ ASYMPTOTIQUE

PAR

N. FORBAT et A. HUAUX

1. Introduction

Dans la première partie de ce travail, inséré dans le même *Bulletin* [1], nous avons exposé nombre de problèmes concernant les solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires. On continue ici, tout en conservant les notations, l'étude de la stabilité asymptotique des problèmes posés.

2. Équation aux variation. Justification de son emploi

Soit l'équation différentielle

$$q'' = F(q, q', t). \tag{2.1}$$

On suppose que F est une fonction continûment différentiable de ses arguments q et $q' \in (-r, +r)$, que F est continue et périodique de période T en t, que la solution périodique de (2.1) existe et est unique. On suppose que par le procédé décrit ci-avant ou par un procédé analogue on a calculé la solution périodique $q(t)$ de (2.1) et que

$$\bar{q}(t) = \lim_{n\to\infty} q^{(n)}(t), \tag{2.2}$$

$$\bar{q}'(t) = \lim_{n\to\infty} q^{(n)\prime}(t), \tag{2.3}$$

donc

$$|q^{(n)}(t)| < r \quad \text{et} \quad |q^{(n)\prime}(t)| < r, \quad \text{si} \quad t \in [0, T], \tag{2.4}$$

et que l'on connaît

$$\sup_{t\in[0,T]} |\bar{q}(t) - q^{(n)}(t)|, \qquad \sup_{t\in[0,T]} |\bar{q}'(t) - q^{(n)\prime}(t)|. \tag{2.5}$$

Posons

(2.6) $$q^* = q - \bar{q};$$

(2.1) s'écrit

(2.7) $$q^{*\prime\prime} = F(q^* + q, q^{*\prime} + q', t) - q'',$$

ou en développant en série de Mac Laurin par rapport aux deux premières variables,

(2.8) $$q^{*\prime\prime} + A[t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)]\, q^{*\prime} + B[t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)]\, q^* + \ldots = 0.$$

D'après Hahn [2], *la solution triviale*

(2.9) $$q^* = 0,$$

qui correspond à la solution périodique $\bar{q}(t)$ *de* (2.1), *est, simultanément, asymptotiquement stable ou instable pour l'équation du mouvement troublé* (2.7) (*ou* (2.8)), *qui est exacte, et pour l'équation différentielle rhéolinéaire et homogène*

(2.10) $$q^{*\prime\prime} + A[t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)]\, q^{*\prime} + B[t, \bar{q}(t), \bar{q}(t)]\, q^* = 0,$$

appelée équation aux variations, si les coefficients A et B sont des constantes ou des fonctions périodiques de t et de même période en t que F.

Ensuite on applique, à la solution triviale de (2.10), un critère de stabilité asymptotique ou d'instabilité.

Ce procédé ramène l'étude de la stabilité de la solution périodique $q(t)$ à la discussion de la stabilité de la solution triviale $q^*(t) = 0$ d'une équation différentielle rhéolinéaire et homogène, ici (2.10). En fait, on a utilisé la première méthode de Liapounoff.

Il y a lieu de justifier le passage de l'équation du mouvement troublé (2.7) (ou (2.8)) à l'équation aux variations (2.10), et, pour terminer, de tenir compte du fait qu'en général on ne peut pas construire une expression exacte de la solution périodique $\bar{q}(t)$, donc que dans (2.10), les coefficients A et B *exacts* sont inconnus.

a) Dans (2.10), on n'a conservé que des termes linéaires en q^* et $q^{*\prime}$. D'après le théorème de Hahn rappelé plus haut, cette approximation est légitime dans le cas de la stabilité asymptotique ou de l'instabilité de la solution triviale de (2.7) (ou de (2.10)).

b) En pratique, il est exceptionnel de connaître exactement $\bar{q}(t)$, donc les coefficients A et B ; à la n-ième approximation, on aura de coefficients approchés $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ donnés par les relations

(2.11) $$A^{(n)} = A[t, q^{(n)}(t), q^{(n)\prime}(t)], \qquad (2.12) \quad B^{(n)} = B[t, q^{(n)}(t), q^{(n)\prime}(t)].$$

Des bornes supérieures et inférieures de $q^{(n)}(t)$ et $q^{(n)\prime}(t)$ on peut déduire des bornes supérieures et inférieures pour $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$. Ensuite, on modifiera les critères de stabilité en y faisant intervenir les fonctions *connues* $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ à la place des fonctions inconnues A et B mais en aug-

mentant les exigences de ces critères et cela de telle sorte qu'un critère vérifié par les coefficients approchés mais connus $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ le soit *a fortiori* par les coefficients exacts mais inconnus A et B.

Nous allons montrer un exemple d'une telle modification d'un critère de stabilité asymptotique sur une proposition établie par Staržinskij [3].

3. Critère de Staržinskij

Staržinskij a donné le théorème suivant :

La solution triviale de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x = 0 \tag{3.1}$$

est asymptotiquement stable si les conditions suffisantes suivantes sont remplies, pour $t \geqslant t_0 > 0$:

1. *l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales de la solution générale de* (3.1) *sont garanties ;*

2. $A(t)$ *et* $B(t) \in C$, *sont définis* $\forall t, t \geqslant t_0 > 0$ *et vérifient les inégalités*

$$0 \leqslant l_1 \leqslant A(t) \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant m_1 \leqslant B(t) \leqslant m_2;$$

3. *le quadruple* (l_1, l_2, m_1, m_2) *verifie les inégalités*

$$l_2 < \frac{m_2 + 2\sqrt{m_1 m_2} + 5m_1}{\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}}, \tag{3.2}$$

$$l_1 > \sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}. \tag{3.3}$$

Il est clair que si les deux fonctions $A[t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)]$ et $B[t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)]$ de (2.10) vérifient les conditions de Staržinskij, il en sera de même pour $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ définies par les relations (2.11) et (2.12), en vertu de la convergence uniforme de $\bar{q}^{(k)}(t)$ et de $q^{(k)'}(t)$ et de la continuité de A et B en q et q'. Il faut évidemment *choisir k sufisamment grand.*

En pratique, on ne connaît pas $\bar{q}(t)$ mais on peut calculer les $q^{(k)}(t)$ et $q^{(k)'}(t)$ pour tout k; *on se pose donc le problème inverse : du fait que pour un certain k les quantités* $A^{(k)}$ *et* $B^{(k)}$ *vérifient le critère de Starzinskij, peut-on conclure que A et B les vérifient aussi ?*

En général, la réponse est négative mais on peut, en renforçant les conditions de Staržinskij, indiquer des conditions suffisantes que doivent remplir $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ pour que A et B vérifient les conditions de Starzinskij et qu'ainsi $\bar{q}(t)$ soit asymptotiquement stable.

Soient en effet δ et ε deux grandeurs positives, arbitrairement petites, qu'on se fixe. En vertu de la convergence uniforme vers zéro des quantités $|q^{(k)}(t) - \bar{q}(t)|$ et $|q^{(k)'}(t) - \bar{q}'(t)|$ et de la continuité des fonctions A et B, il existe un N suffisamment grand pour que, pour tout entier $k \geqslant N$, soient vérifiées les inégalités

$$A^{(k)} - \varepsilon \leqslant A \leqslant A^{(k)} + \varepsilon, \quad B^{(k)} - \delta \leqslant B \leqslant B^{(k)} + \delta. \tag{3.4}$$

Supposons connu ce N; calculons le quadruple

$$\begin{cases} l_1^{(k)} = \inf A^{(k)}, \quad l_2^{(k)} = \sup A^{(k)}, \\ m_1^{(k)} = \inf B^{(k)}, \quad m_2^{(k)} = \sup B^{(k)}, \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

La stabilité asymptotique de la solution triviale de (2.10) sera assurée si les éléments du précédent quadruple vérifient les inégalités suivantes:

$$(3.5) \qquad l_1^{(k)} - \varepsilon > 0, \qquad (3.6) \qquad m_1^{(k)} - \delta > 0,$$

$$(3.7) \qquad l_2^{(k)} + \varepsilon < \frac{m_2^{(k)} - \delta + 2\sqrt{(m_1^{(k)} - \delta)(m_2^{(k)} - \delta)} + 5(m_1^{(k)} - \delta)}{\sqrt{m_2^{(k)} + \delta} - \sqrt{m_1^{(k)} - \delta}},$$

$$(3.8) \qquad l_1^{(k)} - \varepsilon > \sqrt{m_2^{(k)} + \delta} - \sqrt{m_1^{(k)} - \delta}.$$

En effet, si (3.5) et (3.6) sont remplies, A et B satisfont aux conditions de Staržinskij car

$$(3.9) \qquad l_2 < l_2^{(k)} + \varepsilon < \frac{m_2^{(k)} - \delta + 2\sqrt{(m_1^{(k)} - \delta)(m_2^{(k)} - \delta)} + 5(m_1^{(k)} - \delta)}{\sqrt{m_2^{(k)} + \delta} - \sqrt{m_1^{(k)} - \delta}} < \frac{m_2 + 2\sqrt{m_1 m_2} + 5m_1}{\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}}$$

et

$$l_1 > l_1^{(k)} - \varepsilon > \sqrt{m_1^{(k)} + \delta} - \sqrt{m_1^{(k)} - \delta} > \sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}.$$

Reçue le 25 XII 1965

Faculté Polytechnique, Mons
et
Université de Bruxelles,
Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Forbat N., Huaux A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 47—54.
2. Forbat N., Mémoires et Publications de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut, 1963, **77**, pp. 21–26.
3. Старжинский В. М., ПММ, 1952, **16**, стр. 369—374.

SOLUŢII PERIODICE ALE ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE NELINIARE

Nota II
Stabilitate asimptotică

(Rezumat)

Se studiază stabilitatea asimptotică a unor ecuaţii diferenţiale neliniare de tipul (2.1) şi se extinde un criteriu stabilit de Starjinski [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 517.941; 517.53

VERALLGEMEINERUNG DES BEGRIFFES EINER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG n-TER ORDNUNG IM KOMPLEXEN SOWIE EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSAUSSAGEN (I)

VON

N. APOSTOLATOS

1. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen interessiert man sich für Lösungen, die in einem der Betrachtung zu Grunde gelegten Gebiet mit Ausnahme isolierter Punkte analytische Funktionen ihrer Argument z sind. In dieser Arbeit verallgemeinern wir den Begriff einer gewöhnlichen Diff. Gl. n-ter Ordnung im Komplexen für nicht-analytische Funktionen einer komplexen Variablen. Weiter beschäftigen wir uns mit Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen und zeigen, dass es grosse Klassen solcher Probleme gibt, die genau eine Lösung bestimmen.

2. Zunächst machen wir einige Vorbemerkungen. Durch das Symbol $C^k(G)$ oder einfach C^k bezeichnen wir in Folgenden die Menge aller im Gebiet G stetigen und stetig nach x und y bis zur k-ten Ordnung (einschliesslich) differenzierbaren komplexen Funktionen der beiden reellen Veränderlichen x und y. Die Differentialoperationen $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial\bar{z}$ erklären wir durch die Formeln

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{2.1}$$

Für analytische Funktionen $f(z)$ gilt wegen der Cauchy-Riemannschen Diff. Gln.

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} = \frac{\mathrm{d}^n f(z)}{\mathrm{d}z^n}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{2.2}$$

Ist umgekehrt $f(z) \in C^1(G)$ und überall im G, $\partial f/\partial\bar{z} = 0$, dann ist $f(z)$ eine im Gebiet G stetige analytische Funktion von z.

Aus (2.2) können wir folgern, dass die folgenden zwei Anfangswertprobleme äquivalent sind:

a) Gegeben ist die Diff. Gl.

$$\frac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}z^n} = f\left(z, w, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} w}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right).$$

Gesucht ist eine in einem der Betrachtung zu Grunde gelegten Gebiet G analytische Lösung dieser Diff. Gl., die in $z_0 \in G$ folgende Anfangsbedingungen erfüllt:

$$w^{(k)}(z_0) = w_0^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

b) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial^n w}{\partial z^n} = f\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial z^{n-1}}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0,$$

mit $z = x + \mathrm{i}y$ in einem gewissen Gebiet G. Gesucht ist eine Lösung dieses Systems, die zur Klasse $C^n(G)$ gehört und in $z_0 \in G$ den folgenden Anfangsbedingungen genügt

$$w(z_0) = w_0, \quad \left[\frac{\partial^k w}{\partial z^k}\right]_{z=z_0} = w_0^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wir formulieren jetzt folgendes allgemeinere Anfangswertproblem. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial^n w}{\partial z^n} = F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial z^{n-1}}\right), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = H(x, y, w, \bar{w}), \quad (w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \quad \bar{w} = u(x, y) - \mathrm{i}v(x, y)). \tag{2.4}$$

Gesucht ist eine Lösung dieses Systems, welche in einem Gebiet G der Klasse $C^n(G)$ angehört und in $z_0 \in G$ den folgenden Anfangsbedingungen genügt

$$w(z_0) = w_0, \quad \left[\frac{\partial^k w}{\partial z^k}\right]_{z=z_0} = w_0^{(k)}, \quad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{2.5}$$

Man überzeugt sich leicht, dass nicht jedes willkürlich angeschriebene Anfangswertproblem der Gestalt (2.3), (2.4) und (2.5) eine Lösung besitzt. Wir werden aber unten beweisen, dass es Klassen solcher Probleme gibt, die genau eine Lösung haben.

3. Im folgenden werden wir Fragen über Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen von speziellen Anfangswertproblemen des Typs (2.3), (2.4) und (2.5) untersuchen. Wir bemerken aber hier, dass man die Methode, die wir in den folgenden Untersuchungen verwenden wollen, auch unter geeigneten Voraussetzungen auf andere Probleme vom Typ (2.3), (2.4) und (2.5) anwenden kann.

a) Es sei also das folgende Anfangswertproblem gegeben

$$(3.1)\quad \frac{\partial^n f}{\partial z^n} = F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial z^{n-1}}\right), \qquad (3.2)\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(x,y) f + C(x,y),$$

mit den Anfangswerten in $z_0 = x_0 + i y_0 \in G$

$$(3.3)\quad f(x_0, y_0) = w_0, \quad \left[\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = w_0^{(k)}, \quad (k = 1,2,\ldots, n-1).$$

Von der Lösung fordern wir $f(x, y) \in C^n(G)$. Von F setzen wir hier Analytizität bezüglich aller Argumente in einem gewissen Gebiet $(G, G_0, \ldots, G_0^{(n-1)})$, mit $z \in G, w^{(k)} \in G_0^{(k)}$ voraus. Weiter setzen wir voraus, dass $A(x,y)$ und $C(x,y)$ im G gegebene, eindeutige, komplexe, analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x und y sind. Wir beweisen unten, dass dieses Anfangswertproblem unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen genau eine Lösung hat. Zunächst zitieren wir den folgenden

Satz 3.1 [1]). *Wenn die Koeffizienten P, Q und R von*

$$(3.4)\quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Pw + Q\bar{w} + R$$

in einem Gebiet G analytische komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen x und y sind, dann ist jede Lösung $w \in C^1(G)$ von (3.4) *eine analytische Funktion der reellen Veränderlichen x und y im Gebiet G.*

Nach den Voraussetzungen sind die Funktionen A und C in G analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x und y. Weil also jede Funktion von $C^n(G)$ mit $n \geqq 1$ auch eine Funktion von $C^1(G)$ ist, ist nach dem vorigen Satz jede gemeinsame Lösung $f(x, y)$ der Diff. Gln. (3.1) und (3.2) eine in G analytische Funktion der reellen Veränderlichen x und y. Setzen wir nun die Funktionen A, C und die gesuchte Lösung f des Anfangswertproblems (3.1), (3.2) und (3.3) analytisch fort, so erhalten wir in einem gewissen Bereich analytische Funktionen der beiden komplexen Veränderlichen x und y. Machen wir die Substitutionen $x = (z + \zeta)/2$, $y = (z - \zeta)/2i$ und setzen diese in die Funktionen A, C und f ein, so erhalten wir im Gebiet $D = (G, G)$ analytische Funktionen $a(z, \zeta)$, $c(z, \zeta)$ und $w(z, \zeta)$ der beiden komplexen Veränderlichen z und ζ. (Hierbei sind z und ζ nur dann zueinander konjugiert komplexe Zahlen, wenn x und y reelle Werte annehmen. In diesem Falle werden wir $\bar{z}$ an Stelle von ζ schreiben). Dann ist $\partial f/\partial \bar{z}$ gleich der partiellen Ableitung $\partial w/\partial \zeta$ und $\partial^k f/\partial z^k$ gleich der partiellen Ableitung $\partial^k w/\partial z^k$, $(k = 1,2,\ldots,n)$, und das Anfangswertproblem (3.1), (3.2) und (3.3) nimmt die folgende Gestalt an

[1]) Siehe [4, S. 101].

$$\frac{\partial^n w}{\partial z^n} = F\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2\mathrm{i}}, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} w}{\partial z^{n-1}}\right), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = a(z,\zeta)\, w + c(z,\zeta), \tag{3.6}$$

mit den Anfangswerten in $z = z_0 \in G$ und $\zeta = \bar{z}_0 \in \bar{G}$,

$$w(z_0, \bar{z}_0) = w_0, \quad \left[\frac{\partial^k w}{\partial z^k}\right]_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\bar{z}_0}} = w_0^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.7}$$

Ist $w(z,\zeta)$ für $z \in G$ und $\zeta \in \bar{G}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (3.5), (3.6) und (3.7), so ist $f(x,y) = w(z,\bar{z}) = w(x+\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y)$ in G eine analytische Funktion der reellen Veränderlichen x und y, die dem ursprüglichen Anfagswertproblem (3.1), (3.2) und (3.3) genügt. Üben wir auf die Lösungsfunktion $w(z,\zeta)$ folgende Substitution aus

$$w(z,\zeta) = \frac{1}{\omega(z,\zeta)}\left[\varphi(z,\zeta) + \int_{\bar{z}_0}^{\zeta} c(z,\xi)\,\omega(z,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \equiv h(z,\zeta)\,\varphi(z,\zeta) + g(z,\zeta),$$

wobei $\omega(z,\zeta) = \exp\left[-\int_{\bar{z}_0}^{\zeta} a(z,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$ und $\varphi(z,\zeta)$ eine analytische Funktion von z und ζ ist, dann nimmt das Anfangswertproblem (3.5), (3.6) und (3.7) die folgende Gestalt an

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n} = F_1\left(z, \zeta, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial z^{n-1}}\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0, \tag{3.9}$$

dabei genügt die Funktion $\varphi(z,\zeta)$ den folgenden Anfangsbedingungen

$$\left[\frac{\partial^k \varphi(z,\zeta)}{\partial z^k}\right]_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\bar{z}_0}} = w_0^{(k)}. \tag{3.10}$$

Nun soll die folgende Behauptung bewiesen werden:

Das Differentialgleichungssystem (3.5), (3.6) besitzt für jede beliebige Anfangsbedingung (3.7) genau eine Lösung dann und nur dann, wenn die Funktion F_1 in (3.8) unabhängig von ζ ist d. h. $\partial F_1/\partial\zeta = 0$. Die Gleichung (3.8) nimmt wegen der Gleichung (3.9) die folgende Gestalt an

$$\frac{\mathrm{d}^n \varphi}{\mathrm{d}z^n} = F_1\left(z, \zeta, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right). \tag{3.11}$$

Da die Funktion F_1 eine analytische Funktion bezüglich aller ihrer Argumente ist, können wir diese Funktion in die Potenzreihe

$$F_1\left(z, \zeta, \varphi, \frac{d\varphi}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}}\right) = F_1\left(z, \bar{z}_*, \varphi, \frac{d\varphi}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^k F_1}{\partial \zeta^k}\right]_{\zeta=\bar{z}_*} (\zeta - \bar{z}_*)^k$$

entwickeln mit $\bar{z}_* \in \bar{G}$. Damit lauten (3.11)

$$\frac{d^n\varphi}{dz^n} = F_1\left(z, \bar{z}_*, \varphi, \frac{d\varphi}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^k F_1}{\partial \zeta^k}\right]_{\zeta=\bar{z}_*} (\zeta - \bar{z}_*)^k. \tag{3.12}$$

Für jede Lösung $\varphi = \varphi(z)$ muss (3.12) eine Identität für alle $z \in G$ und $\zeta \in \bar{G}$ ergeben. Die linke Seite und der erste Summand auf der rechte Seite sind von ζ unabhängig. Also muss $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^k F_1}{\partial \zeta^k}\right]_{\zeta=\bar{z}_*} (\zeta - \bar{z}_*)^k$ identisch verschwinden. Das kann nur der Fall sein, venn für alle $z \in G$ gilt

$$\left[\frac{\partial^k F_1\left(z, \zeta, \varphi(z), \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi(z)}{dz^{n-1}}\right)}{\partial \zeta^k}\right]_{\zeta=\bar{z}_*} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Insbesondere im Anfangspunkt $z = z_0$ muss dann gelten

$$\left[\frac{\partial^k F_1\left(z, \zeta, (z), \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi(z)}{dz^{n-1}}\right)}{\partial \zeta^k}\right]_{\substack{\zeta=\bar{z}_*, \\ z=z_0, \\ \varphi=w_0, \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}}=w_0^{(n-1)}}} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Weil $z_0, w_0, \ldots, w_0^{(n-1)}$ nach Voraussetzung ganz beliebige Zahlen sind, muss wegen des Identitätssatzes der Funktionentheorie

$$\frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \equiv 0 \tag{3.13}$$

sein.

Folgerungen. a) Das Differentialgleichungssystem (3.5) und (3.6) hat genau eine Lösung für jede beliebige Anfangsbedingung (3.7), dann und nur dann wenn die Gleichung (3.5) durch Transformation mit $w = \varphi(z)\, h(z, \zeta) + g(z, \zeta)$ in die folgende Diff. Gl. (3.14) übergeht, wobei $\varphi(z)$ im Gebiet G eine analytische Funktion von z ist:

$$\frac{d^n\varphi}{dz^n} = F\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}, \varphi, \frac{d\varphi}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}}\right). \tag{3.14}$$

b) Die Notwendigkeit der Bedingung (3.13) haben wir bewiesen nur unter der Voraussetzung, dass das Differentialgleichungssystem (3.5), (3.6) für jede beliebige Anfangsbedingung (3.7) eine Lösung hat. Wie man sich am folgenden Beispiel überzeugt, gibt es Fälle, wo das Differentialgleichungs-

system (3.5) und (3.6) nicht die Bedingung (3.13) erfüllt, trotzdem hat dieses System für gewisse Anfangswerte (3.7) genau eine Lösung:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \zeta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + w, \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} = w,$$

mit den Anfangswerten in $z = 0$, $\zeta = 0$

$$w(0,0) = 1, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{\substack{z=0,\\ \zeta=0}} = 1, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]_{\substack{z=0,\\ \zeta=0}} = 1.$$

Nach kurzer Rechnung können wir sehen, dass dieses Differentialgleichungssystem nicht die Bedingung (3.13) erfüllt, trotzdem ist die Funktion $w(z, \zeta) = e^{\zeta} e^{z}$ Lösung dieses Anfangswertproblems. Aus diesem Beispiel folgern wir, dass die Lösbarkeit eines Anfangswertproblems der Form (3.5), (3.6) und (3.7) nicht nur von den Diff. Gln. (3.5) und (3.6) abhängt, sondern auch von den vorgegebenen Anfangswerten (3.7). Weiter bemerken wir dass ein Anfangswertproblem vom Typ (3.5), (3.6) und (3.7) höchstens eine Lösung hat.

Eingegangen am 21 XII 1966

Technische Hochschule, München,
Deutsche Bundesrepublik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Apostolatos N., *Verallgemeinerung funktionentheoretischer Verfahren für Analogrechner auf allgemeinere Funktionentheorien.* München, 1965.
2. Bieberbach L., *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin, 1953.
3. Kulisch U., *Über Methoden zur Integration überbestimmter Systeme partieller Differentialgleichungen mit einem elektronischen Analogrechner, sowie über Anwendungen dieser Methoden auf die Behandlung von Anfangswertproblemen.* München, 1964.
4. Vekua I., *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen.* Berlin, 1955, (aus Russisch übersetzt).

GENERALIZAREA NOŢIUNII DE ECUAŢIE DIFERENŢIALĂ DE ORDIN n ÎN COMPLEX ŞI TEOREMELE DE EXISTENŢĂ ŞI DE UNICITATE (I)

(Rezumat)

Se generalizează noţiunea de ecuaţie diferenţială de ordin n în complex pentru funcţii neanalitice de o variabilă complexă. Se demonstrează apoi existenţa unei largi clase de probleme care admit soluţii unice în condiţiile de mai sus.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 517.948

LE SPECTRE DE L'OPÉRATEUR VOLTERRA DANS CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS

PAR

ADRIAN CORDUNEANU

Note présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, la 28 — 30 Septembrie 1967

1. Dans cette Note nous allons établir quelques résultats concernant le spectre de l'opérateur Volterra dans les espaces $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, analogues à ceux démontrés par E. I. Goldenherchel [1] pour les espaces $C_\alpha^n(0, \infty)$.

On appelle opérateur Volterra, un opérateur V défini par la relation :

$$(1) \qquad (Vf)(x) = \int_0^x k(x, y) f(y)\, dy, \quad x \geqslant 0,$$

le noyau $k(x, y)$ étant une fonction continue pour $0 \leqslant y \leqslant x$, $x \geqslant 0$.

2. Lemme 1. *Si V est défini sur $L_p(0, \infty)$, à valeurs dans $L_r(0, \infty)$, il est fermé.*

Démonstration. Soit $f_k \to f_0$ dans L_p, $g_k = Vf_k \to g_0$ dans L_r et $g = Vf_0$. De l'inégalité:

$$(2) \qquad |g_k(x) - g(x)| \leqslant \left| \int_0^x |k(x, y)|^q\, dy \right|^{1/q} \cdot \|f_k - f_0\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on obtient que $g_k(x)$ converge uniformément sur tout $[0, t]$, $t < \infty$, vers $g(x)$, donc $g_0 = g = Vf_0$ et V est fermé, donc et continu.

Pour le cas $p = 1$,

$$(3) \qquad \left[\int_0^x |k(x, y)|^q\, dy \right]^{1/q} = \sup_{0 < y < x} |k(x, y)|.$$

Lemme 2. *Soit V un opérateur dans $L_p(0,\infty)$ satisfaisant à la condition que pour tout $t>0$,*

$$(4)\qquad \left[\int_0^t |k(x,y)|^q\,dy\right]^{1/q} = F(x) \in L_p(t,\infty), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Alors $\sigma(V)=\sigma(V_t)$ pour tout $t>0$, V_t étant la restriction de V à l'espace $L_p(t,\infty)$, c'est-à-dire :

$$(5)\qquad (V_t f)(x) = \begin{cases} \int_t^x k(x,y) f(y)\,dy, & x \geqslant t, \\ 0, & 0 \leqslant x < t. \end{cases}$$

Démonstration. Il est évident que si λ est point régulier pour V, il en est régulier et pour V_t. Soit $\lambda \in \varrho(V_t)$. L'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$, $f \in L_p(0,\infty)$ est équivalente pour $x \geqslant t$ avec:

$$(6)\qquad \int_t^x k(x,y)\varphi(y)\,dy - \lambda\varphi(x) = f(x) - \int_0^t k(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

et on peut montrer, en utilisant (4), que le second membre de (6) appartient à $L_p(t,\infty)$, étant bien connu ([2, p. 96], [3]) que $\varphi \in L_p(0,t)$. Donc $\varphi \in L_p(t,\infty)$ et il en résulte que $\varphi \in L_p(0,\infty)$. L'opérateur $(V-\lambda I)^{-1}$ existe, est défini sur $L_p(0,\infty)$ à valeurs dans $L_p(0,\infty)$ et en tant que l'inverse d'un opérateur fermé il est continu. Il en résulte que λ est point régulier pour V.

Nous avons montré que $\sigma(V)=\sigma(V_t)$.

Théorème 1. *Si V est un opérateur dans l'espace $L_p(0,\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$, le spectre $\sigma(V)$ est un ensemble compact et connexe, contenant l'origine.*

Si de plus V satisfait et à la condition (4), *le rayon spectral $r(V)$ satisfait à l'inégalité :*

$$(7)\qquad r(V) \leqslant \lim_{t\to\infty} \left\{\int_t^\infty dx \left[\int_t^x |k(x,y)|^q\,dy\right]^{p/q}\right\}^{1/p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Démonstration. Il faut justifier que $\sigma(V)$ est un ensemble connexe, contenant l'origine.

Le point μ est appelé F-régulier pour V si $(I-\mu V)^{-1}$ existe, est continu et défini sur $L_p(0,\infty)$. Soit l un contour situé dans le domaine de F-régularité de V et ζ un point intérieur pour l; $f(x)$ étant un fonction $\in L_p(0,\infty)$,

$$(8) \qquad g(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i} \oint_{l} \frac{(I - \mu V)^{-1} f}{\zeta - \mu} \, d\mu \right](x),$$

appartient à $L_p(0, +\infty)$. Soit $\widetilde{g}(x) = ((I - \xi V)^{-1} f)(x)$.

Considérons maintenant l'opérateur V^t, $t < \infty$:

$$(9) \qquad (V^t f)(x) = \begin{cases} \int_0^x k(x, y) f(y) \, dy, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire pour V^t :

$$(10) \qquad (I - \zeta V^t)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{l} \frac{(I - \mu V^t)^{-1} \, d\mu}{\zeta - \mu},$$

V^t étant quasinilpotent et donc $(I - \zeta V^t)^{-1}$ étant fonction entière. Il résulte que sur $[0, t]$ $\widetilde{g}(x) = g(x)$ et t étant arbitraire, $\widetilde{g}(x) = g(x)$ pour $x \geqslant 0$. Donc $\widetilde{g}(x) \in L_p(0, \infty)$ et ζ est point F-régulier pour V. Chaque composante du F-spectre n'est pas bornée et donc chaque composante du spectre $\sigma(V)$ contient l'origine.

Si V satisfait et à la condition (4), d'après le lemme 2 il en résulte que $r(V) = r(V_t)$, quel que soit $t > 0$. Mais $r(V_t) \leqslant \| V_t \|$ et on obtient (7) en observant que la limite existe.

Remarque. Si

$$(11) \qquad \int_0^\infty dx \left(\int_0^x | k(x, y) |^q \, dy \right)^{p/q} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

l'opérateur V ayant le noyau $k(x, y)$ est défini dans $L_p(0, \infty)$ et la condition (4) est remplie.

Il en résulte $r(V) = 0$ d'après l'inégalité (7). Ce résultat particulier est démontré dans [3].

Théorème 2. *Soit V et $\widetilde{V}$ des opérateurs Volterra dans $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, satisfaisant à la condition* (4) *et* $\lim_{t \to \infty} \| \widetilde{V}_t \| = 0$. *Alors* $\sigma(\widetilde{V} + V) = \sigma(V)$.

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \varrho(V)$ et t ainsi que

$$(12) \qquad \| \widetilde{V}_t \| < \frac{1}{\| R(\lambda_0; V) \|},$$

où $R(\lambda_0; V) = (V - \lambda_0 I)^{-1}$. De l'inégalité $\|R(\lambda_0; V_t)\| \leqslant \|R(\lambda_0; V)\|$ on déduit que $\|\widetilde{V}_t\| . \|R(\lambda_0; V_t)\| < 1$ et donc $(\widetilde{V}_t + V_t - \lambda_0 I)^{-1}$ existe et est continu, la série

$$(13) \qquad (\widetilde{V}_t + V_t - \lambda_0 I)^{-1} = R(\lambda_0; V_t) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R(\lambda_0; V_t)\, \widetilde{V}_t]^k,$$

étant convergente. Il en résulte que λ_0 est point régulier pour $\widetilde{V}_t + V_t$ et donc pour $\widetilde{V} + V$ (lemme 2), $\widetilde{V} + V$ satisfaisant à la condition (4). Donc $\varrho(V) \subseteq \varrho(V + \widetilde{V})$ et on déduit $\varrho(V + \widetilde{V}) \subseteq \varrho(V)$ en écrivant $V = (V + \widetilde{V}) + (-\widetilde{V})$. Le théorème 2 est démontré.

3. Nous allons considérer maintenant le cas $p = \infty$.

Désignons par M_g l'espace Banach des fonctions $f(x)$ définies pour $x \geqslant 0$, mesurables sur tout intervalle fini et satisfaisant à la condition

$$(14) \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x \geqslant 0} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty,$$

$g(x)$ étant une fonction continue et positive pour $x \geqslant 0$.

Les fonctions continues de M_g forment un sous-espace C_g.

Si $g(x) \equiv 1$, $M_g = L_\infty(0, \infty)$.

L'opérateur V est défini par la relation (1).

Définition. On appelle λ point régulier pour l'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$ dans M_g (C_g) si quel que soit $f \in M_g$ (C_g), la solution $\varphi \in M_g$ (C_g).

L'ensemble des points qui ne sont pas réguliers forme le spectre de l'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$.

On peut montrer que les spectres de l'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$ dans M_g et C_g coïncident et que le spectre de l'équation se réduit au spectre de l'opérateur si V est défini dans M_g ou dans C_g.

Notons par $\sigma_g(V)$ le spectre de $V\varphi - \lambda\varphi = f$ dans M_g (C_g).

Exemple. Si $k(x, y) = N g(x)/g(y)$, on peut montrer que $\sigma_g(V) = \{\lambda\,;\ \mathcal{R}e\ \lambda \geqslant 0\}$ si $N > 0$ et $\sigma_g(V) = \{\lambda\,;\ \mathcal{R}e\ \lambda \leqslant 0\}$ si $N < 0$.

Théorème 3. a) *La condition nécessaire et suffisante pour que V défin[e] sur C_g soit à valeurs dans C_G est que :*

$$\sup_{x \geqslant 0} \frac{1}{G(x)} \int_0^x |k(x, y)|\, g(y)\, dy < +\infty.$$

On obtient que $\|V\|$ est majorée par ce supremum.

b) *$\sigma_g(V)$ est un ensemble connexe, contenant l'origine.*

c) *Si V est un opérateur dans C_g, le rayon spectral $r_g(V)$ satisfait à l'inégalité:*

$$r_g(V) \leqslant \lim_{t \to \infty} \left[\sup_{x \geqslant t} \int_t^x |k(x, y)|\, \frac{g(y)}{g(x)}\, dy \right].$$

d) *Soit* $V = V_1 + V_2$, *où* V_1 *est défini dans* C_g *et* V_2 *satisfait à la condition que pour tout* $t > 0$:

$$\sup_{\substack{0 \leqslant y \leqslant t \\ x \geqslant y}} \left| k_2(x, y) \right| \frac{g(y)}{g(x)} < +\infty .$$

Si $\widetilde{V}$ *est défini dans* C_g *et de plus :*

$$\lim_{t \to \infty} \left[\sup_{x \geqslant t} \int_t^x |\widetilde{k}(x, y)| \frac{g(y)}{g(x)} \, dy \right] = 0 ,$$

il résulte que $\sigma_g(V + \widetilde{V}) = \sigma_g(V)$.

e) *Si* g/G *est non décroissante* $\sigma_g(V) \subseteq \sigma_G(V)$; *si* g/G *est non croissante* $\sigma_g(V) \supseteq \sigma_G(V)$.

On peut démontrer ce théorème tout comme en [1].

En posant $g(x) \equiv 1$, on obtient ;

Théorème 4. *Si* $k(x, y)$ *satisfait à la condition :*

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant x} |k(x, y)| \leqslant \alpha(x), \quad \int_0^\infty \alpha(x) \, dx < +\infty ,$$

l'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$ *a solution continue et bornée pour* $x \geqslant 0$ *quel que soit* $\lambda \neq 0$ *et* f *continue et bornée pour* $x \geqslant 0$.

Si de plus $\lim_{x \to +\infty} x\,\alpha(x) = 0$ *la solution* φ *a limite (finie) pour* $x \to \infty$ *si* f *a la même propriété.*

Remarque. Toutes les propositions démontrées restent valables sous la forme vectorielle.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathematiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Гольденгершель Е. И., *Спектр вольтеррава оператора на полуоси и экспоненциальный рост решения систем интегральных уравнений типа Вольтерра.* Мат. Сб. АН СССР, 1964, **64**, стр. 115—139.
2. Banach Şt., *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa, 1932.
3. Ringrose J. R., *Compact Linear Operators of Volterra Type,* Proc. of the Cambridge Philos. Soc., 1955, Part I, **51**, pp 44-45.

SPECTRUL OPERATORULUI VOLTERRA ÎN ANUMITE SPAŢII DE FUNCŢIUNI

(Rezumat)

Se studiază spectrul operatorului (1) în spaţiile $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Se obţine o majorare pentru raza spectrală (7) şi se face o aplicaţie la o ecuaţie Volterra cu soluţii mărginite.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 513.663

ELEMENTI PRINCIPALI DI UNA VARIETÀ TRIDIMENSIONALE DELLO SPAZIO PROIETTIVO A SEI DIMENSIONI

DI

ENRICO BOMPIANI
Socio d'onore dell'Accademia
della Repubblica Socialista di Romania

1. Introduzione

In una Nota [1][1]) in corso di pubblicazione nella *Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées*, ho introdotto la nozione di *elemento (differenziale) principale* sia di curva che di varietà appartenenti ad una varietà differenziabile.

Un elemento differenziale (di curva, di superficie, etc.) dicesi *elemento principale* se il suo spazio osculatore (ad una curva, ad una superficie, etc. contenente quell'elemento) ha dimensione minore dell'ordinario.

In questa Nota voglio chiarire la nozione precedente su un esempio determinato: quello di una varietà tridimensionale V_3 appartenente ad uno spazio proiettivo a sei dimensioni S_6 cercandone gli elementi principali sia curvilinei che superficiali.

La ricerca ha carattere locale: supponiamo che nel punto in esame sia $S(2) \equiv S_6$ cioè lo spazio in esso osculatore a V_3 sia l'ambiente.

2. Elementi curvilinei principali

Siano x, y, z, t_1, t_2, t_3 coordinate non omogenee in S_6 (si può aggiungere 1 come ultima coordinata d'omogeneità) tutte nulle nel punto O in esame; le coordinate si possono scegliere in modo che $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ siano le equazioni dello S_3 tangente in O a V_3 e di conseguenza la rappresentazione locale (in una carta contenente O) è

---

[1]) In essa si trovano le definizioni di enti che ci serviranno in seguito.

$$(2.1)\qquad \begin{cases} t_1 = \varphi_2(x,y,z) + \varphi_3(x,y,z) + \varphi_4(x,y,z) + \dots, \\ t_2 = \psi_2(x,y,z) + \psi_3(x,y,z) + \psi_4(x,y,z) + \dots, \\ t_3 = \chi_2(x,y,z) + \chi_3(x,y,z) + \chi_4(x,y,z) + \dots, \end{cases}$$

con le φ, ψ, χ *forme* di grado uguale al loro indice nelle x, y, z.

Consideriamo un elemento curvilineo per O individuato da

$$(2.2)\qquad y = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 + \dots, \quad z = \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \mu_4 x^4 + \dots$$

Questi sviluppi sostituiti nelle (2.1) danno luogo a sviluppi

$$(2.3)\qquad \begin{cases} t_1 = \varphi_2(1,\lambda_1,\mu_1)\,x^2 + \Phi_3\,x^3 + \Phi_4\,x^4 + \dots, \\ t_2 = \psi_2(1,\lambda_1,\mu_1)\,x^2 + \Psi_3\,x^3 + \Psi_4\,x^4 + \dots, \\ t_3 = \chi_2(1,\lambda_1,\mu_1)\,x^2 + X_3\,x^3 + X_4\,x^4 + \dots, \end{cases}$$

ove Φ_3, Ψ_3, X_3 sono funzioni (non omogenee) di $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ e Φ_4, Ψ_4, X_4 degli argomenti precedenti e di λ_3, μ_3.

Per valutare la dimensione dei successivi spazi osculatori bisogna calcolare le coordinate (nell'ordine x, y, z, t_1, t_2, t_3) dei successivi punti derivati, cioè le derivate rispetto ad x in O di (2.2), (2.3).

Indichiamo con M_s la matrice formata con le derivate d'ordine $\leqslant s$ e scriviamone le prime righe

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & \varphi_2(1,\lambda_1,\mu_1) & \psi_2(1,\lambda_1,\mu_1) & \chi_2(1,\lambda_1,\mu_1) \\ 0 & \lambda_3 & \mu & \Phi_3 & \Psi_3 & X_3 \\ 0 & \lambda_4 & \mu_4 & \Phi_4 & \Psi_4 & X_4 \end{bmatrix}.$$

Un elemento E^s è principale se la matrice M_s ha rango $< s$. Cominciamo l'esame delle varie matrici per $s = 2, 3, 4, \dots$.

a) M_2 *di rango* 1: le condizioni $\varphi_2(1,\lambda_1,\mu_1) = \psi_2(1,\lambda_1,\mu_1) = \chi_2(1,\lambda_1,\mu_1) = 0$ non ammettono in generale soluzioni comuni, quindi non esistono in generale tangenti asintotiche (tripunte; ovvero E^2 rettilinei).

b) M_3 *di rango* 2: le equazioni da soddisfare sono

$$\frac{\Phi_3}{\varphi_2(1,\lambda_1,\mu_1)} = \frac{\Psi_3}{\psi_2(1,\lambda_1,\mu_1)} = \frac{X_3}{\chi_2(1,\lambda_1,\mu_1)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{\mu_3}{\mu_2}.$$

Presi ad arbitrio λ_1, μ_1 cioè un E^1, dalle prime due equazioni si ricavano in generale λ_2, μ_2 e dalle ultime λ_3, μ_3; sicchè *esistono in generale* ∞^2 E^3 *piani*. Questi sono E^3 *principali:* e possiamo anche chiamare principali gli E^2 (e così i loro piani) per i quali si possono condurre E^3 principali.

Naturalmente un $E^4 \supset E^3$ principale (e ve ne sono ∞^4) sta in S_3 (e così continuando); ma questo fatto non ha più molto interesse.

Cerchiamo invece se esistano:

c) M_4 *di rango* 2: cioè E^4 piani. Alle 4 equazioni precedenti bisogna aggiungere altre 4 equazioni nei parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ e $\mu_1, \ldots, \mu_4$.

In generale le 8 equazioni dette negli 8 parametri hanno un numero finito di soluzioni, sicchè *in generale esiste un numero finito* (∞^0) *di* E^4 *piani:* questi pure sono da dirsi E^4 principali (e così le loro tangenti e i loro piani, come pure gli E^2 e gli E^3 tali che per essi passi un E^4 principale).

d) M_4 *di rango* 3. Dev'esser nullo il determinante formato con la prima e le tre ultime colonne di M_4 (così si ha un vincolo fra $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ e inoltre si hanno due equazioni lineari in λ_4, μ_4 (e involgenti gli altri parametri).

La prima condizione esprime che dato ad arbitrio un E^2 vi sono per esso ∞^1 E^3 per ciascuno dei quali (per le altre due condizioni) si può condurre un $E^4 \subset S_3$.

Dunque: *esistono* ∞^5 $E^4 \subset S_3$ *cioè principali; per ciascuno* E^2 *uscente dal punto si hanno* ∞^1 E^3 *e per ciascuno di questi si ha un* E^4 *principale.*

Si potranno chiamare principali anche gli E^3 per cui passano E^4 principali e anche i loro S_3.

e) M_5 *di rango* 3: si aggiungono alle precedenti altre tre equazioni di cui una (eliminando da essa λ_4 e μ_4 per mezzo delle ultime due precedenti) può considerarsi come nei soli parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e μ_1, μ_2, μ_3, e altre due lineari in λ_5, μ_5. Ciò significa che *in generale per ogni* E^2 *passa un numero finito di* E^3 *per ciascuno dei quali passa un* E^5 *principale contenuto nello* S_3 *di* E^3.

Anche questi E^3 e i loro S_3 possono dirsi principali.

f) M_6 *di rango* 3: si aggiungono alle precedenti altre tre equazioni di qui una può ridursi a contenere i soli parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$; le altre due sono lineari in λ_6, μ_6. Se fra le tre equazioni nei primi 6 parametri si eliminano λ_3, μ_3 si ha un'equazione in $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Ciò significa che *vi sono* ∞^3 E^2 *di* V_3 *per ciascuno dei quali passa un numero finito di* E^3 *tali che per ciascuno di questi* E^3 *passa un* $E^6 \subset S_3$ *cioè principale.*

Si possono chiamare anche principali gli E^2 precedenti (che non sono più tutti gli E^2 per il punto) e i loro piani, gli E^3, E^4, E^5 appartenenti agli E^6 principali e i loro S_3.

In modo analogo si può procedere fino alle

g) M_9 *di rango* 3: per queste *si ha un numero finito di* E^1 *(tangenti), per essi un numero finito di* E^2 *e un numero finito di* E^3 *per ciascuno dei quali si può condurre un* $E^9 \subset S_3$.

Anche gli elementi $E^1, \ldots, E^8$ e le rette, i piani e gli S_3 incontrati possono dirsi principali.

Non si può andare oltre con matrici di rango 3. Si possono invece esaminare le

h) M_5 *di rango* 5: si hanno due condizioni lineari in λ_5, μ_5. Ciò vuol dire che dato ad arbitrio un E^4 è determinato un $E^5 \subset S_4$ di E^4.

Questo E^5, e così tutti gli elementi d'ordine più elevato contenuti in S_4, sono quelli della sezione della V_3 con lo S_4 (quindi sono poco interessanti): oltre non si può andare.

Per il risultato relativo alla M_9 di rango 3, cioè all'esistenza di $E^9 \subset S_3$ si ha: *una varietà algebrica* $V_3 \subset S_6$ *che non abbia sezioni in* S_3 *per ogni suo punto ha ordine* $\geqslant 10$.

Passiamo brevemente in rassegna gli elementi curvilinei principali di una V_3 di S_6 passanti per un punto in cui lo $S(2)$ sia un S_5 o un S_4.

Per $S(2) \equiv S_5$ in un punto O scelta la rappresentazione come al § 2 si può supporre $\chi_2(x,y,z) \equiv 0$ (mentre $\varphi_2(x,y,z)$ e $\psi_2(x,y,z) \not\equiv 0$); e questa specificazione va portata nello schema (2.4) dei punti derivati notando che in conseguenza (a differenza del caso precedente) $X_3(\lambda_1, \mu_1)$, $X_4(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$, etc.

Le differenze dal caso precedente iniziano con:

a') M_2 *di rango* 1: $\varphi_2(1, \lambda_1, \mu_1) = \psi_2(1, \lambda_1, \mu_1) = \lambda_2 = \mu_2 = 0$.

Le prime due equazioni determinano in generale 4 E^1 ciascuno dei quali appartenente ad un E^2 rettilineo (asintotico o principale).

Quindi in generale esistono 4 E^2 *asintotici o principali per un punto* Per ciascuno di essi passano ∞^2 E^3 piani. Non esistono in generale E^3 rettilinei.

b') M_3 *di rango* 2: Le equazioni da soddisfare sono

$$X_3(\lambda_1, \mu_1) = 0, \quad \frac{\Phi_3}{\varphi_2(1, \lambda_1, \mu_1)} = \frac{\Psi_3}{\psi_2(1, \lambda_1, \mu_1)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{\mu_3}{\mu_2}.$$

La prima equazione determina un cono cubico di tangenti: per ciascuna di esse l'equazione in Φ_3, Ψ_3 determina ∞^1 E^2 e le rimanenti individuano per ciascuno di questi E^2 un E^3 nel suo piano. Quindi *esistono* ∞^2 E^3 *piani*, ma la loro configurazione è del tutto differente da quella del caso precedente.

Siccome Φ_3, Ψ_3 sono lineari in λ_2, μ_2 i piani degli E^2 e degli E^3 considerati per una di quelle tangenti stanno in un S_3.

Tutti gli elementi trovati e i loro sostegni possono dirsi *principali*.

Con lo stesso procedimento si vede che, per M_4 *di rango* 2 si ha un numero finito di piani (per un punto) contenenti E^4 (mentre non esistono in generale E^5 piani).

d') M_4 *di rango* 3: si hanno 3 condizioni delle quali una involge λ_1, $\lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_1, \mu_3$ e le altre due (oltre i parametri precedenti) λ_4, μ_4. Esistono dunque ∞^5 E^3 per ciascuno dei quali passa un $E^4 \subset S_3$.

Continuando lo stesso procedimento (per le matrici M_{4+s} di rango 3) si trova che *esiste in generale, per un punto, un numero finito di* $E^9 \subset S_3$. Questi E^9 (e così gli elementi d'ordine inferiore ad essi appartenenti, nonchè i loro piani ed S_3) possono dirsi *principali*. Oltre non si può andare.

Se la V_3 è algebrica e non contiene curve di S_3 il suo ordine è $\geqslant 10$. Conclusioni analoghe nel caso di un punto in cui lo $S(2) \equiv S_4$.

3. Elementi superficiali principali

Cerchiamo ora gli elementi superficiali o calotte da dirsi *principali* esistenti su una V_3 di S_6 con $S(2) \equiv S_6$ per la V_3 in un suo punto O.

Mi limiterò a cercare le calotte del 2° ordine $\sigma_2^2 \subset V_3$ con centro in O. Con la rappresentazione (2.1) consideriamo una σ_2^2 di centro O definita da

$$z = \varrho_1 x + \varrho_2 y + e_{11} x^2 + 2e_{12} xy + e_{22} y^2 + [3] \tag{3.1}$$

e cerchiamo le condizioni affinchè $\sigma_2^2 \subset S_4$.

Sarà comodo porre

$$\varphi_2(x,y,z) \equiv \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y)\, z + az^2 \tag{3.2}$$

con

$$\varphi_2(x,y) \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2, \quad \varphi_1(x,y) \equiv a_1 x + a_2 y, \tag{3.3}$$

(a_{ik}, a_i, a—costanti); e similmente per $\psi_2(x,y,z)$ e $\chi_2(x,y,z)$ cambiando i coefficienti a in b e in c.

L'espressione di t_1 su σ_2^2 (3.1), che indicherò con $\bar{t}_1$ è

$$\bar{t}_1 = \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y)(\varrho_1 x + \varrho_2 y) + a(\varrho_1 x + \varrho_2 y)^2 + \ldots; \tag{3.4}$$

analogamente per $\bar{t}_2$, $\bar{t}_3$.

La matrice delle derivate prime e seconde (divise per 2) di x, y, z (3.1), $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}_3$ rispetto ad x e y è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varrho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varrho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{11} & \frac{1}{2}\bar{t}_{1/x,x} & \frac{1}{2}\bar{t}_{2/x,x} & \frac{1}{2}\bar{t}_{3/x,x} \\ 0 & 0 & e_{12} & \frac{1}{2}\bar{t}_{1/x,y} & \frac{1}{2}\bar{t}_{2/x,y} & \frac{1}{2}\bar{t}_{3/x,y} \\ 0 & 0 & e_{22} & \frac{1}{2}\bar{t}_{1/y,y} & \frac{1}{2}\bar{t}_{2/y,y} & \frac{1}{2}\bar{t}_{3/y,y} \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

ove p. es. $\bar{t}_{1/xx} = \partial^2 \bar{t}_1 / \partial x^2$ quindi

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\bar{t}_{1/xx} = a_{11} + \varrho_1 a_1 + \varrho_1^2 a\,, \\ \frac{1}{2}\bar{t}_{1/xy} = a_{12} + \varrho_{(1} a_{2)} + \varrho_1 \varrho_2 a\,, \\ \frac{1}{2}\bar{t}_{1/yy} = a_{22} + \varrho_2\, a_2 + \varrho_2^2 a \end{cases}$$

(e analogamente per le derivate di $\bar{t}_2$, $\bar{t}_3$).

Le condizioni affinchè la matrice (3.5) sia di rango 4, cioè $\sigma_2^2 \subset S_4$, sono le stesse di quelle affinchè la matrice

$$(3.7)\qquad \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}\bar{t}_{1/xx} & \frac{1}{2}\bar{t}_{2/xx} & \frac{1}{2}\bar{t}_{3/xx} \\ e_{12} & \frac{1}{2}\bar{t}_{1/xy} & \frac{1}{2}\bar{t}_{2/xy} & \frac{1}{2}\bar{t}_{3/xy} \\ e_{22} & \frac{1}{2}\bar{t}_{1/yy} & \frac{1}{2}\bar{t}_{2/yy} & \frac{1}{2}\bar{t}_{3/yy} \end{bmatrix}$$

sia di rango 2.

L'annullarsi del determinante formato con le ultime tre colonne è una condizione involgente soltanto ϱ_1, ϱ_2 cioè riguarda il piano tangente a σ_2^2 (piano che dunque non può essere preso a arbitrio).

Per semplificare i calcoli osserviamo che, sostituendo a t_2, t_3 loro opportune combinazioni lineari con t_1 si può fare (nelle nuove coordinate che seguiteremo ad indicare con t_2, t_3) senza restrizione p. es. $b = c = 0$. Con ciò la condizione detta diviene

$$(3.8)\qquad \begin{vmatrix} a\varrho^2 + a_1\varrho_1 + a_{11} & \varrho_1 b_1 + b_{11} & \varrho_1 c_1 + c_{11} \\ a\varrho_1\varrho_2 + \frac{1}{2}(a_1\varrho_2 + a_2\varrho_1) + a_{12} & \frac{1}{2}(\varrho_1 b_2 + \varrho_2 b_1) + b_{12} & \frac{1}{2}(\varrho_1 c_2 + \varrho_2 c_1) + c_{12} \\ a\varrho_2^2 + a_2\varrho_2 + a_{22} & \varrho_2 b_2 + b_{22} & \varrho_2 c_2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Si riconosce facilmente che i termini in ϱ_1, ϱ_2 del 4° ordine sono identicamente nulli, mentre non lo sono in generale quelli del 3°. E poichè $(\varrho_1, \varrho_2, -1$ sono le coordinate del piano tangente a σ_2^2 (entro lo S_3: $t_1 = t_2 = t_3 = 0$) segue che i piani tangenti alle calotte cercate inviluppano un cono di terza classe.

Fissato uno di questi piani, cioè una coppia ϱ_1, ϱ_2 soddisfacente alla (3.8) bisogna soddisfare una condizione lineare omogenea nelle e_{ik}: sicchè non tutte le ∞^3 σ_2^2 tangenti al piano fissato ma solo ∞^2 stanno in S_4. Queste costituiscono una classe d'equivalenza, cioè una *pseudocalotta*. Riassumendo:

Vi sono ∞^1 *piani per un punto* O *di* V_3 *nello* S_3 *tangente e formanti un inviluppo di* 3^a *classe a ciascuno dei quali sono tangenti* ∞^2 $\sigma_2^2 \subset S_4$ *formanti un pseudocalotta.*

Queste ∞^2 σ_2^2 possono dirsi principali e così i loro ∞^1 piani tangenti e i loro S_4.

E'inutile chiedersi se esistano σ_2^2 più specializzate cioè paraboliche o addirittura $\subset S_3$: perciò occorerebbe che σ_2^2 avesse una o due tangenti asintotiche che sarebbero tali anche per V_3, mentre s'è visto al §**2** (M_2 di rango 1) che tali tangenti in generale non esistono.

Pervenuta il 10 V 1967

Accademia Nazionale dei Lincei,
Roma, Italia

BIBLIOGRAFIE

1. Bompiani E., *Elementi principali di una varietà differenziabile.* Rev. Roum. de Math. pures et appl., 1967, **XII**, *9*, (sotto stampa).

ELEMENTELE PRINCIPALE ALE UNEI VARIETĂŢI TRIDIMENSIONALE A SPAŢIULUI PROIECTIV CU ŞASE DIMENSIUNI

(Rezumat)

Într-o Notă aflată sub tipar [1] autorul a introdus noţiunea de *element (diferenţial) principal* fie de curbă, fie de varietate aparţinînd unei varietăţi diferenţiabile. În această Notă se elucidează noţiunea sus menţionată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 513.814

INVARIANŢI LA TRANSPORT PARALEL IN SPAŢII 4-DIMENSIONALE CU TORSIUNE (II)

DE

VIOREL MURGESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. În [1] ne-am ocupat cu studiul unor invarianţi la transportul paralel al unui cîmp vectorial oarecare, în spaţii cu conexiune afină 4-dimensionale, iar în Nota de faţă continuăm cu o problemă asemănătoare, privind anumiţi invarianţi la transportul paralel al unei perechi de vectori oarecare în aceleaşi spaţii.

2. Fie deci L_4 un spaţiu cu conexiune afină cu torsiune, coeficienţii conexiunii fiind Γ_i^k [1]), iar $\mathbf{u}\,(u^k)$ şi $\mathbf{v}\,(v^k)$ două cîmpuri vectoriale oarecare, definite într-un anumit domeniu D al variabilelor x^i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, în care Γ_{ij}^k sînt funcţii diferenţiabile de clasă C^2.

Ne punem atunci problema determinării unei funcţii $F(x^k, u^k, v^k)$, omogenă de grad zero în raport cu componentele vectorilor **u** şi **v** separat şi invariantă la transportul paralel al acestor vectori din punctul $P\,(x^i)$ în punctul vecin $P'\,(x^i + \mathrm{d}x^i)$ din D. Ţinînd seama de relaţiile

$$\mathrm{d}u^i + \Gamma_{jk}^i u^j \,\mathrm{d}x^k = 0\,, \quad \mathrm{d}v^i + \Gamma_{jk}^i v^j \,\mathrm{d}x^k = 0\,,$$

ce exprimă faptul că **u** şi **v** sînt transportaţi prin paralelism, condiţiile problemei impun ca F să satisfacă sistemul diferenţial

$$(1)\quad Y_1 \equiv u^i \frac{\partial F}{\partial u^i} = 0\,, \quad Y_2 \equiv v^i \frac{\partial F}{\partial v^i} = 0\,, \quad Y_{2+k} \equiv \frac{\partial F}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^i \left(u^j \frac{\partial F}{\partial u^i} + v^j \frac{\partial F}{\partial v^i} \right) = 0\,,$$

[1]) Presupunem de la bun început că în tot cuprinsul acestei Note indicii iau valori de la 1 la 4, în afară de cei cu menţiune specială.

compus din şase ecuaţii în douăsprezece variabile independente x^i, u^k, v^k. Formînd consecinţele diferenţiale corespunzătoare în scopul stabilirii condiţiilor de completă integrabilitate a acestui sistem, obţinem $(Y_1, Y_{2+k}) = 0$, $(Y_2, Y_{2+k}) = 0$ şi încă şase ecuaţii

$$(2) \qquad (Y_{2+p}, Y_{2+q}) \equiv R^h_{ipq}\left(u^i \frac{\partial F}{\partial v^h} + v^i \frac{\partial F}{\partial v^h}\right) = 0, \ (p \neq q),$$

în care R^h_{ipq} sînt componentele tensorului de curbură a spaţiului.

Presupunînd acum că sistemul (1) este complet, rezultă că ecuaţiile (2) trebuie să fie dependente liniar de ecuaţiile (1), ceea ce se exprimă prin relaţiile

$$(3) \qquad R^h_{ipq} = 0 \text{ pentru } h \neq i, \quad R^h_{ipq} = \varphi_{pq}(x^k) \text{ pentru } h = i,$$

în care $\varphi_{pq}(x^k)$ sînt anumite funcţii determinate de componentele corespunzătoare ale tensorului de curbură. Facem încă observaţia că ne-am menţinut în ipoteza că relaţiile de dependenţă liniară considerate sînt independente de componentele vectorilor **u** şi **v**.

Ne propunem să arătăm în continuare că, în condiţiile (3), soluţia generală a sistemului (1) poate fi determinată prin cvadraturi. Dar pentru aceasta este necesar să observăm mai întîi că (3) caracterizează spaţiile L_4 care admit cel puţin trei cîmpuri de vectori covarianţi liniar independenţi. În adevăr, dacă toţi $\varphi_{pq}(x^k) \equiv 0$, atunci spaţiul fiind fără curbură, admite paralelism absolut şi prin urmare are patru cîmpuri de vectori covarianţi paraleli, liniar independenţi. Ţinînd acum seama de faptul că soluţiile sistemului diferenţial

$$(4) \qquad \frac{\partial \lambda_h}{\partial x^k} - \Gamma^m_{hk} \lambda_m = 0$$

furnizează toate cîmpurile $\lambda^{(\alpha)}_h$ de vectori covarianţi paraleli, condiţiile de integrabilitate ale acestui sistem fiind de forma

$$(5) \qquad R^h_{ipq} \lambda_h = 0, \quad R^h_{ipq|\gamma_1} \lambda_h = 0, \ldots,$$

în ipoteza că măcar una dintre funcţiile $\varphi_{pq}(x^k)$ nu este identic nulă, constatăm că toate ecuaţiile din (5) se reduc la una singură, anume $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Cum această ecuaţie are trei soluţii fundamentale, în virtutea unei teoreme binecunoscute [2], rezultă că (4) are trei soluţii independente şi prin urmare spaţiul L_4 considerat admite trei cîmpuri de vectori paraleli, liniar independenţi în domeniul D, $\lambda^{(\alpha)}_h$ ($\alpha = 1,2,3$).

Să mai considerăm încă un cîmp vectorial arbitrar $\lambda^{(4)}_h$, dar liniar independent de precedentele (rang $\| \lambda^i_h \| = 4$) şi cu ajutorul lor să efectuăm asupra sistemului (1) transformarea liniară

(6) $$\bar{u}^i = \lambda_h^i u^h, \quad \bar{v}^i = \lambda_h^i v^h,$$

a cărei inversă este

(6′) $$u^h = \mu_i^h \bar{u}^i, \quad v^h = \mu_i^h \bar{v}^i, \quad (\lambda_h^i \mu_j^h = \delta_j^i).$$

Atunci (1) devine

(1′) $$\bar{Y}_1 \equiv \bar{u}^i \frac{\partial F}{\partial \bar{u}^i} = 0, \; \bar{Y}_2 \equiv \bar{v}^i \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^i} = 0, \; \bar{Y}_{2+k} \equiv \frac{\partial F}{\partial x^k} - \bar{\Gamma}_{jk}^i \left(\bar{u}^j \frac{\partial F}{\partial \bar{u}^i} + \bar{v}^j \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^i} \right) = 0,$$

unde am notat

(7) $$\bar{\Gamma}_{jk}^i = -\mu_j^h \left(\frac{\partial \lambda_h^i}{\partial x^k} - \Gamma_{hk}^m \lambda_m^i \right).$$

Dar cum $\lambda_h^{(\alpha)}$ satisfac sistemul (4) pentru $\alpha = 1, 2, 3$, rezultă din (7) că $\bar{\Gamma}_{jk}^{\alpha} = 0$ pentru $\alpha = 1, 2, 3$, și deci sistemul (1′) devine de forma simplificată

(1″) $$\bar{Y}_1 \equiv \bar{u}^i \frac{\partial F}{\partial \bar{u}^i} = 0, \; \bar{Y}_2 \equiv \bar{v}^i \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^i} = 0, \; \bar{Y}_{2+k} \equiv \frac{\partial F}{\partial x^k} - \bar{\Gamma}_{jk}^4 \left(\bar{u}^j \frac{\partial F}{\partial \bar{u}^4} + \bar{v}^j \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^4} \right) = 0.$$

Pentru a ajunge la soluția sa generală, procedăm la integrarea succesivă a ultimelor ecuații. Considerînd inițial ecuația $\bar{Y}_3 = 0$, constatăm că integralele prime ale sistemului caracteristic corespunzător sînt soluțiile ecuațiilor liniare

(8) $$\frac{d\bar{u}^4}{dx^1} + \bar{\Gamma}_{41}^4 \bar{u}^4 + \bar{\Gamma}_{l1}^4 \bar{u}^l = 0, \quad \frac{d\bar{v}^4}{dx^1} + \bar{\Gamma}_{41}^4 \bar{v}^4 + \bar{\Gamma}_{l1}^4 \bar{v}^l = 0, \quad (l = 1, 2, 3),$$

și deci au expresia

(8′) $$\alpha_k \bar{u}^k = C_1, \quad \alpha_k \bar{v}^k = C_2,$$

în care am notat

(8″) $$\alpha_4 = \exp \int \bar{\Gamma}_{41}^4 dx^1, \quad \alpha_l = \int \bar{\Gamma}_{l1}^4 \alpha_4 \, dx^1, \quad (l = 1, 2, 3).$$

Făcînd acum în (1″) substituția

(9) $$x^k = x^k, \quad \bar{u}^i = \xi^i \quad \alpha_k \bar{u}^k = \xi^4, \quad \bar{v}^i = \eta^i, \quad \alpha_k \bar{v}^k = \eta^4, \quad (i = 1, 2, 3),$$

deoarece ecuația $\bar{Y}_3 = 0$ ne dă $\partial F / \partial x^1 = 0$, iar ecuațiile $\bar{Y}_1 = 0$ și $\bar{Y}_2 = 0$ sînt invariante la schimbări liniare de variabile, sistemul (1″) se reduce la

(10) $$\begin{cases} Z_1 \equiv \xi^i \dfrac{\partial F}{\partial \xi^i} = 0, \; Z_2 \equiv \eta^i \dfrac{\partial F}{\partial \eta^i} = 0, \\ Z_{k+1} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial x^k} - \beta_{lk} \left(\xi^l \dfrac{\partial F}{\partial \xi^4} + \eta^l \dfrac{\partial F}{\partial \eta^4} \right) = 0, \; (k = 2, 3, 4), \end{cases}$$

în care

$$\beta_{4k} = \bar{\Gamma}^4_{4k} - \frac{1}{\alpha_4}\frac{\partial \alpha_4}{\partial x^k}, \quad \beta_{lk} = \bar{\Gamma}^4_{lk}\alpha_4 - \alpha_l \beta_{4k} - \frac{\partial \alpha_l}{\partial x^k}, \tag{11}$$

$$(l = 1, 2, 3; \; k = 2, 3, 4).$$

Ecuaţiile $Z_{k+1} = 0$, $(k = 2, 3, 4)$, avînd aceeaşi formă cu a ecuaţiei $\bar{Y}_3 = 0$, procedăm la integrarea lor succesivă. Astfel, pentru $Z_3 = 0$, din sistemul caracteristic

$$\frac{d\bar{\xi}^4}{dx^2} + \beta_{42}\bar{\xi}^4 + \beta_{l2}\bar{\xi}^l = 0, \quad \frac{d\bar{\eta}^4}{dx^2} + \beta_{42}\bar{\eta}^4 + \beta_{l2}\bar{\eta}^l = 0, \quad (l = 1, 2, 3), \tag{12}$$

obţinem integralele prime

$$\gamma_k \bar{\xi}^k = C_1, \quad \gamma_k \bar{\eta}^k = C_2, \tag{12'}$$

unde am notat

$$\gamma_4 = \exp\int \beta_{42}\, dx^2, \quad \gamma_l = \int \beta_{l2}\,\gamma_4\, dx^2, \quad (l = 1, 2, 3). \tag{12''}$$

Făcînd acum în (10) substituţia

$$x^k = x^k, \quad \bar{\xi}^i = \bar{\xi}^i, \quad \gamma_k \bar{\xi}^k = \bar{\xi}^4, \quad \bar{\eta}^i = \bar{\eta}^i, \quad \gamma_k \bar{\eta}^k = \bar{\eta}^4, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{13}$$

obţinem $\partial F/\partial x^2 = 0$ şi sistemul redus

$$\bar{Z}_1 \equiv \bar{\xi}^i \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}^i} = 0, \quad \bar{Z}_2 \equiv \bar{\eta}^i \frac{\partial F}{\partial \bar{\eta}^i} = 0, \quad \bar{Z}_k \equiv \frac{\partial F}{\partial x^k} - \delta_{lk}\left(\bar{\xi}^l \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}^4} + \bar{\eta}^l \frac{\partial F}{\partial \bar{\eta}^4}\right) = 0, \tag{14}$$

$$(k = 3, 4),$$

unde

$$\delta_{4k} = \beta_{4k} - \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial \gamma_4}{\partial x^k}, \quad \delta_{lk} = \beta_{lk}\,\gamma_4 - \gamma_l\,\delta_{4k} - \frac{\partial \gamma_l}{\partial x^k}, \quad (l = 1, 2, 3; \; k = 3, 4). \tag{15}$$

Pentru $\bar{Z}_3 = 0$, din sistemul caracteristic

$$\frac{d\bar{\xi}^4}{dx^3} + \delta_{43}\bar{\xi}^4 + \delta_{l3}\bar{\xi}^l = 0, \quad \frac{d\bar{\eta}^4}{dx^3} + \delta_{43}\bar{\eta}^4 + \delta_{l3}\bar{\eta}^l = 0, \quad (l = 1, 2, 3), \tag{16}$$

obţinem integralele prime

$$\varphi_k \bar{\xi}^k = C_1, \quad \varphi_k \bar{\eta}^k = C_2, \tag{16'}$$

în care

$$\varphi_4 = \exp\int \delta_{43}\, dx^3, \quad \varphi_l = \int \delta_{l3}\,\varphi_4\, dx^3, \; (l = 1, 2, 3). \tag{16''}$$

Prin noua substituţie

(17) $x^k = x^k$, $\bar{\xi}^i = \theta^i$, $\varphi_k \bar{\xi}^k = \theta^4$, $\bar{\eta}^i = \varrho^i$, $\varphi_k \bar{\eta}^k = \varrho^4$, $(i = 1, 2, 3)$,

obținem $\partial F/\partial x^3 = 0$, iar sistemul (14) se reduce la

(18) $W_1 \equiv \theta^i \dfrac{\partial F}{\partial \theta^i} = 0$, $W_2 \equiv \varrho^i \dfrac{\partial F}{\partial \varrho^i} = 0$, $W_3 \equiv \dfrac{\partial F}{\partial x^4} - \psi_l \left(\theta^l \dfrac{\partial F}{\partial \theta^4} + \varrho^l \dfrac{\partial F}{\partial \varrho^4} \right) = 0$,

în care

(19) $\psi_4 = \delta_{44} - \dfrac{1}{\varphi_4} \dfrac{\partial \varphi_4}{\partial x^4}$, $\psi_l = \delta_{l4} \varphi_4 - \varphi_l \psi_4 - \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x^4}$, $(l = 1, 2, 3)$.

Procedînd analog cu ecuația $W_3 = 0$, pentru care sistemul caracteristic are expresia

(20) $\dfrac{\mathrm{d}\theta^4}{\mathrm{d}x^4} + \psi_4 \theta^4 + \psi_l \theta^l = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}\varrho^4}{\mathrm{d}x^4} + \psi_4 \varrho^4 + \psi_l \varrho^l = 0$, $(l = 1, 2, 3)$,

obținem integralele prime

(20′) $\pi_k \theta^k = C_1$, $\pi_k \varrho^k = C_2$,

unde

(20″) $\pi_4 = \exp \int \psi_4 \, \mathrm{d}x^4$, $\pi_l = \int \psi_l \pi_4 \, \mathrm{d}x^4$, $(l = 1, 2, 3)$.

Acum, în urma substituției

(21) $x^k = x^k$, $\theta^i = \tilde{u}^i$, $\pi_k \theta^k = \tilde{u}^4$, $\varrho^i = \tilde{v}^i$, $\pi_k \varrho^k = \tilde{v}^4$, $(i = 1, 2, 3)$,

ultima ecuație din (18) se reduce la $\partial F/\partial x^4 = 0$, astfel că (18) devine

(22) $\overline{W}_1 \equiv \tilde{u}^i \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{u}^i} = 0$, $\overline{W}_2 \equiv \tilde{v}^i \dfrac{\partial F}{\partial \tilde{v}^i} = 0$.

Efectuînd ultima etapă a integrării formale, se obține soluția generală a sistemului (1) sub forma

(23) $F = F(I_1, I_2, I_3, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)$,

unde F este o funcție arbitrară de invarianții

(24) $I_1 = \dfrac{\tilde{u}^1}{\tilde{u}^4}$, $I_2 = \dfrac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^4}$, $I_3 = \dfrac{\tilde{u}^3}{\tilde{u}^4}$, $\mathcal{J}_1 = \dfrac{\tilde{v}^1}{\tilde{v}^4}$, $\mathcal{J}_2 = \dfrac{\tilde{v}^2}{\tilde{v}^4}$, $\mathcal{J}_3 = \dfrac{\tilde{v}^3}{\tilde{v}^4}$,

în care $\tilde{u}^i$ și $\tilde{v}^i$ sînt forme liniare în u^i și v^i, respectiv. În adevăr, ținînd seama de (8″), (11), (12″), (15), (16″), (19) și (20″), rezultă că avem

$$
(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha_4 = \exp\int \overline{\Gamma}^4_{41}\,dx^1,\quad \gamma_4 = \exp\int (\overline{\Gamma}^4_{42}\,dx^2 - \overline{\Gamma}^4_{41}\,dx^1),\\
&\varphi_4 = \exp\int (\overline{\Gamma}^4_{43}\,dx^3 - \overline{\Gamma}^4_{42}\,dx^2),\quad \pi_4 = \exp\int (\overline{\Gamma}^4_{44}\,dx^4 - \overline{\Gamma}^4_{43}\,dx^3),\\
&\alpha_l = \int \alpha_4\,\overline{\Gamma}^4_{l1}\,dx^1,\quad \gamma_l = \int \gamma_4\left(\alpha_4\,\overline{\Gamma}^4_{l2} - \alpha_l\,\overline{\Gamma}^4_{42} + \alpha_l\frac{\partial \ln \alpha_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_l}{\partial x^2}\right) dx^2,\\
&\varphi_l = \int \left[\alpha_4\gamma_4\varphi_4\,\overline{\Gamma}^4_{l3} - \gamma_4\varphi_4\alpha_l\left(\overline{\Gamma}^4_{43} - \frac{\partial \ln \alpha_4}{\partial x^3}\right) - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \varphi_4\gamma_l\left(\Gamma^4_{43} - \frac{\partial \ln \alpha_4\gamma_4}{\partial x^3}\right) - \varphi_4\frac{\partial \gamma_l}{\partial x^3}\right] dx^3,\\
&\pi_l = \int \left[\alpha_4\gamma_4\varphi_{44}\pi_4\,\overline{\Gamma}^4_{l4} - \gamma_4\varphi_4\pi_4\alpha_l\left(\overline{\Gamma}^4_{44} - \frac{\partial \ln \alpha_4}{\partial x_4}\right) - \varphi_4\pi_4\gamma_l\left(\overline{\Gamma}^4_{44} - \frac{\partial \ln \alpha_4\gamma_4}{\partial x^4}\right) - \right.\\
&\qquad \left. - \pi_4\varphi_l\left(\Gamma^4_{44} - \frac{\partial \ln \alpha_4\gamma_4\varphi_4}{\partial x^4}\right) - \gamma_4\varphi_4\pi_4\frac{\partial \alpha_l}{\partial x^4} - \varphi_4\pi_4\frac{\partial \gamma_l}{\partial x^4} - \pi_4\frac{\partial \varphi_l}{\partial x^4}\right] dx^4,\\
&\qquad\qquad (l = 1,\ 2,\ 3),
\end{aligned}\right.
$$

iar din (21), (17), (13), (9) şi (6) obţinem

$$
(26)\qquad \tilde{u}^i = \nu^i_h\,u^h,\quad \tilde{v}^i = \nu^i_h\,v^h,
$$

în care coeficienţii ν^i_k se exprimă în funcţie de λ^i_h şi mărimile din (25) în conformitate cu relaţiile

$$
(26')\quad \left\{\begin{aligned}
&\nu^i_h = \lambda^i_h\,,\\
&\nu^4_h = \alpha_4\gamma_4\varphi_4\pi_4\lambda^4_h - (\gamma_4\varphi_4\pi_4\alpha_l + \varphi_4\pi_4\gamma_l + \pi_4\varphi_l + \pi_l)\,\lambda^l_h\,,\ (i,\ l = 1, 2, 3).
\end{aligned}\right.
$$

În cazul particular în care condiţiile (2) se reduc la $R^h_{ijk} = 0$, adică atunci cînd spaţiul admite paralelism absolut, cu ajutorul a patru cîmpuri $\lambda^{(\alpha)}_h$ de vectori paraleli, liniar independenţi, soluţii ale sistemului (4), printr-o substituţie de forma (6) sistemul (1) se reduce la

$$
(27)\qquad \overline{\gamma}_1 \equiv \overline{u}^i\frac{\partial \overline{F}}{\partial u^i} = 0,\quad \overline{Y}_2 \equiv \overline{v}^i\frac{\partial \overline{F}}{\partial v^i} = 0,\quad \overline{Y}_{2+k} \equiv \frac{\partial \overline{F}}{\partial x^k} = 0,
$$

deoarece toţi Γ^i_{jk} sînt nuli. Soluţia sa generală se prezintă sub forma unei funcţii arbitrare de invarianţii

$$
(28)\qquad I_1 = \frac{\overline{u}^1}{\overline{u}^4},\ I_2 = \frac{\overline{u}^2}{\overline{u}^4},\ I_3 = \frac{\overline{u}^3}{\overline{u}^4},\ \mathcal{J}_1 = \frac{\overline{v}^1}{\overline{v}^4},\ \mathcal{J}_2 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{v}^4},\ \mathcal{J}_3 = \frac{\overline{v}^3}{\overline{v}^4},
$$

în care $\bar{u}^i$ și $\bar{v}^i$ sînt combinații liniare de componentele vectorilor **u** și **v**, de forma

$$\bar{u}^i = \lambda^i_h u^h, \quad \bar{v}^i = \lambda^i_h v^h, \tag{29}$$

unde $\lambda^{(i)}_h$ sînt cele patru cîmpuri de vectori paraleli.

Am ajuns prin urmare la următorul rezultat:

Orice L_4 care admite trei cîmpuri de vectori paraleli sau este cu paralelism absolut, are șase invarianți de forma (24), *respectiv* (28), — *soluții ale sistemului* (1) —, *la transportul paralel al unei perechi de vectori* **u** *și* **v** *din punctul $P(x^i)$ în punctul $P'(x^i + dx^i)$, care sînt rapoarte omogene de gradul zero de combinații liniare de componentele celor doi vectori, de forma* (26), *respectiv* (29), *cu coeficienți dați de* (26'), *respectiv, de componentele a patru cîmpuri de vectori paraleli, funcții de coeficienții de conexiune a spațiului.*

Invariații (24) ai sistemului (1) se pretează la următoarea interpretare simplă: într-un L_4 care admite trei cîmpuri de vectori paraleli, oricărei perechi de cîmpuri vectoriale $\mathbf{u}(u^i)$ și $\mathbf{v}(v^i)$ putem face să-i corespundă o altă pereche $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{u}^i)$ și $\tilde{\mathbf{v}}(\tilde{v}^i)$ printr-o transformare de forma (26), și aceasta într-o infinitate de moduri datorită arbitrarietății cîmpului $\lambda^{(4)}_i$, astfel încît componentele spațiale ale perechii $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, raportate la cea de-a patra componentă (considerată temporală), să fie transportate prin paralelism, prin transportul paralel al perechii **u**, **v**. Dacă spațiul este cu paralelism absolut, o interpretare similară pentru invarianții corespunzători (28) este de prisos.

Interpretarea dată rămîne valabilă și în cazul transportului prin paralelism al unui singur cîmp vectorial **u**, în ipoteza omogeneității de grad zero a funcției $F(x^k, u^k)$, în raport cu componentele vectorului **u** (v. [1] pentru cazul $M = 0$).

3. În ipoteza că sistemul (1) nu este complet, i se poate adăuga de la una pînă la cinci dintre ecuațiile (2), astfel încît sistemul nou format să fie complet. Dar, după cum a arătat A. Haimovici în [3], soluția unor atare sisteme nu poate fi determinată, în general, prin cvadraturi, așa încît invarianții corespunzători nu pot fi găsiți decît în unele cazuri particulare, ce sînt dictate de forma condițiilor de integrabilitate ale sistemelor. Totuși un studiu al condițiilor de integrabilitate, care caracterizează anumite categorii de spații L_4 ce admit de la cinci pînă la un singur invariant la transportul prin paralelism al vectorilor **u** și **v**, poate fi efectuat în întregime; de asemenea, se poate arăta că în condiții destul de generale, cum ar fi cele corespunzătoare spațiilor care admit două cîmpuri de direcții paralele, sau ale spațiilor cu curbură recurentă [4], invarianții sistemelor de forma (1), (2) pot fi determinați efectiv. Asupra acestor chestiuni vom reveni însă într-o Notă viitoare.

Institutul politehnic, Iași
Catedra de matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Murgescu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI(XV)**, *3—4*, pp. 49—60.
2. Eisenhart L. P., *Non-Riemannian Geometry*. New-York, 1927.
3. Haimovici A., Rev. Univ. „Al. I. Cuza" şi Inst. polit. Iaşi, 1955, **II**, *1—2*, pp. 5—23.
4. Murgescu V., An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1958, **IV**, *1*, pp. 67—78.

INVARIANTS AU TRANSPORT PARALLÈLE DANS LES ESPACES 4-DIMENSIONNELS À TORSION (II)

(Résumé)

Dans cette Note on continue un étude, commencé en [1], concernant quelques invariants au transport parallèle d'un vecteur dans les espaces à connexion affine 4-dimensionnels, à torsion.

En considérant maintenant deux champs de vecteurs **u** et **v**, on pose le problème de trouver une function $F(x^i, u^i, v^i)$, homogène de degré zéro dans les composantes des vecteurs **u** et **v**, séparément, et invariante au transport par parallélisme de ces vecteurs sur un chemin infinitésimal. Ça revient à l'intégration du système (1), dans les conditions d'intégrabilité (3), qui assurent l'existence de trois champs de vecteurs parallèles $\lambda_h^{(i)}$, $(i = 1, 2, 3)$, solutions du système (4); à l'aide de ceux-ci, par la transformation linéaire (6), on réduit le système (1) à (1″), dont l'intégration formelle est plus facile. Sa solution (23) dépend de six invariants qui ont la forme (24). En particulier, si l'espace est à parallélisme absolu, le système (1) prend la forme (27)' et sa solution générale est une fonction arbitraire des invariants (28), qui sont construits à l'aide de quatres champs de vecteurs linéairement indépendants et parallèles $\lambda_h^{(i)}$, qui sont solutions du système (4).

Les invariants trouvés sont des rapports homogènes de degré zéro, de combinaisons linéaires des composantes des vecteurs **u** et **v**, données par (26) ou (29). Ils peuvent être interprétés géométriquement d'une manière très simple. Dans un L_4 qui admet trois champs de vecteurs parallèles, à toute paire de vecteurs (**u**, **v**) qui sont transportés par parallélisme, on peut faire correspondre une autre paire $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$ qui a la propriété suivante: les rapports entre les composantes spatiales des vecteurs $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{v}}$ et leur composante temporelle (la 4-ième) sont eux-mêmes invariants au transport parallèle des vecteurs **u** et **v**.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 516.3 ; 516.8

REPRÉSENTATION VECTORIELLE DES QUADRIQUES DE ROTATION (I)

PAR

ŞARLOTA RIMER

1. Les chaires de Mathématiques de l'Institut Polytechnique de Jassy se sont proposées la reconstruction en esprit moderne du cours de Géométrie Analytique. En ce cadre, nous avons fait des recherches sur l'étude vectorielle des coniques [3] et dans cette Note nous présentons quelques résultats concernant les quadriques.

2. Considérerons les quadriques de rotation engendrées par la rotation d'une conique (dégénérée ou non) autour de l'une de ses axes de symétrie.

Soit

$$\mathbf{r}^2 = (\mathbf{kr})^2 + [f(\varphi^{-1}(\mathbf{kr})]^2 \tag{2.1}$$

l'équation qui caractérise la surface obtenue par la rotation autour de l'axe

$$\mathbf{r} = \lambda\mathbf{k}, \quad \lambda\xi(-\infty, \infty) \tag{2.2}$$

d'une courbe

$$\mathbf{r} = f(t)\,\mathbf{i} + \varphi(t)\,\mathbf{k}. \tag{2.3}$$

3. En [1] on établit que l'équation canonique d'une conique non dégénérée à centre est

$$\mathbf{r}^2 = (\mathbf{er})^2 + b^2, \tag{3.1}$$

où $\mathbf{e}$ est un vecteur directeur d'un des axes de symétrie de la conique, ayant la grandeur égale à l'excentricité de la conique et b^2 est positif pour l'ellipse et négatif pour l'hyperbole.

On y introduit pour l'hyperbole la notation $b^2 = -b_H^2$, où $b_H^2 > 0$.

De même, on y trouve l'équation canonique d'une parabole :

$$\mathbf{r}^2 = (\mathbf{er})^2 + 2\mathbf{pr}, \tag{3.2}$$

où $\mathbf{e} = \mathbf{k}$ et $\mathbf{p} = p\mathbf{e}$, p étant le paramètre de la parabole.

Nous démontrerons que les équations (3.1) et (3.2) représentent aussi des quadriques de rotations, dégénérées ou non.

Théorème. *La surface engendrée par la rotation de l'ellipse*

$$\mathbf{r} = b\cos t\,\mathbf{i} + c\sin t\,\mathbf{k}, \tag{3.3}$$

ou de l'une des hyperboles

$$\mathbf{r} = b\,\mathrm{ch}\,t\,\mathbf{i} + c\,\mathrm{sh}\,t\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r} = b\,\mathrm{sh}\,t\,\mathbf{i} + c\,\mathrm{sh}\,t\,\mathbf{k} \tag{3.4}$$

autour de l'axe (2.2), *est caractérisée par l'équation* (3.1).

En effet, en considérant le cas de l'ellipsoïde, l'équation (2.3) donne :

$$f(t) = b\cos t, \quad \varphi(t) = c\sin t = \mathbf{kr}.$$

Il en résulte alors

$$[f(\varphi^{-1}(\mathbf{kr})]^2 = b^2 - \frac{b^2}{c^2}(\mathbf{kr})^2$$

et on peut écrire (2.1) sous la forme

$$\mathbf{r}^2 = \{[(\sqrt{c^2 - b^2})/c)\mathbf{k}]\,\mathbf{r}\}^2 + b^2.$$

Cette équation se réduit à (3.1), vu que $(\sqrt{c^2 - b^2}/c)\,\mathbf{k} = \mathbf{e}$. La réciproque est immédiate.

Démonstrations analogues en cas des hyperboloïdes.

Ont lieu aussi les théorèmes suivants :

Théorème. *La surface engendrée par la rotation de la parabole*

$$\mathbf{r} = \sqrt{2pt}\,\mathbf{i} + t\mathbf{k} \tag{3.6}$$

autour de l'axe (2.2) *est caracterisée par l'équation* (3.2)

Théorème. *La surface engendrée par la rotation d'une des coniques dégénérées, formée par l'un des couples de droites :*

$$\mathbf{r} = \pm\frac{b}{c}t\mathbf{i} + t\mathbf{k}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{r} = \pm b\mathbf{i} + t\mathbf{k}, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} \pm b\mathbf{k}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i}, \quad \mathbf{r} = t\mathbf{i}, \tag{3.10}$$

autor de l'axe (2.2) *est caracterisée, respectivement, par l'équation*

$$\mathbf{r}^2 = (\mathbf{er})^2, \quad \mathbf{e} = e\mathbf{k}, \quad e \neq 1, \tag{3.7'}$$

$$\mathbf{t}^2 = (\mathbf{er})^2 + b^2, \quad \mathbf{e} = \mathbf{k}, \tag{3.8'}$$

$$(\mathbf{er})^2 = b^2, \quad \mathbf{e} \neq 0, \tag{3.9'}$$

$$(\mathbf{er})^2 = 0, \quad \mathbf{e} \neq 0. \tag{3.10'}$$

Réciproquement, des équations de la forme (3.1), (3.2), (3.8'), (3.9'), où $\mathbf{e}$ et $\mathbf{p}$ sont vecteurs collinéaires avec $\mathbf{k}$ et $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ représentent des quadriques des rotation.

On peut construire les tableaux I et II.

Tableau I

e	b^2	Nature de la quadrique	p^2
$0 \leqslant e < 1$	—	Ellipsoïde de rotation complexe ($e = 0$, sphère)	
	0	Cône circulaire complexe ($e = 0$, sphère de rayon nule)	
	+	Ellipsoïde de rotation réel ($e = 0$, sphère)	
$e = 1$	—	Cylindre circulaire complexe	$\neq 0$, paraboloïde de rotation
	0	Couple de plans secants complexes	
	+	Cylindre circulaire réel	$= 0$, couple de plans secants complexes
$e > 1$	—	Hyperboloïde de rotation à deux nappes	
	0	Cône circulaire réel	
	+	Hyperboloïde de rotation à une nappe	

Tableau II

e	b^2	$(\mathbf{er})^2 = b^2$
+	—	Couples de plans parallèles complexes
	0	Couples de plans confondus
	+	Couples de plans parallèles réeles

Observation. En appliquant aux quadriques de rotation les dilatation axiales connues, on obtient les quadriques quelconques, caracterisées par les mêmes équations (3.1), (3.2), (3.7′), (3.8′), où l'on a respectivement

$$\mathbf{r} = \frac{b}{a} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (a \neq 0), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \sqrt{\frac{p}{q}}\, y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (q \neq 0). \tag{3.12}$$

Dans notre prochaine Note, à paraître dans le même *Bulletin*, nous nous occuperons de l'établissement de l'équation générale sous forme vectorielle des quadriques de rotation.

Reçue le 10 III 1967

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Athen H., *Vektorielle Analytische Geometrie*. Hermann Schroedel-Verlag, Hannover, 1963.
2. Creangă I. ş. a., *Curs de geometrie analitică*. Ed. tehn., Buc., 1951.
3. Rimer Ş., *Observaţii privitoare la studiul vectorial al conicelor*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3–4*, pp. 75–80.

REPREZENTARE VECTORIALĂ A CUADRICELOR DE ROTAŢIE (I)

(Rezumat)

În vederea unificării metodei de tratare a Geometrie analitice, se extinde la cuadricele de rotaţie, şi în Nota următoare parţial la cuadricele oarecare, metoda vectorială utilizată la conice în [1] şi [3]. Se stabilesc ecuaţiile canonice (3.1), (3.2), (3.8′) şi (3.9′)) sub forma vectorială a cuadricelor de rotaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 517.52

REMARQUES SUR LE RESTE DE CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION D'UNE DIFFÉRENCE DIVISÉE PAR DES DÉRIVÉES

PAR

TIBERIU POPOVICIU
membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Considérons une fonction f définie et ayant une dérivée n-ième continue sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$, $(a < b)$.

Soient $a = x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq x_{n+1} = b$, $n+1$ points distincts ou non, appartenant à l'intervalle $[a, b]$ tel que les extrémités a, b soient parmi ces points. Il en résulte que n (> 0) est un nombre naturel. Désignons par $a = x_1 = x_1' < x_2' < \ldots < x_p' = x_{n+1} = b$ les points distincts parmi les points x_α et soient $k_1, k_2, \ldots, k_p$ leur ordre de multiplicité respectifs. Nous avons donc $2 \leqq p \leqq n+1$, $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont des nombres naturels, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n+1$ et $\max(k_1, k_2, \ldots, k_p) \leqq n$.

Conformément à la notation des points x_α, x_α', nous avons

$$x_{k_1+k_2+\ldots+k_{\alpha-1}+\beta} = x_\alpha', \quad (\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p),$$

$(k_1 + k_2 + \ldots + k_{\alpha-1}$ est remplacé par 0 si $\alpha = 1)$.

Il existe une fonction continue $G(x)$, complètement déterminée, telle que l'on ait

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \int_a^b G(x) f^{(n)}(x)\, dx, \tag{1}$$

où nous avons désigné par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ la différence divisée de la fonction f sur les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$.

La formule (1) est un cas particulier d'une formule de R. v. Mises [4]. Lorsque $n = \max(k_1, k_2, \ldots, k_p)$, ce qui a lieu si et seulement si $p = 2$ et $k_1 = 1$ ou $k_2 = 1$, la propriété résulte de la formule $(1 \leqq k \leqq n)$

$$[\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n+1-k}; f] =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!\,(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^{n-k}\,(b-x)^{k-1} f^{(n)}(x)\,dx \tag{2}$$

qu'il est facile d'obtenir, en calculant l'intégrale du second membre par des intégrations par parties répétées.

2. La formule (1) peut aussi être déduite d'une autre de G. Kowalewski [3] relative au reste de la formule d'interpolation de Lagrange (de Lagrange-Hermite en général).

Pour simplifier, supposons que les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, soient distincts, donc que $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$. Posons $l(x) = \prod_{\alpha=1}^{n} (x - x_\alpha)$ et considérons les polynômes fondamentaux d'interpolation

$$l_\alpha(x) = \frac{l(x)}{(x - x_\alpha)\,l'(x_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$ relatifs aux noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$.

Désignons enfin par $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f sur ces noeuds. G. Kowalewski obtient [3] le reste $f(x) - L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x) = l(x)\,[x_1, x_2, \ldots, x_n, x; f]$ de la formule d'interpolation de Lagrange sous la forme suivante

$$l(x)\,[x_1, x_2, \ldots, x_n, x; f] = \sum_{\alpha=1}^{n} l_\alpha(x) \int_{x_\alpha}^{x} \frac{(x_\alpha - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\,du. \tag{3}$$

Si nous posons maintenant $L(x) = l(x)\,(x - x_{n+1})$, nous obtenons

$$l(x_{n+1}) = L'(x_{n+1}), \quad l_\alpha(x_{n+1}) = -\frac{L'(x_{n+1})}{L'(x_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

En posant $x = x_{n+1} = b$, dans (3), nous déduisons

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{L'(x_\alpha)} \int_{x_\alpha}^{b} \frac{(x_\alpha - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\,du. \tag{4}$$

3. La formule (4) nous montre que si les noeuds sont distincts la fonction $G(x)$ de la formule (1) este continue et même, si $n > 2$, a une dérivée continue d'ordre $n-2$ sur $[a, b]$ et se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur chacun des intervalles partiels $[x_\alpha, x_{\alpha+1}]$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Nous avons appellé autrefois une telle fonction une fonction élémentaire

d'ordre $n-1$ et nous avons montré quelle est son importance dans la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur [6]. On les appelle aujourd'hui aussi des „spline" fonctions de degré $n-1$. I. J. Schoenberg les a employé [[9], [10] dans d'intéressantes recherches sur la quadrature approchée.

Lorsque les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, ne sont pas distincts mais sont groupés dans les noeuds distincts x'_α d'ordre k_α de multiplicité respectifs, les propriétés précédentes ne sont que partiellement vérifiées. Prolongeons la fonction $G(x)$ par la valeur 0 à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$. La fonction $G(x)$ ainsi prolongée este définie sur $(-\infty, +\infty)$, est continue sur l'intervalle ouvert (a, b) et se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur chacun des intervalles $(-\infty, x'_1)$, $(x'_p, +\infty)$, $(x'_\alpha, x'_{\alpha+1})$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, p-1)$. Sur le noeud x'_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$, la fonction prolongée $G(x)$ est continue si $n \geqq 1 + k_\alpha$ et a une dérivée continue d'ordre $n-1-k_k$ si $n > 1 + k_\alpha$.

4. La fonction $G(x)$ de la formule (1) est non-négative et a une intégrale positive sur $[a, b]$. En effet, si nous posons $f = x^n$ nous déduisons

$$\int_a^b G(x)\,dx = \frac{1}{n!}.$$

La non-négativité de $G(x)$ sur $[a, b]$ résulte de la formule de la moyenne de Cauchy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \tag{5}$$

En effet, si la fonction continue $G(x)$ n'est pas non-négative il existe un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur non nulle de $[a, b]$ sur lequel $G(x) < 0$. Soit alors $f(x)$ une fonction (continue), définie sur $[a, b]$ dont la dérivée n-ième est donnée par

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [a, \alpha] \cup [\beta, b], \\ (x-\alpha)(\beta - x) \neq 0 & \text{pour } x \in (\alpha, \beta). \end{cases} \tag{6}$$

D'une part, de (5) il résulte que $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \geqq 0$ (la fonction f est non-concave d'ordre $n-1$). D'autre part, de (6) il résulte que

$$\int_a^b G(x) f^{(n)}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta G(x) f^{(n)}(x)\,dx < 0$$

ce qui contredit l'égalité (1).

Les propriétés de la fonction $G(x)$ de la formule (1) ont aussi été étudiées par D. V. Ionescu [2].

5. La formule (59) de Cauchy nous suggère la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \approx \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \tag{7}$$

où x_0 est un point *donné*. Le degré d'exactitude de cette formule est $\geqq n$ et ce degré d'exactitude est $> n$ si et seulement si dans (7) nous prenons $x_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha$. Alors le degré d'exactitude est $n+1$ et nous avons la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right) + R. \tag{8}$$

Cette formule est une formule du type Gauss [7] et a donc le reste *de la forme simple* [8]. Un calcul simple nous donne le reste R sous la forme

$$R = \frac{1}{(n+1)\,.\,(n+2)\,!}\left[(n+1)\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha\right)^2\right] . [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n)}],$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points distincts de l'intervalle (a, b) (dépendant, en général, de la fonction f).

Si la fonction f a une dérivée d'ordre $n+2$ sur (a, b), on a aussi

$$R = \frac{1}{2\,(n+1)\,.\,(n+2)\,!}\left[(n+1)\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha\right)^2\right] f^{(n+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \tag{9}$$

La formule (8) a été examinée dans le cas particulier $p = 2$ et $k_1 = 1$ ou $k_2 = 1$, par Laura Gotusso [1] qui a obtenu, dans ce cas, le reste avec un peu d'imprécision. La formule correcte de Laura Gotusso s'obtient en posant $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, $x_{n+1} = x + h$ ou $x_1 = x + h$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1} = x$ dans (8) et (9). On obtient ainsi la formule d'approximation (avec reste)

$$f(x+h) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}\left(x + \frac{h}{n+1}\right) + \frac{nh^{n+2}}{2\,(n+1)\,.\,(n+2)\,!} f^{(n+2)}(\xi),$$

où ξ est à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x, $x+h$.

6. On peut obtenir les résultats précédents sans passer par la formule (1). En effet, nous avons démontré [5] que *si la fonction f est convexe d'ordre $n-1$, nous avons l'inégalité*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] > \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)$$

(où x_α ne sont pas tous confondus). La simplicité du reste de la formule (8) en résulte alors [8].

7. On peut obtenir d'autres formules d'approximation de la différence divisée (1), en appliquant à l'intégrale du second membre une formule quelconque de quadrature. Je me contenterai d'examiner encore un cas particulier.

Faisons d'abord quelques calculs préliminaires. Les moments

$$c_n = \int_a^b G(x)\, x^n \, dx, \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

peuvent être calculés à l'aide des fonctions symétriques bien connues $w_r = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}=r} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, $(r = 0,1,\ldots ; w_0 = 1)$, la sommation étant étendue aux solutions entiers nonnégatives de l'équation diophantienne $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} = r$. On peut calculer les w_r à l'aide de la formule de récurrence

$$(10) \quad w_r - p_1 w_{r-1} + p_2 w_{r-2} - \cdots + (-1)^{n+1} p_{n+1} w_{r-n-1} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

en posant $w_0 = 1$, $w_{-1} = w_{-2} = \cdots = w_{-n} = 0$, p_1, $p_2, \ldots, p_{n+1}$ étant les fonctions symétriques fondamentales des $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Si nous posons $f = x^{n+r}$ dans (1), nous obtenons

$$w_r = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+r}; x^{n+r}] = \frac{(n+r)!}{r!} \int_a^b G(x)\, x^r \, dx$$

d'où

$$c_r = \frac{r!}{(n+r)!} w_r, \quad (r = 0, 1, \ldots; \ 0! = 1).$$

8. Supposons que les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, soient symétriquement distribués par rapport à l'origine, donc que $a = -b$, $x_\alpha + x_{n+2-\alpha} = 0$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$. Dans ce cas on a $p_\alpha = 0$ pour α impair et de (10) il résulte que $w_r = 0$, donc aussi $c_r = 0$, pour r impair quelconque.

Nous avons la formule d'approximation $(m \geqq 1)$

$$(11) \quad \int_{-b}^{b} G(x) f(x)\, dx \approx \int_{-b}^{b} G(x) \left[\sum_{\alpha=0}^{2m-1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)\right] dx = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{c_{2\alpha}}{(2\alpha)!} f^{(2\alpha)}(0),$$

dont le reste

$$(12) \qquad \int_{-b}^{b} G(x)\, x^{2m}\, [x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2m}; f]\, dx$$

est de degré d'exactitude $2m-1$ et est bien de la forme simple, donc de la forme

$$(13) \qquad c_{2m}[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2m+1}; f],$$

les ξ_α étant $2m+1$ points distincts de l'intervalle $(-b, b)$. Dans (12) on suppose que la fonction f ait une dérivée continue d'ordre $2m-1$, mais le reste est de la forme (13) même si f a une dérivée continue d'ordre $2m-2$ seulement. Le reste peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{2c_{2m}}{(2m)!}[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(2m-2)}],$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant trois points distincts de l'intervalle $(-b, b)$.

Nous déduisons que si les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, sont symétriquement distribués par rapport à l'origine et si $x_{n+1} = -x_1 = b\,(>0)$ nous avons la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{w_{2\alpha}}{(n+2\alpha)!} f^{(n+2\alpha)}(0) +$$

$$+ \frac{2w_{2m}}{(n+2m)!}[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n+2m-2)}],$$

où f a une dérivée continue d'ordre $n+2m-2$ sur $(-b, b)$ et ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points distincts de cet intervalle.

La formule (11) est encore du type Gauss, d'après la définition des formules de ce type [7].

Reçue le 13 II 1967

Université „Babeş-Bolyai"
Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Gotusso L., *Una valutazione approssimata del termine complementare della formula di Taylor.* Atti del Seminario Mat. e Fizico dell'Univ. di Modena, 1964, **XIII**, pp. 221–229.
2. Ionescu D. V., *Cuadraturi Numerice.* Ed. Tehn. Buc., 1957.
3. Kowalewski G., *Interpolation und genäherte Quadratur.* Leipzig u. Berlin, 1932.
4. v. Misess R., *Über allgemeine Quadraturformeln.* J. f. reine u. angew. Math., 1936, **174**, S. 56–67.

5. Popoviciu T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (V). Bull. de la section sci. Acad. Roumaine, 1940, **22**, pp. 351—356.
6. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IX). Bull. math. de la Soc. Roumaine des sciences, 1941, **43**, pp. 85—141.
7. — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Matem., 1955, **VI**, pp. 29—57.
8. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica, 1959, **1** (**24**), pp. 95—142.
9. Schoenberg I. J., *On monosplines of least deviation and best quadrature formulae*. J. SIAM Numer. Anal., 1965, **2**, pp. 144—170.
10. — *On monosplines of least deviation and best quadrature formulae (II)*. J. SIAM Numer. Anal., 1966, **3**, pp. 321—328.

OBSERVAŢII ASUPRA RESTULUI ANUMITOR FORMULE DE APROXIMARE A UNEI DIFERENŢE DIVIZATE PRIN DERIVATE

(Rezumat)

Se fac cîteva consideraţiuni asupra reprezentării (1) a unei diferenţe divizate. Se demonstrează apoi că restul formulei de aproximare (8) are o formă simplă. Lucrarea se încheie cu unele generalizări ale acestei formule.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 517.392

FORMULES DE CUBATURE AVEC UN NOMBRE REDUIT DE NOEUDS (I)

PAR

D. V. IONESCU

§ 1. Introduction

1. Dans cette Note nous donnons une méthode simple pour obtenir des formules de cubature de la forme

$$\iint_D f\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} B_i [f(M_1^{(i)}) + f(M_2^{(i)}) + f(M_3^{(i)}) + f(M_4^{(i)})] \tag{1}$$

relativement au rectangle D ayant pour sommets $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_2, y_2)$, $P_4(x_1, y_2)$ et le centre $P(x_0, y_0)$. Les noeuds $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, $M_3^{(i)}$, $M_4^{(i)}$ de cette formule ont pour coordonnées $(x_0 - \xi_i, y_0 - \eta_i)$, $(x_0 + \xi_i, y_0 - \eta_i)$, $(x_0 + \xi_i, y_0 + \eta_i)$, $(x_0 - \xi_i, y_0 + \eta_i)$. Entre les coefficients B_i et les nombres ξ_i, η_i on peut établir certaines relations. Il restera alors un certain nombre d'indéterminés, coefficients B_k ou nombres ξ_k, η_k qu'on peut appeler *paramètres* et qui seront déterminés d'une telle manière que la formule (1) soit vérifiée par des fonctions successives de la suite

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, \ldots \tag{2}$$

On peut écrire la formule (1) aussi sous la forme

$$\begin{aligned}\iint_D f\,dx\,dy = &\sum_{i=1}^{n_1} B_i [f(M_1^{(i)}) + f(M_2^{(i)}) + f(M_3^{(i)}) + f(M_4^{(i)})] + \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n_2} B_i' [f(M_1'^{(i)}) + f(M_3'^{(i)})] + 2\sum_{i=1}^{n_2} B_i'' [f(M_2''^{(i)}) + f(M_4''^{(i)})] + 4B'''f(P).\end{aligned} \tag{3}$$

Dans la première $\sum$ du second membre les ξ_i, η_i sont différents de zéro, dans la seconde $\sum$ les noeuds $M_1'^{(i)}, M_3'^{(i)}$ ont les coordonnées $(x_0 - \xi_i, y_0)$, $(x_0 + \xi_i, y_0)$ avec $\xi_i \neq 0$ et dans la troisième $\sum$, les noeudes $M_2''^{(i)}$, $M_4''^{(i)}$ ont pour coordonnées $(x_0, y_0 - \eta_i)$, $(x_0, y_0 + \eta_i)$ avec $\eta_i \neq 0$.

On connait des formules de la forme (1) ou (3) qui ont été données par G. W. Tyler [6], J. Albrecht et L. Collatz [1], S. E. Mikeladze [2], R. v. Mises [3], D. D. Stancu [4], [5] et qui seront retrouvées dans ce travail.

§ 2. Formules préliminaires

2 En suivant la voie donnée par les mathématiciens cités ci-dessus écrivons que la formule (1) est vérifiée par les fonctions successives de la suite (2). Nous aurons alors les équations

$$
(4)\quad \begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} B_i = \frac{S}{4}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^2 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^2}{12}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \eta_i^2 = \frac{S}{4}\frac{(y_2 - y_1)^2}{12}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^4 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^4}{80}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^2 \eta_i^2 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2}{144}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \eta_i^4 = \frac{S}{4}\frac{(y_2 - y_1)^4}{80}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^6 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^6}{448}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^4 \eta_i^2 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^4 (y_2 - y_1)^2}{960}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^2 \eta_i^4 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^4}{960}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \eta_i^6 = \frac{S}{4}\frac{(y_2 - y_1)^6}{448}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^8 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^8}{2304}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^6 \eta_i^2 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^6 (y_2 - y_1)^2}{5376}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^4 \eta_i^4 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^4 (y_2 - y_1)^4}{6400}, \\
\sum_{i=1}^{n} B_i \xi_i^2 \eta_i^6 = \frac{S}{4}\frac{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^6}{5376}, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i \eta_i^8 = \frac{S}{4}\frac{(y_2 - y_1)^8}{2304}, \ldots
\end{cases}
$$

où $S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

En posant

$$
(5)\qquad B_i = \frac{S}{4} A_i, \quad \xi_i = (x_2 - x_1)\lambda_i, \quad \eta_i = (y_2 - y_1)\mu_i,
$$

on peut écrire les équations (4) sous la forme

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^2 = \frac{1}{12}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\mu_i^2 = \frac{1}{12}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^4 = \frac{1}{80}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^2\mu_i^2 = \frac{1}{144}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\mu_i^4 = \frac{1}{80}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^6 = \frac{1}{448}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^4\mu_i^2 = \frac{1}{960}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^2\mu_i^4 = \frac{1}{960}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\mu_i^6 = \frac{1}{448}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^8 = \frac{1}{2\,304}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^6\mu_i^2 = \frac{1}{5\,376}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^4\mu_i^4 = \frac{1}{6\,400}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^2\mu_i^6 = \frac{1}{5\,376}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i\mu_i^8 = \frac{1}{2\,304}, \ldots \end{cases}$$

§ 3. Formules à 1, 2 et 3 paramètres

3. Nous citons d'abord la formule bienconnue

$$(7)\qquad \iint_D f\,dx\,dy = Sf(P),$$

à un paramètre, qui est vérifiée par $f = 1, x, y, xy$.

Ensuite nous avons la formule

$$(8)\qquad \iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{2}[f(M_1') + f(M_3')],$$

où les noeuds M_1' et M_3' correspondent à $\lambda_1 = 1/2\sqrt{3}$ et qui est vérifiée par

$$f = 1, x, y, x^2, xy, x^3, x^2y, x^3y.$$

Nous avons une formule analogue à la formule (8), avec les noeuds M_2'', M_4'' correspondant à $\mu_1 = 1/2\sqrt{3}$.

4. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1\mu_1^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{12}$$

est à deux paramètres et conduit à la formule

$$(9)\qquad \iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{12}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{2S}{3}f(P).$$

5. Le système d'équations

$$A_1 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1\mu_1^2 = \frac{1}{12}$$

est à trois paramètres et conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{4}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)], \tag{10}$$

avec les noeuds correspondant à $\lambda_1 = \mu_1 = 1/2\sqrt{3}$.

Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1 = A_2$$

est lui aussi à trois paramètres et conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{4}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')], \tag{11}$$

avec les noeuds M_1', M_3' correspondant à $\lambda_1 = 1/\sqrt{6}$ et les noeuds M_2'', M_4'' correspondant à $\mu_2 = 1/\sqrt{6}$.

Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

est à trois paramètres et conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{6}[f(P_1') + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \frac{S}{3}f(P). \tag{12}$$

De même le système

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{2}$$

est à trois paramètres et conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{3}[f(P_1') + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] - \tag{13}$$
$$- \frac{S}{12}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)].$$

Enfin le système à trois paramètres

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \mu_2 = 1$$

conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{24}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')] + \frac{5S}{6}f(P). \tag{14}$$

Les formules (9), (10), (11), (12), (14) sont citées dans le livre de S. E. Mikeladze [2, pp. 501, 492, 500, 486, 502].

§ 4. Formules à 4 paramètres

6. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1\mu_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1\lambda_1^4 = \frac{1}{80}$$

conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{5S}{36}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{16S}{36}f(P) \tag{15}$$

avec les noeuds correspondant à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

7. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12},$$
$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 = \frac{1}{80}, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}$$

conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{24}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \tag{16}$$
$$\frac{5S}{24} + [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 + A_3\lambda_3^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4 + A_3\lambda_3^4 = \frac{1}{80}, \quad A_1 = A_2, \quad \lambda_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

est à quatre paramètres et conduit à deux formules de cubature. La première est

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{11-\sqrt{41}}{60} S[f(P_1') + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \tag{17}$$

$$+ \frac{4+\sqrt{41}}{60} S[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_3 = \mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{10}}$.

La seconde formule est

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{11+\sqrt{41}}{60} S[f(P_1') + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \tag{18}$$

$$+ \frac{4-\sqrt{41}}{60} [f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)],$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_3 = \mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9+\sqrt{41}}{10}}$.

9. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 + A_3\lambda_3^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4 + A_3\lambda_3^4 = \frac{1}{80}, \quad \lambda_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{18}[f(P_1') + f(P_3')] + \frac{3S}{18}[f(P_2'') + f(P_4'')] + \frac{5S}{18}[f(M_1') + f(M_3')], \tag{19}$$

les noeuds M_1', M_3' correspondant à $\lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

10. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_1\lambda_1^4 = \frac{1}{80}$$

conduit à la formule

$$(20)\qquad \iint\limits_D f\,dx\,dy = \frac{5S}{18}[f(M_1') + f(M_3')] + \frac{4S}{18}[f(M_2'') + f(M_4'')],$$

les noeuds M_1', M_3' et M_2'', M_4'' correspondant à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et à $\mu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

11. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1,\quad A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12},\quad A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12},\quad A_1\lambda_1^4 = \frac{1}{80},\quad A_1 = A_2$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule

$$(21)\qquad \iint\limits_D f\,dx\,dy = \frac{5S}{18}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')] - \frac{S}{9}f(P),$$

les noeuds M_1', M_3' et M_2'', M_4'' correspondant à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\mu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

12. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,\quad A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},\quad A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},\quad \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{2}$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule de cubature

$$\iint\limits_D f\,dx\,dy = \frac{S}{36}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] +$$

$$+ \frac{S}{9}[f(P_1') + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \frac{4S}{9}f(P),$$

appellée *la formule de Cavalieri — Simpson.* Elle est citée par D. D. Stancu dans le travail [4, p. 80].

13. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,\quad A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},\quad A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},\quad \lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{4}$$

est à quatre paramètres et conduit à la formule de cubature

$$\iint_{D} f\,dx\,dy = \frac{4S}{9}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] -$$

$$(23) \qquad -\frac{2S}{9}[f(M_1') + f(M_2') + f(M_3') + f(M_4')] + \frac{S}{9}f(P).$$

Cette formule est citée par D. D. Stancu dans la travail [4, p. 94].

14. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \quad A_1\lambda_1^2 + A_3\lambda_3^2 = \frac{1}{12}, \quad A_2\mu_2^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_3\lambda_3^2\mu_3^2 = \frac{1}{144}, \quad A_1 = A_2 = A_3, \quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}$$

est un système à quatre paramètres et conduit à la formule

$$\iint_{D} f\,dx\,dy = \frac{7-\sqrt{13}}{36} S[f(P_1') + f(P_2') + f(P_3') + f(P_4')] +$$

$$(24) \qquad + \frac{7-\sqrt{13}}{72} S[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{\sqrt{13}-1}{6} f(P),$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondant à $\lambda_3 = \mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{13}+1}{6}}$.

Reçue le 18 IV 1967

Université „Babeş-Bolyai", Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Albrecht J., Collatz L., *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionalen Integrale.* ZAMM 1958, **38**, S. 1–15.
2. Микеладзе С. Е., *Численные методы математического анализа.* Физматгиз, М., 1953.
3. v. Mises R., *Formules de cubature.* Rev. Math. de l'Union Interbalkanique, 1936, **1**, pp. 17–27.
4. Stancu D. D., *Contribuţii la integrarea numerică a funcţiilor de mai multe variabile.* St. şi cerc. de matem., Acad. R.P.R., filiala Cluj, 1957, **VIII**, pp. 75–101.
5. — *O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcţiile de două variabile.* St. şi cerc. de matem., Acad. R.P.R., filiala Cluj, 1958, **IX**, pp. 351–369.
6. Tyler G. W., *Numerical Integration of Fonctions of several Variables.* Canad. J. of Math., 1953, **5**, pp. 393–412.

FORMULE DE CUBATURĂ CU UN NUMĂR REDUS DE NODURI (I)

(Rezumat)

Se expune o metodă simplă care conduce la stabilirea formelor de cubatură de forma (1) relative la un dreptunghi D având vîrfurile sale în $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_2, y_2)$, $P_4(x_1, y_2)$ şi centrul în $P(x_0, y_0)$. Nodurile din formula (1) au coordonatele $(x_0 - \xi_i, y_0 - \eta_i)$, $(x_0 + \xi_i, y_0 - \eta_i)$, $(x_0 + \xi_i, y_0 + \eta_i)$, $(x_0 - \xi_i, y_0 + \eta_i)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 518.5; 512.25

UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES GRANDS SYSTÈMES LINÉAIRES PAR SURITÉRATION POLYNÔMIALE (I)

PAR

Ph. NOËL

1. Introduction

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre un système linéaire $[A][X] = [B]$ de n équations à n inconnues sont classiquement divisées *en méthodes directes et en méthodes indirectes.*

Les premières [1] donnent directement, par transformation de la matrice et du second membre, la solution en un nombre fini d'opérations arithmétiques. Sur calculatrice électronique, les erreures d'arrondi ont une influence telle que le résultat ainsi atteint est parfois fort éloigné de la solution exacte qui devrait être obtenue si les prévisions théoriques étaient respectées. À ce phénomène numérique dangereux, et d'importance imprévisibile, s'ajoute la nécessité de stockage de toute la matrice en mémoire centrale. De ce fait, ces méthodes ne sont effectivement utilisables avec profit que pour résoudre des systèmes de très petites dimensions, quelques dizaines au plus.

Les méthodes itératives, appartenant à la classe des méthodes indirectes [1] ... [3], sont beaucoup moins sensibles aux erreures de troncature car elles sont autocorrectrices comme toute technique itérative.

Elles consistent en la répétition d'un algorithme plus ou moins simple qui donne comme solution approchée du système le vecteur limite d'une suite vectorielle de terme général

$$[X_k] = F_k([A],\ [B],\ [X_{k-1}],\ldots,[X_{k-r}]).$$

Les itérations les plus courantes, en particulier celle que nous présentons, sont de degré $r = 1$, et linéaires en $[X_{k-1}]$. Le calcul d'un itéré $[X_k]$ à partir du précédent n'y fait intervenir la matrice $[A]$ que comme opérande dans des produits du type $[W] = [A][V]$. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux grands systèmes linéaires qui interviennent dans

les résolutions d'équations aux dérivées partielles par les différences finies. La matrice $[A]$ y est très creuse, c'est-à-dire ne comporte que très peu d'éléments non nuls. Elle n'est jamais explicitement construite et les produits $[A][V]$ sont effectués à l'aide d'algorithmes qui ne mettent en jeu que ces éléments non nuls. Des systèmes de plusieurs milliers d'inconnues peuvent ainsi être résolus sur grosse calculatrice.

Ces méthodes itératives sont encore utilisables si la matrice est pleine, car elle peut être rangée en mémoire périphérique, ligne par ligne par exemple. Il est alors possible de résoudre des systèmes pleins de dimensions atteignant quelques centaines, ce qui est impensable par usage de méthodes directes.

Les méthodes itératives présentent enfin sur le plan numérique un intérêt essentiel : *la précision du résultat approché qu'elles fournissent peut être garantie grâce au contrôle du déroulement du processus itératif.*

2. Position du problème. Quelques rappels

Nous supposons la matrice du système

$$[A][X] = [B] \tag{I}$$

a) à coefficients réels, b) diagonalisable et à valeurs propres toutes réelles et de même signe.

Elle peut s'écrire sous forme réduite équivalente

$$[A] = [\Omega] \lceil \dots \lambda_i \dots \rfloor [\Omega]^{-1},$$

où $\lceil \dots \lambda_i \dots \rfloor$ est la matrice diagonale qui a pour éléments diagonaux les n valeurs propres de $[A]$, λ_i, $(i = 1, \dots, n)$; $[\Omega]$ est la matrice formée à partir des vecteurs propres. La i-ème colonne est le vecteur propre $[V_i]$ associé à λ_i.

Si $p_r(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$, le *polynôme matriciel associé* de degré r est, par définition :

$$[P_r(A)] = a_0[I] + a_1[A] + \dots + a_r[A]^r.$$

Les vecteurs propres de $[P_r(A)]$ sont ceux de $[A]$; les valeurs propres sont les valeurs $p_r(\lambda_i)$. Sa forme réduite équivalente est alors :

$$[P_r(A)] = [\Omega] \lceil \dots p_r(\lambda_i) \dots \rfloor [\Omega]^{-1}.$$

Dans ce qui suit nous adopterons comme *norme vectorielle*, la norme euclidienne $\| X \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. La *norme matricielle* associée $\| A \| = \operatorname{Max}_{\|X\|=1} \| [A][X] \|$ est alors égale à $\| A \| = \operatorname{Max}_{i=1,\dots,n} \sqrt{|\lambda_i^*|}$, avec λ_i^*, $(i = 1, \dots, n)$, valeurs propres de $[A^t][A]$.

Si les vecteurs propres de $[A]$ *forment une base de vecteurs linéairement indépendants orthonormés* $[\Omega]^t = [\Omega]^{-1}$ *et* $\| A \| = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{Max}} |\lambda_i| = \varrho(A)$, $\varrho(A)$ *est le rayon spectral de* $[A]$. *Dans tous les autre cas* $\varrho(A) \leqslant \| A \|$.

3. Méthode et technique

Nous recherchons la solution du système (I) comme limite de la suite vectorielle de terme général

$$[X_k] = [P_p(A)][X_{k-1}] - [Q_{p-1}(A)][B]. \tag{II}$$

Les polynômes matriciels $[P_p(A)]$ et $[Q_{p-1}(A)]$ sont choisis de façon à rendre la suite (II) convergente d'une part, sa limite identique à la solution $[X]$ de (I), d'autre part.

La condition classique [4] de convergence de (II) et les conditions d'équivalence du vecteur limite de (II) avec $[X]$, simples à établir [5], peuvent être regroupées dans le théorème qui suit:

Théorème. *Si* $p_p(x)$ *et* $q_{p-1}(x)$ *sont deux polynômes de degrés* p *et* $p-1$ *liés par la relation* $q_{p-1}(x) = [p_p(x) - 1]/x$ *avec* $p_p(0) = 1$, *la suite vectorielle* (II) *converge vers la solution du système* $[A][X] = [B]$ *si et seulement si,* $\varrho(P_p(A)) = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{Max}} |p_p(\lambda_i)| < 1$.

De toutes les techniques possibles [5], [6], pour calculer l'itéré $[X_k]$ en fonction de $[X_{k-1}]$, nous retenons celle qui s'illustre par sa simplicité et qui nécéssite l'occupation du minimum de place en mémoire centrale de l'ordinateur.

Elle exige la connaissance des p racines x_i, $(i = 1,\ldots,p)$, du polynôme $p_p(x)$, à savoir si $[Y_0^{k-1}] = [X_{k-1}]$, les p itérations

$$[Y_i^{k-1}] = ([I] - [A]/x_i)[Y_{i-1}^{k-1}] + [B]/x_i, \quad (i = 1,\ldots,p), \tag{III}$$

permettent d'obtenir le vecteur $[X_k] = [Y_p^{k-1}]$.

4. Estimation de l'erreur commise

Nous pouvons préciser le résultat approché obtenu à la k-ième itération (II), en fonction du polynôme $p_p(x)$ choisi et de k.

Les vecteurs

$$[U_k] = [X_k] - [X_{k-1}] \quad \text{et} \quad [E_k] = [X] - [X_k] \tag{IV}$$

vérifient

$$[U_k] = [P_p(A)][U_{k-1}] \quad \text{et} \quad [E_k] = [P_p(A)][E_{k-1}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [E_k] = [P_p(A)]^k [E_0] \Rightarrow \| X - X_k \| \leqslant \| P_p(A) \|^k . \| X - X_0 \|. \tag{V}$$

Si le vecteur initial $[X_0]$ est choisi identiquement nul, cette relation donne une *majoration de la précision relative au sens des normes*, obtenue à la k-ième itération:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\|X - X_k\|}{\|X\|} \leqslant \|P_p(A)\|^k.$$

De plus, $[X] - [X_k] = \lim_{l \to \infty} \sum_{i=1}^{l} [U_{k+i}]$. Il s'en suit *une majoration de la précision absolue*, en fonction du vecteur $[U_k]$

$$\text{(VII)} \qquad \|X - X_k\| \leqslant \frac{\|P_p(A)\|}{1 - \|P_p(A)\|} \|U_k\|.$$

Institut Universitaire de Calcul Automatique, Nancy, France

Reçue le 24 I 1967

RÉFÉRENCES

1. Gastinel N., *Analyse linéaire*. Hermann, Paris, 1966.
2. Varga R. S., *Matrix iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
3. Forsythe G., Wasow W. R., *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, London, 1960.
4. Faddeeva V. N., *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, New York, 1959, (traduit du russe).
5. Noël Ph., *Suritération des grands systèmes linéaires. Quelques applications aux équations aux dérivées partielles*. Thèse, Nancy, 1967.
6. Legras J., *Remarques sur la résolution des grands systèmes linéaires par technique itérative*. C. r. du Colloque CNRS de Besançon, 1966.

O METODĂ DE REZOLVARE A SISTEMELOR LINIARE MARI PRIN SUPRAITERAȚIE POLINOMIALĂ (I)

(Rezumat)

Se stabilește următoarea

Teoremă. *Dacă $p_p(x)$ și $q_{p-1}(x)$ sînt două polinoame de grad p și $p-1$ legate prin relația $q_{p-1}(x) = [p_p(x) - 1]/x$, cu $p_p(0) = 1$, șirul vectorial* (II) *converge către soluția sistemului $[A][X] = [B]$ dacă și numai dacă $\varrho(P_p(A)) = \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,n} |p_p(\lambda_i)| < 1$.*

Aici $\varrho(A)$ reprezintă raza spectrală a lui $[A]$ dacă $\varrho(A) = \|A\| = \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$, vectorii proprii ai lui $[A]$ constituind o bază de vectori liniar independenți ortonormați $[\Omega]^t = [\Omega]^{-1}$.

Se evaluează eroarea comisă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 517.948.34 ; 518.12

PROBLEMATICA ATTUALE SPETTANTE AL METTODO DI COLLOCAZIONE (I)

DI

D. MANGERON

Estratto dalla communicazione presentata al IV° Congresso dell'Unione Matematica Balcanica, Bucarest, Settembre 1966

Al compianto Professore
Ermenegildo LAMBERTENGHI, IN MEMORIAM

1. Il rapidissimo sviluppo dei mezzi odierni di attrezzatura dei centri studi calcolatrici elettroniche coadiuvato dall'imponente progresso del Calcolo numerico, rigogliosamente accresciuto sulla solidissima base dell'Analisi funzionale [1], reclama una rapida sistemazione dei vari meto di spettanti al Calcolo numerico [1]), tanto per ciò che riguarda la cristallizzazione dei procedimenti algoritmici, quanto per lo studio della loro convergenza.

In questi ultimi anni l'A. ha studiato dal punto di vista del Calcolo numerico, prendendo le mosse dai *problemi al contorno* per vari *operatori differenziali non ellittici*, formulati e risolti da lui per primo – come è sottolineato, ad esempio dall'Yu. M. Berezanski nel suo recente libro dedicato allo sviluppo in serie di autofunzioni concernenti gli operatori autoaggiunti [3, pp. 760, 781] – vari sistemi differenziali d'ordine superiore, lineari o no, ordinari o a derivate parziali, con termini di rimanenza (ereditari) e ad argomenti ritardati [4]...[7], utilizzati poscià cospicuamente dal M. N. Oguztöreli [8], T. Kamytov [9], L. E. Krivoscein [10] ed altri ancora.

2. Nella presente Nota si espongono, prendendo le mosse dai risultati esposti dall'A. in una sua recente Nota lincea scritta in collaborazzione col prof. Filippo Noël [11], vari aspetti concernenti l'applicazione del metodo di collocazione (denominazione dovuta a L. Collatz [12]) ai problemi integro-differenziali o a derivate parziali, mentre che varie valutazioni concernenti la convergenza di esso metodo, come pure alcuni studi comparativi con altri metodi di Calcolo numerico, com'è, ad es., il metodo delle striscie [13] oppure quello dell'applicazione di certe classi di equazioni facilmente risolubili ed in un certo senso „vicini" alle equazioni considerate [14], sono esposti in alcuni ampi lavori presentati all'VIII° Congresso dell'U. M. I. (Trieste, Città Universitaria, Ottobre 5–9, 1967) e al II° Congresso dei Matematici Bulgari (Varna, 29 VIII–7 IX 1967), elaborati tra l'altro in collaborazione col prof. L. E. Krivoscein [15].

---

1) Mentoviamo tra le vere e proprie spinte per ulteriori fecondi sviluppi del Calcolo numerico le pubblicazioni di varie riviste, com'è, ad es., la nuova rivista *Calcolo*, a cura dell'A. I. C. A. e del C. N. R., ideata dal creatore dell'I. N. A. C. illustre accademico linceo Mauro Picone [2], diretta da S. Faedo e A. Ghizzetti, coadiuvate dall'organizzazione diventata ormai una tradizione scientifica di appositi colloqui, com'è, ad es., colloquio biennale sotto la direzione dell'accademico T. Popoviciu, organizzato dalla filiale di Cluj dell'Accademia della Repubblica Socialista Romania, Instituto di Calcolo, di cui il più recente è programmato per il periodo tra il 15—20 settembre 1967.

Incominciamo coll'addittare ai risultati conseguiti nell'ambito dell'elaborazione dei metodi di Matematica costruttiva e di Calcolo numerico spettanti ai problemi di unicità, di esistenza, di stabilità e di valutazione degli errori commessi nel calcolo delle soluzioni concernenti vari sistemi integro-differenziali [2]).

L'applicazione del metodo di collocazione per il sistema integro-differenziale fredholmiano con le condizioni al contorno

$$(1) \qquad L[y] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_0^m K_i(x,t)\, y^{(i)}(t)\, dt,$$

$$(2) \qquad R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [a_{ij}\, y^{(i)}(c) + b_{ij}\, y^{(i)}(d)] = \gamma_j, \quad (j = 1, 2, ..., n),$$

ove a_{ij}, b_{ij}, γ_j, $(i+1, j = 1, 2, ..., n)$, sono numeri noti, $L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_1^n a_i(x) y^{(n-i)}(x)$, le funzioni note che figurano nell'equazione sono frammentariamente continue per $n \geqslant m$ e $p = m - n$ volte differenziabili rispetto ad x nell'intervallo $[a, b]$ per $m > n$; λ è un parametro e $[c, d] \subset [a, b]$, consta nella risoluzione del seguente sistema lineare di equazioni algebriche

$$(3) \qquad \gamma_i(x_i, \lambda, a_1, a_2, ..., a_k) \equiv \sum_{j=1}^{k} \varrho_{ij}(\lambda) a_j + h_i(\lambda) = 0, \quad (i = 1, 2, ..., k),$$

$$(4) \qquad \gamma(x, \lambda, a_1, a_2, ..., a_k) \equiv L[y_k] - f(x) - \lambda \int_a^b \sum_0^m K_i(x,t)\, y_k^{(i)}(t)\, dt,$$

essendovi la soluzione approssimata del problema considerato messa sotto la forma

$$(5) \qquad y_k(x) = \varphi_0(x) + \sum_1^k a_s \varphi_s(x),$$

ove $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$ sono funzioni note linearmente indipendenti che godono, ad esempio, della proprietà di completezza relativa oppure appartengono allo spazio funzionale $C^n[a, b]$, mentre soddisfano alle condizioni al contorno

$$(6) \qquad R_j[\varphi_0] = \gamma_j, \quad R_j[\varphi_s] = 0, \quad (j = 1, 2, ..., n;\ s = 1, 2, ..., k).$$

L'arbitrarietà di scelta dei punti $x_i \in [a, b]$ che supporremo non essere punti di discontinuità delle funzioni $a_i(x), f(x), K_j(x,t), (i = 1, 2, ..., n;$

[2]) Una nostra Nota susseguente è dedicata a Sydney Champman, F. R. S., nel Suo 80° compleanno, mentre un'altra al grande scienziato romeno Henri Coandă, nel Suo 70° compleanno.

$j = 0, 1, \ldots, m$) permette inoltre la presa in esame di considerazioni supplimentari concernenti l'ottimizzazione ed altre ancora.

In modo affatto simile si studiano i problemi concernenti l'applicazione del metodo di collocazione spettante al sistema integro-differenziale volterriano

$$L[y] = f(x) + \lambda \int_a^x \sum_0^m K_i(x,t)\, y^{(j)}(t)\, dt, \tag{7}$$

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_1^n a_i(x)\, y^{(n-i)}(x), \tag{8}$$

con le condizioni al contorno (2), ovvero ai sistemi fredholmiani (1) e volterriani (7), (8) e le condizioni di Cauchy

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),\ x_0 \in [a, b], \tag{9}$$

ed altri ancora.

2. Passando poi allo studio della convergenza del metodo di collocazione per vari sistemi integro-differenziali ordinari, ove si tiene conto anche dei risultati stabiliti sulla base delle ricerche dell'A. nella recente Tesi d laurea dell'E. B. Karpilovska [16], si possono enunciare i seguenti teoremi:

Teorema I. *Nell'ipotesi che per i punti* $x_i \in [a, b]$ *spettanti al metodo di collocazione sono stati scelti i nodi di Cebyšev oppure quelli di Gauss, il sistema di equazioni lineari algebriche*

$$(K y_n)(x_i) = f(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

corrispondenti alla soluzione approssimata

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k P_k(x) = \sum_{k=1}^{m+n} d_k x^{k-1} \tag{11}$$

del problema

$$(K y)(x) \equiv y^{(m)}(x) - \lambda \left[\sum_{s=1}^m p_s(x)\, y^{m-s}(x) + \int_a^b \sum_{s=0}^m q_s(x,t)\, y^{m-s}(t)\, dt \right] = f(x), \tag{12}$$

$$L_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{m-1} \left[\sum_{k=1}^l a_{ij}^k\, y^{(i)}(t_k) + \int_a^b b_{ij}(x)\, y^{(i)}(x)\, dx \right] = 0, \ (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{13}$$

ove $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_l \leqslant b$, *i coefficienti* a_{ij}^k *e le funzioni* $b_{ij}(x)$ *sommabili in* $[a, b]$ *sono tali che* $\lambda = 0$ *non è un autovalore del problema omogeneo corrispondente, mentre la successione dei polinomi* $P_k(x)$ *di grado* $(m + k - 1)$ *soddisfa alle eguaglianze*

(14) $$L_i P_k(x) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots, m),$$

è risolubile per i valori di n abbastanza grandi e le soluzioni approssimate y_n^* *convergono uniformemente insieme con le loro derivate sino all'ordine m incluso verso la soluzione esatta* y^* *del problema* (12), (13) *e le corrispondenti derivate in modo che sia*

(15) $$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| y^{*(k)}(x) - y_n^{*(k)}(x) \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \right)$$

per i nodi de Cebyšev e

(16) $$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| y^{*(k)}(x) - y_n^{*(k)}(x) \right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}} \right)$$

per i nodi di Gauss [3]), $(k = 0, 1, \ldots, m)$, *non appena siano soddisfate per* $r \geqslant 0$ *le condizioni*:

1° $y^r(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $p_s^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$, $(s = 1, 2, \ldots, m)$,

2° $a \leqslant x, t \leqslant b$, $q^s(x, t)$ *possegono le derivate parziali continue rispetto a x sino all'ordine r incluso, essendovi uniformemente rispetto a* t, $\partial^r q_s / \partial x^r \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $(s = 0, 1, \ldots, m)$ e

3° λ *non è un autovalore del problema considerato.*

Teorema II. *Nell'ipotesi che per i punti* $x \in [a, b]$ *spettanti al metodo di collocazione sono stati scelti i nodi di Cebyšev oppure quelli di Gauss, il sistema di equazioni lineari algebriche*

(17) $$K_i(y_n)(x_i) = f(x_i), \quad a \leqslant x_i \leqslant b, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

corrispondente alla soluzione approssimata (11) *è risolubile per i valori di n abbastanza grandi e le soluzioni approssimate* y_n^* *convergono verso la soluzione esatta* y^* *del problema* (13) *e*

(18) $$(K_1 y)(x) \equiv y^{(m)}(x) - \lambda \left[\sum_{s=1}^{m} p_s(x) y^{(m-s)}(x) + \sum_{s=0}^{m} q(x, t) y^{(n-s)}(t)\, \mathrm{d}t \right] = f(x),$$

in modo che siano valide le uguaglianze (15) *e* (16) *non appena risultino soddisfatte per* $r \geqslant 0$ *le condizioni* 1°, 3° *e* 4° *per* $a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$, $q_s(x, t)$ *possegono derivate parziali continue rispetto a x sino all'ordine r incluso, essendovi uniformemente rispetto a* t, $\partial^r q_s / \partial x^r \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *e* $\mathrm{d}^{r-1} q_s(x, x)/\mathrm{d}x^{r-1} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $(s = 0, 1, \ldots, m)$.

4. Si perviene ad una serie di teoremi di valutazione dell'ordine di convergenza del metodo di collocazione [16], [23] come pure alla program-

[3]) Per i nodi di Gauss si suppone $\alpha > 1/2$ per $r = 0$, ove K rappresenta l'operatore differenziale armonico Δ o poliarmonico $\Delta^{(k)}$ (M. Picone [17], [18]), calorico $\Delta - \partial/\partial t \equiv \cap$ o policalorico $\cap^{(k)}$ (M. Nicolescu [19], [20]), delle corde vibranti $M \equiv \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$ o polivibrante $M_{(k)}$ (D. Mangeron [21], [22]).

mazione del quadro del procedimento ALGOL [24], spettanti ai sistemi alle derivate parziali in due variabili

$$H[\varphi] = h(x,y),\ M(x,y) \in D, \tag{19}$$

$$\varphi[P] \text{ data su } P(x,y) \in \Omega \equiv \mathrm{Fr}\, D, \tag{20}$$

ove si consideri per polinomio di approssimazione completo $P^*(x, y)$ in due variabili, di grado n in x e p in y, che prenda in $(n-1) \times (p-1)$ punti $M_{ij}, (i = 1, 2, ..., n-1;\ j = 1, 2, ..., p-1), \in D$ il valore $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$ in modo che in esso punto l'equazione sia strettamente verificata

$$P^*(x,y) = (\{[1\ x \dots x^n][L_x^*]\} \otimes \{[1\ y \dots y^p][L_y^*]\}) \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \vdots \\ \varphi_{1,p-1} \\ \vdots \\ \varphi_{ij} \\ \vdots \\ \varphi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \varphi_{n-1,p-1} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

ove $[L_x^*]$ e $[L_y^*]$ sono le matrici di Lagrange costruite per i punti $[x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n]$ e $[y_0, y_1, ..., y_j, ..., y_p]$, troncate delle loro colonne estremi, se si tiene conto del fatto che $\varphi(x,y)$ è nulla sulla frontiera Ω di D.

Istituto Politecnico di Iaşi,
Cattedra di Matematica II

BIBLIOGRAFIA

1. Collatz L., *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.
2. Picone M., *I Lincei e la Programmazione*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1966, Anno CCCLXIII, Quaderno N. *85*, 22 pp.
3. Березанский Ю. М., *Разложение по собственных функциям самосопряженных операторов*. Изд. Наукова Думка, Киев, 1965.
4. Mangeron D., *Sur les problèmes à la frontière concernant certaines classes d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C. r. Acad. Sci., Paris, 1962, **225**, pp. 2894—2896.
5. — *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat., 1963, s. VIII-a, **XXXIV**, *2*, pp. 118—122.
6. — *A new Class off Boundary Value Problems related to the Optimal Process Theory*. Comunic. Acad. R. S. R., 1963, **XIII**, pp. 1023—1029, 1031—1034, 665—670.
7. — *The Bellman Equations of Dynamic Programming concerning a New Class of Boundary Value Problems with „Total Derivatives"*. J. Math. Anal. a. Appl., 1964, **9**, *1*, pp. 141—146.

8. Oğuztöreli M. N., *On the Time-Lag Control Systems*. Bul. Inst. polit., Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 81-90.
9. Камытов Т., *Приближенное решение граничных задач для некоторых классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений*. Автореферат диссертации, АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1967 г.
10. Кривошеин Л. Е., *К решению граничных задач для интегро-дифференциалных уравнений*. Труды XIII-й Конференции проф.-препод. состава Кирг. Гос. Ун-та. Фрунзе, 1966 г.
11. Mangeron D., Noël Ph., *Su alcuni problemi concernenti il metodo di collocazione*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., 1966, s. VIII-a, **XL**, *2*, pp. 201—206.
12. Коллац Л., *Численные методы решения диффиренциальных уравнений*. Изд. ИЛ, Москва, 1953, стр. 183.
13. Mangeron D., *Il metodo delle striscie nello studio di alcuni sistemi funzionali*, (in stampa).
14. Mangeron D., Krivoscein L. E., *Risoluzione dei vari classi di sistemi funzionali tramite l'utilizzazione di certi sistemi „vicini"*, (in stampa).
15. — *Résolution des problèmes à la frontière pour une classe d'équations intégro-différentielles*. Bull. Inst. Math., Acad. Bulgare Sci., 1967, **XI**, 12 pp.
16. Карпиловская Э. Б., *О сходимости метода коллокации*. ДАН СССР, 1963, **151**, *4*, стр. 766—768.
17. Picone M., *Sulle funzioni metaarmoniche*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., 1927, s. VI-a, **VI**, 8 pp.
18. Nicolescu M., *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris, 1936.
19. — *Ecuaţia iterată a căldurii*. St. şi cerc. matem., Acad. R. P. R., 1954, V, *3—4*, pp. 243—332.
20. Mangeron D., Krivoscein L. E., *Nuovi problemi concernenti sistemi funzionali con operatori iterati (I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati)*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., 1965, s. VIII-a, **XXXVIII**, *5*, pp. 614—620.
21. Mangeron D., *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati. (I)*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., 1965, s. VIII-a, **XXXIX**, *1—2*, pp. 22—28.
22. Favard J., *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites „équations de Mangeron"*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XIV)**, *1—2*, pp. 17—20.
23. Jain M. K., Chawla M. M., *Convergence of the Collocation Method and Estimates for the Error-Norm*. Indian Inst. of Techn., New Delhi, Research Report No. *8*, Dec. 1965, 24 pp.
24. Legras J., *Une écriture mathématique adaptée à la programmation: l'Algol*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 51—60.

PROBLEMATICA ACTUALĂ RELATIVĂ LA METODA COLOCAŢIEI (I)

(Rezumat)

Se expun o serie de rezultate proprii relative la studiul diferitelor sisteme integro-diferenţiale şi cu derivate parţiale folosind metoda colocaţiei, introdusă în problematica actuală de studiu a sistemelor funcţionale de L. Collatz [12].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D.K. 517.941 ; 518.12

DIE GRÖBNERMETHODE UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE NUMERISCHE BAHNBERECHNUNG IN DER HIMMELSMECHANIK (I)

VON

HANS KNAPP

1. Jeder endliche Abschnitt einer von W. Gröbner angegebenen Formel zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen kann als Iterationsvorschrift für die Berechnung der gesuchten Funktionen aufgefasst werden. Damit steht ein Spektrum von Iterationsvorschriften $G_0, \ldots, G_m$ zur Verfügung, in welchem das gewöhnliche Approximationsverfahren nach Picard als einfachster Sonderfall mit der Ordnung $m = 0$ und die ursprüngliche Lösungsformel als Grenzfall für $m \to \infty$ (falls dieser Grenzübergang erlaubt ist) mitenthalten sind. So ist eine neue Deutung der Gröbnermethode möglich, bei der die Regularität der gegebenen Differentialgleichungen nicht mehr vorausgesetzt zu werden braucht. Proberechnungen, vor allem an einem Beispiel aus der Himmelsmechanik, haben bei erträglichem Aufwand zu sehr guten Ergebnissen geführt.

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, t), \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

in welchem t die unabhängige Variable und

$$x_1(t), \ldots, x_n(t) \tag{2}$$

die gesuchten Funktionen sind, welche die Anfangswerte

$$x_i(t_0) = a_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

annehmen.

Ausserdem sei ein zweites Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{x}_i = g_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, t), \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

gegeben, dessen Lösungen

$$\hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t) \tag{5}$$

zu denselben Anfangswerten

$$\hat{x}_i(t_0) = a_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

bekannte Funktionen seien.

Zum System (1), dessen Lösungen wir suchen, gehört der Operator

$$D = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{7}$$

Wir zerlegen diesen in zwei Bestandteile

$$D = D_1 + D_2 \tag{8}$$

mit

$$D_1 = \sum_{k=1}^{n} g_k(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9}$$

und

$$D_2 = \sum_{k=1}^{n} [f_k(x_1, \ldots, x_n, t) - g_k(x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{10}$$

$x_1, \ldots, x_n, t$ fassen wir zunächst als unabhängige Veränderliche auf und erklären $D^\alpha F(x_1, \ldots, x_n, t)$ (den Operator D α-mal angewandt auf eine entsprechend oft differenzierbare Funktion F) durch

$$D^0 F = F, \quad D^1 F = DF = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial t}, \ldots, \quad D^\alpha F = D(D^{\alpha-1} F), \tag{11}$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, \ldots),$$

(analog für D_1 bzw. D_2 statt D).

Es gelten dann die Formeln

$$x_i(t) = \hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!} [D_2 D^\alpha x_i]_{\hat{x}(\tau), \tau} \, d\tau, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Sie geben an, wie die bekannten Funktionen (5) abzuändern sind, damit die gesuchten Lösungsfunktionen (2) des ersten Systems entstehen. Die Ausdrücke

$$[D_2 D^\alpha x_i]_{\hat{x}(\tau), \tau}, \quad (i = 1, \ldots, n; \ \alpha = 0, 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

bedeuten dabei, dass zunächst $D^\alpha x_i$ zu bilden, dann der Operator D_2 anzuwenden ist und schliesslich die Variablen x_k durch die bekannten Funktionen

$\hat{x}_k(\tau)$, $(k = 1,\ldots,n)$, und t durch τ zu ersetzen sind; die Integranden sind somit bekannte Funktionen von τ und die Integrale können berechnet werden.

W. Gröbner gewinnt diese Formeln durch Umordnen der Lie-Reihen für die gesuchten Funktionen unter Verwendung des Vertauschungssatzes, womit dann (venn t ein gewisses Kreisgebiet um t_0 nicht verlässt[1]) gleichzeitig auch ein Konvergenzbeweis für diese Reihen geführt ist. Man muss dazu allerdings die Regularität der gegebenen Differentialgleichungen voraussetzten (vgl. [1, § 12]).

3. Unter Verzicht auf die Voraussetzungen der Regularität der Differentialgleichungen sollen jetzt endliche Abschnitte der Lösungsformeln (12) gliedweise entwickelt werden. Wir schicken dazu drei triviale Bemerkungen voraus:

a) Sind $G(\tau)$ und $H(\tau)$ differenzierbare Funktionen und ist $G(t_0) = H(t_0)$, so gilt

$$G(\tau) - H(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}[G(\sigma) - H(\sigma)]\,\mathrm{d}\sigma. \tag{14}$$

b) Für die Ableitungen der Lösungsfunktionen (2) kann man schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} x_i(\sigma) = [D x_i]_{x(\sigma),\sigma}, \quad (i = 1,\ldots,n), \tag{15}$$

(also: Anwenden des Operators D und Einsetzen von $x_k(\sigma)$ statt x_k, $(k = 1,\ldots,n)$, und σ statt t).

Für eine differenzierbare Funktion F der Lösungen gilt daher allgemein

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} F(x_1(\sigma),\ldots,x_n(\sigma),\sigma) = [DF(x_1,\ldots,x_n,t)]_{x(\sigma),\sigma}. \tag{16}$$

---

[1]) Wie das tatsächliche Konvergenzgebiet der Reihen (12) aussieht, lässt sich im allgemeinen Fall wohl kaum sagen.

(Als Beispiel vergleiche man etwa $D = [x + h(t)]\,\partial/\partial x + \partial/\partial t$; mit der Zerlegung $D_1 = x\,\partial/\partial x + \partial/\partial t$, $D_2 = h(t)\,\partial/\partial x$ entsteht die Reihe

$$x(t) = a\,\mathrm{e}^{t-t_0} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Sie konvergiert längs jeden von t_0 ausgehenden Weges $\mathfrak{L}$, der singuläre Stellen von $h(t)$ meidet (also, mit Ausnahme der singulären Punkte von $h(t)$, in der ganzen komplexen t-Ebene), und stellt die Lösung der Differentialgleichung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x + h(t)$ zum Anfangswert $x(t_0) = a$ dar).

Die weiteren Ausführungen zeigen, dass wir, unbehelligt von der Frage nach dem wahren Gültigkeitsbereich der Formeln (12), mit endlichen Abschnitten der Reihen praktisch rechnen und Schranken für die Fehler angeben können.

Entsprechend kann man für die Ableitungen der bekannten Funktionen (5)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\hat{x}_i(\sigma) = [D_1 x_i]_{\hat{x}(\sigma),\sigma}, \quad (i = 1,\ldots,n), \tag{17}$$

schreiben, oder allgemein

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}F(\hat{x}_1(\sigma),\ldots,\hat{x}_n(\sigma),\sigma) = [D_1 F(x_1,\ldots,x_n,t)]_{\hat{x}(\sigma),\sigma}. \tag{18}$$

c) Weiters gilt die Formel

$$\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!}\int_{t_0}^{\tau}K(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}K(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{19}$$

denn durch partielle Integration entsteht zunächst

$$\left[-\frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}\int_{t_0}^{t}K(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} + \int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}K(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

der ausintegrierte erste Bestandteil verschwindet aber beim Einsetzen der Integralgrenzen.

Wenn nun in einem Bereich

$$\mathfrak{L} = \{(x_1,\ldots,x_n,t)\,|\,|x_i - a_i| \leqslant b, \quad (i = 1,\ldots,n), \quad |t - t_0| \leqslant T\} \tag{20}$$

des $(x_1,\ldots,x_n,t)$-Raumes alle partiellen Ableitungen der Funktionen $f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_n$ bis einschliesslich zur Ordnung $m\,(\geqslant 0)$ vorhanden und diese noch stetig sind, dann existieren nach Peano die Lösungen (2) des Systems (1) und sind zugleich mit den bekannten Funktionen (5) mindestens $(m+1)$-mal nach t differenzierbar.

Wir können daher den Ansatz

$$x_i(t) = \hat{x}_i(t) + r_i(t), \quad (i = 1,\ldots,n), \tag{21}$$

machen und folgende elementare Rechnung anstellen:

$$\begin{aligned} r_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t) &= {}^{2)}\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\{x_i(\tau) - \hat{x}_i(\tau)\}\,\mathrm{d}t = {}^{3)} \\ &= \int_{t_0}^{t}\{[Dx_i]_{x(\tau),\tau} - [D_1 x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}\}\,\mathrm{d}\tau = {}^{4)} \end{aligned} \tag{22}$$

---

2) Nach (14).
3) Nach (15)...(18).
4) den Klammerausdruck schreiben wir etwas anders an.

$$= \int_{t_0}^{t} \{[Dx_i - D_1 x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} + [Dx_i]_{x(\tau,\tau)} - [Dx_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}\}\, d\tau = \text{5)}$$

$$= \int_{t_0}^{t} [D_2 x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}\, d\tau + p_{i0}(t), \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Damit haben wir aber bereits das Glied der Reihe (12) für $\alpha = 0$ erhalten, der Restausdruk

$$p_{i0}(t) = \int_{t_0}^{t} \{[Dx_i]_{x(\tau),\tau} - [Dx_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}\}\, d\tau \tag{23}$$

lasst sich weiterentwickeln. Indem wir jeweils das nächste Glied der Reihe (12) abspalten, entsteht so allgemein [6])

$$p_{i\alpha}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!} \{[D^{\alpha+1} x_i]_{x(\tau),\tau} - [D^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}\}\, d\tau = \text{2)}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!} \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\sigma} \{[D^{\alpha+1} x_i]_{x(\sigma),\sigma} - [D^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\sigma),\sigma}\}\, d\sigma d\tau = \text{3)}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!} \int_{t_0}^{\tau} \{[DD^{\alpha+1} x_i]_{x(\sigma),\sigma} - [D_1 D^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\sigma),\sigma}\}\, d\sigma d\tau = \text{7)}$$

(24)

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} \{[DD^{\alpha+1} x_i]_{x(\tau),\tau} - [D_1 D^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}\}\, d\tau = \text{4)}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} \{[DD^{\alpha+1} x_i - D_1 D^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} +$$

---

[5]) wegen (8).
[6]) Induktionsannahme für $\alpha = 0$ bereits bestätigt!
[7]) nach (19).

$$+ [DD^{\alpha+1} x_i]_{x(\tau),\tau} - [DD^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \} \, d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} [D_2 D^{\alpha+1} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau + p_{i\alpha+1}(t), \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

Der Ausdruck

$$p_{i\alpha+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} \{ [D^{\alpha+2} x_i]_{x(\tau),\tau} - [D^{\alpha+2} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \} \, d\tau \tag{25}$$

hat wieder dieselbe Gestalt wie (24), nur die Ordnung α ist um 1 erhöht, womit der Induktionsschluss fertig ist.

Anstelle der ursprünglichen Lösungsformeln können wir daher schreiben

$$x_i(t) = \hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!} [D_2 D^{\alpha} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau + p_{im}(t), \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{26}$$

mit dem Restglied

$$p_{im}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{m}}{m!} \{ [D^{m+1} x_i]_{x(\tau),\tau} - [D^{m+1} x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \} \, d\tau, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{27}$$

Im Falle regulärer Differentialgleichungen können die Formeln (26) dann wieder in die ursprüngliche Gestalt (12) weiterentwickelt werden.

Eingegangen am 26 X 1966

Universität Innsbruck, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

1. Gröbner W., *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen.* Berlin, 1960.
2. Reutter F., Knapp H., *Untersuchungen über die numerische Behandlung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme mit Hilfe von Lie-Reihen und Anwendungen auf die Berechnung von Mehrkörperproblemen.* Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. *1367,* Köln und Oplanden, 1964.
3. Knapp H., *Über eine Verallgemeinerung des Verfahrens der sukzessiven Approximation zur Lösung von Differentialgleichungssystemen.* Monatshefte für Mathematik, **68,** *1,* Wien, 1964.

METODA LUI GRÖBNER ŞI APLICAŢIILE EI LA CALCULUL NUMERIC AL ORBITELOR ÎN MECANICA CEREASCĂ (I)

(Rezumat)

Se studiază posibilităţile de adaptare a metodei lui Gröbner [1], relativă la procedee numerice de soluţionare a ecuaţiilor diferenţiale, pentru calculul numeric al orbitelor în mecanica cerească.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 517.51 ; 518.12

АПРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ $P(z)$, ГДЕ $z = xy$, НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ $f(x, y)$

ЛИВИУ ЧОБАНУ

Выдержка из доклада представленного на научной сессии Галацкого политехнического института, 19—21 мая 1967 г.

Пусть B — компакт из R^2 и $C(B)$ — пространство непрерывных функций, определяемых на B, и пусть $V_n \subset C(B)$ — подпространство $C(B)$ конечного размера $n+1$, определяемое независимыми линейными векторами

$$1, z, z^2, \ldots, z^n, \tag{1}$$

где $z = xy$.

Пусть $f(x, y) \in C(B)$ и $P(z) \in V_n$, следовательно,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \tag{2}$$

и учитывая расстояние между $f(x, y)$ и $P(z)$ в смысле обыкновенной метрики $C(B)$:

$$\delta(P) = \max_B |f(x, y) - P(z)| = \|f - P\|. \tag{3}$$

Величина $\varrho_n(f) = \inf_{P \in V_n} \|f - P\|$, в предположении ее существования, называется *наилучшим приближением* функции многочленами подпространства V_n, а $P_0(z)$ для которого $\varrho_n(f) = \|f - P_0\|$ является многочленом наилучшего приближения $f(x, y)$ по отношению к V_n, или минимальным решением $f(x, y)$ по отношению к V_n.

Докажем, что такой многочлен существует, и он единственный. Существование минимального разрешения $f(x, y)$ по отношению к V_n вытекает из [2, стр. 1], так как $C(B)$ является линейным нормированным пространством, а V_n — подпространство $C(B)$ конечного размера.

Для единственности докажем:

Теорема 1. *Для любого* $f(x,y)\in C(B)$ *и при любом множестве точек* $M_i(x_i y_i)\in B$ *не расположенных более одной на одной и той-же гиперболе* $xy=z_i$ *с*

$$z_0<z_1<\ldots<z_n, \tag{4}$$

где $z_i=x_i y_i$, *существует единвтвенный многочлен интерполирования.*

Доказательство. Существует многочлен интерполирования типа Лагранжа, так как система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными a_ν

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = f(x_i, y_i) \quad i\in\overline{0,n}$$

имеет определителем $V(z_0, z_1,\ldots, z_n)=\prod\limits_{i>j=0}^{n}(z_i-z_j)\neq 0$ в предположении (4).

Следовательно формулы Крамера являются единственным решением. То-есть получаемый единственный многочлен интерполирования может быть записан в виде

$$L_n(z)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_n(z)}{(z-z_i)\omega_n'(z_i)}, \tag{5}$$

где $\omega_n(z)=\prod\limits_{i=0}^{n}(z-z_i)$, $z=xy$, $z_i=x_i y_i$, $\omega_n'(z)$ — производная по z $\omega_n(z)$.

Как видно, минимальное решение $f(x,y)$ по отношению к V_n существует. Пусть $P_0(z)$ — это решение, при чем $\|f-P_0\|=\varrho_n(f)$ или $\max\limits_B |f(x,y)-P_0(z)|=\varrho_n(f)$.

Так как $f(x,y)-P_0(z)$ — непрерывная функция в компакте B, следует существование по крайней мере одной точки $M_0(x_0,y_0)\in B$, в которой

$$|f(x_0,y_0)-P_0(z_0)|=\varrho_n(f).$$

Определение. Точку эту назовем [3]: (+)-точка, если $P_0(z_0)-f(x_0,y_0)=\varrho_n(f)$ и (—)-точка, если $P_0(z)-f(x_0,y_0)=-\varrho_n(f)$.

Теорема 2. *Существуют как* (+)*-точки, так и* (—)*-точки.*

Доказательство. Предположим, что $P_0(z_0)$ не допускало бы (—)- точки, то-есть, $P_0(z)-f(x,y)>-\varrho_n(f)$, для любого $(x,y)\in B$. Следовательно, то-же отношение имеет место и для $\min\limits_B[P_0(z)-f(x,y)]=-\varrho_n(f)+2h$, где $h>0$.

Отсюда, по аналогии с теоремой 1 Чебышева [3], вытекает, что $\varrho_n(f)$ не минимальное отклонение от $f(x,y)$ многочленов подпространства V_n, что и доказывает теорему.

Теорема 3. *Если* $P_0(z)$ *удовлетворяет* $\|f-P_0\|=\varrho_n(f)$, *то существует по крайней мере* $n+2$ *точек не расположенных более одной на одной и той же гиперболе* $xy=c$, *в которой*

$$|f(x,y)-P_0(z)|=\varrho_n(f). \tag{6}$$

Доказательство. Предположим обратное, т. е. существование $m\geqslant n+1$ точек не расположенных более одной на одной и той же гиперболе $xy=c$: $M_1, M_2, \ldots, M_m$, с $M_i(x_i, y_i)$, $i\in\overline{1,m}$, причем $z_1<z_2<\ldots<z_m$, $z_i=x_iy_i$ и в котором имело бы место (6), то есть

$$f(x_r, y_r)-P_0(z_r)=\pm\varrho_n(f), \quad r\in\overline{1,m}. \tag{7}$$

Строим многочлен интерполирования $Q(z)$ функций $f(x,y)-P_0(z)$, который в узлах $M_1, M_2, \ldots, M_m$, $(z_1<z_2<\ldots<z_m)$, принимает значения (7). Следовательно $Q(z)\in V_n$.

Учитываем круги (C_r) с центром в M_r, $(r\in\overline{1,m})$, и радиусом таким образом, чтобы а) $\bigcap_{r=1}^{m}(C_r)=\varnothing$, б) $f(x,y)-P_0(z)$ и $Q(z)$ были бы отличными от нуля в (C_r).

Используем без затруднения результаты [1, стр. 51–53], дойдя до противоречия $|f(x,y)-[P_0(z)+\lambda Q(z)]|<\varrho_n(f)$ с действительным $\lambda>0$. Это противоречие и доказывает теорему.

Наконец, для единственности, предположим существование двух многочленов $P_1(z)$ и $P_2(z)$, для которых $\|f-P_1\|=\|f-P_2\|=\varrho_n(f)$. Тогда и $P_0(z)=[P_1(z)+P_2(z)]/2$ удовлетворяет $\|f-P_0\|=\varrho^n(f)$.

Пусть теперь $M'(x', y')$ одна $(+)$-точка для $P_0(z)$. Следовательно

$$\begin{cases} P_0(z')-f(x',y')=\varrho_n(f), \\ P_1(z')-f(x',y')\leqslant\varrho_n(f), \\ P_2(z')-f(x',y')\leqslant\varrho_n(f). \end{cases} \tag{8}$$

Так как $\varrho_n(f)=P_0(z')-f(x',y')=(P_1-f)/2+(P_2-f)/2$, имея в виду (8), имеем $P_1(z')=P_2(z')$ и так как M' взято произвольным, то $P_1(z)$ и $P_2(z)$ совпадают во всех $(+)$-точках. Таким же путем доказывается, что они совпадают во всех $(-)$-точках и так как общее число этих точек не находящихся более одной на одной и той же гиперболе $xy=c$ (теорема 3), составляет по крайней мере

$n+2$, а $P_1(z)$ и $P_2(z)$ являются многочленами степени n переменной z, следует, что они тождественны.

Таким образом единственность доказана.

Примечание. Так как ни в тексте проблемы Хаара, ни в его теореме единственности [4, стр. 79—83] ничего не уточняется в связи с компактом $\mathfrak{M}$ и так как и в теореме 20 [2] тоже не ставится ни одного условия по отношению к компакту, на котором определены рассматриваемые функции, на первый взгляд кажется, что компакт, о котором упоминается в цитированных теоремах, может быть любым. Отсюда можно было бы заключить, что на любой компактной множественности пространства R^2, на котором не удовлетворены условия Хаара, многочлен наилучшей аппроксимации не единственный, в противоположность выше найденным результатам. В действительности существует компакт пространства многих измерений, на котором можно определить функции, удовлетворяющие условию Хаара, тогда и только тогда если этот компакт является гомеоморфным замкнутой подмножественности окружности круга [5].

Следовательно, только на таких компактах, если неудовлетворено условие Хаара, решение не является единственным, а компакт настоящей работы не является компактом такого рода.

Ясский политехнический институт,
Кафедра математики II

ЛИТЕРАТУРА

1. Popoviciu T., *Despre cea mai bună aproximare a funcţiilor continue prin polinome.* Ed, Ardealul, Cluj, 1937.
2. Meinardus G., *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung.* Springer, 1964.
3. Натансон И. П., *Конструктивная теория функции.* М., 1949.
4. Ахиезер Н. У., *Лекции по теории аппроксимации.* Изд. „Наука", Главная ред. физ-мат. лит., М., 1965.
5. Mairhuber J. C., *Chebychev Approximation Problems.* Proc. of the Amer. Math. Soc. 1965, **7**, pp. 609—615.

APROXIMAREA FUNCŢIILOR DE DOUĂ VARIABILE $f(x, y)$ PRIN POLINOAME DE FORMA $P(z)$, UNDE $z = xy$.

(Rezumat)

Se stabileşte existenţa şi unicitatea unui polinom de interpolare $Q(z)$, unde $z = xy$ pentru funcţii de două variabile $f(x, y)$. Cu ajutorul acestuia, urmărind anumite rezultate din teoria celei mai bune aproximări a funcţiilor continue prin polinoame, se demonstrează existenţa şi unicitatea unui polinom de cea mai bună aproximare de forma $P(z)$, cu $z = xy$, pentru funcţii continue de două variabile $f(x, y)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 517.949.22; 621—52

STUDIES CONCERNED WITH TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

II. PROPERTIES OF OPTIMAL STRATEGIES

BY

M. N. OĞUZTÖRELI

1. In his second subsequent to a very recent author's book devoted to *Time-Lag Control Systems* [1], [2], the author has had due mention and use of a large set of his J. SIAM Control [3], [4] research work as well of valuable R. Bellman, R. Conti, E. Roxin, D. Mangeron and their pupils'papers, some of them being published in this *Bulletin* [5] ... [8].

2. In this paper, which is to be considered as a natural continuity of our past one [8], we expose properties of optimal control.

In all the theorems which we shall prove in this and the next section [1]) we shall assume (without specifing it each time) that the pursuit time T^0 is finite and that the convex and compact set $C(T^0)$ has interior points. The latter can be proved under suitable hypotheses (Kelendzheridze [9] made use of slightly different assumptions to prove this fact). Let Λ be the *capture point* at which the system X (with the admissible pair $\{u(t), \varphi(t)\}$) encounters the system Z (with the admissible pair $\{v(t), \psi(t)\}$) at time $t = T(u, \varphi; v, \psi)$. The point Λ depends upon the choice of the functions u, φ, v and ψ. Let Λ^0 be the *optimal capture point* which corresponds to the optimal strategy $u = u^0(t)$, $\varphi = \varphi^0(t)$, $v = v^0(t)$, and $\psi = \psi^0(t)$ to the time $t = T^0$. Hence

$$(1) \qquad \Lambda = \Omega^*(T, \varphi, u) = \Theta^*(T, \psi, v) \text{ and } \Lambda^0 = \Omega^*(T^0, \varphi^0, u^0) = \Theta^*(T^0, \psi^0, v^0).$$

If $v(t)$ and $\psi(t)$, selected arbitrarily from the sets V and Ψ respectively, are kept fixed, the corresponding optimal policy of the sistem X will be described by $u = u^0(t)$ and $\varphi = \varphi^0(t)$ and the capture will occur at $t = T^0$. Therefore,

---

[1]) To appear in the next issue of this *Bulletin* under the title: III. *Optimal strategies in some particular cases.*

(2) $\Omega^*(T_{v\psi}, \varphi^0, u^0) = \Theta^*(T_{v\psi}, \psi, v)$, and (3) $\Omega^*(t, \varphi^0, u^0) \neq \Theta^*(t, \psi, v)$, for $t < T_{v\psi}$, where

$$T_{v\psi} = \min_{u \in U,\, \varphi \in \Phi} T(u, \varphi; v, \psi) = T(u^0, \varphi^0; v, \psi). \tag{4}$$

As shown in [3], the point $\Lambda_{v\psi} = \Omega^*(T_{v\psi}, \varphi^0, u^0)$, which is the point Λ for $u = u^0(t)$, $\varphi = \varphi^0(t)$, $v = v(t)$ and $\psi = \psi(t)$, is a boundary point of the set $C(T_{v\psi})$ and there exists a unit vector $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ of the n-dimensional Euclidean space R_n such that

$$\eta \,.\, \Omega^*(T^{v\psi}, \varphi, u) \leqslant \eta \,.\, \Omega^*(T_{v\psi}, \varphi^0, u^0) \tag{5}$$

for all $\Omega^*(T_{v\psi}, \varphi, u) \in C(T_{v\psi})$. Clearly, the vector η depends upon the choice of the vector functions $v(t) \in V$ and $\psi(t) \in \Psi$.

By the remark at the end of §4 [8], the functional $T_{v\psi}$ varies continuously when the functions $v(t)$ and $\psi(t)$ vary continuously in V and Ψ respectively. Since $\Omega^*(t, \varphi^0, u^0)$ is continuous in t (see [3]), if the admissible pair $\{v(t), \psi(t)\}$ varies continuously, the point $\Lambda_{v\psi} = \Omega^*(T_{v\psi}, \varphi^0, u^0)$ will vary continuously, in such a manner that it will be a boundary point of the set $C(T_{v\psi})$. Let $S(t)$ denote the boundary of the set $C(t)$. Hence $\Lambda_{v\psi} \in S(T_{v\psi})$ for every admissible pair.

Let $\{v^j(t), \psi^j(t)\}$, $(j = 1, 2, ...)$, be a sequence of admissible pairs such that $v^j(t) \to v^0(t)$ and $\psi^j(t) \to \psi^0(t)$ uniformly, where $\{v^0(t), \psi^0(t)\}$ is the optimal pair for the system Z. Consider the sequence of times

$$\{T_j = T_{v^j\psi^j} = T(u^0, \varphi^0; v^j, \psi^j)\}_1^\infty \tag{6}$$

which corresponds to the sequence $\{v^j(t), \psi^j(t)\}_1^\infty$. Since

$$T^0 = \max_{v \in V,\, \psi \in \Psi} T_{v\psi} = T(u^0, \varphi^0; v^0, \psi^0), \tag{7}$$

taking a subsequence if necessary, we may assume that

$$T_j < T_{j+1} \text{ and } \lim_{j \to \infty} T_j = T^0. \tag{8}$$

Consider now the point Λ^0 defined by (1) and the sequence of points

$$\{\Lambda_j = \Omega^*(T_j, \varphi^0, u^0) = \Theta^*(T_j, \psi^j, v^j)\}_1^\infty. \tag{9}$$

Since the functionals $\Omega^*(t, \varphi, u)$, $\theta^*(t, \psi, v)$ and $T(u^0, \varphi^0, v, \psi)$ are continuous in all their arguments, we have

$$\lim_{j \to \infty} \Lambda_j = \Lambda^0. \tag{10}$$

We shall now prove the following

Theorem 1. *The point* Λ^0 *is a boundary point of the set* $C(T^0)$.

Proof. Suppose, on the contrary, that Λ^0 is an interior point of the set

$C(T^0)$. Then, by property III [4] in § 3, there exists an $\varepsilon > 0$ such that $N_\varepsilon(\Lambda^0) \subset C(\tau)$ for all τ in the interval $T^0 - \varepsilon < \tau < T^0$, where $N(\Lambda^0)$ is an ε-neighborhood of Λ^0. The continuity of $\Theta^*(t, \psi^0, v^0)$ at $t = T^0$ implies that there exists a $\delta > 0$ such that $\Theta^*(t, \psi^0, v^0) \in N_\varepsilon(\Lambda^0)$ for all t in $T^0 - \delta < t \leqslant T^0$. Let $2\gamma = \min(\delta, \varepsilon)$. Then $\Theta^*(T^0 - \gamma, \psi^0, v^0) \in N(\Lambda^0) \subset C(T^0 - \gamma)$. But this is impossible, since $T^0 - \gamma < T^0$ and T^0 is the minimum value of t such that $\Theta^*(t, \psi^0, v^0) \in C(t)$.

Making use of Theorem 1 and property I [4] in § 3, the first part of the following theorem, which is an extension of Kelendzheridze's main theorem [9], [10] can be easily proved.

Theorem 2. *There exists a unit vector* $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_n^0)$ *of the n-dimensional Euclidean space* R^n *such that*

$$\text{(I)} \qquad \eta^0 \cdot \Omega^*(T^0, \varphi, u) \leqslant \eta^0 \cdot \Omega^*(T^0, \varphi^0, u^0),$$

for all admissible pairs $\{u(t), \varphi(t)\}$, $\Omega^*(T^0, \varphi, u) \neq \Omega^*(T^0, \varphi^0, u^0)$;

$$\text{(II)} \qquad \eta^0 \cdot \Theta^*(T^0, \psi, v) \leqslant \eta^0 \cdot \Theta^*(T^0, \psi^0, v^0),$$

for all admissible pairs $\{v(t), \psi(t)\}$ *which are sufficiently near to the optimal pair* $\{v^0(t), \psi^0(t)\}$ *and* $\Theta^*(T^0, \psi, v) \in C(T^0)$;

$$\text{(III)} \qquad \eta^0 \cdot G(\Lambda^0, v^0(T^0), T^0) \leqslant \eta^0 \cdot F(\Lambda^0, u^0(T^0), T^0),$$

where

$$\text{(11)} \quad F(x(t), u(t), t) = -\sum_{i=1}^{m} A_i(t - c_m)\, x(t - c_m + c_i) + A(t - c_m)\, u(t - c_m),$$

and

$$\text{(12)} \quad G(z(t), v(t), t) = -\sum_{j=1}^{k} B_j(t - d_k)\, z(t - d_k + d_j) + B(t - d_k)\, v(t - d_k).$$

Proof. Consider, following the general lines of the method of proof due to Kelendzheridze, the union Σ of all the sets $C(t)$ for $t \geqslant \alpha$. Σ is an open set and $\Lambda^0 \in C(T^0) \subset \Sigma$. Therefore, we can find a number $t^* < T^0$ such that $\Theta^*(t, \psi^0, v^0) \in \Sigma$ for $t^* \leqslant t \leqslant T^0$. For every t in this interval let $\tau = \tau(t)$ be the number which is defined by the relation $\Theta^*(t, \psi^0, v^0) \in S(\tau)$, where $S(\tau)$ is the boundary of the set $C(\tau)$. Since the elements of the closure of $C(t)$ are continuous in all the arguments, $S(t)$ varies continuously with t. From the continuity of the function $\Theta^*(t, \psi^0, v^0)$, we see that $\tau = \tau(t)$ is continuous in the interval $t^* \leqslant t \leqslant T^0$. We can easily show, as in the case considered by Kelendzheridze, that

$$\text{(13)} \qquad \tau(t) > t \text{ for } t < T^0, \text{ and } \tau(T^0) = T^0.$$

Since $\Theta^*(t, \psi^0, v^0)$, is on the boundary $S(\tau)$ of the convex body $C(\tau)$, there exists a support hyperplane Π_τ to $C(\tau)$ at $\Theta^*(t, \psi^0, v^0)$. Let η_τ be the unit vector orthogonal to this support hyperplane which is directed from

$\Theta^*(t, \psi^0, v^0)$ into the halfspace which does not contain the convex body $C(\tau)$. For every point $\Omega^*(t, \varphi, u) \in C(\tau)$, the vector $\Omega^*(t, \varphi, u) - \Theta^*(t, \psi^0, v^0)$ is directed into the halfspace which contains $C(\tau)$. Hence

$$(\Omega^*(t, \varphi, u) - \Theta^*(t, \psi^0, v^0), \eta_\tau) \leqslant 0, \tag{14}$$

for $\Omega^*(t, \varphi, u) \in C(\tau)$.

Consider now the sequence of times $\{T_j\}_1^\infty$ defined by (6) which has the property (8). If j is sufficiently large, $t^* < T_j < T^0$. It follows, from (8), (13) and from the continuity of $\tau(t)$, that

$$\lim_{j\to\infty} \tau(T_j) = T^0. \tag{15}$$

Since in n-dimensional Euclidean space the unit sphere is compact, there exists a convergent subsequence of the sequence of unit vectors $\{\eta_{\tau(T_j)}\}_1^\infty$ which converges to the unit vector η_{T^0} which is orthogonal to the support hyperplane Π_{T^0} to the set $C(T^0)$ at the boundary point Λ^0, directed into the halfspace which does not contain the convex body $C(T^0)$.

If $\Omega^*(t, \varphi, u)$ is an interior point of the set $C(T^0)$, $\Omega^*(t, \varphi, u) \in C(T_j)$ for sufficiently large j, by property III [4] in § 3. From (14) we see that $((\Omega^*(t, \varphi, u) - \Theta^*(T_j, \psi^0, v^0), \eta_{\tau(T)_j}) \leqslant 0$.

Taking the relations (1) and (15) and the continuity of $\tau(t)$ into account, for $j \to \infty$ we obtain

$$(\Omega^*(t, \varphi, u) - \Omega^*(T^0, \varphi^0, u^0), \eta_{T^0}) \leqslant 0. \tag{16}$$

Let $\{v(t), \psi(t)\}$ be an admissible pair for the pursued system Z. $\Theta^*(t, \psi, v)$ can be captured by the pursuing system X with optimal policy at $t = T_{v\psi} < T^0$. Suppose that the pair $\{v(t), \psi(t)\}$ is sufficiently near to the optimal pair $\{v^0(t), \psi^0(t)\}$ and is such that $\Theta^*(T_{v\psi}, \psi, v)$ is an interior point of the set $C(T^0)$. Then, by property III [4] in § 3 and by (8), $\Theta^*(T_{v\psi}, \psi, v)$ is an interior point of the sets $C(T_j)$ for all large j. Therefore $\Theta^*(T_j, \psi, v) \in C(T_j)$.

Consider now the points Λ_j, $(j = 1, 2, \ldots)$, defined by (9). Since $\Lambda_j \in S(T_j)$, it follows that $\Theta^*(T_j, \psi^j, v^j) \in S(T_j)$. Since $\Theta^*(T_j, \psi, v)$ is an interior point of $C(T_j)$, and since $\Theta^*(T_j, \psi^j, v^j)$ is on the boundary of $C(T_j)$, the vector $\Theta^*(T_j, \psi, v) - \Theta^*(T_j, \psi^j, v^j)$, which passes through Λ_j, is directed into the halfspace which contains the convex body $C(T_j)$. Consequently

$$(\Theta^*(T_j, \psi, v) - \Theta^*(T_j, \psi^j, v^j), \eta_{T_j}) \leqslant 0, \tag{17}$$

for sufficiently large j. Passing to the limit as $j \to \infty$ in (17), we obtain

$$(\Theta^*(T^0, \psi, v) - \Theta^*(T^0, \psi^0, v^0), \eta_{T_0}) \leqslant 0. \tag{18}$$

Using the liniarity of the functional $\Theta^*(t, \psi, v)$, we may write $\Delta\Theta^* = \Theta^*(T^0, \psi, v) = \Theta^*(T^0, \psi^0, v^0)) = \Theta^*(T^0, \psi - \psi^0, v - v^0)$. Then the inequality (18) can be written in the form

$$(\Delta\Theta^\star, \eta_{T_0}) \leqslant 0. \tag{19}$$

The formula (19) is true for every admissible pair $\{v(t), \psi(t)\}$ which is sufficiently near to the optimal pair $\{v^0(t), \psi^0(t)\}$ and is such that $\Theta^\star(t, \psi, v) \in C(T_0)$. Consider now the function

$$\zeta_j(t) = (\Omega^\star(t, \varphi^0, u^0) - \Theta^\star(t, \psi^0, v^0), \eta_{\tau(T_j)}). \tag{20}$$

Since $\Omega^\star(t, \varphi^0, u^0) \in C(t)$ for every t, it follows from (14) that $\zeta_j(T_j) \leqslant 0$. Since $\Omega^\star(T^0, \varphi^0, u^0) = \Theta^\star(T^0, \psi^0, v^0)$, we have $\zeta_j(T^0) = 0$. Since $u^0(t)$ and $v^0(t)$ are piecewise continuous and since the kernel functions $H(s, t)$ and $K(s, t)$ are continuously differentiable in $T_j \leqslant t \leqslant T^0$ if j is sufficiently large, the function $\zeta_j(t)$ has a continuous derivative in the interval $T_j \leqslant t \leqslant T^0$. Hence $\zeta_j'(\lambda_j) \geqslant 0$ for some λ_j such that $T_j < \lambda_j < T^0$. Therefore,

$$\lim \zeta_j'(\lambda_j) \geqslant 0. \tag{21}$$

Consequently

$$(w, \eta_{T_0}) \leqslant 0, \quad w = G(\Lambda^0, v^0(T^0), T^0) - F(\Lambda^0, u^0(T^0), T^0), \tag{22}$$

F and G being defined by (11) and (12).

Let $C^\star(T^0)$ be the convex hull of $C(T^0)$ and w, and let $K^\star$ be the convex cone, with vertex Λ^0, of the vectors $\Delta\Theta^\star$ which emanate from Λ^0. Since, by the above argument, the convex set $C(T^0)$ and the vectors $\Delta\Theta^\star$ and w all lie on the side of the support hyperplane Π_{T^0} to the convex body $C^\star(T^0)$ at Λ^0, the set $C^\star(T^0)$ and the vector $-\Delta\Theta^\star$ lie in two opposite closed halfspaces defined by Π_{T^0}. Hence, the vector $-\Delta\Theta^\star$, which emanates from Λ^0, does not pass through interior points of the convex body $C^\star(T^0)$.

The vectors $-\Delta\Theta^\star$ form a convex cone K which is symetric to $K^\star$ with respect to Λ^0. Therefore, K does not intersect the interior of the convex body $C^\star(T^0)$. Since $C^\star(T^0)$ has interior points (because $C(T^0)$ has), $C^\star(T^0)$ and K are separated by a hyperplane Π^0. Therefore the convex hull $C^\star(T^0)$ and the convex cone $K^\star$ lie in one closed halfspace defined by Π^0 and the cone K is contained in the other. Let η^0 be the unit vector which emanates from Λ^0, is orthogonal to Π^0, and is directed into the halfspace which containes K. Thus, for this vector η^0 the relations (16), (19) and (22) are satisfied, namely

(I) $(\Omega^\star(t, \varphi, u) - \Omega^\star(T^0, \varphi^0, u^0), \eta^0) < 0$ for $\Omega^\star(t, \varphi, u) \in C(T^0)$;

(II) $(\Delta\Theta^\star, \eta^0) < 0$ for $\Delta\Theta^\star \in K^\star$ and (III) $(w, \eta^0) < 0$.

This completes the proof of Theorem 2.

Received the 26 IX 1966

University of Alberta,
Edmonton, Alberta, Canada

REFERENCES

1. Oğuztöreli M. N., *Time-Lag Control Systems*. Academic Press, New York, 1966, 323 pp.
2. — *Optimal Strategies Problems*. Academic Press (in print).
3. — *Optimal Pursuit Strategy Processes with Retarded Control Systems*. J. SIAM Control, ser. A, 1964, **2**, *1*, pp. 89–105.
4. — *A Time Optimal Control Problem for Systems described by Difference-differential Equations*. J. SIAM Control, 1963, **1**, pp. 290–310.
5. Bellman R., *An Approximate Procedure in Control Theory based on Quasilinearization*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3–4*, pp. 5–10.
6. Conti R., *Controlli t-minimanti*. Corso Matematico Estivo, Varenna, 1963.
7. Mangeron D., Roxin E., *The Existence of Optimal Controls and some Applications*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1–2*, pp. 29–36; Ibid., 1964, **X (XIV)**, *3–4*, pp. 61–66.
8. Oguztöreli M. N., *Studies concerned with Time Optimal Control Problems. I. Systems described by Differential-difference Equations*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII(XVII)** *1–2*, pp. 81–90.
9. Kelendzheridze D. L., *On the Theory of Optimal Pursuit*. English transl. Soviet Math.-Dokl., 1961, **2**, pp. 654–656.
10. Pontryagin L. S., Boltyanski V. C., Gamkrelidze R. W., Mishchenko E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, New York, 1962, (transl. from Russian).

CONTRIBUŢII LA STUDIUL PROBLEMELOR DE REGLARE OPTIMALĂ A TIMPULUI

II. Proprietăţile strategiilor optimale

(Rezumat)

Într-unul din volumele sale apărut recent [2] autorul, luînd ca bază vasta gamă de lucrări proprii, precum şi de lucrări datorite lui R. Bellman, R. Conti, D. Mangeron, L. S. Pontryagin, Em. O. Roxin ş. a. [3]...[10], dintre care unele publicate în acest *Buletin*, a studiat sisteme de reglare automată cu întîrziere în timp. În această Notă, care constituie continuarea lucrării [8], se studiază proprietăţile strategiilor optimale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 517.934

A GENERAL STABILITY CRITERION FOR FEEDBACK SYSTEMS

BY

ALLAN M. KRALL [1])

1. Introduction

If a feedback system is described by a system of linear differential equations with constant coefficients, there are a great many techniques for determining whether or not the system is stable [1], [3], [6]. If the coefficients are dependent on time, then stability can be determined by comparing the system to one with constant coefficients [5]. If the system can only be described by nonlinear equations, stability may be determined by various techniques fitting certain special situations. In some of these cases, for example the use of describing functions, valid mathematical proof of the results is lacking.

It is the aim of this paper to present a general stability criterion which covers a great many situations and which gives useable results even for linear systems with constant coefficients.

2. Existence, Uniqueness and Stability

We will present the following theorems in a rather general setting, then show the applications.

Let X denote a Banach space with norm denoted by $\|\cdot\|$. Let F be an operator on X.

Definition. *An operator F is said to be bounded if there exists a number K such that $\|Fx\| \leqq K\|x\|$ for all x in X.*

Definition. *An operator F is said to satisfy a Lipschitz condition if there exists a number K such that $\|Fx - Fy\| \leqq K\|x - y\|$ for all x and y in X.*

Let us now consider the feedback system $\mathcal{J}_1$ illustrated by Fig. 1. f is the „forcing function" or „input", e is the „error", r is the „response" or „output". F_1 and F_2 are operators on X.

Mathematically $\mathcal{J}_1$ can be described by the following equations:

$$f - F_2(r) = e,\ F_1(e) = r,\ \text{or by}\ F_1(f - F_2(r)) = r.$$

[1]) The research was supported in part by N.A.S.A. Grant 39-009-041.

Theorem 1. *If F_1 and F_2 satisfy a Lipschitz condition with constants K_1 and K_2 respectively and $K_1 K_2 < 1$, then $F_1(f - F_2(r)) = r$ has a unique solution r in X.*

If F_1 and F_2 are bounded respectively by K_1 and K_2, $K_1 K_2 < 1$ and $F_1(f - F_2(r)) = r$ has a solution r in X, then [7]

$$\|r\| \leqq \frac{K_1}{1 - K_1 K_2} \|f\| .$$

Proof. We use the contraction mapping principle to develop an iterative procedure, which gives a sequence of elements in X which converge to r. Let $r_1 = F_1(f)$, and in general $r_n = F_1(f - F_2(r_{n-1}))$. Each r_n is in X, and $\|r_n - r_{n-1}\| \leqq K_1 K_2 \|r_{n-1} - r_{n-2}\|$. We see by induction that $\|r_n - r_{n-1}\| \leqq (K_1 K_2)^{n-1} \|F_1(f)\|$, which approaches zero as $n \to \infty$ since $K_1 K_2 < 1$. Since X is complete, the Cauchy sequence $\{r_n\}$ converges to an element r in X. Further

$$\|r - F_1(f - F_2(r))\| = \|r - r_n + F_1(f - F_2(r_{n-1})) - F_1(f - F_2(r))\| \leqq$$
$$\leqq \|r - r_n\| + K_1 K_2 \|r_{n-1} - r\| \to 0 .$$

So

$$r = F_1(f - F_2(r)) .$$

If r and r' are both solutions then $\|r - r'\| \leqq K_1 K_2 \|r - r'\| < \|r - r'\|$, which is a contradiction unless $r = r'$.

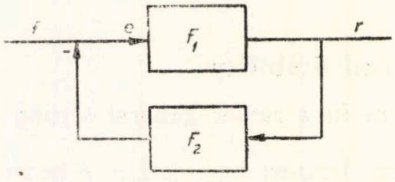


Fig. 1. — The feedback system $\mathcal{J}_1$.

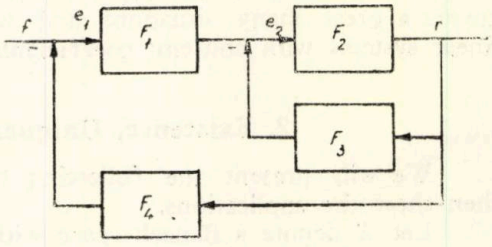


Fig. 2. — The feedback system $\mathcal{J}_2$.

To prove the second statement, we note $\|r\| = \|F_1(f - F_2(r))\| \leqq \leqq K_1 \|f\| + K_1 K_2 \|r\|$. Thus $\|r\| [1 - K_1 K_2] \leqq K_1 \|f\|$, and the result follows.

As with ordinary differential equations this method of successive approximations gives a procedure for calculating r as well as an estimate of the error involved.

It is also important to note that this theorem guarantees existence and uniqueness only in X. It is entirely possible to have other solution not in X and in so doing destroy „stability".

Let us now consider the more complicated system $\mathcal{J}_2$ illustrated by Fig. 2. Mathematically $\mathcal{J}_2$ can be described by the following equations:

$$f - F_4(r) = e_1, \; F_1(e_1) - F_3(r) = e_2, \; F_2(e_2) = r,$$

or by

$$F_2[F_2(f - F_4(r)) - F_3(r)] = r.$$

Theorem 2. *If* F_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *satisfies a Lipschitz condition with constant* K_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *and* $K_1 K_2 K_4 + K_2 K_3 < 1$, *then*

$$F_2[F_1(f - F_4(r)) - F_3(r)] = r$$

has a unique solution r *in* X.

If F_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *is bounded by* K_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, $K_1 K_2 K_4 + K_2 K_3 < 1$, *and* $F_2[F_1(f - F_4(r)) - F_3(r)] = r$ *has a solution* r *in* X, *then*

$$\|r\| \leqq \frac{K_1 K_2 \|f\|}{1 - K_1 K_2 K_4 - K_2 K_3}.$$

The proof is similar to that of theorem 1.

If the system $\mathcal{J}_3$, illustrated by Fig. 3 is considered, we find that

$$f - F_4(r) = e_1, \; e_1 - F_3(e_3) = e_2, \; F_1(e_2) = e_3, \; F_2(e_3) = r,$$

or, if we eliminate e_1 and e_2

$$F_1(f - F_4(r) - F_3(e_3)) = e_3, \; F_2(e_3) = r.$$

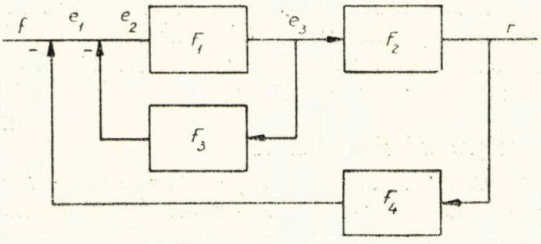


Fig. 3. — The feedback system $\mathcal{J}_3$.

Unlike the previous examples, e_3 cannot be eliminated. However, we can prove

Theorem 3. *If* F_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *satisfies a Lipschitz condition with constant* K_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *and* $K_1 K_2 K_4 + K_1 K_3 < 1$, *then the equations*

$$F_1(f - F_4(r) - F_3(e_3)) = e_3, \; F_2(e_3) = r$$

have a unique solution e_3 *and* r *in* X.

If F_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, *is bounded by* K_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, $K_1 K_2 K_4 + K_1 K_3 < 1$, *and the equations*

$$F_1(f - F_4(r) - F_3(e_3)) = e_3, \quad F_2(e_3) = r$$

have a solution e_3 *and* r *in* X, *then*

$$\|e_3\| \leqq \frac{K_1 \|f\|}{1 - K_1 K_3 - K_1 K_2 K_4} \quad \text{and} \quad \|r\| \leqq \frac{K_1 K_2 \|f\|}{1 - K_1 K_3 - K_1 K_2 K_4}.$$

The proof is only slightly more complicated than before. If e_{3i} are approximations for e_3 and r_i are approximations for r defined by

$$e_{31} = F_1(f), \quad r_1 = F_2(e_{31}), \quad e_{3n} = F_1(f - F_4(r_{n-2}) - F_3(e_{3n-1})), \quad r_n = F_2(e_{3n}),$$

then, we note

$$\|e_{3n} - e_{3n-1}\| \leqq [K_1 K_3 + K_1 K_2 K_4]^{n-1} K_1 \|f\|,$$
$$\|r_n - r_{n-1}\| \leqq [K_1 K_3 + K_1 K_2 K_4]^{n-1} K_1 K_2 \|f\|$$

and procede as before.

Let us now attack the general problem. Let $\mathcal{J}$ be a general multiloop feedback system consisting of a number of components described by operators F_i which have K_i as Lipschitz constants or bounds.

We call any path which begins at a point and can be followed back to that point a closed loop. For example, in Fig. 3, the path through F_3 and F_1 is a closed loop, as is the path through F_4, F_1 and F_2.

Existence Theorem. *Let* $\mathcal{J}$ *be a general feedback system consisting of elements described by operators* $\{F_i\}$ *with input* f *and response* r.

Let F_i *be Lipschitzian with constant* K_i. *Let* $K_i K_j - K_l = M_n$ *be the product of these constants around a particular closed loop. If* $\sum_{\text{all closed loops}} M_n < 1$ *then* $\mathcal{J}$ *possesses a unique solution* r *in* X.

Let F_i *be bounded by* K_i. *Let* $K_i K_j - K_l = M_n$ *be the products of the bounds around a particular cloosed loop. Further let* K *be the product of the bounds from* f *to* r, *and let* $L = \sum_{\text{all closed loops}} M_n$. *If* $\mathcal{J}$ *posess a solution* r *in* X, *then*

$$\|r\| \leqq \frac{K\|f\|}{1 - L}.$$

Proof. If we use an iteration procedure similar to that of theorem 1, we find that $\|r_n - r_{n-1}\| \leqq [\sum_{\text{all closed loops}} M_n] \|r_{n-1} - r_{n-2}\|$. Hence, as in theorem 1, the first statement follows.

To prove the second statement we note that $\|r\| \leqq K\|f\| + L\|r\|$.

These theorems are valid in any Banach space X. Those most commonly considered are the spaces L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$, C, the space of bounded continuous functions, and B, the space of bounded functions [4]. In practical applications the functions in these spaces are functions of time, which is permitted to vary from 0 to ∞. If negative times are considered the functions are usually assumed to be zero for $t < 0$.

An important concept associated with feedback systems is the concept of stability. There are many ways of defining stability. The one following is a convenient choice.

Definition. *The system $\mathcal{J}$ is said to be stable if for all forcing functions f in X, the response r is always an element of X.*

It is entirely possible for f to be in X with r not. Such systems are unstable.

Let $X(0, \infty)$ be one of the Banach spaces $L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, $C(0, \infty)$ or $B(0, \infty)$ with norm $\|.\|$ · For any $N > 0$ we denote the norm of $X(0, N)$ by $\|.\|_N$. Using the notation of the existence theorem, we then have the following

Stability Theorem. *Let f be in $X(0, \infty)$ and let r be in $X(0, N)$ for all $N > 0$. Suppose for all f and g in $X(0, N)$ for all $N > 0$, $F_i g$ and $F_i h$ are defined and satisfy*

$$\|F_i g - F_i h\|_N \leqq K_i \|g - h\|_N \text{ and } \sum_{\text{all closed loops}} M_n < 1 .$$

Then r is in $X(0, \infty)$ and is identical with that of the existence theorem.

Let f, be in $X(0, \infty)$, and let r be in $X(0, N)$ for all $N > 0$. Suppose for all g in $X(0, N)$ for all $N > 0$. $F_i g$ is defined and satisfies $\|F_i g\|_N \leqq \leqq K_i \|g\|_N$, with $L < 1$. Then r is in $X(0, \infty)$ and

$$\|r\| \leqq \frac{K}{1 - L} \|r\| .$$

Proof. The proof of the first statement is identical with that of the existence theorem. To prove the second part, we note $\|r\|_N \leqq [K/(1 - L)] \|f\|_N$. Letting $N \to \infty$ completes the proof.

3. Applications

a) *Inverse Differential Operators.* The most commonly encountered feedback systems are usually expressed in terms of linear differential equations with constant coefficients. In this case the operators F_i are expressed as inverse differential operators, $F_i = f_i(D)/g_i(d)$, where f_i, g_i are polynomials in $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, $\deg f_i \leqq \deg g_i$. These operators are uniquely defined by requiring that $F_i f(0)$ be zero along with an appropriate number of derivatives as long as $f(t)$ is a suitable function.

Another more suitable representation of F_i is by the use of one sided Green's functions [5]. It is known that there exist unique functions $\Phi_i(t)$ such that $F_i f(t) = \int_0^t \Phi_i(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$.

Using this last representation, if all of the zeros of $g_i(z)$ lie in the left half plane, it can be shown that when X is L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$, B or C, the norm of F_i is $\int_0^\infty |\Phi_i(t)|\, dt$.

As an example let $F = \frac{1}{D+a}$, $a > 0$. Then if f is suitable, $F_i f(t) = \int_0^t e^{-a(t-u)} f(u) du$. The norm of F is a^{-1} in L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$, B or C.

If $F = \frac{1}{D+a_1} \cdot \frac{1}{D+a_2} \cdots \frac{1}{D+a_n}$, then $[a_1 a_2 \ldots a_n]^{-1}$ is a bound for F in L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$, B or C.

If we consider the feedback system $\mathcal{J}_1$, where $F_1 = \frac{1}{D+a}$, $F_2 = 1$ and determine stability by any other method, we find that the system is stable provided $|K| < a$ and possibly unstable if $|K| > a$. Thus the result is the „best possible". Actually this system is stable for $K > -a$ and unstable otherwise.

Similar results may be found for linear differential systems with variable coefficients. In this case the functions Φ_i are functions of two variables t and τ [5], $F_i f(t) = \int_0^t \Phi_i(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$.

b) *Time Lags.* A time lag L_τ defined by $L_\tau f(t) = f(t-\tau)$ can be symbolically represented by $e^{-\tau D}$. It is easy to see that the norm of $L_\tau f$ is the same as that of f since the variable t is only shifted. Thus the norm of L_τ is 1. Since L_τ is a linear operator, 1 also serves as a Lipschitz constant.

c) *Certain Nonlinear Operators.* There are a great many nonlinear operators such as saturation, dead zone, hysteresis, backlash which frequently occur alone or in any possible combination. If these nonlinear elements are considered separately and a graph of output versus input is made, there usually is a point on the graph so that a line joining it to the origin has maximum slope K. It is easy to see that K is a bound for the operator [3]. We note in passing that the „describing functions" used to describe these phenomena have K as a maximum value.

Similarly the maximum slope at any point along the graph serves as a Lipschitz constant.

4. An Example

Let us consider the system illustrated by Fig. 4, where $F_1 = (D+2)^{-2}$, $F_2 = e^{-7D}$, F_3 is a dead zone defined by

$$F_3 y = \begin{cases} 0 & \text{if } |y| < 1, \\ y - 1 & \text{if } y > 1, \\ y + 1 & \text{if } y < -1, \end{cases}$$

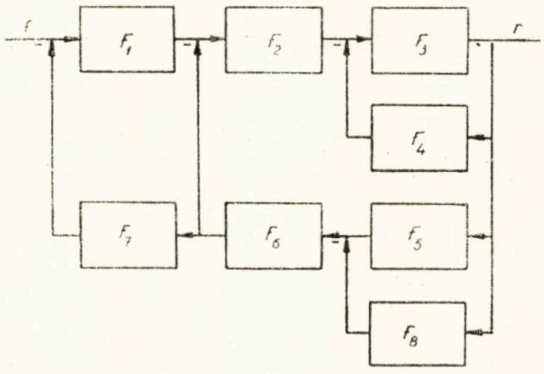


Fig. 4. — An example.

$F_4 = (D+6)^{-1}$, $F_5 = \frac{1}{3} e^{-3D}$, F_6 is a saturation defined by

$$F_6 y = \begin{cases} y & \text{if } -1 \leqq y \leqq 1, \\ 1 & \text{if } y > 1, \\ -1 & \text{if } y < -1, \end{cases}$$

$F_7 = (D+2)^{-1}(D+3)^{-1}$, and $E_8 = 3(D+1)^{-5}$. Lipschitz constants for F_1 through F_8 respectively are 1/4, 1, 1, 1/6, 1, 1, 1/6, 3. The sum of these constants around each of the loops is $1/6 + 1/3 + 1/24 + 3/24 = 2/3$, so the system is stable. Further, bounds for F_1 through F_8 are the same. Thus

$$\|r\| \leqq \frac{1/4\|f\|}{1 - 2/3} = \frac{3}{2}\|f\|.$$

At the present time there is no other way of determining the stability of this system.

Received the 16 IX 1966

College of Science, The Pennsylvania State University, University Park, Pa, USA

REFERENCES

1. Kaplan W., *Operational Methods for Linear Systems*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1962.
2. Кудревич Я., Авт. и телемех., 1964, **25**, стр. 1145—1155.

3. Kuo B. C., *Automatic Control Systems*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1962.
4. McShane E. J., Botts T. A., *Real Analysis*. D. VanNostrand Company, Inc., Princenton, N. Y., 1959.
5. Stubberud A. R., *Analysis and Synthesis of Linear Time-Variable Systems*. Univ. of California Press, Berkeley, Cal., 1964.
6. Truxal J. C., *Automatic Feedback Control System Synthesis*. McGraw-Hill Book Co., Inc., N. Y., 1955.
7. Zames G., *On the Stability of Nonlinear Time Varying Feedback Systems*. Proc. Nat. Elect. Conf., Inc., Chicago, Ill., 1964, pp. 725–730.

UN CRITERIU GENERAL DE STABILITATE PENTRU SISTEMELE CU REACȚIE

(Rezumat)

Se stabilește un criteriu general de stabilitate care permite abordarea a numeroase probleme privind sistemele cu reacție neliniare și poate fi cu succes folosit și în cazul sistemelor schematizate prin ecuații liniare cu coeficienți variabili.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Sistemul cu reacție $\mathcal{J}_1$.
Fig. 2. — Sistemul cu reacție $\mathcal{J}_2$.
Fig. 3. — Sistemul cu reacție $\mathcal{J}_3$.
Fig. 4. — Un exemplu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII. (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 513.73; 532.521

QUELQUES MOUVEMENTS TRANSVERSAUX D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE SUR UNE VARIÉTÉ ANHOLONÔME

PAR

C. ACKER

1. Introduction

Nous allons utiliser les résultats des travaux [3], [4] pour établir l'existence de quelques écoulements à une variété anholonôme, en y ajoutant quelques remarques.

Il s'agit d'un fluide idéal barotrop compressible dont l'écoulement transversal, (rot $\bar{v} \perp \bar{v}$), se développe sur une variété anholonôme située dans l'espace euclidéen à trois dimensions.

L'existence d'un tel mouvement sera démontrée pour les cas particuliers suivants: a) rot $\bar{v}$ situé dans le plan tangent de la variété anholonôme, b) rot $\bar{v}$ normal au plan tangent de la variété anholonôme, c) grad v situé dans le plan tangent de la variété anholonôme, d) grad v situé dans le plan déterminé par le vecteur vitesse et la normale de la variété anholonôme.

2. Un système différentiel extérieur de l'écoulement

De la même manière que dans [6] l'ensemble des conditions géométriques et hidrodynamiques sous les quelles se développe l'écoulement, constitue un système différentiel extérieur où les formes extérieures indépendentes sont ω^i, dt. Ce système extérieur fermé est en involution pour tous les mouvements du type a)...d). C'est-à-dire les variétés intégrales du système à quatre dimensions, sur les quelles l'on a $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$, existent; ces variétés intégrales représentent des écoulements, donc les mouvements particuliers énoncés existent. Chaque mouvement du type a)...d) dépend d'une fonction arbitraire à quatre variables.

Le système différentiel extérieur qui exprime les conditions géométriques et hidrodynamiques des mouvements du type a)...d) est donné par:

$e_1)$ $r_t = 0$, $p_t = 0$, $e_2)$ $r_2 \cos\theta - p_2 \sin\theta = 0$,

$e_3)$ $dp = [r, q]$, $dq = [p, r]$, $dr = [q, p]$,

$e_4)$ $v(\theta_t + vq_3) - \varphi_1 = -\frac{1}{\varrho}\tilde{p}_1$, $v^2 p_3 + \varphi_2 = \frac{1}{\varrho}\tilde{p}_2$, $v_t + vv_3 - \varphi_3 = -\frac{1}{\varrho}\tilde{p}_3$,

$e_5)$ $\tilde{\varrho}_t + v\tilde{\varrho}_3 + \tilde{\varrho}[v(q_1 - p_2) + v_3] = 0$, $e_6)$ $\tilde{p} = f(\tilde{\varrho})$,

$e_7)$ $d\varphi = \varphi_i \omega^i + \varphi_t dt$, $e_8)$ $p_1 + q_2 = 0$.

La signification des équations du système est la suivante: $e_1)$ — I_2 est stationnaire; $e_2)$ — le vecteur unité $\tilde{f}_3$ est élu tel qu'il ait la direction de $d\tilde{f}_2$ le long de la direction $\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^3 = 0$ [6]; $e_3)$ — les équations de structure de l'espace euclidéen à trois dimensions; $e_4)$ — l'équation vecteurielle du mouvement (l'équation d'Euler) projetée sur les axes I_1, I_2, I_3; $e_5)$ — l'équation de la continuité; $e_6)$ — l'équation de l'état (f est une fonction connue); $e_7)$ — les forces massiques sont conservatives; $e_8)$ — rot $\bar{v} \perp \bar{v}$. On y ajoute, selon le cas particulier du mouvement considéré les équations suivantes:

$$a_1)\ vq_3 - v_1 = 0, \quad b_1)\ v_2 + vp_3 = 0, \quad c_1)\ v_2 = 0, \quad d_1)\ v_1 = 0.$$

3. Quelques conditions d'intégrabilité du système différentiel extérieur

Nous allons indiquer quelques conditions d'intégrabilité communes à tous les écoulements considérés, à savoir

$$(1)\quad v_{3t} - v_{t3} - v_1\theta_t = 0, \quad \tilde{\varrho}_{3t} - \tilde{\varrho}_{t3} - \tilde{\varrho}_1\theta_t = 0, \quad \theta_{3t} - \theta_{t3} - \theta_1\theta_t = 0,$$

$$(2)\quad p_{3t} + (r_3 - p_1)\theta_t = 0, \quad q_{3t} - \theta_{t3} - q_1\theta_t = 0, \quad r_{3t} - (p_3 + r_1)\theta_t = 0,$$

$$(3)\quad v_{1t} - v_{t1} + v_3\theta_t = 0, \quad \tilde{\varrho}_{1t} - \tilde{\varrho}_{t1} + \tilde{\varrho}_3\theta_t = 0, \quad \theta_{1t} - \theta_{t1} + \theta_3\theta_t = 0,$$

$$(4)\quad p_{1t} + (p_3 + r_1)\theta_t = 0, \quad q_{1t} - \theta_{t1} + q_3\theta_t = 0, \quad r_{1t} + (r_3 - p_1)\theta_t = 0,$$

$$(5)\quad v_{2t} - v_{t2} = 0, \quad \tilde{\varrho}_{2t} - \tilde{\varrho}_{t2} = 0, \quad \theta_{2t} - \theta_{t2} = 0,$$

$$(6)\quad q_{2t} - \theta_{t2} = 0, \quad p_{1t} + q_{2t} = 0,$$

et quelques conditions d'intégrabilité spéciales pour chacun des mouvements du type a)...d):

$$a_2)\ q_3 v_t + vq_{3t} - v_{1t} = 0, \quad b_2)\ v_{2t} + p_3 v_t + vp_{3t} = 0, \quad c_2)\ v_{2t} = 0, \quad d_2)\ v_{1t} = 0.$$

Les interprétations des fonctions p_i, q_i, r_i concernant la ligne de courant et les lignes admissibles des champs I_1, I_2, analogues à la ligne de courant, restent les mêmes que dans [6].

Signalons aussi la courbure moyenne K_m, la courbure de Gauss K_g et la courbure totale K_T du champ I_2:

$$(7)\qquad \begin{cases} K_m = p_3 - r_1\,, \\ K_g = -[p_3 r_1 + \frac{1}{4}(r_3 - p_1)^2] = -[r_1 p_3 - r_3 p_1 + \frac{1}{4}(r_3 + p_1)^2], \\ K_T = r_1 p_3 - r_3 p_1\,, \end{cases}$$

et les relations ([6, (1.7)]) :

$$(8)\qquad p_3 = -\frac{a_2}{v^2} = \frac{2w_1 - v_2}{v}\,, \quad q_3 = \frac{a_1 - v\theta_t}{v^2} = \frac{2w_2 + v_1}{v}$$

où $a_i = \bar{a}.I_i$, $2w_i = \mathrm{rot}\bar{v}.I_i$.

4. Observations

1°. La condition pour que la variété sur la quelle se développe l'écoulement soit holonôme est $r_3 + p_1 = 0$. Alors $K_g + K_T \neq 0$, ou

$$(9)\qquad \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_{c_1}} - [(\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3 + (\bar{b}_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1] \neq 0.$$

2°. Les expressions (7) de K_m, K_g, K_T peuvent s'ecrire sous la forme:

$$K_m = \frac{\bar{b}_c.I_1}{R_c} - \frac{\bar{b}_{c_1}.I_3}{R_{c_1}}\,,$$

$$K_g = -K_T - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\tau_{c_1}} + \frac{1}{\tau_{c_1}} - (\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3 - (\bar{b}_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1\right],$$

$$K_T = \frac{\bar{b}_c.I_1}{R_c} \cdot \frac{\bar{b}_{c_1}.I_3}{R_{c_1}} - \left[\frac{1}{\tau_c} - (\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3\right]\left[\frac{1}{\tau_{c_1}} - (b_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1\right],$$

(en y remplaçant p_3 par les expressions (8)).

3°. Les conditions d'intégrabilité communes aux mouvements du type a)...d) permettent d'établir les relations suivantes

$$
(10)\quad
\begin{cases}
\left\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{1}{\tau_{c_1}}-(\bar{b}_{c_1},^{\wedge} I_2)_1\right]\right\}^2=\theta_t^2\left\{K_m^2+4K_T+4\left[\dfrac{1}{\tau_{c_1}}-(\bar{b}_{c_1},^{\wedge} I_2)_1\right]\left[\dfrac{1}{\tau_{c_1}}-(\bar{b}_c,^{\wedge} I_1)_3\right]\right\},\\
\left\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{1}{\tau_c}-(\bar{b}_c,^{\wedge} I_1)_3\right]\right\}^2=\theta_t^2\left\{K_m^2+4K_T+4\left[\dfrac{1}{\tau_{c_1}}-(\bar{b}_{c_1},^{\wedge} I_2)_1\right]\left[\dfrac{1}{\tau_c}-(\bar{b}_c,^{\wedge} I_1)_3\right]\right\},\\
\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\bar{b}_c.I_1}{R_c^2}\right)\right]^2+4\theta_t^2\left(K_g+\dfrac{b_c.I_1}{R_c}\cdot\dfrac{b_{c_1}.I_3}{R_{c_1}}\right)=0,\\
\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\bar{b}_{c_1}.I_3}{R_{c_1}}\right)\right]^2+4\theta_t^2\left(K_g+\dfrac{\bar{b}_c.I_1}{R_c}\cdot\dfrac{\bar{b}_{c_1}.I_3}{R_{c_1}}\right)=0.
\end{cases}
$$

Signalons aussi

$$\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln(\theta_t)=\left(\frac{\bar{n}_{c_1}}{R_{c_1}}-\frac{\bar{n}_c}{R_c}\right).I_2=\left(\frac{\mathrm{d}I_1}{\omega^1}-\frac{\mathrm{d}I_3}{\omega^3}\right).I_2,$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln(\theta_t)\right]^2=K_m^2+4\left\{K_T+\left[\frac{1}{\tau_{c_1}}-(\bar{b}_{c_1},^{\wedge} I_2)_1\right]\left[\frac{1}{\tau_c}-(\bar{b}_c,^{\wedge} I_1)_3\right]\right\}.$$

5. Écoulement du type a)

Les relations (4) conduisent en ce cas à

$$\frac{1}{\theta_t}\cdot\frac{b_{c_1}.I_2}{R_{c_1}}=\frac{\mathrm{d}}{\omega^1}\left(\ln\frac{\theta_t}{v}\right),$$

les relations (2) à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^1}\ln v\right)-\frac{\mathrm{d}\theta_t}{\omega^3}=\theta_t\cdot\frac{b_{c_1}.I_2}{R_{c_1}}$$

tandis que les relations (8) entraînent

$$\left[\bar{a}-\frac{\operatorname{grad}(v^2)}{2}\right].I_1=v\theta_t,$$

ou bien

$$\left(\frac{\bar{a}}{v}-\operatorname{grad}v\right).I_1=\theta_t,$$

qui représente une condition nécessaire et suffisante pour que l'écoulement transversal à une variété anholonôme apartienne à la classe a).

6. Écoulement du type b)

La relation b_1) conduit à

$$K_m = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v + \frac{\bar{n}_{c_1}\cdot I_2}{R_{c_1}}\right) = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v + \frac{\bar{b}_{c_1}\cdot I_3}{R_{c_1}}\right), \tag{11}$$

$$\begin{cases} K_g = \dfrac{\bar{n}_{c_1}\cdot I_2}{R_{c_1}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v - \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{\tau_c} - (\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3 - \left[\dfrac{1}{\tau_{c_1}} - (\bar{b}_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1\right]\right\}^2, \\ K_T = -\left\{\dfrac{\bar{n}_{c_1}\cdot I_2}{R_{c_1}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v + \left[\dfrac{1}{\tau_c} - (\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3\right]\left[\dfrac{1}{\tau_{c_1}} - (\bar{b}_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1\right]\right\}. \end{cases} \tag{11'}$$

La relation (11), c'est-à-dire

$$-\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{\mathrm{d}I_1}{\omega^1}\cdot I_2,$$

($1/r_1$, $1/r_2$ sont les courbures normales extrêmes du champ I_2 et $\mathrm{d}I_1/\omega^1$ es le vecteur de la courbure de la ligne c_1) représante une condition néces saire et suffisante pour que l'écoulement transversale sur une variété anho lonôme appartienne à la classe b).

Les relations (2) conduisent à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v\right) = \frac{\mathrm{d}}{\omega^2}[(\ln v)_t] = \theta_t\left\{\frac{1}{\tau_c} - (\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3 - \left[\frac{1}{\tau_{c_1}} - (\bar{b}_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1\right]\right\},$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}[(\ln v)_t]\right\}^2 + 4\theta_t^2\left[K_g - \left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v\right)\cdot\frac{\bar{n}_{c_1}\cdot I_2}{R_{c_1}}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v\right)\right]^2 + 4\theta_t^2\left[K_g - \left(\frac{\mathrm{d}}{\omega^2}\ln v\right)\cdot\frac{\bar{n}_{c_1}\cdot I_2}{R_{c_1}}\right] = 0,$$

d'où

$$K_g = [\ln v]_2\cdot\left\{\frac{\bar{n}_{c_1}\cdot I_2}{R_{c_1}} - \frac{1}{4\theta_t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\ln v)_2]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[(\ln v)_2]\right\}. \tag{12}$$

Les relations (11'), (12) conduisent à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\ln v)_2]^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[(\ln v)_2] = 2\theta_t^2\left\{\frac{1}{\tau_c} - (\bar{b}_c, \overset{\wedge}{,} I_1)_3 - \left[\frac{1}{\tau_{c_1}} - (\bar{b}_{c_1}, \overset{\wedge}{,} I_2)_1\right]\right\}^2, \tag{13}$$

tandis que les relations (11), (12) conduisent à

$$K_g + [\ln v]_2 K_m = -[\ln v]_2^2\left(1 + \frac{1}{4\theta_t^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[(\ln v)_2]\right\}^2\right).$$

La dernière relation présente assez d'intérêt.

Les relations (8) conduisent à

$$\left[\bar{a} - \frac{\operatorname{grad}(v^2)}{2}\right] \cdot I_2 = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\bar{a}}{v} - \operatorname{grad} v\right) . I_2 = 0.$$

La dernière relation représente une condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement transversal à une variété anholonôme soit de la classe b).

7. Écoulement du type c)

Soulignons d'abord les conditions

$$\operatorname{grad} v . I_2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s_{c_2}} = 0,$$

qui représentent, chacune à son tour, une condition nécessaire et suffisante pour que l'écoulement transversale à une variété anholonôme soit de la classe c).

La grandeur de la vitesse est donc la même le long de la trajectoire normale de la variété anholonôme, et alors $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ reste constante le long de la trajectoire normale à la variété anholonôme, donc $(v_t)_2 = 0$. Cela résulte encore des relations $v_{2t} = 0$, $v_{2t} - v_{t2} = 0$.

Les relations (8) entraînent la relation

$$\bar{a} . I_2 + v \operatorname{rot} \bar{v} . I_1 = 0,$$

qui représente une condition nécessaire et suffisante pour que l'écoulement transversal à une variété anholonôme soit de la classe c).

8. Écoulement du type d)

Les relations

$$\operatorname{grad} v . I_1 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\omega^1} = 0,$$

et (v. (8))

$$\operatorname{rot} \bar{v} . I_2 + \theta_t = \frac{1}{v} (\bar{a} . I_1),$$

représentent, chacune à son tour, une condition nécessaire et suffisante pour que l'écoulement transversal à une variété anholonôme soit de la classe d).

Les relations (1) entraînent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_3) = \frac{\mathrm{d}}{\omega^3}(v_t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\omega^1}(v_t) = v_3\,\theta_t,$$

et encore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\theta_t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\omega_1}(v_t)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\omega^3}(v_t).$$

Reçue le 20 VI 1967

Institut Politehnique de Jassy,
Chaire de Mécanique

BIBLIOGRAPHIE

1. Бюшгенс С. С., *Геометрия векторного поля.* ИАН, СССР, 1946, **10**, стр. 73—96.
2. Алексеев Н. И., *Об установившемся несжимаемом вязком потоке, допускающем семейство ортогоналных плоскостей для траекторий.* Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, **61**, стр. 5—19.
3. Gheorghiev Gh., *Mişcarea nestaţionară a unui lichid ideal pe o varietate neolonomă liniară.* An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1956, IV, *1*, pp.
4. — *Proprietăţile geometrico-diferenţiale ale mişcărilor nestaţionare din hidrodinamică şi magnetodinamică.* An. Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1960, **VI**, *2*, pp.
5. Бюшгенс С. С., *Геометрия неустановившегося потока совершенной жидкости.* ИАН СССР, 1960, **24**, стр. 171—202.
6. Акер К., *Вариация направления скорости в слоистом неустановившется течениа идеальной жидкости на семействе цилиндрических поверхностей.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 123—130.

CÎTEVA CLASE DE CURGERI TRANSVERSALE ALE UNUI FLUID COMPRESIBIL PE O VARIETATE NEOLONOMĂ

(Rezumat)

Se stabileşte existenţa a patru clase de curgeri transversale ale unui fluid ideal barotrop compresibil pe o varietate neolonomă din spaţiul euclidian tridimensional şi unele condiţii necesare şi suficiente ca mişcarea transversală pe o asemenea varietate să aparţină cîte uneia din cele patru clase de curgeri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 536.7; 530.1

SUR LA DYNAMIQUE DU CORPS À MASSE PROPRE VARIABLE ET LA FORMULE DE TRANSFORMATION RELATIVISTE DE LA CHALEUR

PAR

LOUIS DE BROGLIE
Membre d'honneur de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Dans des Notes précédentes [1], insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, nous avons donné de nouvelles démonstrations de la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. Nous allons montrer, en nous s'appuyant sur nos reflections incluses dans les exposés scientifiques récents [2], tout en suivant le texte de notre Note tout à fait récente insérée dans les mêmes *Comptes rendus* [3], qu'on peut aussi la déduire de la Dynamique du corps à masse propre variable. Pour établir les équations de cette Dynamique dans le cas de l'absence de forces extérieures, nous partirons de l'expression relativiste de la fonction de Lagrange pour un corps de masse propre M_0 qui est

$$\mathfrak{L} = -M_0 c^2\sqrt{1-\beta^2}, \quad (\beta = v/c). \tag{1}$$

Si l'on écrit que, d'après le principe de moindre action, on doit avoir $\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{L}\,dt = 0$, on en tire, en désignant par $p_k = \partial\mathfrak{L}/\partial\dot{q}_k$ les composantes de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) = \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{2}$$

ce qui donne

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{M_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -c^2\sqrt{1-\beta^2}\ \operatorname{grad} M_0, \tag{3}$$

où le second membre peut être considéré comme une force intrinsèque due à la variation de la masse propre. La symétrie relativiste entre l'espace et le temps conduit à adjoindre à (3) l'équation de variation de l'énergie $W = M_0 c^2/\sqrt{1-\beta^2}$,

$$\frac{dW}{dt} = c^2 \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\partial M_0}{\partial t}. \tag{4}$$

De (3) et (4) on tire

$$\frac{dW}{dt} - \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{dM_0}{dt} \quad \text{car} \quad \frac{dM_0}{dt} = \frac{\partial M_0}{\partial t} + \mathbf{v}.\,\text{grad}\,M_0. \tag{5}$$

Or, nous avons

$$\begin{cases} \mathbf{v}\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{p}) - \mathbf{p}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{p}) - \dfrac{M_0\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}, \\ c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\dfrac{dM_0}{dt} = \dfrac{d}{dt}(M_0 c^2\sqrt{1-\beta^2}) + \dfrac{M_0\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}. \end{cases} \tag{6}$$

En portant (6) dans (5), il vient aisément

$$\frac{d}{dt}(W - \mathbf{v}.\mathbf{p} - M_0 c^2\sqrt{1-\beta^2}) = 0 \tag{7}$$

quand le corps est au repos, le crochet est nul parce qu'alors $\beta = 0$ et $W_0 = M_0 c^2$. Il en résulte la relation

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0 c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{8}$$

Cette relation exprime que l'énergie totale du corps en mouvement se décompose en une énergie interne $Q = M_0 c^2\sqrt{1-\beta^2} = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$, contenue dans le corps et ayant le caractère d'une chaleur, augmentée d'une énergie de translation d'ensemble exprimée par la pseudo-énergie cinétique $M_0 v^2\sqrt{1-\beta^2}$.

Nous retrouvons ainsi une fois de plus la formule correcte de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ en la rattachant à la Dynamique du corps à masse propre variable. De plus notre raisonnement a l'intérêt de nous montrer que la formule (8) est non seulement valable pour le problème particulier du changement du système de référence comme on le savait depuis le très ancien raisonnement de Planck et Laue, mais *qu'elle est valable à chaque instant, même quand la vitesse varie.*

Un voit aussi que dans le mouvement du corps à masse propre variable, c'est la force due à la variation de la masse propre, représentée par le second membre de l'équation (3), qui assure à chaque instant la validité de la relation (8).

Dans ma Note du 9 mai 1966 des *Comptes rendus*, je m'était placé dans un système de référence galiléen R et j'avais considéré un corps qui, d'abord en repos dans ce système, passait ensuite dans un état final où il possedait une vitesse constante βc. Mes calculs m'avaient alors conduit à montrer que dans cet état final la relation (8) entraînant la formule $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ était valable. Or, le raisonnement ci-dessus, rend cette conclusion tout à fait évidente. En effet, la relation (8) est vérifiée pendant tout le processus d'accélération qui fait passer le corps de l'état de vitesse nulle à l'état de vitesse βc. Il en résulte évidemment qu'elle est encore valable dans l'état final où le corps conserve la vitesse constante βc.

Dans ces dernières années, plusieurs auteurs, guidés par une fausse analogie entre l'énergie totale d'un corps et son énergie interne de masse propre ayant le caractère d'une chaleur, ont soutenu la validité de la formule de transformation $Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}$. En développant un argument dont l'idée nous a été suggérée par M. Georges Lochak, nous allons montrer par un raisonnement simple que cette formule est inacceptable.

Considérons un corps C qui, dans son système propre R_0, contient une quantité de chaleur (énergie de masse propre comprise) Q_0. Une molécule M du corps possède dans R_0, à un instant donné, une vitesse $\mathbf{v}_0$. Passons ensuite à un système de référence R où le corps C a une vitesse d'ensemble $\mathbf{v}$ dans le sens de l'axe des z. Les formules de transformation relativiste des composantes de la vitesse de la molécule M nous donnent

$$(9) \qquad v_x = \frac{v_{0x}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta v_{0z}/c}, \quad v_y = \frac{v_{0y}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta v_{0z}/c}, \quad v_z = \frac{v_{0z}+\beta c}{1+\beta v_{0z}/c}.$$

On voit tout de suite que, si β tend vers 1, on a

$$(10) \qquad v_x \to 0, \; v_y \to 0, \; v_z \to c.$$

Donc, dans le système R, plus β est voisin de 1, plus v est voisin de c dans le sens Oz. Cela signifie que plus la vitesse du corps C est voisine de c, plus la vitesse *relative* de la molécule M dans le corps C devient petite. Autrement dit, quand β tend vers 1, toute l'énergie du corps tend à devenir une énergie de translation d'ensemble, l'énergie d'agitation interne tendant vers zéro. Cela se constate d'ailleurs facilement sur la formule (8).

Si la quantité de chaleur contenue dans C est Q_0 dans R_0 et Q dans R, on doit avoir une formule de transformation du type

$$(11) \qquad Q = Q_0 f(\beta^2),$$

car la fonction f ne peut pas dépendre du sens de la vitesse βc le long de Oz. Or, d'après ce qui précède, $f(\beta^2)$, égale à 1 pour $\beta = 0$, doit tendre

vers zéro quand β tend vers 1. Cela rend évidemment impossible d'admettre la formule $Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}$.

Reçue le 23 IV 1967

Académie des Sciences,
Paris, France

BIBLIOGRAPHIE

1. de Broglie L., C. r. Ac. Sci,, Paris, 1966, **262**, série B, p. 1235; Ibid., 1966, **263** série B, p. 1351.
2. — *Certitudes et incertitudes de la Science.* Editions Albin Michel, Paris, 1966, 302 pp.
3. — C. r. Ac. Sci., Paris, 1967, **264**, série B, p. 1173.

ASUPRA DINAMICII CORPULUI CU MASĂ PROPRIE VARIABILĂ ŞI A FORMULEI DE TRANSFORMARE RELATIVISTĂ A CĂLDURII

(Rezumat)

Autorul, luînd ca bază o serie de lucrări proprii [1] ... [3], regăseşte formula de transformare relativistă a căldurii $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ pornind de la dinamica corpului cu masă proprie variabilă. Apoi demonstrează, printr-un raţionament simplu, că formula $Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}$, propusă de unii autori, nu pare să fie admisibilă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

Д. К. 530.145.61

КОМПЛЕКСНЫЙ СПИН И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

С. С. САННИКОВ

В связи с введением в квантовую механику комплексных угловых моментов [1] возникает вопрос о групповом свойстве комплексного спина и связанная с этим вопросом задача построения представлений группы вращений, отвечающих таким значениям спина. Здесь мы построим такие представления в реализации функциями на сфере и обсудим основные их свойства.

Построение представлений группы в целом естественно начать с построения представлений алгебры Ли, то есть с решения системы уравнений ($L_{\pm} = L_1 \pm \mathrm{i} L_2$)

$$(1)\quad L_3 f_\nu^{(\lambda)} = \nu f_\nu^{(\lambda)},\quad L_+ f_\nu^{(\lambda)} = \alpha_{\nu+1}^{(\lambda)} f_{\nu+1}^{(\lambda)},\quad L_- f_\nu^{(\lambda)} = \alpha_\nu^{(\lambda)} f_{\nu-1}^{(\lambda)},\quad L^2 f_\nu^{(\lambda)} = \lambda(\lambda+1) f_\nu^{(\lambda)}.$$

В результате мы построим канонический базис в пространстве представления полной группы. Непосредственно легко убедиться, что при фиксированном λ представление алгебры Ли (1) существует только при $\nu = \nu_0 + n$, где ν_0, как и λ, для заданного представления есть некоторое фиксированное (комплексное) число, а n принимает целые значения, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) При этом функции базиса $f_\nu^{(\lambda)}$ можно отнормировать так, что матричные элементы $\alpha_\nu^{(\lambda)} = \sqrt{\lambda(\lambda+1) - \nu(\nu-1)}$.

Таким образом, при самом общем подходе к построению представлений группы вращений O_3 оказывается, что представление характеризуется заданием двух комплексных чисел λ и ν_0 (число ν_0 связано со значностью представления). Такой подход, следовательно, приводит к большой неоднозначности: каждому значению λ отвечает бесчисленное множество представлений, соответствующих различным значениям ν_0. Эта неоднозначность естественно устраняется следующим образом.

Известно, что в случае конечномерных представлений ($\lambda = m/2$, m — положительное целое число [2]), существует однозначное соответствие между спином λ и значностью представления ν_0. Так, если λ — целое число, то соответствующее представление однозначно, если λ — полуцелое число, то представление двузначно. Такая связь факти-

чески вытекает из требования конечномерности представления (то есть из условия существования при $\lambda = m/2$ двух корней уравнения $\alpha_\nu^{(\lambda)} = 0$, тогда представление алгебры Ли (1) обрывается снизу ($\nu = -m/2$) и сверху ($\nu = m/2 + 1$)) и устанавливается соотношением

$$\nu_0 = -\lambda. \tag{2}$$

В таком случае в точках $\lambda = m/2$ нет других представлений, кроме конечномерных. Эту связь между спином и значностью представления примем и в случае любых вещественных и комплексных значений спина λ. Тогда в каждой точке λ будем иметь только по одному представлению. При $\lambda \neq m/2$ все эти представления бесконечномерны. В (1) теперь $\nu = n - \lambda$, и n принимает значения $n = 0, 1, 2, \ldots$ (при $\lambda \neq m/2$ уравнение $\alpha_\nu^{(\lambda)} = 0$ имеет один корень (при $n = 0$), так что представление алгебры Ли (1) обрывается только снизу).

Выбранный нами путь приводит к представлениям, которые обладают следующим замечательным свойством: существует скалярное произведение [.,.] [3], инвариантное относительно групповых преобразований (такое скалярное произведение единственно), по которому представления с разными весами λ и λ' взаимно ортогональны[1])

$$[f_\nu^{(\lambda)}, f_{\nu'}^{(\lambda')}] \sim \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\nu\nu'}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3}$$

В этой реализации операторы L_3, $L_\pm$, $\underline{L}^2$ представляются в виде [4]

$$\begin{cases} L_3 = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}, \quad L_\pm = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\left(\pm\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} + \mathrm{i}\operatorname{ctg}\vartheta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ \underline{L}^2 = -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right), \end{cases} \tag{4}$$

(ϑ, φ — азимутальный и полярный углы), а решениями уравнений (1) являются функции ($\sigma = (\vartheta, \varphi)$, $x = \cos\theta$)

$$\begin{cases} Y_\nu^{(\lambda)}(\sigma) = A_\nu^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\varphi}(1-x^2)^{-\frac{\nu}{2}}\mathrm{C}_n^{\frac{1}{2}-\nu}(x), \\ A_\nu^{(\lambda)} = 2^{-\nu}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)\sqrt{\dfrac{2(l+1)(\nu+\lambda)!}{2\pi\Gamma(1+\lambda-\nu)}}, \quad (\nu = n-\lambda;\ n = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathrm{C}_n^{\frac{1}{2}-\nu}(x)$ — полиномы Гегенбауэра [5].

[1]) Существование скалярного произведения с таким свойством оказывается важным при изучении геометрической структуры пространства представления. Скалярное произведение (3) является эрмитовой индефинитной билинейной формой (см. ниже). Рассматриваемые здесь представления унитарны в такой индефинитной метрике. Таким образом, принимая условие $\nu_0 = -\lambda$, мы ограничиваемся рассмотрением только унитарных (в индефинитной метрике) представлений.

При рациональном $\lambda = l/s$ функции (5), как это следует из явного вида, s — значны на сфере. Они однозначны на римановой поверхности, образованной s сферами. При иррациональном и комплексном λ функции $Y^{(\lambda)}$ бесконечнозначны. Функции (5) сингулярны на сфере. В точках $x = \pm 1$ они имеют особенности степенного типа (точки ветвления $\nu/2$-порядка), поэтому в обычном смысле функции $Y^{(\lambda)}$ не интегрируемы. Тем не менее для них можно определить скалярное произведение. Скалярное произведение задается регуляризованным в особых точках функций $Y^{(\lambda)}_{\nu}$ и $Y^{(\lambda)}_{\nu'}$ значением интеграла[2]) (λ фиксировано)

$$(6) \qquad [Y^{(\lambda)}_{\nu}, Y^{(\lambda)}_{\nu'}]_{\lambda} = \text{рег.} \int \overline{(Y^{(\lambda)}_{\nu}(\sigma))}\, Y^{(\lambda)}_{\nu'}(\sigma)\, \mathrm{d}_{\lambda}\sigma = (-1)^n \eta^{(\lambda)}_n \delta_{nn'} = g^{(\lambda)}_{\nu\nu'},$$

где интегрирование (усреднение) выполняется по соответствующей данному λ римановой поверхности с инвариантной относительно групповых преобразований мерой $\mathrm{d}_{\lambda}\sigma = (4\pi s)^{-1} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$ (при иррациональном и комплексном $\lambda s \to \infty$).

В (6) $\eta^{(\lambda)}_n = \overline{[\Gamma(1+\bar{\lambda}-\bar{\nu})]^{1/2}}/[\Gamma(1+\lambda-\nu)]^{1/2}$. При $\mathcal{R}e\,\lambda < 0$, $\eta^{(\lambda)}_n = 1$. При $\mathcal{R}e\,\lambda > 0$ и $n < 2\mathcal{R}e\,\lambda$, $\eta^{(\lambda)}_n = (-1)^n$, при $n > 2\mathcal{R}e\,\lambda$, $\eta^{(\lambda)}_n = \mp 1$ в зависимости от того четным или нечетным числом является $[2\mathcal{R}e\,\lambda]$ ($[a]$ — целая часть числа a). Таким образом, скалярное произведение является эрмитовой сильно индефинитной билинейной формой. Коэффициенты $A^{(\lambda)}_{\nu}$ в (5) определяются из условия нормировки (6).

Отметим, что при $\lambda = m/2$ представление (5) становится конечномерным. В этом случае скалярное произведение (6) является положительно определенной формой, а регуляризованное значение интеграла совпадает с обычным.

Представление группы вращений веса λ зададим формулой

$$(7) \qquad T(r)\, Y^{(\lambda)}_{\nu}(\sigma) = Y^{(\lambda)}_{\nu}(\sigma r),$$

где координаты точки $\sigma r = (\vartheta', \varphi')$ выражаются через координаты точки $\sigma = (\vartheta, \varphi)$ и углы Эйлера преобразования $r = (\gamma, \beta, \alpha)$ по формулам [4]

$$(8) \qquad \begin{cases} \cos\vartheta' = \cos\vartheta\cos\beta - \sin\vartheta\sin\beta\cos(\varphi+\gamma), \\ \varphi' = \alpha + \operatorname{arctg} \dfrac{\sin\vartheta\sin(\varphi+\gamma)}{\cos\vartheta\sin\beta + \sin\vartheta\cos\beta\cos(\varphi+\gamma)}. \end{cases}$$

Раскладывая $Y^{(\lambda)}_{\nu}(\sigma r)$ по функциям базиса $Y^{(\lambda)}_{\nu}(\sigma)$

$$(9) \qquad Y^{(\lambda)}_{\nu}(\sigma r) = \sum_{\mu} D^{(\lambda)}_{\mu\nu}(r)\, Y^{(\lambda)}_{\mu}(\sigma),$$

---

[2]) Используемый здесь способ регуляризации эквивалентен аналитическому продолжению интеграла по параметрам λ и ν (см. [6]). Определение скалярного произведения для представлений с разными λ и λ' дано в [3].

найдем матричные элементы представления веса λ. Они имеют вид ($z = \cos\beta$)

$$D^{(\lambda)}_{\mu\nu}(r) = e^{-i\mu\gamma} d^{(\lambda)}_{\mu\nu}(\beta) e^{-i\nu\alpha}, \quad \mu = m - \lambda, \quad \nu = n - \lambda, \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

(10)
$$d^{(\lambda)}_{\mu\nu}(\beta) =$$

$$= (-1)^{2\lambda-\varkappa} \sqrt{\frac{k!\,\Gamma(\varrho-\varkappa)/\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma(2\lambda+\varrho-\varkappa)\,\Gamma(k-2\lambda)/\Gamma(-2\lambda)}} (1-z)^{\frac{\varrho}{2}} (1+z)^{\frac{\varkappa}{2}} P^{(\varrho,\varkappa)}_{k}(z),$$

где $P^{(\varrho,\varkappa)}_{k}(z)$ — полиномы Якоби [5], а $\varrho = |\mu - \nu|$, $\varkappa = -(\mu + \nu)$, $k = \lambda - (\varrho + \varkappa)/2$, ($k$ — положительное целое число).

Отметим, что бесконечный ряд (9) в смысле абсолютной сходимости сходится только при $\vartheta + \beta < \pi$. При $\vartheta + \beta > \pi$ ряд (9) сходится в некотором обобщенном смысле (в смысле слабой сходимости по индефинитному скалярному произведению (6) [3]). В этом обобщенном смысле выполняются групповые аксиомы $D(s)D(r) = D(sr)$, $D(s^{-1})D(s) = D(s)D(s^{-1}) = 1$ для бесконечных матриц $D^{(\lambda)}_{\mu\nu}$.

Отметим, наконец, что в индефинитной метрике (6) матрицы $D^{(\lambda)}_{\mu\nu}$ унитарны

(11)
$$\widetilde{D}(r) = g^{-1} D^{+}(r) g = D(r^{-1}) = D^{-1}(r)$$

(+ означает эрмитово сопряжение). Детальнее представления в функциях на группе (10) рассматривались в [3].

Поступила 15 VI 1965 г.

Академия Наук УССР,
Физико-технический институт,
Харьков, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Regge T., Nuovo Cim., 1959, **14**, стр. 951.
2. Наймарк М. А., *Линейные представления группы Лоренца*. Физматгиз, М., 1958.
3. Санников С. С., Ядерная физика (в печати).
4. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., *Представления группы вращений и группы Лоренца и их примения*. Физматгиз, М., 1958.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произвзедении*. Физматгиз М., 1962.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции*. Вып. *1*, Физматгиз, М., 1959.

SPINUL COMPLEX ŞI REPREZENTĂRILE GRUPULUI ROTAŢIILOR

(Rezumat)

Se studiază şi se pun în evidenţă proprietăţile fundamentale ale reprezentărilor grupului rotaţiilor, ce corespund la o valoare arbitrară, reală sau complexă, a spinului λ. Reprezentările ireductibile se realizează în spaţii infinit dimensionale cu metrică nedefinită. În această din urmă metrică respectivele reprezentări sînt unitare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

D. C. 539.16

PRELIMINARY RESULTS ON THE ANALYSIS OF SOME HIGH ENERGY JETS BY THE LOBACHEVSKY'S VELOCITY-PLOT[1])

BY

E. G. BUBELEV

1. New results are reported, which were obtained from some known high energy jets by using a simple graphic metod of analysis [1], [2]. In this method one makes use of the plot which is an Euclidean image of the distribution of the colliding particles and its secondaries in the velocity-space, rolled up around its axis B, the conformal and isometrical along B image. As the velocity space is a Lobachevsky's space [3]...[5] this plot which we call Lobachevsky's velocity-plot (L-plot), is invariant under parallel translations [1]. This permits one to analyze rapidly the kinematics of each event separately using the curved coordinate net (Fig. a). The curved orthogonal coordinates of the point a_i presenting the velocity of the particle with the rest mass $m_i \geqslant 0$ are its escape angle θ (θ only for a photon) and momentum p or „rapidly" $r = c\,\mathrm{Arth}\,(v/c)$ (c is the light velocity) in the frame of reference whose velocity is presented by the net origin [1] (Fig. a). The θ and p scales: $\eta_\theta = \mathrm{Arsh}\,\mathrm{ctg}\,\theta = -\ln \mathrm{tg}\,(\theta/2)$, $\eta_p = \mathrm{Arsh}\,(p/mc) = r/c = p$ are placed at the upper A and lower B net boundaries, the former coinciding at small θ with the well known $-\lg \mathrm{tg}\,\theta$ — plot [1], [2].

The results obtained are presented on the L — plots of analized events [6]...[10] (Fig. b...g). The most interesting among them are the following.

2. The production of 2 GeV/c χ^0 and 3 TeV ϱ^+ mesons with masses 1.04 and 0.73 GeV/c^2 in the Bristol event $0 + 4p + 2\pi^0$ initiated by proton with the excitation of both collided nucleons up to $M^*_{\mathrm{targ}} \simeq 1.4$ and $M^*_{\mathrm{inc}} \simeq 1.3$ GeV/c^2 (Fig. b) according to the scheme:

$$1^\circ\ p_t + p_i \to N_t^{*+}(1.4) + \chi^0(1.04) + \varrho^+(0.73) +$$

$$+ N_i^{*0}(1.3) \to (p_3\,\pi^0 + \pi_1^{\pm}\,\pi_2^{\mp})_{\mathrm{back.}} + (n_1\,\pi_1^0 + \pi_2^0\,\pi_4^+)_{\mathrm{forw.}};$$

[1]) Report at the International Conference on Cosmic Rays, Jaipur, 1963; Proc., 5, p. 577.

1° $n_1 + A \to 8 + 33\,n$, $E_{n_1} = 28 \cdot C^2 = 14\,\text{TeV}$, $E_0 = 40 \cdot C^2 = 20\,\text{TeV}$[2]);

2° $\pi_4^+ + A \to 5 + 7p$ $\begin{cases} \pi_4^+ + p_t \to 0 + 4p + (1 \ldots 2)\pi^0, \quad K_t' \approx 0.016, \\ \pi_1^0 + (A - p_t) \to 5 + 3\pi^\pm + \pi^\circ\,(?), \quad K_t'' \approx 0.30, \quad \varepsilon_{\pi^0} \approx 2.3\,\text{GeV}, \\ \varepsilon_{\pi_4} = \sum_i \varepsilon_i \approx 0.12 \pm 0.02\,\text{TeV} \text{ insted of } E_{p'} \approx 2.2\ \text{TeV in [6]}. \end{cases}$

This scheme was proved by a detailed kinematical analysis of the target- and L-plots for the primary jet and L-plot for secondary one $5 + 7p$ which is apparently a cascade in a nucleus (fig. c).

2. The production of the 1.5 TeV ω^0 meson in the Budapest event $0 + 16\,\alpha + 4\,\gamma$ with the excitation of both nucleons apparently up to $M^* \approx 1.5$ GeV/c^2 and formation of two fire balls decayed into $4\pi^\pm + (3 \ldots 4)\,\pi^0$ and $6\pi^\pm + (1 \ldots 2)\,\pi^0$ pions; the velocity-points of these pions are drawn in Fig. d under the assumption that their $CMS_{f(b)}$ energies equal $\varepsilon_i \approx \varepsilon_{\overline{NN}} \simeq 35$ GeV[11]. ω^0 meson decayed into photons $\omega^0 \to \pi_{23}^0 + \gamma_4 \to \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ with the energies $E_2^\gamma \simeq 2.2$ GeV, $E_3^\gamma \simeq 1$ TeV, $E_4^\gamma \simeq 0.5$ TeV, which agree well with experimental estimations while other combinations do not.

4. Two other events: Chicago $0 + 20\,p + 4\gamma$ [9] and Buffalo $4 + 27\,p + 4\gamma$ [10] found as above ones by the high energy soft cascades, have the L-plots similar to the previous ones (see Fig. e, g.). So in these events relativistic $\omega^0\,(\chi)$ meson was apparently produced, its rare neutral decay mode having become 100% owing to the scanning method. In Chicago event 2 GeV ω^0 meson was apparently produced as well which decayed into $\pi_2^\pm + \pi_3^\mp + \pi^0$ as charged pions $NN^0 = 2.3$ strongly correlate (Fig. e).

5. From target- and L-plots for above events one see that $\varrho(\chi, \omega)$ meson and excited nucleon were produced with comparable but almost opposite transverse momenta $p_{\varrho(\chi,\omega)}^{\perp} \sim p_{N^*}^{\perp} \leqq 0.5$ GeV/c; after deexcitation nucleon has a large inelasticity coefficient $0.5 \leq K_{i(t)} \leq 0.8$ in the rest system of another nucleon. This feature is an indication to the strong excitation of one or both colliding nucleons up to levels N^{**} with $M^{**} = 2.2 \ldots 3.0$ GeV/c^2 with a further cascade emission of $\varrho\,(\chi, \omega)$ meson and one or two pions[3]):

$$N^{**}\,(2.0 \ldots 3.0) \to N^*\,(1.2 \ldots 1.5) + \begin{Bmatrix} \varrho\,(\chi) \\ \omega \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} N\pi\,(2\pi) + \pi^+\pi^0\,(2\pi^0) \\ N2\pi\,(1\pi) + \pi^0\gamma\,(2\pi^\pm\pi^0) \end{Bmatrix}.$$

---

[2]) $C \cong 0{,}7$ is the known correction to the Castagnoli's formula for γ_c [9].

[3]) In 1965 Japanese and Brazilian Groups detected by emulsion chamber two events with the energy of order $10^2 \ldots 10^3$ TeV which may be interpreted in the same way; in one of the events the excited ultrarelativistic nucleon emited η-meson which then decaid into three neutral pions [15].

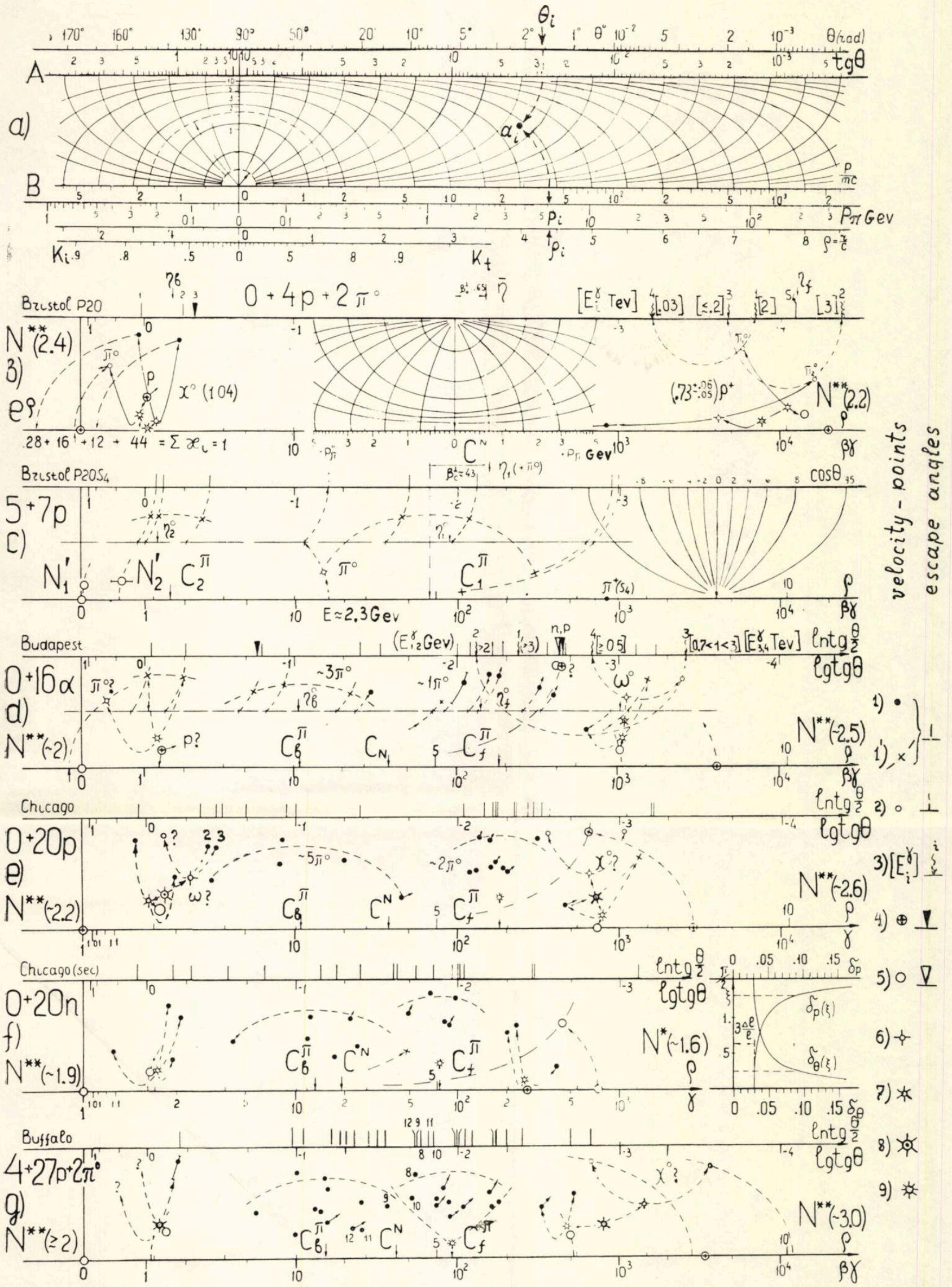


Fig. 1. — Coordinate nets: a) the main net with scales of angle $\theta°$ and $\mathrm{tg}\,\theta$, momenta p_π (GeV/c) for pions and p/mc for any particles with masses $m > 0$, rapidity r (in c-units) — $\varrho = r/c$ and inelasticity coefficient for nucleons $K_{i,t} = \Delta E_{i,t}/E_0$; subsidiary nets — b) $p'' = \mathrm{const.}$, c) $\cos\theta = \mathrm{const.}$, b)...g) Lobachevskys velocity-plots for the analysed jets. Notations of particle and quasiparticle velocity-points and escape angles: *1* — charged pions (*1'* — conditional velocity-point position), *2* — neutral pions, *3* — gamma-quanta (the energy is given in brackets), *4* — protons, *5* — neutrons, *6* — excited mesons of ϱ, χ, ω - type, *7* — weakly and *8* — strongly excited nucleons (isobars), *9* — fire balls; f) (right) — the dependence of the relative accuracy δ_p and δ_θ in graphic calculation of momentum p and angle θ on transverse coordinate ξ of particle velocity-point [1], [2].

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST
KÖNYVTÁRI OSZTÁLY

$M_i^{**} \simeq 2.2$, $M_t^{**} \simeq 2.4$ GeV/c in Bristol and $M_t^{**} \sim M_i^{**} = 2...3$ GeV/c^2 in Buffalo and Chicago events [2]; these levels are higher than those known up to now [12], except 2.2 GeV[4]).

The considered process may explain large energy transfer (30...50%) to single pion and to the soft cascades [2] in high energy jets and air showers, especially in so called „young air showers" [13]. A proof of the existence and cascade decay of such high nucleon excitation levels is of importance for studying nucleon structure.

Received the 26 IX 1966

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, U. S. S. R.

REFERENCES

1. Бубелев Э. Г., Nucleonica, 1964, **IX,** *4—5,* p. 409; Acta Phys. Pol., 1964, **26,** *8,* p. 279.
2. — Изв. АН СССР, 1964, **XVIII,** *11,* стр. 1829, 1835.
3. Котельников А. П., *Принцип относительности и геометрия Лобачевского.* Сб. *In memoriam N. I. Lobacevski,* 2, Казань, 1927, стр. 37—66.
4. Фок В. А., *Теория пространства, времени и тяготения.* ГИТТЛ, М., 1955.
5. Черников Н. А., Научные доклады Высшей Школы, 1958, *2,* стр. 158; Препринт ОИЯИ, Р-723, г. Дубна, 1961 г.; Сб. *Гравитация и теория относительности,* Казань, 1965, *2,* стр. 9.
6. Powell C. F., Fowler P. H., Perkins D. H., *The Study of Elementary Particles by the Photographic Method.* Pergamon Press, 1959, pp. 504, 564.
7. Perkins D. H., *Progress in Elementary Particles. C. R. Physics,* Vol. **V,** Amsterdam, 1960, p. 344.
8. Bozoki G., Domokos G., Fenyves E., Frenkel A., Gombosi E., Bebel D., Lanius K., Meier H. W., Nuovo Cim., 1959, **13,** p. 662.
9. Schein M., Haskin D. M., Lohrmann E., Teucher M. W., Phys. Rev., 1959, **116,** p. 1238.
10. Jain P. L., Nuovo Cim., 1961, **22,** p. 1104.
11. Бубелев Э. Г., Труды Международной конференции по Космическим лучам, т. **I,** Изд. АН СССР, М., 1960, стр. 284.
12. Kycia T. F., Riley K. F., Phys. Rev. Lett., 1963, **10,** p. 266.
13. Babayan Kh., Grigorov N. L., Mamidjanian E. A., Shestoperov V. Ya., Tretyakova Ch. A., Proc. of the Int. Conf. on Cosmic Rays, **5,** Jaipur, 1963, p. 248.
14. Rosenfeld A. H., Barbaro-Galtieri A., Kirz J., Podolski W., Roos M., Willis W. J., Whol C. G., UCRL-8030, Part. I, Aug. 1965; corrected, April 1966.
15. *** Japanese & Brazilian Emulsion Groups, Proc. of the Ninth Int. Conf. on Cosmic Rays 2, London, 1965, p. 835.

---

[4]) *Added in prove.* Till 1966 some new levels up to $M^{**} \approx 2.8$ GeV/c^2 have been found in accelerative energy experiments [14]

ANALIZĂ PRELIMINARĂ A REZULTATELOR RELATIVE LA UNELE JETURI DE ÎNALTĂ ENERGIE CU AJUTORUL DIAGRAMEI VITEZELOR A LUI LOBACEVSKI

(Rezumat)

Se expun rezultatele analizei unor jeturi cunoscute avînd energie de mai mulţi TeV ($=10^3$ GeV), conţinînd puternice cascade electron-fotonice, întreprinse cu ajutorul diagramei relativist-invariante a vitezelor a lui Lobacevski, propusă de autor (diagrama *L*).

Explicaţia figurilor

Reţele de coordonate: a) reţea principală cu scări de unghi θ^0 şi $\operatorname{tg}\theta$, momente p_π (GeV/*c*) pentru pioni şi p/mc pentru orice particulă de masă $m>0$, rapiditate r (în unităţi *c*)—$\varrho = r/c$ şi coeficient de inelasticitate pentru nucleoni $K_{i,t} = \Delta E_{i,t}/E_0$; reţele secundare b) $p'' = \text{const.}$, c) $\cos\theta = \text{const.}$, b)...g) diagrame de viteze ale lui Lobacevski pentru analiza jeturilor.

Notaţii pentru puncte-viteză ale particulei şi cvasiparticulei şi pentru unghiuri de degajare: *1*—pioni cu sarcină (*1'*—poziţie condiţională a punctului-viteză), *2*—pioni neutralţi *3*—gama-cuantă (energia este dată în paranteze), *4*—protoni, *5*—neutroni, *6*—mezoni excita, de tipul ϱ, χ, ω, nucleoni *7*—slab şi *8*—puternic excitaţi (izobari), *9*—baloane de foc; *f*) (dreapta) — dependenţa preciziei relative δ_p şi δ_θ, în calcul grafic, de momentul p şi de unghiul θ al coordonatei transverse ξ a punctului viteză a particulei [1], [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 538.4 ; 533.9

HYDROMAGNETIC FLOW WITH VARIABLE SUCTION IN LAMINAR PERIODIC BOUNDARY LAYERS

BY

I. POP

1. Introduction

The flow with constant suction of a viscous incompressible and electrically conducting fluid past an infinite porous plate in the presence of a uniform transverse magnetic field when the free stream velocity oscillates in magnitude but not in direction, has been di cu sed by U. Suryaprakasarao [1]. The same problem is studied by D. Singh [2] when the free stream velocity is a general time function and recently S. Datta [3] has considered also the slip phenomen.

In this paper, an attempt is made to extend the problem studied in [1] to the case, when the suction velocity is a function periodic of time, that is,

$$v' = v_0' (1 + \varepsilon A e^{i\omega' t'}).$$

We examine the effect of variable suction velocity upon the hydromagnetic flow velocity and upon skin-friction in the boundary layer of an infinite flat plate. It is found that the velocity and the amplitude of the skin-friction fluctuations increases with increasing the suction (with increasing the constant A) while the phase decreased.

In the absence of the magnetic field and a constant suction velocity ($A = 0$) the problem has been studied by M. J. Lighthill [4], J. T. Stuart [5] etc., and recently by S. A. S. Messiha [6] for suction velocity periodic function of time.

2. Basic Equations

Let x' and y' be the coordinates measured along and perpendicular to the plate, u' and v' — components of the velocity, t' — time, B_0' — the external magnetic field, σ' — electrical conductivity of the fluid, ϱ' — density, p' — pressure, ν — the kinematic coefficient of viscosity and $U'(t')$ — the free stream velocity. Dashes denote dimensional quantities.

In the case of the infinite flat plate, the continuity and momentum equations have the form [1]

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} = -\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial y'}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} - \frac{\sigma' B_0'^2}{\varrho'}u'. \tag{3}$$

For simplicity, we assume that all physical properties of the fluid such as viscosity, electrical conductivity and magnetic permeability etc., are constant. Further assumption is also made that the magnetic Prandtl number of the fluid is so small that the induced electric currents do not affect the magnetic field, that is, the applied magnetic field is essentially undisturbed by the flow field. In the equation (3), all the electromagnetic quantities are measured in the electromagnetic system of units.

From the equation (1) it is clear that v' is a function of time only. We consider v' in the form

$$v' = v_0'(1 + \varepsilon A e^{i\omega' t'}), \tag{4}$$

where ω' is the frequency, A is a real positive constant, ε is a small number such that $\varepsilon A \leqslant 1$ and v_0' is a non-zero negative constant mean suction velocity.

From the equation (3), it follows that

$$\frac{dU'}{dt'} = -\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{\sigma' B_0'^2}{\varrho'}U'. \tag{5}$$

Considering the relation (5), equation (3) becomes

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + v'(1+\varepsilon A e^{i\omega' t'})\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{dU'}{dt'} + \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\sigma' B_0'^2}{\varrho'}(U' - u'), \tag{6}$$

with the following boundary conditions

$$\begin{cases} u' = 0 & \text{for } y' = 0, \\ u' \to U'(t') & \text{for } y' \to \infty. \end{cases} \tag{7}$$

We introduce non-dimensional quantities defined in following manner:

$$\begin{cases} y = \dfrac{y'|v_0'|}{\nu}, \quad t = \dfrac{v_0'^2 t'}{4\nu}, \quad \omega = \dfrac{4\nu\omega'}{v_0'^2}, \\ u = \dfrac{u'}{U_0'}, \quad U = \dfrac{U'}{U_0'}, \quad M = \dfrac{4\nu\sigma' B_0'^2}{\varrho' v_0'^2}, \end{cases} \tag{8}$$

where U_0' is a reference velocity.

With (8), equation (6) takes the non-dimensional form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + \varepsilon A e^{i\omega t}) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{M}{4}(U - u) - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{4}\frac{dU}{dt}, \tag{9}$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} u = 0 & \text{for } y = 0, \\ u \to U & \text{for } y \to \infty . \end{cases} \tag{10}$$

3. Method of Solution

For integration of equation (9) with boundary conditions (10) we assume that

$$u = 1 + \varepsilon e^{i\omega t} - f_1(y) - \varepsilon e^{i\omega t} f_2(y), \quad U = 1 + \varepsilon e^{i\omega t}. \tag{11}$$

Substituting relations (11) in equation (9) and comparing harmonic terms, neglecting coefficients of ε^2, we get the following systems for the determination of functions f_1 and f_2:

$$\frac{d^2 f_1}{dy^2} + \frac{df_1}{dy} - \frac{M}{4} f_1 = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{df_2}{dy} - \frac{1}{4}(M + i\omega) f_2 = -A\frac{df_1}{dy}, \tag{12}$$

subjected to the boundary conditions

$$\begin{cases} f_1 = 1, \quad f_2 = 1 & \text{for } y = 0, \\ f_1 \to 0, \quad f_2 \to 0 & \text{for } y \to \infty . \end{cases} \tag{13}$$

The solution systems (12), with the boundary conditions (13), is:

$$f_1(y) = e^{-\alpha y}, \quad f_2(y) = c e^{-\alpha y} + (1 - c) e^{-\beta y}, \tag{10}$$

where

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + M}), \quad \beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + M + i\omega}), \quad c = \frac{4Ai\alpha}{\omega}.$$

Then, the velocity of hydromagnetic flow in the boundary layer and skin-friction are:

$$\begin{cases} u(y, t) = 1 - e^{-\alpha y} + \varepsilon^{i\omega t}[1 - c e^{-\alpha y} - (1 - c) e^{-\beta y}], \\ \tau_0 = \dfrac{\tau_0'}{\varrho' U' |v_0'|} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha_0 + \varepsilon e^{i\omega t}[\alpha c + \beta (1 - c)]. \end{cases} \tag{15}$$

If in (15) real part is separated, we get

$$(16)\quad u(y,t) = 1 - e^{-\alpha y} + \varepsilon(\lambda_1 \cos \omega t - \lambda_2 \sin \omega t), \quad \tau_0 = \alpha + |D| \cos(\omega t + \gamma),$$

where

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 - \left(\cos h_2 y - \dfrac{4A\alpha}{\omega} \sin h_2 y\right) e^{-h_1 y}, \\ \lambda_2 = -\dfrac{4A\alpha}{\omega} e^{-\alpha y} + \left(\dfrac{4A\alpha}{\omega} \cos h_2 y + \sin h_2 y\right) e^{-h_1 y}, \\ h_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\{[1+M)^2 + \omega^2]^{1/2} + (1+M)\}\right)^{1/2}, \\ h_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\{[(1+M)^2 + \omega^2]^{1/2} - (1+M)\}\right)^{1/2}, \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} D = D_1 + iD_2 = \alpha c + \beta(1-c), \ \tan \gamma = \dfrac{D_1}{D_2}, \\ D_1 = h_1 + \dfrac{4A\alpha}{\omega} h_2, \quad D_2 = h_2 + \dfrac{4A\alpha}{\omega}(\alpha - h_1). \end{cases}$$

The variations of amplitude $|D|$ and the phase γ of the skin-friction fluctuations for $M = 3$, $A = 0$, 0.5 and 1 are shown in Table 1.

Table 1

ω	D_1			D_2			$\lvert D\rvert$			γ		
	$A=0$	$A=.5$	$A=1$	$A=0$	$A=5$	$A=1$	$A=0$	$A=.5$	$A=1$	$A=0$	$A=.5$	$A=1$
0	1.500	2.250	3.000	0	0	0	1.500	2.250	3.000	0	0	0
2	1.529	1.895	2.258	.243	.203	.163	1.549	1.906	2.263	.157	.106	.072
4	1.599	1.941	2.283	.455	.381	.306	1.663	1.970	2.303	.277	.195	.133
6	1.684	2.001	2.318	.633	.542	.450	1.799	2.634	2.361	.360	.216	.191
40	2.851	3.110	3.170	2.128	2.027	1.926	3.556	3.629	3.709	.641	.592	.546

From the table we notice that the amplitude of the skin-friction fluctuations is larger in the variable suction case than in the constant suction case ($A = 0$) [1], while the phase is smaller in the variable suction case.

Velocity profile for different values of an parameters A and M are represented in Fig. 1. Figure shows that the velocity in boundary layer increases at the same time with the increasing of suction velocity and that of magnetic field.

If the frequency parameter ω is small, then the relations (18) can be developed in series after the parameter ω. Thus,

$$(19)\quad \begin{cases} D_1 = \alpha\left(1+\dfrac{A}{\sqrt{1+M}}\right)+\dfrac{\omega^2}{16\,(1+M)\sqrt{1+M}}\left(1-\dfrac{2A\alpha}{1+M}\right)+O\,(\omega^4), \\ D_2 = \dfrac{\omega}{4\sqrt{1+M}}\left(1-\dfrac{A\alpha}{1+M}\right)+O\,(\omega^3). \end{cases}$$

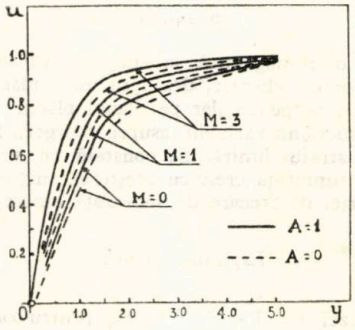


Fig. 1. — Velocity profile $u=1-e^{-\alpha y}-\varepsilon\lambda_2$ for $\omega t=\frac{1}{2}\pi$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ and $\omega=1$.

In this case, velocity and skin-friction in boundary layer are given by:

$$(20)\quad \begin{aligned} u\,(y,t) = {} & 1-e^{-\alpha y}+\varepsilon e^{i\omega t}\left\{1-\left(1-\frac{i\omega y}{4\sqrt{1+M}}\right)e^{-\alpha y}+\right. \\ & \left.+\frac{A\alpha y}{\sqrt{1+M}}\left[1-\frac{i\omega}{8\,(1+M)}\,(2+\sqrt{1+M}\,y)\right]e^{-\alpha y}\right\}+O\,(\omega^2), \end{aligned}$$

$$(21)\quad \tau_0 = \alpha+\varepsilon e^{i\omega t}\left\{\alpha+\frac{i\omega}{4\sqrt{1+M}}+\frac{A\alpha}{\sqrt{1+M}}\left[1-\frac{i\omega}{4\,(1+M)}\right]\right\}+O\,(\omega^2).$$

We notice that in the case of constant suction ($A=0$) relations (20) and (21) correspond with those from [1].

We can obtain the velocity and skin-frictions expression also for high value of frequency ω.

The author wishes to express his gratitude to Dr. U. Suryaprakasarao of the Indian Institute of Technology, Kharagpur, for his helpful advice.

Received the 8 V 1967

University „Babeş-Bolyai", Cluj

REFERENCES

1. Suryaprakasarao U., ZAMM, 1962, **42**, *4/5*, pp. 133–141.
2. Singh D., J. Phys. Soc. Japan, 1963, **18**, *11*, pp. 1676—1685.
3. Datta S., J. Phys. Soc. Japan, 1966, **21**, *4*, pp. 794–799.
4. Lighthill M. J., Proc. Roy. Soc. London, 1954, A, **224**, pp. 1–23.
5. Stuart J. T., Proc. Roy. Soc. London, 1955, A, **231**, pp. 116—130.
6. Messiha S. A. S., Proc. Cambr. Phil. Soc., 1966, **62**, *2*, pp. 329—337.

SCURGEREA HIDROMAGNETICĂ CU SUCȚIUNE VARIABILĂ ÎN STRATUL LIMITĂ PERIODIC

(Rezumat)

Se studiază scurgerea hidromagnetică cu sucțiune variabilă (periodică) a unui fluid vîscos, incompresibil și conductor electric, deasupra unei plăci poroase infinite, în prezența unui cîmp magnetic constant și perpendicular pe planul plăcii.

Se examinează efectul sucțiunii variabile asupra scurgerii hidromagnetice și asupra forței de frecare de suprafață din stratul limită. Se constată că viteza mișcării și amplitudinea oscilației forței de frecare de suprafață cresc cu creșterea sucțiunii (cu creșterea parametrului A), pe cînd faza oscilației forței de frecare de suprafață descrește.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Profilul vitezei $u = 1 - e^{-\alpha y} - \varepsilon\lambda_2$ pentru $\omega t = \frac{1}{2}\pi$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ și $\omega = 1$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 538.082.74.03

ZUR MAGNETISCHEN WIDERSTANDSÄNDERUNG VON Ni-Zn-FERRITEN

VON

V. PETRESCU, N. REZLESCU und E. CUCIUREANU

Die magnetische Widerstandsänderung der Metalle und der ferromagnetischen Legierungen wurde sehr oft untersucht, da die Untersuchungen der magnetischen Widerstandsänderung zur Erklärung des Leitfähigkeitsmechanismus beiträgt.

Für die Ferrite ist aber dieser Vorgang wenig untersucht worden. Messungen der magnetischen Widerstandsänderung wurden für Magnetit [1], [2], die als ein natürliches Ferrit anzusehen ist, durchgeführt, und von den gewöhnlichen Ferriten wurden die Manganferrite [3] ... [5], sowohl in einkristalliner als auch in polikristalliner Form, untersucht. Weniger wurden die Mn–Zn–Ferrite [6] ... [8], und noch weniger die Ni–Zn–Ferrite untersucht [9], [10]. Die von verschiedenen Verfasser erhaltenen Ergebnisse widersprechen sich meistens.

Unsere Untersuchungen betreffs der magnetischen Widerstandsänderung der Ferrite wurden erst an Mn–Zn–Ferriten [7], [8] durchgeführt. Es interessierte uns dabei ihr Verhalten in der Nähe des Curie–Punktes. Wir fanden für diese Ferrite einen ausgeprägten Sprung in der Nähe des Curie–Punktes, ähnlich wie bei den ferromagnetischen Metallen. Dieser Unstetigkeit am Curie–Punkt entspricht ein charakteristischer Knick der $\lg \varrho (1/T)$–Kurve.

Diese Arbeit hat als Ziel die Untersuchung der magnetischen Widerstandsänderung der Ni-Zn-Ferrite in der Nähe des Curie-Punktes und der Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands ϱ. Es wurden zwei Probesorten untersucht: eine mit der Zusammensetzung 15 % NiO, 34,5 % ZnO, 50,5 % Fe_2O_3, mit einem spezifischen Widerstand von der Grössenordnung 10^5 Ω.cm bei der Zimmertemperatur und mit einem Curie-Punkt von ungefähr 70°C, und die andere mit der Zusammensetzung 42 % NiO, 10 % ZnO, 48 % Fe_2O_3, $\varrho \cong 10^8$ Ω. cm und mit dem Curie-Punkt bei ungefähr 550°C. Der relativ niedrige Widerstand der ersten Probesorte erklärt sich durch die Anwesenheit eines Überschusses an zweiwertigen Fe-Ionen über der normalen stoichiometrischen Zusammensetzung.

Bei den Messungen wurde eine Brückenmethode benutzt und die Spannung an der Probe blieb immer konstant, um Ungenauigkeiten zu vermeiden. Die Kontakte an der Probe wurden durch Verdampfung von reinen Kupfer erhalten. Die Messungen wurden zwischen Zimmertemperatur und 750°C durchgeführt. Zur Erwärmung der Proben benutzten wir einen

kleinen elektrischen Ofen, der mit Gleichstrom gespeist war. Die Speisespannung des Ofens war konstant. Die Messungen wurden bei einer Stabilität der Temperatur von $\pm 0{,}1\,^{\circ}C$ am Messpunkt durchgeführt.

Im Abb. 1 sind die Ergebnisse betreffs der Änderung des elektrischen Widerstands im Magnetfeld für drei Proben von der ersten Zusammensetzung bei Zimmertemperatur wiedergegeben. Der Verlauf der drei Kurven sieht wie üblich aus (nämlich eine lineare Abhängigkeit zwischen $\Delta\varrho/\varrho$ und H), genau so wie bei den Mn-Zn-Ferriten. Bei dem Curie-Punkt wurde auch für diese Ferrite die lineare Abhängigkeit zwischen $\Delta\varrho/\varrho$ und $H^{2/3}$ bestätigt (Abb. 2) Im Abb. 2 sind nur die für die Proben *1* und *2* erhaltenen Ergebnisse dargestellt.

Die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands dieser Proben ist gegeben durch

$$\varrho = C \exp(\varepsilon/kT),$$

und es wurden keine Abweichungen von der geradlinigen Abhängigkeit zwischen $\lg \varrho$ und $1/T$ festgestellt (Abb. 3). Im Temperaturintervall zwischen Zimmertemperatur und 100°C, das der Curie-Punkt dieser Ferrite enthält, wurde auch keine Unstetigkeit der Temperaturabhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung festgestellt (Abb. 4 und 5). Die magnetische Widerstandsänderung nimmt gleichmässig mit der Zunahme der Temperatur ab. Im Abb. 4 sind die Messergebnisse für die Probe *1* für drei Werte des Magnetfeldes und im Abb. 5 für die Probe *3* wiedergegeben.

Für die Ferrite zweiter Sorte fanden wir Knicke der $\lg \varrho\,(1/T)$-Kurven, Knicke die dem Curie-Punkt dieser Ferrite entsprechen. Im Abb. 6 sind nur zwei $\lg \varrho\,(1/T)$-Kurven dargestellt, da die Kurven für die anderen Proben dieser Sorte ganz ähnlich aussehen. Auf dem Abb. 6 sind auch die Knicktemperaturen angegeben.

Turov und Irhin [12] haben theoretisch bestimmt, dass sich die Steilheit der Geraden $\lg \varrho\,(1/T)$ beim Durchgang durch den Curie-Punkt ändert, da der spezifische Widerstand unter dem Curie-Punkt kleiner als der im paramagnetischen Bereich extrapolierte ist. Wie aus unseren Ergebnisse ersichtlich ist, stimmen nur die Ferrite zweiter Sorte mit dieser Theorie überein.

Was die magnetische Widerstandsänderung betrifft, zeigen unsere Ergebnisse auch für die Ferrite zweiter Sorte eine gleichmässige Abnahme mit der Temperaturzunahme. Für die Mn-Zn-Ferrite haben wir angenommen [8], dass die beiden Vorgänge dieselbe Ursache haben müssen, da dem Maximum der magnetischen Widerstandsänderung beim Curie-Punkt ein charakteristischer Knick der $\lg \varrho\,(1/T)$-Kurve in demselben Punkt entspricht. Unsere Ergebnisse für die Ni-Zn-Ferrite von der Zweiten Zusammensetzung, die beim Curie-Punkt Knicke der $\lg \varrho\,(1/T)$-Kurven aufweisen, ohne eine entsprechende Anomalie der magnetischen Widerstandsänderung mit der Temperatur zu haben, scheinen die Annahme zu wiedersprechen.

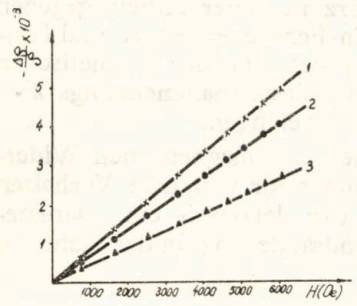


Abb. 1

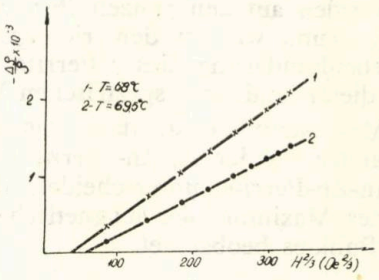


Abb. 2

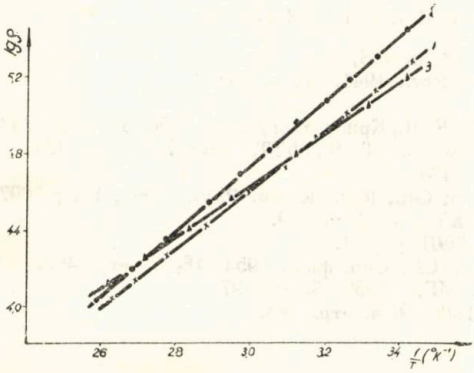


Abb. 3

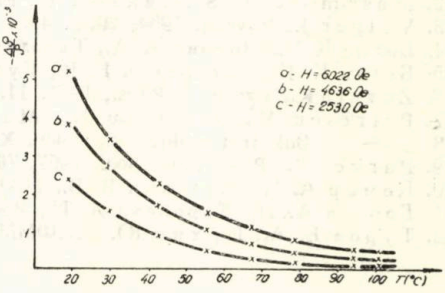


Abb. 4

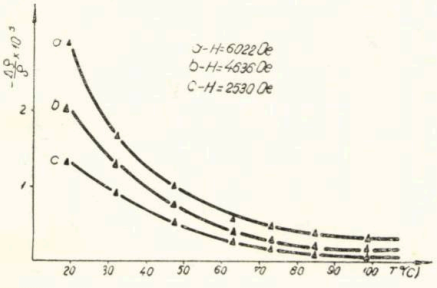


Abb. 5

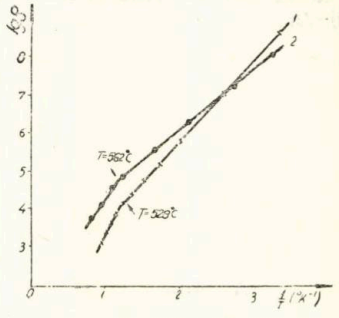


Abb. 6

Unsere Messungen, deren Ergebnisse kurz in dieser Arbeit gegeben sind, werden auf den ganzen Bereich der Ni-Zn-Ferrite erweitert und fortgesetzt, damit wir zu den richtigen Schlüssen betreffs der magnetischen Widerstandsänderung dieser Ferrite und betreffs des Zusammenhangs zwischen dieser und dem spezifischen Widerstand zu gelangen.

Man kann sagen, dass sich das Verhalten der magnetischen Widerstandsänderung der Ni-Zn-Ferrite mit der Temperatur von dem Verhalten der Mn-Zn-Ferrite unterscheidet, da man bei den letzteren ein charakteristisches Maximum der magnetischen Widerstandsänderung in der Nähe des Curie-Punktes beobachtet.

Eingegangen am 12 V 1967

Akademie der Rumänischen Sozialistischen Republik,
Physikalisches Forschungszentrum, Jassy

LITERATURVERZEICHNIS

1. Domenicali C. A., Phys. Rev., 1950, **78**, p. 458,
2. Masumoto H., Shirakawa Y., Phys. Rev., 1941, **60**, p. 835.
3. Volger J., Physica, 1954, **20**, p. 49.
4. Белов К. П., Попова А. А., Талалаева Е. В., Кристаллография, 1958, **3**, *6*, стр. 733.
5. Белов К. П., Талалаева Е. В., Кудрявцева Т. В., ФТТ, 1965, **7**, *4*, стр. **424.**
6. ZávetaK., Czech. J. Phys., 1961, **11**, p. 424.
7. Petrescu V., Rezlescu N., Maxim Gh., Rev. Roum. Phys., 1966, **11**, p. 697.
8. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XI (XV)**, *3—4*, p. 209.
9. Parker R., Proc. Phys. Soc., 1957, **70**, *449B*, p. 531.
10. Комар А. П, Клюшин В. В., ИАН СССР, Сер. физ., 1954, **18**, *3*, стр. 403.
11. Горяга А. Н., Королева Л. И., Вест. МГУ, 1959, *3*, стр. 97.
12. Туров Е. А., Ирхин Ю. П., ФММ, 1960, **9**, *4*, стр. 488.

ASUPRA MAGNETOREZISTENŢEI FERITELOR Ni–Zn

(Rezumat)

Se studiază magnetorezistenţa şi dependenţa ei de temperatură pentru două eşantioane de ferită Ni–Zn.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 3—4, 1967

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 541.25

SPACE CHEMISTRY (II) [1]

BY

W. F. LIBBY

I. Radiation Chemistry

A. CHEMISTRY OF IONS

The ionizing ultraviolet sunlight and the cosmic rays produce ions in matter as well as neutral excited atoms and molecules. (Ions are produced when one or more electrons are removed or added to a neutral atom or molecule).

Atoms and molecules when ionized represent different chemical species with most remarkable reaction properties, most of which have been discovered essentially in the last fifteen years. Although the pioneer, S. C. Lind, in the first decade of this century published several papers on the chemical effects of ionizing radiation, it was not clear from his work what portion of the effects was due to ions and what portion was due to excited states.

a) *General Principles*

One would expect to find some suggestion of the chemical properties of ions in those of the analogous electronic structures in neutral atoms and molecules. For example, knowing that argon with its eighteen electrons is a chemically inactive species, we would immediately predict that chloride ions and potassium ions as well as calcium and scandium ions (Cl^-, K^+, Ca^{++}, Sc^{+++}) all with eighteen electrons also would be chemically inactive, although it is clear that the charges polarize molecules and thereby attract them to contact. However, it seems clear that this *Principle of Analogy* — that electron structures which differ only in nuclear charge will behave similarly — should be sound and should help us clearly through to an

[1]) This is the subsequent part of our paper [1] published in the same *Bulletin.*

understanding of some of the chemical properties of those ions having structures analogous to known atoms and molecules.

Similarly, we would expect that an ion with one electron, i. e., He^+ should be hydrogenic and we should expect if it were possible for He^+ to react without catching electrons because of its high electron affinity that it would form molecules like those found by ordinary hydrogen atoms. A better case is the argon ion, A^+, itself, which by our principles should be like chlorine. Here the electron affinity of 15.8 volts is low enough relative to that of the hydrogen molecule, 15.4 volts. So, we would expect that the chlorine-like properties would show by A^+ attacking H_2 molecules to form HA^+ and release atomic hydrogen as Cl forms HCl and H. HA^+ should be a very stable molecule as long as its positive charge is not neutralized by an electron or some other negative species. In fact, it's quite clear that the extra positive charge on the nucleus of this chlorine-like A^+ ion makes its levels all lie below those of ordinary chlorine atoms and that, therefore, it should have a higher ionization potential and should form stronger chemical bonds. In other words, the dissociation energy of HA^+ should be greater than that of HCl. Lampe *et al.*, have used this reaction to catalyze the production of atomic hydrogen by ionizing radiation. Using argon's large cross section to absorb the gamma rays, they were able to increase the yield of atomic hydrogen by adding argon to a mixture of hydrogen. On neutralization, the HA^+ gives another atomic hydrogen so the net result is that the argon catalyzes the dissociation of the hydrogen molecule into two atomic hydrogens using ionizing radiation by virtue of the chemical reaction of A^+ with the hydrogen molecule.

b) *Aliphatic Hydrocarbon Positive Ions*

Another example is the very famous reaction of CH_4^+ with methane to form CH_5^+ and methyl radical. Tal'roze *et al.*, in 1952, discovered that in mass spectrometers CH_5^+ appeared when methane was introduced and it appeared to be the product of a reaction of second order. Following our *Principle of Analogy* we should say that CH_4^+ has seven valence electrons (neglect the disturbing fact that the four protons are not in the center of the electronic assemblages as they are in the case of fluorine) and merely know that there are seven electrons in CH_4^+ instead of the comfortable eight which methane has. Therefore, there is a considerable tendency for CH_4^+ to capture another electron. This, of course, would make methane and there is a good affinity for this, some 13.7 e. v. However, there is another way in which it can do it and that is to capture an atomic hydrogen. This is the basis of the reaction. It proceeds in analogy to the reaction of atomic fluorine with methane which would form hydrofloric acid (HF) and methyl radical. And so we think of CH_5^+ as being a Bronsted type acid like HF and that the reaction of CH_4^+ with methane to form CH_5^+

and methyl radical is quite analogous to the reaction of atomic fluorine with methane to form HF and methyl radical.

For the acid properties, we can point to the observations of Munsen and Field that CH_5^+ is able in general to abstract hydride from hydrocarbons to make hydrogen molecule, methane and the positive ion of the hydrocarbon with one hydrogen missing

$$(1) \qquad CH_5^+ + C_n H_{2n+2} = H_2 + CH_n + C_n H_{2n+1}^+ .$$

This reaction is very important in that it accomplishes the ionization of even the heaviest hydrocarbons without serious fragmentation. We will discuss later and consider why this is so, but the essential present point is that CH_5^+ is a Bronsted type acid and a very powerful one in that it treats hydrocarbons as bases and abstracts H^- ions from them.

Another ion obtained in major yield in ionizing methane is CH_3^+. In fact in the methane mass spectrum with 70 volt electrons ionizing, CH_3^+ and CH_4^+ are about equally abundant. As will readily be seen, CH_3^+ is a very different species chemically, being similar to boron trifluoride or sulfur trioxide, a type of acid called the Lewis acids characterized by a missing electron pair. Being positively charged, it again is a much more powerful Lewis acid than any neutral species and it, too, is able to treat ordinary molecules as bases with surprising ease. For example, it reacts with methane itself to form hydrogen and $C_2H_5^+$, another Lewis acid

$$(2) \qquad CH_3^+ + CH_4 = H_2 + C_2H_5^+ .$$

This type of reaction might be expected to continue to add CH_4 but it has been observed to stop in the gas, mainly by Munsen and Field, at C_2H_5. However, evidence for the solid favors it going on to form heavy polymers of the order of $C_{30}H_{60}$ although this is not certain. The two ions $C_2H_5^+$ and CH_5^+ are the main products of the initial reactions. CH_5^+ is chemically inert except for its behavior as a Bronsted acid and $C_2H_5^+$

$$(3) \qquad C_2H_5^+ + C_n H_{2n+2} = C_2H_4 + H_2 + C_n H_{2n+1}^+ .$$

Both ions react to form the positive ions of any heavy hydrocarbons which are present in small abundance in methane. In pure methane, which is not a strong enough base to react with either of these acids, the reaction stops and the result is simply the production of CH_5^+ and $C_2H_5^+$.

Thus we conclude that the *Principle of Analogy* works pretty well at ileast with the aliphatic hydrocarbon positive ions. These have been studied ntensively and it appears that considerable light can be shed on their behavior by this type of reasoning.

c) *Aromatic Hydrocarbon Positive Ions*

Aromatic systems differ from aliphatic systems in that their ions probably are of the π electron type, i. e. the electron which is most easily removed in aromatic systems frequently and usually is a π electron which belongs essentially to the whole molecule. This means that the charge or the electron deficiency is distributed over the entire system. As a consequence there is a very different chemical effect. Whereas we can speak of acids and free radicals in the case of the aliphatic ions, it is very difficult to speak by the *Principle of analogy* of the properties of aromatic ions. However, as we gain more experimental evidence on their behavior there will no doubt be a systematic pattern which can be used. In general, it would seem from what we know now the aromatic ion is much less active than the aliphatics. This, in general, is borne out by the relative radiation stability of benzene and the polybenzene aromatics. One type of atomic power reactor uses terphenyl (three benzene rings together) as the working fluid.

d) *Negative Ions*

Negative ions in general have more widely spaced levels and therefore form weaker bonds than neutral molecules, just as positive ions form stronger bonds negative ions are likely to form weaker bonds. It appears therefore that our *Principle of Analogy* can be expected to work for negative ions. For example, hydride ion should be chemically inactive being an analogic helium atom and chloride ion as we have said previously should be like argon and be chemically inactive.

Free radicals in general will have an electron affinity and form negative ions. Methyl radical will take an electron to form CH_3^- and other free radicals similarly will form negative ions. The negative ions so formed can play important chemical roles although in general they are chemically inert. Their main role is expected to be in the neutralization reaction for every positive ion must be neutralized eventually.

e) *Electronic Franck-Condon Principle*

An important point in connection with the formation reactions for ions is the *Electronic Franck-Condon Principle*. This principle is that electrons are removed or assimilated rapidly, if at all. Therefore, ions produced by electron removal, which is the normal process for ionizing radiation, are formed initially in essentially the same geometrical position, shape as the neutral molecules, and possess the same internal momenta initially. This means that electronic ionization processes, processes which remove electrons by electron collisions, or photon ionization process, may cause ions to be formed in highly excited vibrational states depending on the nature of the ground state of the ion. For instance, with methane there

will be an ion formed in the geometry of CH_4. The geometry of CH_4^+ is not well known, but it would seem to be clear that it will be different from the tetrahedral geometry of CH_4. Certain indications from quantum mechanical calculations are that the CH_4^+ ion in the ground state is far from being tetrahedral. This is the kind of distortion or vibrational excitation which results from rapid ionizations either by electrons or by photons. „Vertical processes" they are called in analogy to the classical *Franck-Condon Principle* for the interaction of photons with molecules. We must expect therefore that ions formed in this condition may occasionally destroy themselves. In fact, in the case of methane as mentioned above, about half of the atoms formed are CH_3^+ corresponding to the elimination of an atomic hydrogen. Now of course, it is true that the appearance potential of CH_3^+ will be above the appearance potential of CH_4^+ because only those CH_4^+ ions which are sufficiently excited to eliminate an atomic hydrogen and form CH_3^+ can do so. And so the yield of CH_4^+ ions at the onset of CH_4^+ is less than the total ion yield at the onset of CH_3^+ because more molecules can be ionized by the electrons at the energy. Similarly, at higher electron bombarding energies the methane will eventually form CH_2^+ and C^+H and C^+. This in major part probably is due to the electronic *Franck-Condon Principle.* Of course, it is possible to produce the CH_4^+ ion in a state excited electronically as well as vibrationally, but it seems very likely that a great deal of the destruction of the parent ions which occur in polyatomic systems is due to the vibrational excitation caused by the great speed of the ionization act itself as induced by fast electrons or photons, the electronic *Franck-Condon Principle.*

This raises the question is it not possible to ionize in a slow manner? The answer is yes, as Munsen and Field have shown by taking the Lewis acid $C_2H_5^+$ or the Bronsted acid CH_5^+, it is possible to remove a hydride ion from nearly all aliphatic hydrocarbons with a minimum of destruction. Now we must analyze why this is so and in so doing come to understand the destructive nature of the electronic *Franck-Condon Principle* in the ionization act.

f) *Destructive and Non-Destructive Ionization and Neutralization*

The electronic *Franck-Condon Principle* appears to be very general in its applicability to all ionization processes and neutralization processes. The fragmentation theories of excited ions appear to comport very well with this broad guide.

Thus we expect that: a) neutralization by electrons will be destructive and b) neutralization by anions will be less so.

In the case of a neutral molecule in its ground electronic state, which suddenly is ionized by a fast electron or a photon, an ion is formed vibrationally excited. If on the other hand, the ion is formed by a chem-

ical reaction and thus has an opportunity to relax vibrationally to its ground vibrational state, destruction is far less serious. Similarly, with neutralization, sudden neutralization by electron acquisition may form the neutral molecule in a highly vibrational excited condition which is likely to cause dissociation of the product. Free electrons move so rapidly that dissociation is very likely to be the result of electronic neutralization.

With anions, however, the process will be much slower and time will be allowed for vibrational relaxation to occur and the energy of neutralization to be parcelled out among several degrees of freedom and thus in many cases to form the product in undissociated form.

In most systems subjected to ionizing radiation anions can form (air impurity is particularly effective in this regard since oxygen rapidly captures free electrons) and thus provide the means of neutralization by anions. In the case of aliphatic hydrocarbons, for example, the free radicals formed naturally by dissociation following on rapid electronic ionization or some of the subsequent ionic chemical reactions can capture electrons. CH_3^- is well known to be present in the mass spectrum.

g) *Possible Growth Reactions by Non-Destructive Ionization and Neutralization Combined*

It is well known that ionizing radiations make heavy hydrocarbons out of methane, and for many reasons it is thought that they form in many part by ionic reactions. Ordinary neutral species excited certainly play a role but the main source seems to be ionic.

Among these are the aromatic ions such as $C_6H_6^+$ as mentioned above which have lost one of the π electrons shared by the whole molecule. Others are such highly stripped species as C^+H_2, C^+H, and even C^+. Little is known of the chemical properties of CH, C, and atomic B, the neutral analogies. For these systems we need to take a more strictly pragmatic approach.

h) *Electron Transfer*

It is well known that electron transfer reactions are very rapid providing the *Franck-Condon Principle* does not block them. The electron transfer cross-sections for gaseous species are known to be of the order of the gas kinetic cross-sections for the neutral molecules or sometimes even larger. In the case of aqueous systems solvent polarization around the ions brings in the electronic *Franck-Condon Principle* in a serious way, so that electron transfer is blocked in media such as water which is highly polarized. The electron is unable to move because both the donor and receptor cites are improperly polarized for the charge distribution after transfers. In less polarizable media the blockage is less serious. So in many systems and particularly in all gaseous systems, and systems of low dielec-

tric constant, the transfer of electrons from one species to another is a very probable process. This brings in our next principle of *Chemistry of Gasous Ions,* i. e. the species of lowest ionization potential will be formed. In other words, if one ionizes a mixture of methane and ethane, the methane ions will be neutralized by electron transfer from the ethane, since the ionization potential, 14.1 e. v. versus 12.7 e. v., the charge will be transferred to the methane, and methane will be preferentially ionized. In this manner, it has been possible to concentrate the radiation energy on minor species. This is a very important principle in that it allows an enormous selectivity to occur. We pointed out previously how the ionization of argon could lead to the dissociation of molecular hydrogen through ionic reactions. Similarly, it is true that the ionization of xenon in a mixture of methane and xenon would lead to preferential ionization of the methane. For example, on Jupiter, which is thought to be largely hydrogen and helium with small amounts of methane and other gases, it is very likely that a large part of the ionizing radiation is effective in ionizing methane and the other minor constituents of lower ionization potential with the result that ionic chemistry would be very effective in the Jovian atmosphere. It seems likely, therefore, that a very large population of free radicals and complicated organic molecules exists in the atmosphere of that planet for this reason. The strong colors which are seem to indicate that this is true.

The general principle of electron transfer under conditions of the electronic *Franck-Condon Principle* blockage is an important one in the chemistry of ions. There is no doubt that the phenomenon occurs. The question is how important it may be in a given situation. A solution of normal hexane dissolved in liquid xenon irradiated with 60 gamma rays, was found to yield radiation products in the most dilute solution of some 4% hexane in xenon at just as high a rate as if pure hexane had been used. In other words, electron transfer to the Xe^+ ions was effective in ionizing hexane in this system. In fact, a higher yield was found in the solutions because the stopping power of the xenon for the cobalt 60 gamma rays was larger than for *n*-hexane. It was interesting that the distribution of the products was not greatly different indicating that the degree of excitation that the hexane ion received was similar to that from past electron ionization.

It should be pointed out that the electron transfer is to be thought of as being a fast process in the sense of our previous discussion. The electron jumps instantaneously into the system. Of course, it may be that tunneling through potential barriers may be involved and this might cause the process to wait for vibrational relaxation to occur before tunneling happens. But in general it would seem lickely that the process would be fast and we may expect therefore, that fragmentation effects in our sense would hold for ionization as well as for fast electron and photon ionization

i) *Heavy Ion Transfer*

Perhaps the most important of the charged ion transfers is hydride ion, though proton transfer also could be, but hydride ion transfer is to be thought of as a process occurring relatively slowly in contrast to electron transfer, thus hydride ion transfer from heavy hydrocarbons to the Lewis and Bronsted acids, $C_2H_5^+$, and CH_5^+ gives the new Munson and Field technique for general formation of the positive ions of heavy hydrocarbons without their disruption fragmentation and it seems possible that the growth of polymers occurs in part by similar mechanism. Hydride ion transfer is probably a particularly effective method of charge transfer being non-destructive due to its allowing vibrational relaxation.

j) *The Cross Linkage of Hydrocarbon Polymers*

In the solid it is known that polymers such as polyethylene cross link when subjected to ionizing radiation. It is our suggestion that this reaction is ionic in nature and that the energy of excitation that is left as a result of ionization can be used to drive the reaction in which two polymer chains, lying neighbors, split out H_2 and form a cross-linking ion which is then neutralized anionically or non-destructively, probably anionically, possibly with H-ions. The very general nature of the cross linkage reaction induced by ionizing radiation leads us to suggest this is so. The fact that it occurs in the crystalline solid indicates that other mechanisms are not too likely, and studies on crystalline *n*-hexane have indicated in some detail that this could be the mechanisms.

k) *Application to Radiobiology*

It is very likely that as we become more and more and more acquainted with the chemical properties of ions, we will be able to understand better and better the implications of their formation in biological tissue. Their great reactivity and their extraordinary properties indicate that it is in this area that many of the explanations of the miraculous phenomena observed may lie. Perhaps in the not too distant future as we come to understand more and more thoroughly the general properties of ions especially such highly stripped ions as CH_2^+, we shall be able to see how remarkably effective ionization is as a chemical agent.

l) *Application of Chemical Industry*

It is likely that if we understand the chemical properties of ions, we may be able to put the enormous amount of atomic radiation now going to waste to work as a chemical reagent. We have already seen that in food sterilization and in the cross linkage of polymers for the production of desirable products such as Nova Wood from irradiated soft wood soaked

in plastic monomer before irradiation the results are most promising. It seems very likely that once an understanding of the basic processes has been obtained we will be able to use atomic radiation as a chemical reagent and possibly to make atomic power plants into chemical factories or possibly rather to be led to build atomic plants to be used as chemical factories, possibly in conjunction with the generation of electric power and the distillation of sea water.

1) *Application to Cosmology*

It is very clear that in the beginning of the solar system all gases were of a reducing nature. Thus methane was present rather than CO_2, water rather than oxygen, and ammonia rather than nitrogen. Under these conditions the famous Miller-Urey reactions will occur in the presence of ionizing radiations, i. e. the production of forming amino acids and other large molecules, the building blocks of living matter. It is very likely that ion chemistry is responsible for a significant part of the complicated organic compounds found in primeval meteorites and which possibly served as food for living systems in the beginning. So we anticipate that when we get to the moon, unless the moon has been reworked by volcanic action, that we will find organic matter. It is our hope and intent to try to use this primeval organic matter to help sustain the moon base both as a source of food and of oxygen and water by combustion.

B. CHEMISTRY OF EXCITED NEUTRAL SPECIES

This vast subject, normally called photochemistry, is beyond the scope of the present article. There are several excellent texts and reviews. In general, excited states and intermediate fragments such as radicals have chemical properties which have nearly defied generalization to date.

II. High Temperature Chemistry

The chemistry of high temperatures is largely a question of laboratory technique. It is obviously of very great importance and potential, but the eternal question is the technique for obtaining and controlling the extreme temperatures necessary. One very satisfactory technique is the plasma torch. It consists in principle of a radio frequency power source powering a metal coil (water cooled) through which the gas is circulated. It is ignited by the insertion of a metal wire which is heated by the absorption of the radio frequency. When the gas is hot enough to itself become ionized and therefore electrically conducting it then can pick up the radio frequency and so the flame is ionized. Flames can be made in this way in any gas. The temperatures attained are in the tens of thousands to one hundred thousand degrees absolute range. Of course at these temperatures all molecules are

atomized and as the matter leaves the flame it reforms into new molecules which may be useful and interesting. Reactions are doubly complicated because ions exist in the flame as well as high temperature atoms and the separation of the effects due to ionic chemistry from those due to high temperature is somewhat difficult. The plasma torch gives a very hot flame

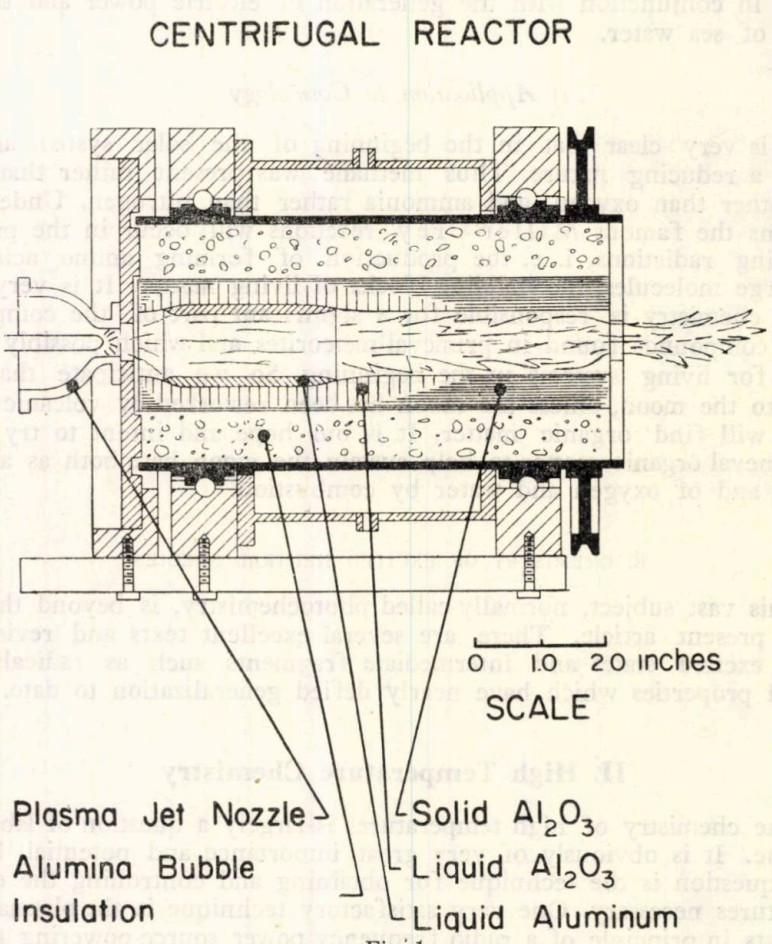


Fig. 1

for general use in the laboratory. It can be used to vaporize all known oxides. In this way sapphires can be grown by dropping aluminum oxide powder through the plasma plane onto a seed crystal of sapphire below the flame. The tip of the sapphire is kept at exactly the right position relative to the flame all during the growing process. A slow rate of withdrawal is used to keep the crystal growing.

For the study of solids and liquids at high temperatures, a technique using molten aluminum oxide resting on solid aluminum oxide in a rotating cylinder, has been developed by Dr. A. V. Grosse of Temple University. Figure 1 shows such an apparatus. The liquid aluminum oxide in constrained by the centrifugal force to walls of the cavity and the material being studied can be supported on the liquid, if compatible chemically.

III. Vacuum Chemistry

The chemistry of high vacuum is essentially the chemistry of uncontaminated surfaces. This is a very promising area; we have never on earth been able to work with clean surfaces because the air contaminates them. It seems very likely that in a space ship it would be possible to distill metals and other substances without introducing oxide contamination into the product. It is very likely that such oxide-free materials would have very different physical properties. Many crystals probably could be grown under such conditions, so a budding field of chemistry may exist in this application of the inexhaustible vacuum of Space to the preparation of pure materials in bulk free of oxide and nitrides and other constituents of the atmosphere. It is almost impossible to produce, in the laboratory on earth, vacuum pump of sufficient capacity to rival that available on a space ship in orbit. So we see there may be possibilities of using spaceships as chemical laboratories for the production of materials such as diamond by the evaporation of carbon. At present the technique of testing the possibility of making diamonds from carbon vapor is well under way. It is an old problem, and it seems likely that the atmosphere contamination of their surfaces have been responsible for past failures and that the use of modern high vacuum of the levels of those available in outer space may help solve the most difficult problem and lead to success. In any case, the possibilities of using the high vacuum as a chemical aid appear to be large.

Received the 28 XII 1966

University of California,
Los Angeles, USA

LITERATURE

1. Libby W. F., *Space Chemistry* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVIII)**, *1—2*, pp. 171—178.

CHIMIE SPAŢIALĂ (II)

(Rezumat)

Autorul, abordînd o ramură nouă a chimiei — Chimia spaţială — expune în continuare (v. [1]) diverse probleme referitoare la Chimia radiaţiei, Chimia temperaturilor înalte şi Chimia vidului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 549.6

ON THE START AND GLIMPSES OF DEVELOPMENT OF THE CHEMISTRY OF SOLIDS (II)[1]

BY

ARVID HEDVALL

1. Guest Particles Mineralography

The influence of guest particles is an important factor. I think that the first publications concerning these problems were probably our descriptions of the experiments with mixtures of barium oxide and lead chloride ($BaO + PbCl_2 = BaC_2 + PbO$). In one experimental series the latter compound was chemically pure and in another contained 0.1 % barium chloride in solid solution. The solid solution reacted much better than the pure lead chloride.

In another series f. inst. we found that calcium carbonate reacts with silica forming silicates at lower temperature, if there are foreign particles present as a solid solution in the silica lattice. In this and many other cases the guest particles have caused a disturbance of the lattice and enhanced the reactivity, but this phenomenom may naturally vary from one system to another.

Here is a largely untouched field which is now the object of growing interest, and the results already reached would involve many changes and great advantages in industrial production, not least in view of the numerous new materials that are coming into use. It should be emphasized that it is high time that we get a *mineralography on the same footing as the old-established metallography* [2].

The explanation of the colour of minerals, gems or ceramic decor is frequently incomplete or incorrect in both older and newer literature. The blue or green colour is often explained — in many cases quite correctly, of course — as f. inst. due to the presence of copper compounds, bivalent iron or chromium oxide, respectively. Another example is the red colour of the

[1]) In what follows we continue the exposition started in the same *Bulletin* [1].

ruby which is due to a couple of percent of chromium oxide dissolved in the aluminium oxide lattice. If both oxides were perfectly isomorphous, the solution „ruby" would be green. Within a certain concentration of chromium oxide it causes a disturbance of the aluminium oxide lattice. This is of current interest for the construction of lasers.

A recent investigation by van Wieringen and his collaborators [3] may among others be mentioned. They have demonstrated magnetic resonance from centres of imperfection in the quartz lattice that had been caused by penetration of the quartz by particles of sodium, aluminium and germanium. The concentrations varied between 10^{-3} and 10^{-4} molar percent. Subsequent to irradiation with X-ray there also occurred absorption of ordinary wavelengths.

2. Activity of different Surfaces

It has been known for a long time that the different surfaces of one and the same crystal can show differences as regards the velocity of growth, the transport of material at contact interfaces and in several investigated cases also the dissolving speed and the behaviour at chemical attacks.

It was near at hand to investigate whether different surfaces of e. g. a calcium carbonate crystal showed differences as regards liberation of carbon dioxid. Heating crystals that had been ground to the various shapes, basis, prisma, rhombohedron, with one of the surfaces specially pronounced, showed marked differences in gas liberation from about 600 ... 750°C. The carbon dioxide is liberated fastest from the basis and slowest from the rhombohedral surface. The values for the prisma surface fall between these extremes. The differences gradually decrease on account of increased diffusion or velocities adjusted to it, when the temperature approaches that of thermal dissociation, i.e. about 900°C, or the time of heating is prolonged [4].

Whether it is a contact with solid, liquid or gaseous phases, the reaction at different surfaces may involve changes in the size and type of the surface itself, the crystal growth, the catalytic activity, the electron exchange, etc. This has been intensively studied, f. inst. by among others (Stranski [5], Schwab [6] and Wolkenstein [7]). There is a very rich literature on the importance of choosing correct surfaces for the supporter compound at catalytic processes. Adadurow [8] and his collaborators, Thiessen [9] and, with a slightly different approach, Frondel [10], did early work on this subject, such experiments are followed by a great number of new investigations.

The influence of the raw material on the exterior shape of the product was the subject of topochemical studies by Kohlschütter [11], a subject that has attracted too little attention in view also of its manifold technical applications. A scaly shape of the pigment was preferred in the

painting techniques, f. inst., as it gave a better finish. Nowadays, uniform grains are required, that are adjusted to the light wawe-lengths that the paint will be exposed to.

3. Dissolved not chemically reacting Gases

At our first investigations we were confronted by the influence of furnace atmospheres at the manufacture of various ceramic products and of glass. At the glass works there was always a carefully adjusted content of sulphur dioxide in the air of the lehr. Otherwise the glass surface became neither shiny nor durable. But nothing indicated that the alkali in the glass was attacked by either sulphur dioxide or sulphur trioxide. The whole business appeared a little mysterious, but old-established experience supported the custom and there was probably something in it.

Glass however is too complicated a substance to permit finding out what really happens. The possibility of chemical reactions could not be wholly excluded even if they did not appear important. As it had been demonstrated before that neutral gases had topochemical effects on the heated substance, e.g. influenced the exterior crystal shape, a series of experiments were started where no overlaping effects could cloud the conclusions. The results opened a rich field of work being extremely valuable also as regards industrial processes. Funny enough they have still not attracted the attention they deserve. It is of course also necessary to take them into consideration at real diffusion determinations. In the first place it is necessary to study the influence on the migration of particles along surfaces. It is not uncommon that published results regarding reaction kinetics show that this factor has not been sufficiently considered.

The first experiments (1940) were made with mixtures of various quartz modifications and calcium oxide and the heating was done at the various experiments in air, in sulphur dioxide and in sulphur dioxide plus oxygen for 30 minutes at temperatures between 900 and 1000°C. The silica preparations had been pretreated in the various gases for two hours at 600° and at 900°C. The grain size was, as far as possible, the same in all the experiments. The quantities of silicates formed were measured by determining the amount of calcium oxide that had not reacted.

All the silica modifications, as well as amorphous silica, showed considerably enhanced reactivity with calcium oxide after pretreatment in oxygen or sulphur dioxide i.e. the yield of silicate per unit of time was greater than at pretreatment in air. Pretreatment in sulphur dioxide *plus* oxygen gave the opposite result. These modification showed *decreased* reactivity. Possibly some connection exists with the above-mentioned cooling of glass in the lehr, in air with sulphur dioxide addition, i.e. the glass or the silica becomes more resistant to attacks through this treatment [12, p. 42].

Further experiments were made later in order to investigate at which temperature the influence of gas pretreament in the given conditions star-

ted and attained its maximum at the heating of the $CaO\text{-}SiO_2$ powder. It was possible to discern a considerable increase of the activity already at pretreatment at 400°C. The maximum was reached at about 1 000°C; then there was a rapid decline of the difference between preparations pretreated in gas and those heated in air. Similar conditions could be observed in mixtures of CaO and Al_2O_3.

It is self-evident that these results are of principal importance for all industrial processes where heating of solids occur, whether it is a question of silicate chemistry, metallurgy or catalysis.

Another series of investigations were made on firing clays to bricks and the influence on colour, shape, size and the distribution of pores and consequently the resistance to frost.

Evidently the mechanism of the effect of inert gases (and sometimes also chemically active gases) constitutes a complicated problem, from both the qualitative and the quantitative point of view, which is still far from sufficiently investigated. It is unavoidable to assume some kind of dissolving process and it is here a question of effects which influence all kinds of surface activity : reactivity, adsorption, catalysis, corrosion and passivation. At our Institute Sandford and Liljegren have studied the pigments in bricks. They have demonstrated that the ferric oxide retains its red colour at considerably higher temperatures than usual, if it is heated in oxygen at 100 atmospheres. It is a peculiar fact that it then looses its ability rapidly to react with calcium oxide which it possesses in other conditions. However the pigment ist not pure Fe_2O_3.

A number of experiments were made in order wholly to eliminate the influence of possible recrystallization effects. Among them were the determination of the capillary conditions in tubes of Supremax glass which had been pretreated in various ways, *viz.* in vacuum or by heating in oxygen and in sulphur dioxide. There were considerable differences as to the wetting (the capillary constant) in all cases. As expected, the influence showed a relative maximum in the transition interval of the glass. These researches have e. g. drawn attention to the possibility of improving the surfaces of medical porcelain and glass, decreasing the danger of creaks and absortion of unsuitable or toxic substances. Such attacks which we use to call corrosion are closely connected with the properties of the surface. Only a few words and view points should be mentioned here. It shall be emphazised that too little attention has been drawn to corrosion of non metallic materials which is very deplorable because of the great importance for building materials [2].

A wholly new type of corrosion, about whose nature very little is known takes place in reactor material at the bombardment by nuclear particles. Now in print are our results confirming that the corrosion of electric wires is different in comparison with the same wires without electrical current.

4. Corrosion. Different Kinds

An example of corrosion is taken from a large glass factory. The walls of the tank furnace are usually seriously damaged at the threephase conjuction; tank lining material, melt and glass; particularly because the less viscous melt flows at the surface.

A factor, which is often overlooked, is the mechanical destruction which may occur when the object is subjected to vibrations of a frequency that makes a transformation to an energetically more stable state possible. Such processes are commonly facilitated by a combination of various corrosion factors and variations of the temperature and the humidity. Powder and bronze „pest" and the so-called „glass disease" are well-known examples of this phenomenon. The sensitivity to vibrations of such extremely heterogenous products as concrete and light concrete is less commonly appreciated [12, p. 8].

It is also necessary to remember the rather complicated effects which are due to deviations from normal lattice structures. In fact, it is not out of place, once more to insist on the necessity of a separate mineralography on equal footing with the metallography [2].

5. Irradiation Effects

Our early experiments about the influence of absorbable irradiation on the surface activity have to be mentioned. Continued research work at our Institute yielded results that implied a *general extension of the chemical concept photo-chemistry*, which previously had mainly been confined to the photohalides. Our experiments showed that for every substance we have to count on a considerable difference between its behaviour in light and in darkness; the differences are often so big that they roughly can be measured by rather simple methods. Maximum effects are obtained on comparing the measurement on irradiation with the complementary colour and the totally reflected irradiation by wavelengths corresponding to the colour of the substance. In the latter case the results are the same as in darkness.

At experiments with substances of differing colours differences could be observed even in the dissolving rate in darkness and in light and the values obtained in darkness agreed with the values obtained at irradiation with wavelengths that were totally reflected.

Some of the first investigations referred to the adsorption capacity of various phosphores of the dyes „lanasol green" and „thiazin red" in darkness and in light. As adsorbing substances we used zinc sulphide activated by small quantities of silver, copper or manganese.

The effect varies both quantitatively and qualitatively with the selection of the substance, just as could be expected, and also with any stoichiometric deviations from the normal formula. Experiments were carried out e.g. with some sulphides [13, s. References, S. 208].

When once photo-effects had been demonstrated, it was only natural that, among the numerous investigations of factors influencing the physico-chemical activity of a solid, the long-known changes of metallic selenium on irradiation should be studied with the purpose of establishing whether this phenomenon affected its behaviour towards chemical reagents. The experiments clearly indicated that the dissolved quantity increases on irradiation and that it probably reaches the maximal amount at certain wave lengths [13, s. References, S. 205]. These result may have an interest for the methods used e.g. at the photographing of the moon surface where selenium sheets are used.

6. Catalytical Questions

The interaction between disturbances of the normal lattice structure in the interior of crystals or at surfaces on the one hand and reactivity, adsorption, corrosion, passivation, electrical conductivity, photo-sensitivity, electron exchange at interfaces and catalysis is to-day one of the most current investigations. Only some instances shall be mentioned.

In several cases it is still not quite clear if it is the substance of the original catalyst, the surface films formed during the process or the concurrent disturbances of the surface structure that form the most active centres at the further course of the catalytic process. At older work by Verwey and de Boer [14] about oxide films on metals and metallloide acting as catalysts should in this connection f. inst. be mentioned, as well as a recent paper by Garcia de la Banda [15] on catalysis by oxides or oxidic films and another by Boonsra, Ruler and Sparnay [16] about the effects of surface oxidation of crystallographically oriented germanium mono-crystals.

The effect of crystallographic transformations and the active phases then formed are also of interest. We have at our Institute shown influence of the various modifications of titanium oxide and the transformation rutile anatase on the drying process of linseed oil.

Among other problems within the field of industrial applications, a better control of different types of high-refractories is necessary in order to avoid any type of brick facilitating Baudouin's reaction ($2CO = CO_2 + C$) in regenerating furnaces, and so preventing any clogging of conduits by precipitated carbon.

It is reasonable to expect that irradiation with wave-lengths that are absorbed in the surface layers can influence catalytic effects. Already some 25 years ago a number of experiments of this type have been performed in collaboration with G. Cohn [17] and a radiation effect could be determined.

The concepts supporter and epitaxis must naturally be mentioned on discussing catalysis. Epitaxis could perhaps be termed structural resonance between different phases or surfaces implying that the adsorption or crystallization of one phase on the other one depends on an orientation specific to the surface. Not only normal lattice structures but defects of one type or another as well as electron exchange naturally play an important role. In connection with epitaxi effects I want to draw the attention to the comparatively new field of biocrystallography, which has evident points of common interest with some things discussed here [18].

It is not known to me whether the first formation of the molten phase at the contact between different solids at the eutecticum temperatures has been studied from the point of view of epitaxis. Investigations of these matters in various combinations by means of a micro probe analyzer might yield interesting results (not published).

7. Changes in the Magnetic and Electric State

Among factors that might possibly influence the activity of solids we also studied the changes in the magnetic and electric state. The following brief survey only intends to give the results of some early experiments. For a more profound study of what really takes place at such changes it is necessary to turn to the solid state physics research.

At our first experiments some 30 years ago we investigated whether it was possible to observe an abrupt change in catalytic activity at the change from the ferromagnetic to the paramagnetic state. Nickel and a large number of ferromagnetic compounds or alloys were used as catalysts. The result was a complete coincidence between the Curie temperature and the abrupt increase of reaction yields. We termed it the „magneto-catalytic" effect which implied a considerable extension of the concept *magneto-chemistry*. The qualitative establishment was naturally followed by Cohn's studies of the kinetics. Forestier and his collaborators confirmed the effect soon afterwards [12, s. References, p. 78].

The attempts to explain the effect caused a lively discussion. It seems justified to relate the magneto-catalytic effect to the changed electron conditions at the Curie temperature, as the surface activity naturally depends on the energetic state of the lattice. These changes could possible take the form of alterations of the surface block structure and the effect would then be an indirect one. This supposition seems to be negatived, however, by the fact in all investigated catalytic reactions, with changes of both the catalyst and the substrate, the actual type of change has remained the same. Yamaguchi [19] has recently treated the problem from a theoretical aspect, investigating it both as regards catalytic effect and corrosion.

The demonstration of a physico-chemical influence also from the magnetic and electric states meant the conclusion of the rough survey of „the Chemical Thibet". The cadastral survey, the quantitative studies,

commenced then, started also at our Institute some twenty five years ago. I am not mentioning in details the innumerable instances also of the application of the results in almost all sorts of industries. They are selfevident and our cooperation has been and still is current.

Received the 11 XII 1966

Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden

REFERENCES

1. Hedvall J. A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII** (**XVII**), *1 — 2*, p. 179.
2. — Chalmers Univ. Acta, 1965, *306*.
3. van Wieringen I. S., Proceed. XIth Coll. Ampère, Eindhoven, 1962, p. 403.
4. Hedvall J. A., Hedin R., *Reaktionsfähigkeit fester Stoffe*. Ambr. Barth, 1938, S. 144.
5. Stranski I. N., Ann. Phys. (6), 1947, **1**, S. 181.
6. Schwab G. M., Ztschr. Anorg. Allgem. Ch., 1959, **301**, S. 1.
7. Wolkenstein T., *Elektrontheorie der Katalyse an Halbleitern*. Verlag Wissenschaften, 1964.
8. Adadurow I. E., Russ. J. Phys. Chem., 1936, **8**, p. 147.
9. Thiessen P., Ztschr. Anorg. Allgem. Ch., 1937, **233**, S. 75.
10. Frondel C., Am. Museum Novitates, 1937, p. 918.
11. Kohlschütter U., Kolloid Ztschr., 1927, **42**, S. 254.
12. Hedvall J. A., *Solid State Chemistry*. Elsevier, 1966.
13. — *Einführung in die Festkörperchemie*. Vieweg, 1952.
14. Vervey E. J. W., De Boer, Rec. Trav. Chim., 1936, **55**, p. 675.
15. Garcia de la Banda J. F., Proceed. 25th Jub. Consejo Sup., Madrid, 1964.
16. Boonstra A. H., van Ruler J., Sparnaay M. J., Koninkl. Ned. Akad. Wetenskap. Proc., 1963, **66**, p. 70.
17. Cohn G., Hedvall J. A., Ztschr. Anorg. Chem., 1938, **239**, S. 113.
18. Seifert H., Chem. Ing. Tech., 1961, **33**, p. 210 : Kolloid Ztschr., 1965, **205**, S. 46.
19. Yamaguchi S., Ztschr. Anorg. Chemie, 1960, **305**, S. 116.

CONSIDERAŢII ASUPRA DEZVOLTĂRII CHIMIEI SOLIDELOR (II)

(Rezumat)

Se studiază rolul particulelor „oaspeţi", influenţa naturii suprafeţelor asupra parametrilor determinanţi ai reacţiilor, problema prezenţei gazelor neutre din punct de vedere chimic, diferite tipuri de coroziune, efecte de iradiere, probleme de cataliză şi modificări de stare magnetică şi electrică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 541.1

РАВНОВЕСИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТРОЙНОЙ СИСТЕМЕ: ТЕТРАХЛОРМЕТАН — *н*-БУТИЛАЦЕТАТ — ВОДА

М. ШКИОПУ, ОЛИМПИЯ БОЦ, Г. ИОНЕСКУ, КОРНЕЛИЯ НИСТОР и ОВИД РОМАН

Сообщение представленное на научной сессии Ясского политехнического института, 5—7 февраля 1965 г.

1. *Введение*

Двойная система *н*-бутилацетат—вода была объектом предыдущих исследований [1], [2] исполненных частью авторов настоящей работы. Рекуперация *н*-бутилацетата из водных растворов теперь делается в индустрии применяя дистилляцию остаточных растворов.

В виду возможного изменения этого способа, операцией экстракции жидкость — жидкостью с меньшей теплозатратой, мы поставили задачу обследовать равновесие распределения *н*-бутилацетата между водой и несмешивающимся растворителем. Мы остановились на тетрахлорметане, благодаря следующим соображениям: постоянная распределения, по нашим опытам, очень велика, растворитель очень дешев, неядовит, практически нерастворим в воде, и с большой разницей плотности по сравнению с водой. Эти качества, побуждают нас верить что он есть самый подходящий растворитель в экстракции *н*-бутилацетата.

В настоящей работе мы определили значение постоянной распределения, для концентрации в пределах растворимости *н*-бутилацетата в воде, при разных температурах, которые могут быть допущены в экстракционных индустриальных процессах.

2. *Экспериментальная часть*

Равновесие между фазами было осуществленно в стекляном сосуде с двойными стенами между которыми циркулировала вода из ультратермостата. В сосуд был внесен раствор *н*-бутилацетата в тетрахлор-

метане, с известной концентрацией по взвешиванию компонентов и 150 см³ дистиллированной воды. Система взбалтывалась 45 мин и после отделения фаз, были извлечены 50 см³ водной фазы.

Для определения концентрации *н*-бутилацетата в экстракте, этот раствор был обработан 5...10 см³ раствора едкого натра 0,5 мол $л^{-1}$ подходящей концентрации *н*-бутилацетата, после этого был подогрет в закрытом сосуде в течение 10 мин, на водной бане, а после охлаждения была определена удельная проводимость.

Прежние данные об удельной проводимости растворов с известными концентрациями *н*-бутилацетата, а обработанные таким же способом, позволили определить концентрацию анализированных растворов.

Для изучения электролитического сопротивления была использована аппаратура употребленная в предыдущей работе [2] и состоящая из моста Уитстона с 5-ю декадами питаемого от сети в 50 Гц, с изолированными трансформаторами по емкости и индукции от электросети, магазина емкости для компенсации дефазации произведенной электролитической ячейкой и из вибрационного гальванометра в качестве нулевого прибора.

Значение электролитического сопротивления могло быть определено 5-ю значущими цифрами — 10^4 ом.

Последняя значущая цифра изменялась во времени, благодаря адсорбции двуокиси углерода из воздуха. Для ограничения этого эффекта, проводниковая ячейка была герметически закрыта. Постоянная ячейки была определена стандартными растворами хлористого калия.

Удельная проводимость исследованных растворов при 25°C была определена по формуле:

$$\gamma = \frac{120{,}85}{R} \quad [ом^{-1}см^{-1}].$$

Работая с растворами *н*-бутилацетата в воде с известными концентрациями по взвешиванию компонентов, было определено, что в области значений молярной доли $0...7.10^{-4} X^R$ *н*-бутилацетата, удельная проводимость линейно изменяется по формуле:

$$\gamma = 10\,224.10^{-3} - 7{,}201\, X^R,$$

когда используется 5 см³ раствора едкого натра, или по формуле:

$$\gamma = 18{,}391.10^{-3} - 7{,}05\, X^R,$$

когда используется 10 см³ раствора едкого натра. Значения углов наклона этих прямых очень приближены к тем, которые были вычислены из подвижности ионов в безпредельно разбавленных растворах [3], для реакции обмена иона гидроксила ионом ацетила.

Наибольшая нечеткость в определении электролитического сопротивления — 10 ом, что соответствует нечеткости удельного сопротивления

в $4.10^{-6}\,\gamma$ [ом$^{-1}$см$^{-1}$] и соответственно нечеткости 6.10^{-7} для значения X^R. В области концентрации интересующей нас, значения $X^R = 6.10^{-4}$, молярная доля *н*-бутилацетата может быть определена этим методом с относительной погрешностью в 0,1 %.

Значит метод вполне соответствен.

При температуре 25°С равновесие между фазами было изучено употребляя растворы *н*-бутилацетата в тетрахлорметане с молярной долью X^E в пределах 0,045...0,4.

Данные эксперимента приведены в таблице 1.

Исчисляя постоянную распределения

$$K = \frac{X^E}{X^R}$$

заметно что во всей области концентрации закон Нернста соблюден.

Среднее значение постоянной распределения при этой температуре равно 826, а индивидуальные значения имеют наибольшие отклонения 0,5 %.

Таблица 1

X^E	$10^3\,\gamma$ ом$^{-1}$ см$^{-1}$	$10^4\,X^R$	X^E/X^R
0,045	9,934	0,549	826
0,05	9,892	0,607	822
0,1	9,441	1,239	830
0,2	8,571	2,435	825
0,3	7,697	3,644	826
0,4	6,785	4,906	827
		$K_{\text{срд}} = 826$	

Значение постоянной распределения было определено при следующих температурах: 20°; 25°; 30°; 35°; 40°С.

В таблицы 2 и 3 внесены значения постоянной распределения для значений молярной доли X^E, находящиеся между 0,05...0,2 при температурах: 20°; 30°; 35°; 40°С.

Заметно что и при этих температурах постоянная распределения не зависит, в пределах экспериментальных ошибок, от молярной доли X^E, что показывает отображение закона распределения Нернста.

Независимость постоянной распределения от концентрации, иначе говоря отображение закона Нернста, объясняется поведением водной

Таблица 2

X^E	20°C			30°C		
	$10^3\,\gamma$ ом$^{-1}$ см$^{-1}$	$10^4\,X^R$	$K = X^E/X^R$	$10^3\,\gamma$ ом$^{-1}$ см$^{-1}$	$10^4\,X^R$	$K = X^E/X^R$
0,05	17,893	0,6630	754	17,984	0,5483	912
0,10	17,379	1,416	708	17,599	1,099	910
0,20	16,514	2,650	755	16,815	2,220	902
		$K_{\text{срд}} = 739$			$K_{\text{срд}} = 908$	

Таблица 3

X^E	35°C			40°C		
	$10^3\,\gamma$ ом$^{-1}$ см$^{-1}$	$10^4\,X^R$	$K = X^E/X^R$	$10^3\,\gamma$ ом$^{-1}$ см$^{-1}$	$10^4\,X^R$	$K = X^E/X^R$
0,05	18,010	0,5091	982	18,048	0,4500	1 111
0,10	17,668	0,9964	1 003	17,720	0,9253	1 081
0,20	—	—	—	17,090	1,826	1 096
		$K_{\text{срд}} = 992$			$K_{\text{срд}} = 1\,096$	

фазы как разбавленного раствора который подчиняется закону Генри, а фазы тетрахлорметана, как совершенного раствора. Надо отметить особенно большое значение постоянной распределения при этих температурах, что позволяет употребление малых количеств тетрахлорметана для экстракции данного количества *н*-бутилацетата.

Повышение температуры способствует процессу экстракции, постоянная распределения при этом повышается одновременно с температурой.

Таблица 4

№	t °C	T °K	$K_{\text{срд}}$	$\lg K_{\text{срд}}$	$10^3/T$ °K^{-1}
1	20	293,2	739	2,868	3,411
2	25	298,2	826	2,917	3,355
3	30	303,2	908	2,956	3,300
4	35	308,2	992	2,997	3,247
5	40	313,2	1 096	3,040	3,195

Таблица 4 резюмирует влияние температуры на постоянную распределения, а диаграмма из рис. 1 иллюстрирует зависимость величины $\lg K_{\text{срд}}$ от переменной $T^{-1}[°K^{-1}]$.

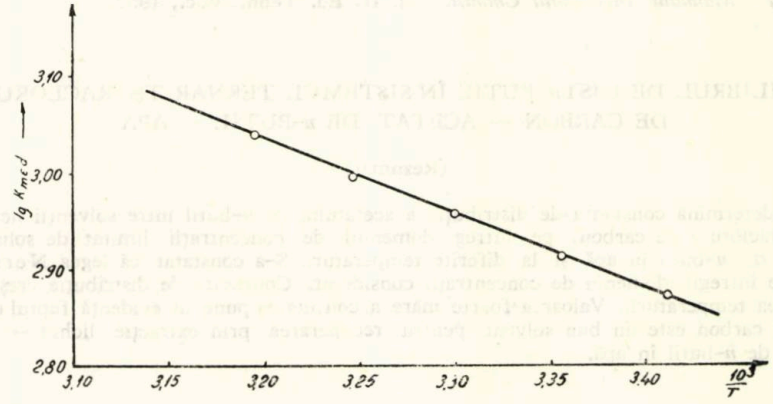


Рис. 1

Было установлено в предыдущих работах [2], что в двойной системе вода — *н*-бутилацетат, растворимость *н*-бутилацетата уменьшается при повышении температуры.

Для истолкования вышеуказанных данных, надо допустить значительную разницу между теплотами растворении *н*-бутилацетата в воде и в тетрахлорметане.

3. *Выводы*

Была определена постоянная распределения *н*-бутилацетата между несмешивающимися растворителями—водой и тетрахлорметаном при разных концентрациях и температурах. Во всей области концентрации закон Нернста применим. Постоянная распределения повышается одновременно с повышением температуры. Очень повышенное значение постоянной распределения показывает что тетрахлорметан хороший растворитель для извлечения экстракцией жидкость-жидкостью *н*-бутилацетата из воды.

X^R — молярная доль *н*-бутилацетата в водной фазе (в остатке);
X^E — молярная доль в фазе тетрахлорметана (в экстракте);
γ — удельная проводимость;
R — электролитическое сопротивление.

Ясский политехнический институт,
Физико-химическая кафедра

ЛИТЕРАТУРА

1. Şchiopu M., Boţ O., Onu V., *Studiul termodinamic şi cinetic al sistemului acetat de n-butil — apă (I)*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 115—118.
2. — *Studiul termodinamic şi cinetic al sistemului acetat de n-butil — apă (II)*, (в печати).
3. * * * *Manualul Inginerului Chimist*. Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1952.

ECHILIBRUL DE DISTRIBUŢIE ÎN SISTEMUL TERNAR TETRACLORURĂ DE CARBON — ACETAT DE *n*-BUTIL — APĂ

(Rezumat)

Se determină constanta de distribuţie a acetatului de *n*-butil între solvenţii nemiscibili apă şi tetraclorură de carbon, pe întreg domeniul de concentraţii limitat de solubilitatea acetatului de *n*-butil în apă şi la diferite temperaturi. S-a constatat că legea Nernst este valabilă pe întregul domeniu de concentraţii considerat. Constanta de distribuţie creşte odată cu creşterea temperaturii. Valoarea foarte mare a constantei pune în evidenţă faptul că tetraclorura de carbon este un bun solvent pentru recuperarea prin extracţie lichid — lichid a acetatului de *n*-butil în apă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. Z. 546.68; 66.028

O NOUĂ METODĂ FOTOCOLORIMETRICĂ ŞI FLUORIMETRICĂ PENTRU DOZAREA INDIULUI

DE

AURORA BORDEA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

În ultimul timp indiul şi sărurile lui prezintă un interes crescînd pentru tehnică şi industrie.

La prelucrarea unor concentrate zincoase rezultă, în unele cazuri, o proporţie de 10^{-2}... ...10^{-3}% In [1]. În raport cu cantităţile de indiu existente în concentrate s-au elaborat metode gravimetrice, volumetrice, complexometrice [2]...[5], metode colorimetrice, fluorimetrice, spectrofotometrice, polarografice, amperometrice, cromatografice, radiometrice [6]...[9] etc.

Indiul se poate doza după o prealabilă separare sau în prezenţa unor ioni străini (care în anumite limite de concentrare pot să jeneze determinarea).

Indiul reacţionează cu un mare număr de compuşi organici cu care dă compuşi coloraţi de fluorescenţă [10] ca de exemplu: alizarina, chinalizarina, galeina, galocianina, aluminonul, verdele de malachit, verdele brillant, pirogalolul, cu unii coloranţi xantenici şi acridinici de tipul rodaminelor (*C*, 3*B*, 6*f*) [11]...[16].

Din grupa coloranţilor xantenici face parte şi pironina, care a fost utilizată la determinarea spectrofotometrică a Tl_{III} [17].

Încercările întreprinse au arătat că pironina reacţionează cu indiul în mediu puternic acid, dînd un complex fluorescent de culoare roşie cărămizie, care se poate extrage cu benzen din faza apoasă, culoarea extractului organic devenind roză-violacee. Colorantul singur, în aceleaşi condiţii, nu este extras şi solventul rămîne incolor.

În prezenta lucrare ne-am propus să elaborăm o metodă de dozare a indiului folosind pironina ca reactiv.

Ţinînd seama de rezultatele obţinute la Tl_{III} [17], se poate presupune ca s-ar forma o asociaţie ionică care se extrage cu soluţii organice.

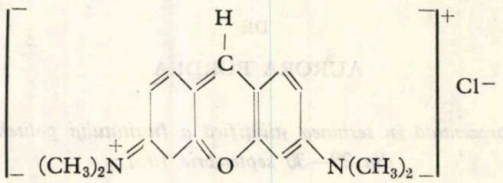
Încercările preliminare au arătat că acidul bromhidric conduce la rezultatele cele mai bune. De asemenea s-a constatat că complexul se extrage integral din faza apoasă atunci cînd benzenul folosit ca solvent organic conţine o anumită cantitate de acetonă.

2. Partea experimentală

2. 1. Prepararea soluţiilor

a) *Soluţia de indiu* s-a obţinut dizolvînd 0,1 g indiu metalic, în prealabil curăţit cu alcool şi eter, în 3 ml HBr 40% şi adus la volum de 100 ml cu apă bidistilată. Din această cantitate s-a luat 1 ml şi s-a adus la 100 ml astfel că 1 ml soluţie conţine 10 μg In.

b) *Soluţia de pironină.* Pironina *G* (clorură de tetrametildiaminoxantiliu) ($C_{17}H_{19}ON_2Cl$), gr. mol. = 308,8, comercială p. a., a fost recristalizată din o soluţie de 1 *N* HCl; soluţia apoasă de pironină este roşie şi are o fluorescenţă galbenă. S-a folosit o soluţie proaspăt preparată de pironină 0,01 *M*.



c) *Acidul bromhidric* p. a. 40%, densitate 1,378...1,38.

d) *Solvenţi organici.* S-a utilizat benzen şi acetonă în amestec de 5:1,5 (v/v). Amestecul proaspăt preparat s-a filtrat înainte de întrebuinţare printr-un filtru des pentru a reţine urmele emulsionate de apă, deoarece în unele cazuri amestecul de solvenţi era opalescent.

În determinările experimentale faza apoasă şi cea organică au fost luate în volume egale. La prepararea soluţiilor s-a folosit apa bidistilată.

2. 2. Aparatura

Pentru determinările fotocolorimetrice s-a întrebuinţat un aparat F.E.K-M, cuve de 10 mm şi filtru verde. Pentru determinările spectrofotometrice s-a utilizat un spectrofotometru de tip Zeiss „V. S. U. 1". Pentru determinarea fluorescenţei s-a utilizat o lampă de tip IIRK-4 (alimentată la 120 V) şi un filtru pentru liniile Hg 3650 Å. Măsurarea intensităţii s-a efectuat cu un monocromator cu oglinzi „Carl Zeiss", Jena, la care s-a adăugat ca receptor un fotomultiplicator de tip M 12 FQS 35, al cărui curent anodic a fost măsurat cu un galvanometru „Multiplex" cu sensibilitatea 4.10^{-9} A/mm. Măsurările au fost efectuate pentru $\lambda = 5824$ Å, fanta de intrare şi ieşire la monocromator fiind de 0,65 mm.

Cuvele utilizate au fost de 10 mm grosime şi lumina fluorescentă observată pentru soluţii concentrate a fost galben-verde, iar pentru soluţii diluate albastră-violacee.

S-a calculat valoarea coeficientului molar de extincţie şi s-a găsit aproximativ egală cu 40 000.

3. Studiul variaţiei diferiţilor factori

a) *Variaţia concentraţiei acidului bromhidric*

Se ştie că indiul formează în soluţie de acid bromhidric o serie de cationi şi anioni complecşi, a căror compoziţie variază în funcţie de concentraţia acidului şi a indiului în soluţie. Prin metoda extracţiei şi dozările corespunzătoare s-au pus în evidenţă: $InBr^{2+}$, $InBr_2^+$, $InBr_3$ şi $H(InBr_4)$.

În cazul nostru s-a variat concentraţia acidului bromhidiric între 0,2...4 *M*, menţinîndu-se constantă cantitatea de indiu şi de pironină. Complexul format s-a extras cu 25 ml solvent organic (benzen+acetonă 5 : 1). Rezultatele obţinute (fig. 1) arată că cel mai favorabil domeniu de concentraţie al HBr este cuprins între 2,5...3 *M*.

S-a stabilit că la o concentraţie a HBr mai mică decît 10^{-1}...10^{-3} *M* se extrage parţial şi colorantul. Cu creşterea acidităţii se observă că intensitatea culorii stratului organic scade şi intensitatea culorii fazei apoase creşte.

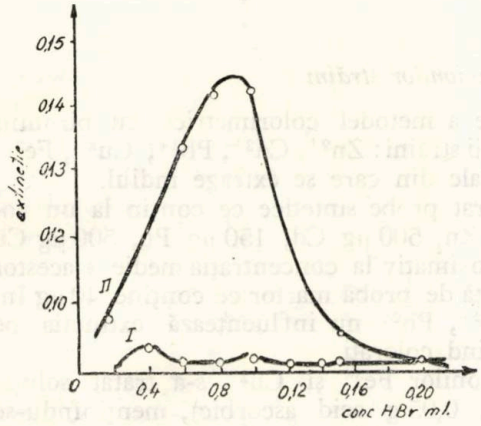


Fig. 1. — Variaţia extincţiei fazei organice cu concentraţia HBr în fază apoasă. Curba *I* — Pyr. 5 ml 0,01 *M* fără In; curba *II* — Pyr. 5 ml 0,01 *M* şi In 10 μg la volum de 25 ml.

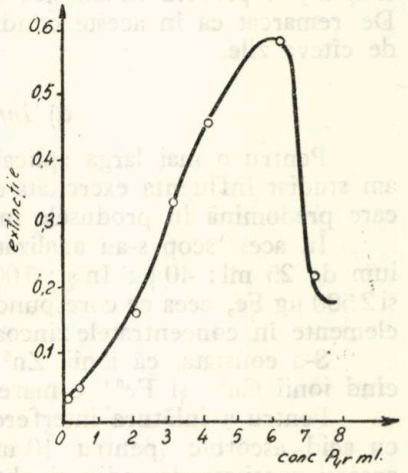


Fig. 2. — Variaţia extincţiei fazei organice cu concentraţia Pyr. (10^{-1} ...$2{,}8.10^{-3}$ *M*) în fază apoasă.

b) *Variaţia concentraţiei pironinei*

Pironina cristalizată este de culoare roşie, cu reflexe verzi, este solubilă în apă şi alcool, cu o coloraţie roşie şi fluorescenţă galbenă. Insolubilă în eter şi benzen atinge valoarea maximă a benzii de absorbţie la $\lambda = 548{,}3$ şi 509,6 mμ, determinate spectrofotometric [18]. Dacă se adaugă HCl sau HBr la o soluţie apoasă de pironină, se obţine o soluţie portocalie care nu se extrage cu benzen. Soluţia apoasă de pironină adăugată soluţiilor de indiu în mediu acid formează o coloraţie roşie cărămizie, cu fluorescenţă portocalie. Extrac-

tul organic al complexului cu indiu este colorat roz-violaceu. Intensitatea culorii variază cu concentraţia în indiu şi aciditatea soluţiei.

Variind concentraţia pironinei (fig. 2) se constată că domeniul optim de lucru este cuprins între $4.10^{-4}...2{,}8.10^{-3}$ *M*.

c) *Influenţa solventului*

Metodele extractive fotometrice urmăresc determinarea elementelor funcţie de culoarea soluţiei compuşilor în solventul organic, după ce au fost extrase din soluţia apoasă cu adaus de reactivi adecvaţi. În acest sens s-a întreprins un studiu [18] referitor la extractibilitatea halogen-acizilor simpli sau complecşi cu indiu după mecanismul oxonic.

Astfel, variind în încercările noastre cantitatea de acetonă adăugată fazei benzenice, se constată o creştere continuă a densităţii optice. Totuşi la adausuri importante de acetonă stabilitatea coloraţiei scade simţitor cu timpul; se preferă ca amestec optim (benzen+acetonă) raportul 5 : 1,5 (v/v). De remarcat că în aceste condiţii extractele benzenice prezintă o stabilitate de cîteva zile.

d) *Influenţa ionilor străini*

Pentru o mai largă aplicabilitate a metodei colorimetrice cu pironina am studiat influenţa exercitată de ionii străini: Zn^{2+}, Cd^{2+}, Pb^{2+}, Cu^{2+}, Fe^{3+}, care predomină în produsele industriale din care se extrage indiul.

În acest scop s-au analizat separat probe sintetice ce conţin la un volum de 25 ml: 40 μg In şi: 5 000 μg Zn, 500 μg Cd, 150 μg Pb, 500 μg Cu şi 2 500 μg Fe, ceea ce corespunde aproximativ la concentraţia medie a acestor elemente în concentratele zincoase, faţă de probă martor ce conţine 40 μg In.

S-a constatat că ionii Zn^{2+}, Cd^{2+}, Pb^{2+} nu influenţează extincţia, pe cînd ionii Cu^{2+} şi Fe^{3+} o măresc, fiind coloraţi.

Pentru a înlătura interferenţa ionilor Fe^{3+} şi Cu^{2+} s-a tratat soluţia cu acid ascorbic (pentru 10 mg Fe, 0,05 g acid ascorbic), menţinîndu-se aceeaşi cantitate de indiu şi obţinîndu-se rezultate bune.

De asemenea s-a analizat şi un amestec din soluţiile ce conţin ionii citaţi mai sus în aceleaşi proporţii şi s-a observat că densitatea optică pentru complexul cu indiu nu se modifică dacă se reduc ionii Cu^{2+} şi Fe^{3+} cu acid ascorbic.

e) *Variaţia concentraţiei indiului. Curbele etalon*

Din soluţia care conţine 10 μg In/ml s-au măsurat cantităţi cuprinse între 0,1...10 ml soluţie indiu în 10 pîlnii de separare de cîte 125 ml; se adaugă apoi 10 ml HBr 5 *M* şi se completează cu apă bidistilată acidulată cu HBr 3% la un volum de 20 ml, apoi se adaugă 5 ml pironină 0,01 *M* şi se agită. Extracţia se efectuează cu 25 ml solvent organic (benzen+acetonă 5 : 1,5), se agită de trei ori cîte 2 min. Se lasă circa o oră să se limpezească

straturile emulsionate şi apoi se separă cele două faze. Se colorimetrează la un fotocolorimetru F.E.K-M în cuve de 10 mm cu filtru verde.

Metoda este aplicabilă, după cum rezultă din curbele etalon (fig. 3, variantele a, b, c, d), în două domenii de concentraţii şi anume: a) 0,2...20 μg şi b) 20...100 μg.

Eroarea medie relativă este de $\pm 3{,}5\,\%$.

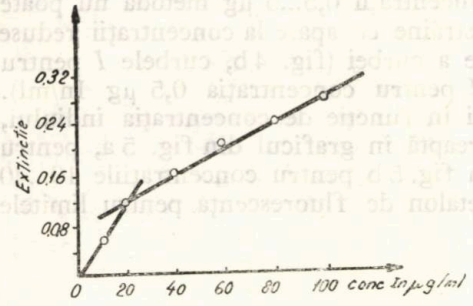


Fig. 3a. — Curba etalon (In-Pyr.) pentru două domenii: *1*—0,1...20 μg In şi 5 ml Pyr. 0,01 *M* în fază apoasă; *2*—20...100 μg In şi 5 ml Pyr. 0,01 *M* în 25 ml fază apoasă.

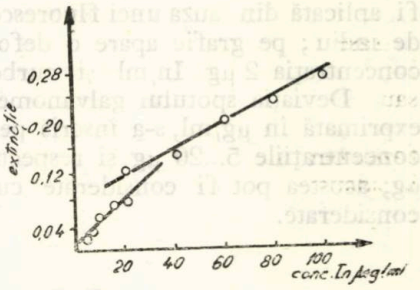


Fig. 3 b. — Curba etalon (In-Pyr.) pentru două domenii: *1* — 0,1...20 g In şi *2*—20...100 μg In şi 5 ml Pyr. 0,01 *M* în fază apoasă.

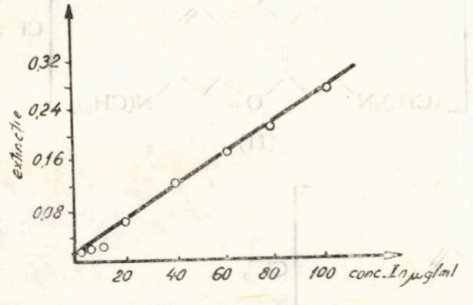


Fig. 3 c. — Curba etalon (In-Pyr.) pentru o concentraţie a In cuprinsă între 5...100 μg şi 5 ml Pyr. 0,01 *M* în fază apoasă.

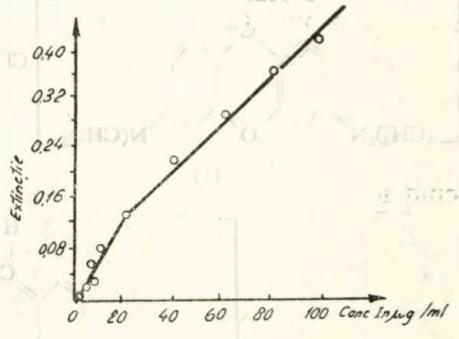


Fig. 3 d. — Curba etalon (In-Pyr.) pentru o concentraţie a In cuprinsă între 0,5...100 μg şi 10 ml Pyr. 0,01 *M* în fază apoasă.

f) *Determinarea fluorimetrică*

S-a urmărit fluorescenţa mai multor probe în domenii diferite de concentraţii, pentru a stabili condiţiile de lucru.

S-a observat că citirile trebuie făcute pe galvanometru imediat după stabilirea spotului, deoarece intensitatea fluorescenţei scade treptat şi la galvanometru se citesc valori mai mici (radiaţiile sursei exercită o anumită influenţă asupra soluţiei).

S-au studiat trei probe, adică trei serii de soluţii de indiu avînd concentraţia în faza organică respectiv: 0,5...5 μg, 5...20 μg, 20...40 μg, în reacţie cu 5 ml pironină 0,01 *M*, aduse la volum de 25 ml soluţie.

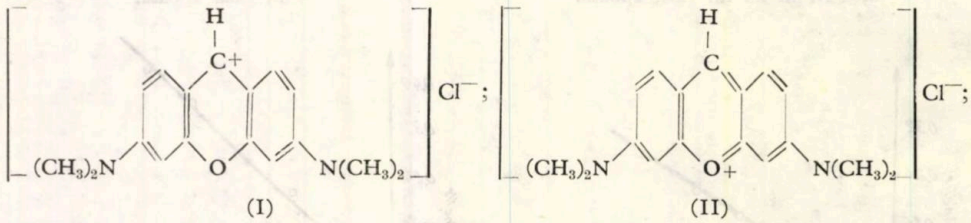
Lungimea de undă a maximului de fluorescenţă ce rezultă din spectrul de fluorescenţă, este notată în fig. 4 a (curbele *I* şi *II*, $\lambda = 5820$ Å pentru 40 μg In/ml, respectiv $\lambda = 5\,880$ Å pentru 5 μg In/ml).

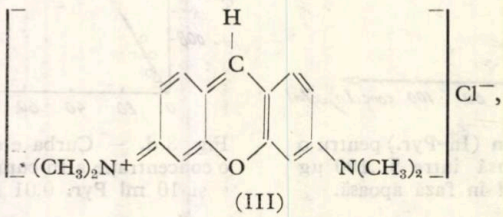
S-a constatat că în intervalul de concentraţii 0,5...5 μg metoda nu poate fi aplicată din cauza unei fluorescenţe străine ce apare la concentraţii reduse de indiu; pe grafic apare o deformare a curbei (fig. 4 b, curbele *I* pentru concentraţia 2 μg In/ml şi curbele *II* pentru concentraţia 0,5 μg In/ml).

Deviaţia spotului galvanometrului în funcţie de concentraţia indiului, exprimată în μg/ml, s-a înscris pe o dreaptă în graficul din fig. 5 a, pentru concentraţiile 5...20 μg şi respectiv din fig. 5 b pentru concentraţiile 10...40 μg; acestea pot fi considerate curbe etalon de fluorescenţă pentru limitele considerate.

3. Rezultate şi discuţii

Pironina (R^+; Cl^-) se poate prezenta în mai multe forme [21]:





forma (III) fiind cea mai probabilă. Colorantul poate forma asociaţii ionice cu complecşii halogenaţi ai Tl_{III} de forma (R^+; $TlCl_4^-$).

Am cercetat structura combinaţiei pe care o formează indiul cu pironina cu ajutorul metodei lui J o b (curba variaţiei compuşilor izomolari). Din aceste date rezultă că raportul dintre pironină şi indiu este de 2 : 1, deci complexul ar fi de forma (R^+; $InBr_4^-$) (R^+; Br^-). Aceste date sînt confirmate şi de curba de fluorescenţă a cărei deplasare (fig. 4 b) indică cu multă probabilitate existenţa complexului indicat mai sus.

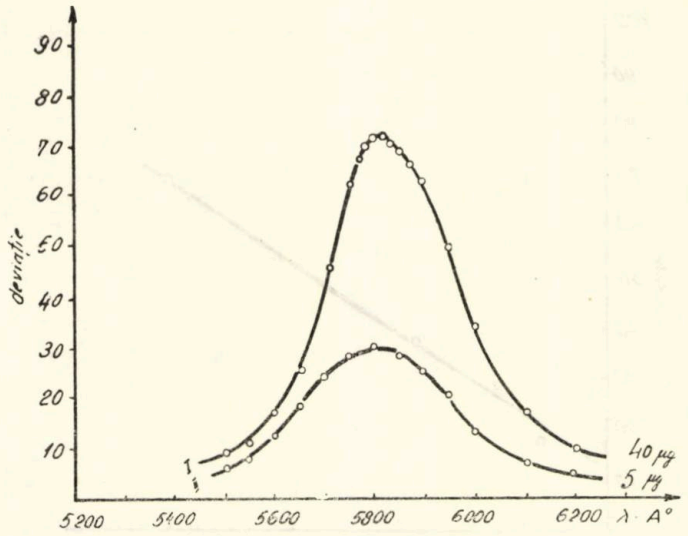


Fig. 4 a.—Curbele de fluorescență $d(\lambda)$; $1-S=40$ μg In, $f=0{,}57$ mm, $\lambda=5820$ Å; $2-S=5$ μg In, $f=0{,}60$ mm, $\lambda=5800$ Å; (d—deviația galvanometrului, λ—lungimea de undă, f—fluorescența).

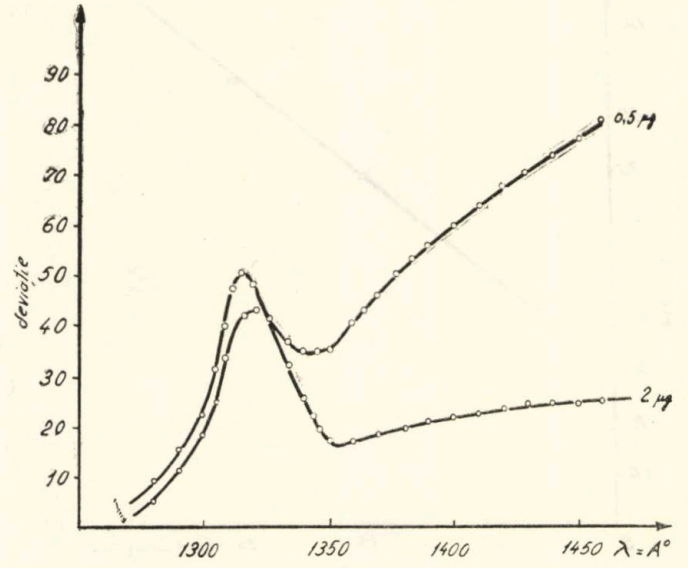


Fig. 4 b.—Curbele de fluorescență $d(\lambda)$; $1-S=0{,}5$ μg In, $\lambda=1315$ Å, $f=1$ mm; $2-S=2$ μg In, $\lambda=1320$ Å, $f=1$ mm.

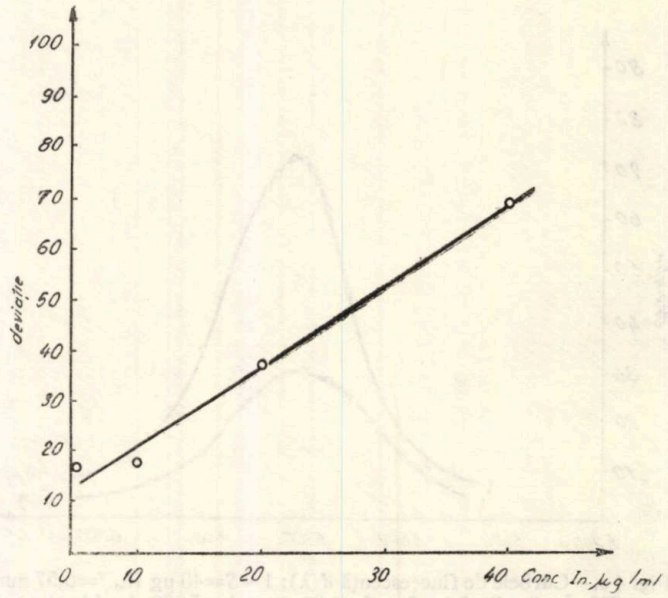


Fig. 5 a. — Curba etalon de fluorescență $d(c)$, pentru o concentrație a In 10...40 µg (d — deviația galvanometrului, c — concentrația).

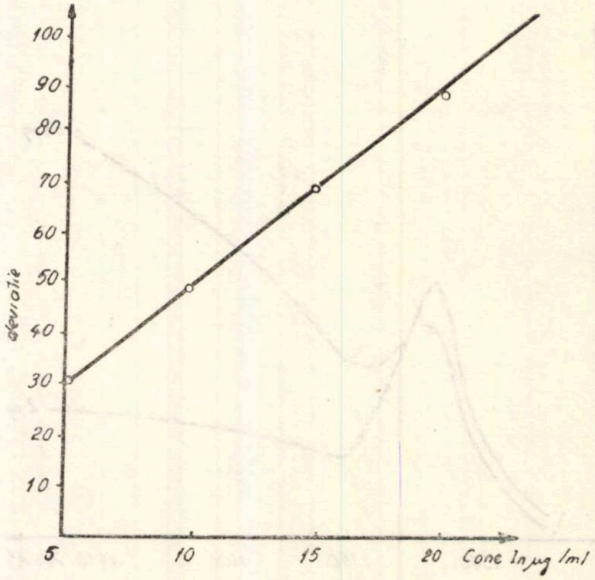


Fig. 5 b. — Curba etalon de fluorescență $d(c)$ pentru o concentrație a In 5...20 µg.

4. Concluzii

S-a elaborat o nouă metodă pentru determinarea indiului prin extracţie cu benzen+acetonă (5 : 1,5) a complexului [Pyr^+; $(InBr_4)^-$] dintr-o soluţie de HBr 2,5...3 *M*. Intensitatea culorii fazei organice s-a determinat fotocolorimetric şi fluorimetric între limitele de concentraţie 5...100 μg In/ml pentru care este aplicabilă metoda.

Prezenţa ionilor Cd^{2+}, Zn^{2+}, Pb^{2+} nu jenează, în schimb cea a ionilor Cu^{3+} şi Fe^{2+} jenează determinările. Aceşti din urmă ioni pot fi reduşi cu acid ascorbic, determinările putîndu-se face cu succes în prezenţa lor. Precizia metodei este de $\pm 3{,}5\,\%$.

Din datele obţinute rezultă că raportul dintre pironină şi indiu este de 2 : 1, complexul se presupune că ar avea forma $(R^+; InBr_4^-)$ $(R^+; Br^-)$, după cum reiese din curbele fotocolorimetrice şi de fluorescenţă.

Aduc mulţumiri pe această cale tovarăşilor conf. dr. S. Fişel şi lector V. Pop de la Universitatea „Al. I. Cuza", Iaşi, pentru sprijinul acordat în efeatuarea lucrării.

Institutul politehnic, Iaşi
Catedra de chimie generală

BIBLIOGRAFIE

1. Petrescu M., Iliescu E., Toth I., Voiculescu I., St. şi cerc. metal., Acad., R.P.R., 1960, *4*, p. 527.
2. Pascal P., *Nouveau Traité de Chimie Minérale*. T. **VI**, Masson & Cie, Paris, 1961, p. 896.
3. Fresenius R., Jander G., *Handbuch der Analytischen Chemie (Indium)*. Springer-Verlag, Berlin, 1942, S. 589–602.
4. Бусев А. И. *Аналитическая химия индия*. Изд. АН СССР, М., 1958.
5. Pribil R., *Complexonii în chimia analitică*. Ed. Tehn. Buc., 1963, pp. 313, 408, (trad. din l. cehă).
6. Kolthoff I. M., *Treatise on Analytical Chemistry*. Vol. **II**, Interscience Publishers, Inc., N. Y., 1962, p. 89.
7. Ralea R., Popa-Rang A., *Chimia şi structura combinaţiilor complexe*. Ed. Did. şi Pedag., Buc., 1965, p. 247.
8. Сонгина О. А., *Амперометрическое (полярометрическое) титрование в анализе минерального сырья*. Госгеолтехиздат, М., 1957.
9. Sandell E. B., *Colorimetric Determination of Traces of Metals*. Vol. **3**, Interscience Publishers, N. Y.-London, 1959, p. 511.
10. *** *Люминесцентный анализ. Физика и техника спектрального анализа*. Изд. ФМ, М., 1961, стр. 186.
11. Бабко А. К., Чалая З. И., ЖАХ, 1961, **17**, стр. 268.
12. — ЖАХ, 1963, **18**, *5*, стр. 570–574.
13. Блюм И. А., Душина Т. К., Зав. лаб., 1959, **25**, *2*, стр. 131.
14. Блюм И. А., Соловьян И. Т., Шебалкова С. Н., Зав. лаб., 1961, **27**, стр. 950.
15. Бушев А. И., Скробат Е. П., Вестник МГУ, 1959, *4*, стр. 199–205.
16. Liteanu C., Cordoş E., Bul. Inst polit. Iaşi, 1961, **VII** (**IX**), *3–4*, p. 127.
17. Fişel S., Crăciun-Ciobanu A., Popescu I., Poni M., Rev. Roum. de Chimie, 1964, *8–9*, pp. 559–563.
18. Kuzneţov V. I., *Reactivi şi produse chimice*. Ed. Tehn., Buc., 1964, p. 455, (trad. din l. rusă).
19. Полуэктов Н. С., Коноренко Л. И., Лауэр Р. С., ЖАХ, 1958, **XII**, стр. 396.
20. Job P., Anal. Chim., 1928, pp. 9, 113.
21. Fişel S., Sîrghie, I., Pîrlea M., *Constantele de disociere ale unor reactivi din grupa sărurilor de xantiliu*. Comunicare prezentată la Conferinţa Naţională de Chimie, Timişoara, 28–30 iunie 1966.

UNE NOUVELLE MÉTHODE PHOTOCOLORIMÉTRIQUE ET FLUOROMÉTRIQUE POUR LE DOSAGE DE L'INDIUM

(Résumé)

On a élaboré une méthode nouvelle pour la détermination de l'indium par l'extraction au benzène+acétone (5 : 1,5) du complexe $[Pyr^+; (InBr_4)^-]$ d'une solution de HBr 2,5...3 *M*. L'intensité de la couleur de la phase organique a été déterminée par voie photocolorimétrique à $\lambda = 5824$ Å. L'intervalle des concentrations pour le domaine où l'on a appliqué la méthode a été 5...100 µg In/ml.

La détermination n'est pas gênée par la présence des ions Cd^{2+}, Zn^{2+}, Pb^{2+}, mais, au contraire, elle est gênée par celle des ions Cu^{2+} et Fe^{3+} ; ceux-ci peuvent être réduits par l'acide ascorbique.

La précision de la méthode est de $\pm$ 3,5%.

Les résultats obtenus par la mesure de l'extraction de la phase organique, prouvent que la composition du complexe est de la forme Pyr : In (2 : 1), ce qui confirme l'association ionique $(R^+; InBr_4^-)$ $(R^+; Br^-)$ qui résulte de la variation de l'extinction de la phase organique pour le système Pyr : In, présentée par les courbes photocolorimétriques et fluorométriques.

Explication des figures

Fig. 1. — Variation de l'extinction de la phase organique avec la concentration de la HBr en phase aqueuse. Courbe *I*—Pyr. 5 ml 0,01 *M* sans In ; Courbe *II*— Pyr. 5 ml 0,01 *M* et In 10 µg à un volume de 25 ml.

Fig. 2. — Variation de l'extinction de la phase organique avec la concentration de la Pyr. (10^{-4}...$2{,}8.10^{-3}$ *M*) en phase aqueuse.

Fig. 3 a. — Courbe étalon (In-Pyr.) pour deux domaines : *1* — 0,1...20 µg In et 5 ml Pyr. 0,01 *M* en phase aqueuse ; *2*—20...100 µg In et 5 ml Pyr. 0,01 *M* en 25 ml phase aqueuse.

Fig. 3 b. — Courbe étalon (In-Pyr.) pour deux domaines : *1* — 0,1...20 µg In et *2* — 20...100 µg In et 5 ml Pyr. 0,01 *M* en phase aqueuse.

Fig. 3 c. — Courbe étalon (In-Pyr.) pour une concentration 5...100 µg In et 10 ml Pyr. 0,01 *M* en phase aquense.

Fig. 3 d. — Courbe étalon (In-Pyr.) pour une concentration 0,5...100 µg In et 10 ml Pyr. 0,01 *M* en phase aqueuse.

Fig. 4 a. — Courbes de fluorescence $d(\lambda)$; *1*—S=40 µg In, f=0,57 mm, λ=5820 Å ; *2* — S=6 µg In, f = 0,60 mm, λ = 5800 Å. ; d — déviation du galvanomètre, λ — longueur d'onde, f — fente.

Fig. 4 b. — Courbes de flourescecen $d(\lambda)$; *1*—S=40 µg In, f=1 mm, λ = 1315 Å *2* — S = 5 µg In, f = 1 mm, λ = 1320 Å.

Fig. 5 a. — Courbe étalon de fluorescence $d(c)$, pour une concentration 10...40 µg In ; d — déviation du galvanomètre, c — concentration.

Fig. 5 b. — Courbe étalon de fluorescence $d(c)$, pour une concentration 5...20 µg In.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 535.24 ; 542.61 ; 66.028 ; 546.72

O METODĂ FOTOMETRICĂ EXTRACTIVĂ PENTRU DOZAREA UNOR OXIDANŢI

Nota I

DETERMINAREA FOTOMETRICĂ A IONULUI Fe^{3+}

DE

I. ANTONESCU, MARIA CARAMLĂU şi FLORICA MATEI

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 27—30 iunie 1966

1. Introducere

Parafenilen-diaminele substituite sînt substanţe ai căror produşi de oxidare nu au proprietăţi colorante, dar care datorită unei reactivităţi crescute pot reacţiona asupra unui fenol sau a unui compus cu o grupă metilen reactivă, formînd coloranţi Asemenea compuşi au fost studiaţi de R. Fischer şi H. Siegrist [1] şi sînt folosiţi pe scară largă în procesele foto-color.

Folosind unele indicaţii din literatură, precum şi observaţiile noastre experimentale, relative la faptul că, în anumite condiţii şi între anumite limite, există o proporţionalitate între cantitatea de oxidant introdusă şi cea de colorant formată, ne-am propus să găsim condiţiile optime de dozare fotometrică a unor ioni cu acţiune oxidantă asupra unei *p*-fenilen-diamine substituite. Am folosit în acest scop sulfatul de etil-oxietil *p*-fenilen-diamină, iar ca agent de cuplare, α-naftolul.

Ionii de fier trivalent acţionează ca oxidant asupra *p*-fenilen-diaminei amintite, cu formarea unui compus intermediar cu reactivitate crescută. Dacă la această soluţie apoasă se adaugă o soluţie de α-naftol în cloroform şi se agită bine cele două faze, se formează un colorant de culoare albastru-violet, care se extrage în faza cloloformică.

Sensibilitatea acestei reacţii, selectivitatea faţă de alţi ioni, precum şi maximul de absorbţie în domeniul vizibil, au constituit motive care ne-au determinat să elaborăm o metodă extractiv-fotometrică, de determinare a unor cantităţi mici de fier, în special în aluminiu tehnic şi compuşi de aluminiu.

2. Partea experimentală

Pentru a stabili condiţiile optime ale metodei de lucru s-a analizat influenţa exercitată de unii factori care intervin în general în metodele fotometrice, precum şi de unii factori specifici metodei.

Ca reactivi de bază s-au folosit: sulfat de etil oxi-etil *p*-fenilen-diamin produs „Serva" şi α-naftol produs V. E. B., ambele chimic pure.

Drept etalon pentru fier s-a folosit o soluţie preparată plecînd de la fier electrolitic solvit în acid azotic.

Densitatea optică a soluţiilor s-a măsurat cu ajutorul unui fotometru Pulfrich.

În primul rînd s-a trasat curba de absorbţie a compusului colorat format, prezentată în fig. 1.

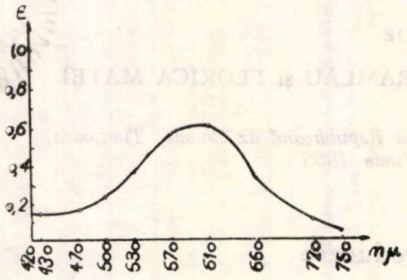


Fig. 1. — Curba de absorbţie a colorantului extras.

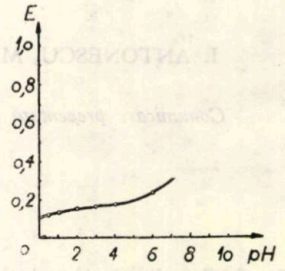


Fig. 2. — Variaţia extincţiei extractului cloroformic funcţie de pH-ul fazei apoase.

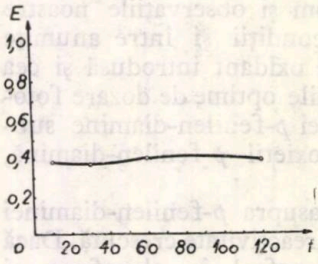


Fig. 3. — Variaţia extincţiei funcţie de timp.

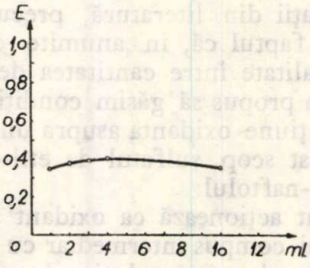


Fig. 4. — Variaţia extincţiei funcţie de cantitatea de reactiv introdusă.

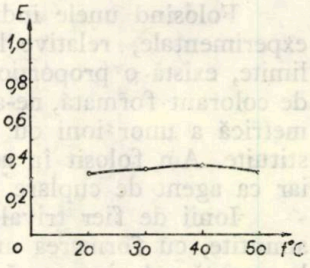


Fig. 5. — Variaţia extincţiei funcţie de temperatură.

Se observă că maximul de absorbţie se obţine la 610 mμ, lungime de undă la care s-au efectuat în continuare toate determinările.

S-a stabilit, în continuare, influenţa pH-ului asupra determinărilor, respectiv asupra variaţiei extincţiei extractului cloroformic (fig. 2).

În intervalul pH = 2...4 variaţia extincţiei este foarte redusă. La pH>5 are loc o creştere a extincţiei ca urmare a oxidării sulfatului de etil oxi-etil *p*-fenilen diamin, datorită altor cauze. În acest domeniu (pH>5) nu mai există proporţionalitate între cantitatea de oxidant introdusă şi cea de colorant formată.

În continuare s-a cercetat influenţa şi a altor factori, cum ar fi: stabilitatea în timp a compusului colorat extras, influenţa cantităţii de reactiv adăugat, influenţa temperaturii, rezultatele cercetărilor fiind redate în fig. 3...5. Aceste rezultate ne-au permis stabilirea condiţiilor optime de lucru.

Trasarea curbei de etalonare

Pentru trasarea curbei de etalonare s-a preparat o soluţie etalon de fier prin dizolvarea a 0,1 g fier electrolitic în acid azotic şi diluarea la 1 000 ml cu apă distilată. Din această soluţie s-au luat 10 ml şi s-au diluat la 1 000 ml [2].

Cu ajutorul unei microbiurete se iau volume de soluţie etalon cu un conţinut cuprins între 0,5 şi 5,5 μg, care se introduc în pîlnii de separare de cîte 50...100 ml. Se adaugă 2 ml soluţie 1% de sulfat de etil oxi-etil *p*-fenilen diamin şi 10 ml apă distilată, fiartă şi răcită. Se agită uşor timp de 3 min conţinutul pîlniei, după care se adaugă în continuare 20 ml soluţie 0,5% α-naftol în cloroform, agitîndu-se energic încă 3 min.

Se separă faza cloroformică şi se fotometrează faţă de solventul pur sau soluţia de α-naftol 0,5%.

Curba de etalonare este redată în fig. 6.

Pentru cantităţi de fier introduse ce depăşesc 10 μg/ml legea lui Lambert-Beer nu mai este respectată.

În cazul soluţiilor de analizat cu un conţinut mai ridicat în fier acestea trebuie diluate în mod corespunzător, iar pH-ul reglat în jurul valorii 3.

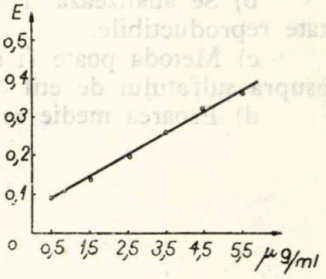


Fig. 6. — Curba de etalonare pentru fier.

În mod experimental s-a constatat că la o concentraţie a fierului cuprinsă între limitele de mai sus, determinarea acestuia nu este influenţată de prezenţa în soluţia de analizat a unor cantităţi de 1000 de ori mai mari de aluminiu. Cuprul, în cantităţi care nu imprimă soluţiei coloraţia sa, de asemenea nu jenează determinările. Acestea sînt influenţate în general de o serie de ioni care ei înşişi pot juca rol de oxidant asupra sulfatului de etil oxi-etil fenilen diamin, cum ar fi: CrO_4^{2-}, Ag^+, Hg^{2+} etc.

La soluţii pure de fier s-au obţinut rezultate care pot fi uşor reproduse. După datele din tabelul 1 se observă că eroarea medie relativă este mai mică decît 5%.

Comparînd rezultatele obţinute prin metoda recomandată cu cele rezultate utilizînd acid sulfosalicilic, indicate în tabelul 2, se observă că diferenţele nu depăşesc $\pm 4\%$.

Tabelul 1

Conţinutul în Fe^{3+} în proba de analizat

Nr. probei	Existent mg	Dozat mg	Diferenţa mg	Eroare relativă %	Precizie %
1	0,0030	0,0032	+0,0002	6,6	
2	0,0030	0,0033	+0,0003	10	
3	0,0030	0,0030	0	0	
4	0,0030	0,0032	+0,0002	6,6	
5	0,0030	0,0030	0	0	±4,9
6	0,0030	0,0033	+0,0003	10	
7	0,0030	0,0030	0	0	
8	0,0030	0,0028	−0,0002	6,6	
9	0,0030	0,0030	0	0	
10	0,0030	0,0033	+0,0003	10	

Tabelul 2

Rezultatele determinărilor prin metoda indicată (I) şi cea cu acid sulfosalicic (II)

Conţinutul în Fe^{3+} mg		Eroare %
I	*II*	
0,0035	0,0035	2,9
0,0050	0,0049	2,0
0,0025	0,0024	4,0

3. Concluzii

a) A fost propusă o metodă nouă, extractiv-fotometrică, de dozare a fierului trivalent în prezenţa unor cantităţi mari de aluminiu.

b) Se analizează şi se stabilesc condiţiile pentru obţinerea unor rezultate reproductibile.

c) Metoda poate fi aplicată şi în cazul altor ioni cu acţiune oxidantă asupra sulfatului de etil oxi-etil *p*-fenilen diamin.

d) Eroarea medie relativă a metodei nu depăşeşte $\pm 5\%$

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie analitică

BIBLIOGRAFIE

1. Siegrist N., Phot. Korr., 1914, 51, S. 8.
2. Sandell E. B., *Colorimetric Determination of Trases of Metals.* Third ed., N. Y.-Lond 1959.
3. Kenneth Mees C. E., *The Theory of the Photographic Process.* N. Y., 1942.
4. Nicolaie M., *Fizico-chimia proceselor fotografice.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1964.
5. Nenițescu C. D., *Tratat elementar de chimie organică.* Vol. II, ed. IV, Ed. Tehn., 1958.
6. Glafkides P., *Chimie photographique.* Ed. II, Paris, 1957.

EXTRACTIVE PHOTOMETRIC METHOD FOR THE DETERMINATION OF SEVERAL OXIDANTS

I. The photometric determination of ferric ions

(Summary)

The authors expose an extractive photometric method for the determination of iron from aluminium, and their compounds. The method is based on the oxidant property of the ferric ions on the ethyloxiethyl–*p*–phenilendiamin–sulphate. The product of the oxidation reacts with α–naphtol giving a colorant which can be photometrated. The sensibility of this method is 0.1 μg/ml for an error of ±5%.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Extracted colorant's absorption curve.
Fig. 2. — Dependence between chloroformic extract's extinction and pH of the aquaphase.
Fig. 3. — Dependence between extinction and time.
Fig. 4. — Dependence between extinction and the quantity of introduced reactive.
Fig. 5. — Dependence between extinction and temperature.
Fig. 6. — Iron photometric determination curve.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 541.132; 546.226

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СУЛЬФАТ-ИОНОВ В ПОВЕРХНОСТНОАКТИВНЫХ И МОЮЩИХ ВЕЩЕСТВАХ

В. К. АКИМОВ, С. И. БРАГИНА и А. И. БУСЕВ

1. *Введение*

Натриевые соли алкиларилсульфокислот (алкиларилсульфонаты) и кислых сернокислых эфиров жирных спиртов (алкилсульфаты) широко применяются как моющие средства и поверхностноактивные добавки. В зависимости от способа получения, технические алкиларилсульфонаты и алкилсульфаты содержат различные количества минеральных солей (Na_2SO_4, NaCl). При определении минеральных примесей, в частности сульфатов, в технических алкиларилсульфонатах и алкилсульфатах возникают серьезные затруднения. Так например, обычные гравиметрические и титриметрические методы определения сульфатов часто не дают удовлетворительных результатов вследствие того, что соли бария и свинца алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов, также как и сульфаты бария, плохо растворимы в воде. Следует отметить также склонность алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия, свинца и бария к соосаждению с сульфатом бария и свинца.

Методы определения сульфат-ионов в поверхностноактивных и моющих веществах, известные в настоящее время, трудоемки и применимы только в некоторых частных случаях [1]...[7]. Лучшим из них является метод, предложенный Грегоровичем [4]...[6]. Метод основан на осаждении сульфат-ионов из водно-спиртовых или водно-ацетоновых растворов поверхностноактивных и моющих веществ избытком титрованного раствора нитрата свинца и последующем оттитровывании избытка нитрата свинца раствором $K_4[Fe(CN)_6]$ в присутствии в качестве индикатора вариаминового синего и $K_3[Fe(CN)_6]$. Метод является косвенным, трудоемким и неприменим в тех случаях, когда алкиларилсульфонаты и алкилсульфаты натрия и свинца малорастворимы в водно-спиртовых и водно-ацетоновых растворах, например, при анализе поливинилсульфата натрия.

Нами разрабатываются методы анализа поверхностноактивных и моющих композиций. В настоящей работе рассмотрены методы определения сульфат-ионов в различных поверхностноактивных и моющих веществах.

2. *Экспериментальная часть*

а) *Применяемые реактивы и приборы*

Нитрат бария, 0,02 *н* раствор. Готовят из химически чистой соли $Ba(NO_3)_2$. Содержание бария устанавливают титриметрически по стандартному раствору Na_2SO_4 в присутствии карбоксиарсеназо в качестве индикатора [8].

Хлорид бария 0,4 *н* раствор. Готовят из химически чистой соли $BaCl_2$. Титр раствора устанавливают кондуктометрически по титрованному раствору Na_2SO_4.

Сульфат натрия 0,3 *н* и 0,03 *н* раствор. Готовился из химически чистой соли Na_2SO_4. Титр растворов устанавливают весовым методом.

Карбоксиарсеназо 0,1%-ный водный раствор. Индикатор синтезирован по ранее описанной методике [8].

Ацетатный буферный раствор 0,2 *м*, pH = 5,5...6,5.

Алкиларилсульфонаты и алкилсульфаты натрия использовались как в виде индивидуальных веществ, так и в виде технических смесей различного состава.

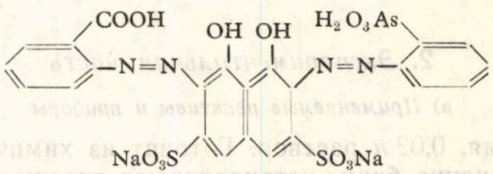
Кондуктометрическое титрование проводилось на кондуктометре ММ 34-59.

Для исследования были взяты натриевые соли различных алкиларилсульфокислот (алкиларилсульфонаты) и кислых сернокислых эфиров жирных спиртов (алкилсульфаты): октилсульфат, децилсульфат, додецилсульфат, поливинилсульфат, децилсульфонат натрия; натриевые соли диметилового, диэтилового, дибутилового, октилового и диэтилгексилового эфиров сульфоянтарной кислоты, бутилнафталин-1-сульфокислоты, ди- и трибутилнафталинсульфокислоты, а также технические смеси алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия.

6) *Титриметрическое определение сульфат-ионов*

Бариевые соли, перечисленных выше алкиларилсульфокислот и кислых сернокислых эфиров жирных спиртов малорастворимы в воде, но хорошо растворимы в отличие от сульфата бария в водно-спиртовых, водно-ацетоновых и водно-диметилформамидных растворах. Нами было использовано найденное различие в растворимости солей бария для прямого титриметрического определения сульфат-ионов в алкиларилсульфонатах и алкилсульфатах натрия.

При титриметрическом определении сульфат-ионов в поверхностноактивных и моющих средствах на основе алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия использовался в качестве индикатора 2-фенилкарбоновая кислота — (1-азо-2^{I}) — 1^{I}, 8^{I}, диоксинафталин — 3^{I}, 6^{I} — дисульфокислота — (7^{I}-азо-1^{II}) — 2^{II} — фениларсоновая кислота, динатриевая соль (карбоксиарсеназо):



Карбоксиарсеназо был предложен как индикатор для титриметрического определения миллиграммовых количеств сульфат-ионов [8]. Метод основан на том, что Ba^{2+} образует с карбоксиарсеназо при

pH = 5,5...6,5 прочный комплекс синего цвета. Исследуемый раствор (pH = 5,5...6,5) содержащий сульфат-ионы, титруют стандартным раствором $Ba(NO_3)_2$ до перехода окраски раствора от фиолетовой до сине-голубой. Для понижения растворимости выделяющегося в процессе титрования сульфата бария к раствору добавляют этанол.

Было установлено, что титрование сульфат-ионов стандартным раствором $Ba(NO_3)_2$ в присутствии карбоксиарсеназо также хорошо протекает и водно-спиртово-ацетоновых, и водно-диметилформамидных растворах с различным содержанием органического растворителя. При титровании в водно-ацетоновых растворах переход окраски менее отчетлив. Результаты количественного определения SO_4^{2-}, введенных в виде Na_2SO_4, в этих средах приведены в таблице 1.

Таблица 1

Титриметрическое определение Na_2SO_4 *в различных средах*

Растворитель	Взято Na_2SO_4 мг	Найдено Na_2SO_4 мг	Ошибка	
			мг	%
Вода : этанол : ацетон 1 : 1 : 1	2,93	2,92	— 0,01	— 0,37
	5,87	5,83	— 0,04	— 0,68
	5,87	5,86	— 0,01	— 0,16
	8,80	8,82	+ 0,02	+ 0,22
	8,80	8,81	+ 0,01	+ 0,11
	11,74	11,03	— 0,11	— 0,93
	11,74	11,69	— 0,05	— 0,43
	14,67	94,64	0,00	0,00
	14,67	14,68	+ 0,01	+ 0,07
Вода : диметил-формамид 1 : 2	2,93	2,93	0,00	0,00
	5,87	5,85	— 0,02	— 0,34
	5,87	5,87	0,00	+ 0,00
	8,80	8,82	+ 0,02	+ 0,22
	8,80	8,79	— 0,01	— 0,11
	11,74	11,72	— 0,02	— 0,17
	11,74	11,73	— 0,01	— 0,08
	14,67	14,67	0,00	0,00
	14,67	14,67	0,00	0,00
Вода : ацетон 1 : 2	2,93	2,96	+ 0,03	+ 1,02
	5,87	5,89	+ 0,02	+ 0,34
	5,87	5,90	+ 0,03	+ 0,51
	8,80	8,82	+ 0,02	+ 0,22
	8,80	8,80	0,00	0,00
	11,74	11,72	— 0,02	— 0,17
	11,74	11,72	— 0,02	— 0,17
	14,67	14,68	+ 0,01	+ 0,07
	14,67	14,70	+ 0,03	+ 0,20

Далее было изучено влияние алкиларилсульфонатов на титриметрическое определение сульфат-ионов. Методика работы заключалась в следующем: навеску 0,2...0,3 г алкиларилсульфоната или алкилсульфата натрия или смеси алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия[1]) растворяют в 20 мл смеси 1 : 1 этанола с ацетоном или в 20 мл диметилформамида. Добавляют 3...8 мл (0,005...0,0150 г) стандартного раствора Na_2SO_4, 10 мл ацетатного буферного раствора с pH = 5,5...6,5, 2...3 капли раствора индикатора и титруют полученный раствор 0,02 *н* раствором $Ba(NO_3)_2$ до перехода окраски раствора от фиолетовой до сине-голубой. Переход окраски раствора во всех случаях отличался четкостью. Следует отметить, что титрование в водно-спиртово-ацетоновых растворах происходит лучше, чем в водно-спиртовых, вследствие большой растворимости алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов бария.

Некоторые результаты количественного определения сульфата натрия приведены в таблице 2. Как видно из полученных данных метод позволяет определять миллиграммовые количества (0,005... 0,0150 г) Na_2SO_4 в присутствии различных алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия с погрешностью, не превышающей $\pm$ 1,5 %. Метод был применен для определения содержания SO_4^{2-} в поверхностноактивных и моющих препаратах. Результаты приведены в таблице 3.

Правильность полученных результатов контролировалась методом добавок, т. е. определением Na_2SO_4 в искусственных смесях поверхностноактивных и моющих веществ с сульфатом натрия. Ошибка определения сульфата натрия во всех случаях не превышала $\pm$ 1,5 %.

в) *Кондуктометрическое определение сульфат-ионов*

Как уже отмечалось, некоторые алкиларисульфонаты и алкилсульфаты бария хорошо растворимы в водно-спиртовых и водно-ацетоновых растворах в отличие от сульфата бария. Электропроводность водно-спиртовых (1 : 1) растворов алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов достаточно велика и позволяет проводить кондуктометрическое титрование.

Была изучена возможность кондуктометрического определения SO_4^{2-} в алкиларилсульфонатах и алкилсульфатах натрия путем титрования раствором $BaCl_2$.

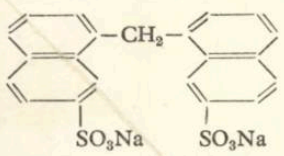
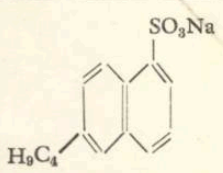
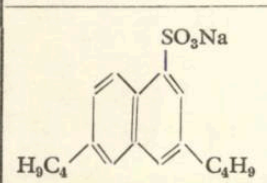
Методика работы заключается в следующем.

Навеску 0,2...1,8 г алкиларилсульфоната и алкилсульфата натрия переносят в стакан для титрования, растворяют в ~ 150 мл смеси 1 : 1 метанола или этанола с водой, добавляют 5...10 мл (0,1...0,2 г)

[1]) Некоторые алкиларилсульфонаты и алкилсульфаты натрия трудно очистить от сульфата натрия. В этом случае предварительно определяли количество Na_2SO_4 в соответствующем алкиларилсульфонате или алкилсульфате натрия.

Таблица 2

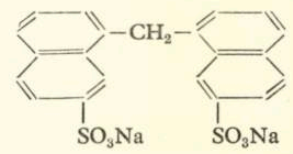
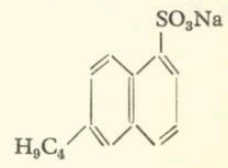
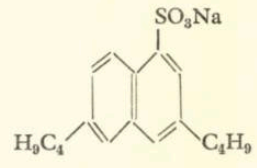
Определение Na_2SO_4 в искусственных смесях алкиларилсульфатор и алкилсульфатов натрия с сульфатом натрия

Соединения	R	Навеска вещества г	Введено Na_2SO_4 г	Найдено Na_2SO_4 г	Ошибка г	Ошибка %
Алкилсульфонаты нартия	C_{10}	0,1501	0,0125	0,0126	+0,0001	+0,77
		0,1951	0,0050	0,0050	0,0000	0,00
		0,2662	0,0075	0,0075	0,0000	0,00
$R-SO_3Na$	$C_9...C_{11}$	0,2106	0,0075	0,0074	−0,0001	−1,33
		0,2038	0,0125	0,0125	0,0000	0,00
		0,2348	0,0125	0,0124	−0,0001	−0,77
	$C_{13}...C_{18}$	0,1900	0,0050	0,0050	0,0000	0,00
		0,2795	0,0050	0,0050	0,0000	0,00
Алкилсульфаты натрия	C_8	0,1239	0,0124	0,0124	0,0000	0,00
		0,2323	0,0247	0,0247	0,0000	0,00
$R-OSO_3Na$	C_{12}	0,3020	0,0126	0,0127	+0,0001	+0,77
		0,2629	0,0126	0,0126	0,0000	0,00
	$C_8...C_{20}$	0,0543	0,0126	0,0127	+0,0001	+0,77
		0,0427	0,0126	0,0126	0,0000	0,00
Алкиларилсульфонат натрия $R-C_6H_4-SO_3Na$	$C_{12}...C_{14}$	0,1057	0,0124	0,0123	−0,0001	−0,33
		0,1106	0,0124	0,0122	−0,0002	−1,60
$CH_2-COOCH_3$ | $CH-COOCH_3$ | SO_3Na		0,3816	0,0127	0,0128	+0,0001	+0,79
		0,4061	0,0127	0,0129	+0,0002	+1,58
$CH_2-COOC_2H_5$ | $CH-COOC_2H_5$ | SO_3Na		0,5238	0,0147	0,0146	−0,0001	−0,79
		0,3360	0,0147	0,0147	0,0000	0,00
		0,4214	0,0147	0,0146	−0,0001	−0,79
$CH_2-COOC_4H_9$ | $CH-COOC_4H_9$ | SO_3Na		0,3674	0,0147	0,0148	+0,0001	+0,79
		0,4619	0,0147	0,0148	+0,0001	+0,79
		0,4426	0,0147	0,0146	−0,0001	−0,79
$CH_2-COOC_8H_{17}$ | $CH-COOC_8H_{17}$ | SO_3Na		0,4418	0,0147	0,0145	+0,0002	+1,58
		0,3941	0,0147	0,0146	−0,0001	−0,79
		0,3132	0,0147	0,0147	0,0000	0,00
$CH_2-COOCH_2CH(C_2H_5)(CH_3)_3CH_3$ | $CH-COOCH_2CH(C_2H_5)(CH_3)_3CH_3$ | SO_3Na		0,6046	0,0066	0,0066	0,0000	0,00
		0,5537	0,0066	0,0066	0,0000	0,00
		0,5630	0,0066	0,0065	−0,0001	−1,51
		0,0585	0,0147	0,0148	+0,0001	+0,79
		0,0684	0,0147	0,0147	0,0000	0,00
		0,0757	0,0147	0,0146	−0,0001	−0,79
		0,0316	0,0059	0,0058	−0,0001	−1,69
		0,0196	0,0059	0,0057	−0,0001	−1,69
		0,0453	0,0059	0,0058	−0,0001	−1,69
		0,0606	0,0059	0,0059	0,0000	0,00
		0,0557	0,0059	0,0059	0,0000	0,00
$\left[-CH_2-CH(OH)-CH_2-CH(OSO_3Na)-\right]_n$ *)		0,0320	0,0059	0,0058	−0,0001	−1,69
		0,0303	0,0059	0,0058	−0,0001	−1,69
		0,0334	0,0059	0,0059	0,0000	0,00

*) Титрование проводили в водно-диметилформамидном (1 : 2) растворе, так как поливинилсульфат натрия и поливинилсульфат бария малорастворимы в водно-ацетоновом растворах.

Таблица 3

*Определение Na_2SO_4 *) в различных поверхностноактивных и моющих веществах на основе алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия*

Соединение	R	Навеска вещества г	Найдено Na_2SO_4 %
Алкилсульфонаты натрия	$C_9...C_{11}$	0,1529	1,91
		0,2404	1,90
		0,2291	1,83
$R-SO_3Na$	$C_{13}...C_{18}$	0,3676	10,10
		0,3061	10,10
		0,3213	10,04
Алкилсульфаты натрия	C_{10}	0,1340	2,15
		0,1343	2,23
		0,1933	2,23
$R-OSO_3Na$	C_{12}	0,2989	0,12
		0,4310	0,11
		0,3800	0,14
	$C_8...C_{20}$	0,1158	47,73
		0,0661	47,14
		0,0483	47,85
Алкиларилсульфонаты натрия $R-C_6H_4-SO_3Na$	$C_{12}...C_{14}$	0,0914	10,96
		0,0951	10,84
		0,1261	10,83
$CH_2-COOCH_3$ | $CH-COOCH_3$ | SO_3Na		0,4315	2,39
		0,4381	2,37
		0,4331	2,42
$CH_2-COOC_4H_9$ | $CH-COOC_4H_9$ | SO_3Na		0,3674	0,36
		0,4619	0,32
		0,4426	0,31
		0,1223	8,85
		0,0585	8,80
		0,0684	8,92
		0,0453	15,33
		0,0316	15,15
		0,0196	15,34
		0,0606	15,04
		0,0634	14,89
		0,0557	15,01
$\left[-CH_2-CH(OH)-CH_2-CH(OSO_3Na)-\right]_n$		0,0320	31,59
		0,0334	31,57
		0,0404	31,58

*) Предлагаемым методом определяется содержание ионов SO_4^{2-}. Содержание сульфат-ионов дано нами в пересчете на содержание сульфата натрия.

MŰSZAKI EGYETEM BUDAPEST KÖNYVTÁRA

титрованного раствора Na_2SO_4 и полученный раствор титруют из полумикробюретки 0,4 *н* раствором $BaCl_2$. Титрант добавляют небольшими порциями (0,5 мл); раствор во время титрования перемешивают магнитной мешалкой.

Кривые кондуктометрического титрования (рис. 1, 2) сульфата натрия 0,4 *н* раствором $BaCl_2$ в присутствии различных алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия характеризуются отчетливым перегибом. Точка перегиба на кривой титрования соответствует, как было установлено, точке эквивалентности.

Результаты определения Na_2SO_4 в искусственных смесях с некоторыми алкиларилсульфонатами и алкилсульфатами натрия приведены в таблице 4.

Таблица 4

Определение Na_2SO_4 *в присутствии некоторых алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия*

Соединение	R	Навеска в-ва, г	Введено Na_2SO_4		Найдено Na_2SO_4, г	Ошибка	
			г	%		г	%
Алкилсульфаты натрия $R-OSO_3Na$	C_8	0,9080	0,1239	11,95	0,1229	— 0,0010	— 0,80
		0,8307	0,1239	4,45	0,1239	0,0000	0,00
		0,9101	0,2478	21,41	0,2443	— 0,0035	— 1,41
		1,8361	0,2478	11,89	0,2443	— 0,0036	— 0,41
		0,7994	0,2478	24,65	0,2508	+ 0,0030	+ 1,21
	C_{10}	0,4106	0,2478	37,68	0,2461	— 0,0017	— 0,68
		0,8940	0,1239	12,15	0,1246	+ 0,0007	+ 0,56
	C_{12}	0,4827	0,2478	33,92	0,2509	+ 0,0031	+ 1,25
		0,9543	0,1545	13,92	0,1535	— 0,0010	— 0,64
		0,8809	0,1158	11,60	0,1167	+ 0,0009	+ 0,77
		0,7281	0,0386	5,05	0,0390	+ 0,0004	+ 1,03
		0,7955	0,0772	8,86	0,0763	— 0,0009	— 1,16
		1,0186	0,0386	3,65	0,0390	+ 0,0004	+ 1,03
		0,7281	0,0386	5,03	0,0380	— 0,0006	— 1,55
Алкилсульфонаты натрия $R-SO_3Na$	C_8	0,1655	0,2478	59,95	0,2446	— 0,0032	— 1,29
		0,9411	0,2478	20,84	0,2508	+ 0,0030	+ 1,21
	C_{12}	0,2029	0,2478	45,01	0,2478	0,0000	0,00

Как видно из полученных данных, метод дает удовлетворительные результаты при определении значительных количеств ($> 5{,}0\,\%$) сульфата натрия. При определении же меньших количеств Na_2SO_4 от-

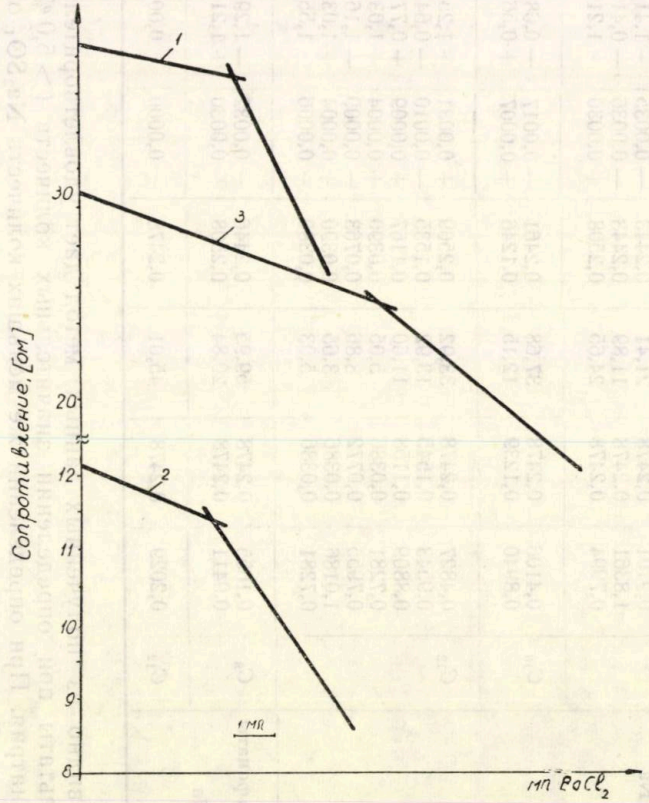


Рис. 1. — Кривые кондуктометрического титрования натрия (*1*), сульфата натрия в присутствии октилсульфата (*2*), и смеси алкилсульфонатов натрия ($R-SO_3Na$, $R=C_8...C_{20}$) (*3*) в среде метанол-вода 1 : 1.

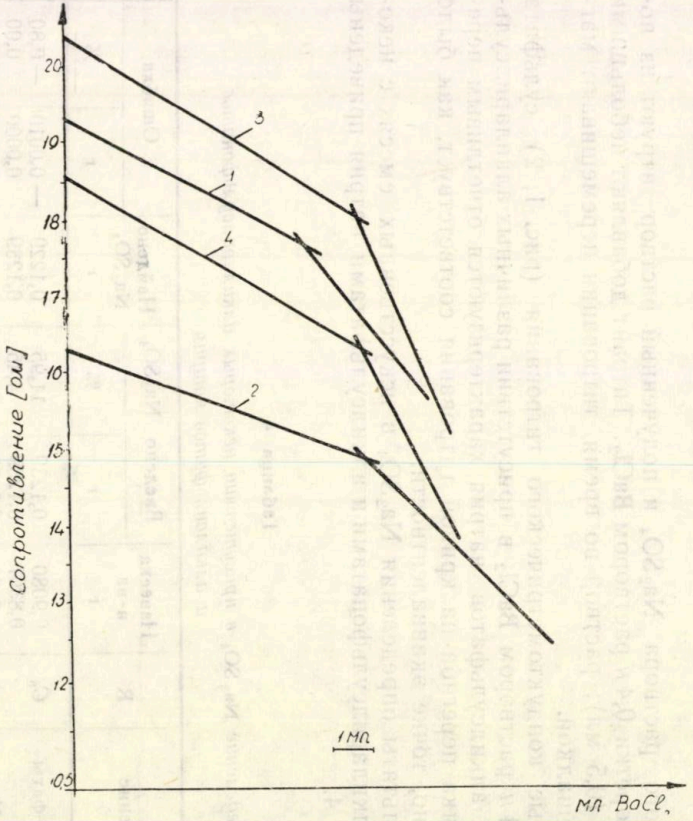


Рис. 2. — Кривые кондуктометрического титрования сульфата натрия в присутствии децилсульфата (*1*), додецилсульфата (*2*), октилсульфоната (*3*) и додецилсульфоната натрия (*4*).

четливого перегиба на кривых кондуктометрического титрования не наблюдается и получить удовлетворительные результаты не удается. Это, очевидно, связано с тем, что при высоких концентрациях алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия в растворе (а это имеет место при определении небольших количеств сульфат-ионов в смеси) происходит в значительной степени осаждение бариевых солей алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов вместе с сульфатом бария.

Метод был применен для определения сульфат-ионов в технических образцах некоторых алкилсульфатов натрия (таблица 5). Методика определения была аналогична выше описанной. Содержание сульфата натрия в образцах определялось также титрованием раствором $Ba(NO_3)_2$ с использованием карбоксиарсеназо как индикатора.

Таблица 5

Определение Na_2SO_4 *в техническом алкиларилсульфонате и алкилсульфате натрия*

Соединения	R	Найдено *) Na_2SO_4 %	
		Кондуктометрическим методом	Титриметрическим методом с карбоксиарсеназо
Алкиларилсульфонат натрия $R-C_6H_4-SO_3Na$	$C_{12}...C_{14}$	11,08	10,88
Алкилсульфат натрия $R-OSO_3Na$	$C_8...C_{20}$	47,17	47,30

*) Приведенные результаты являются средними из трех определений.

Как видно из полученных данных, результаты определения сульфата натрия двумя методами хорошо согласуются между собой.

3. *Выводы*

1. Разработан простой и быстрый титриметрический метод определения миллиграммовых количеств (0,005...0,0150 г) сульфатионов в пересчете на Na_2SO_4 в различных поверхностноактивных моющих веществах на основе алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия.

Метод основан на различии в растворимости алкиларилсульфатов и алкилсульфатов бария и сульфата бария в водно-ацетоново-спиртовых и водно-диметилформамидных средах. Ошибка определения не превышает $\pm$ 1,5%.

2. Разработан кондуктометрический метод определения сульфат-ионов в некоторых поверхностноактивных и моющих веществах на основе алкиларилсульфонатов и алкилсульфатов натрия.

Метод основан на различии в растворимости алкиларилсульфатов и алкилсульфатов бария и сульфата бария в водно-спиртовых средах. Метод может быть использован для определения значительных ($<5{,}0\,\%$) количеств сульфатов в поверхностноактивных и моющих веществах.

Ошибка определения не превышает $\pm$ 2,0 %.

Поступила 6 X 1966 г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarz G., Seifen-Öle-Fette-Wachse, 1961, **87**, *22*, S. 715.
2. Hause R., Darragh I. L., Analyt. chem., 1954, **26**, pp. 1492—1497.
3. Harada Fetsuya, Kimura Wasabura, J. Japan Oil Chemists Soc., 1958, **7**, *2*, pp. 77—87.
4. Gregorowicz Z., Kulika I., Baranowski Z., Kulicki Z., Z. anal. Chem., 1964, **199**, S. 207.
5. — Z. anal. Chem., 1963, **195**, S. 348.
6. Gregorowicz Z., Kulicka I., Z. anal. Chem., 1962, **188**, S. 263.
7. * * * *Единые методы анализа оценки моющих средств, уточненный и дополненный проект.* ВНИИЖ, Л., 1958.
8. Новикова К. Ф., Басаргин Н. Н., Цыганова М. Ф., ЖАХ, 1961, **16**, стр. 348.

DETERMINAREA IONILOR DE SULFAŢI ÎN SUBSTANŢELE DE SPĂLAT ŞI SUPERFICIAL ACTIVE

(Rezumat)

Autorii au elaborat o metodă titrimetrică simplă şi rapidă de determinare a cantităţilor de ordinul miligramelor (0,005...0,0150 g) de ioni sulfat raportate la Na_2SO_4, în diferite substanţe de spălat şi superficial active. Metoda este bazată pe folosirea alchilarilsulfonaţilor şi alchilsulfaţilor de natriu.

Eroarea de determinare nu depăşeşte +2,0%.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Curbe de titrare conductometrică a sulfatului de natriu (*1*), a sulfatului de natriu în prezenţa octilsulfatului (*2*), precum şi a amestecului de actilsulfonaţi de natriu ($R-SO_3Na$, $R=C_8...C_{20}$) (*3*) într-un mediu de metanol-apă 1 : 1.

Fig. 2. — Curbe de titrare conductometrică a sulfatului de natriu în prezenţa decil-sulfatului (*1*), dodecilsulfatului (*2*), octilsulfonatului (*3*) şi dodecilsulfonatului de natriu (*4*).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 691.5

STUDII ASUPRA UNOR CIMENTURI CU AJUTORUL METODELOR FIZICO-CHIMICE

DE

IANCU HÎNCU şi ANGELA LUCA

Comunicare prezentată la Conferința Republicană de Chimie, Timişoara, din 26—30 iunie 1966

1. Introducere

Determinarea tipului de ciment cu ajutorul analizei chimice fiind o operaţie laborioasă, în lucrarea de faţă ne-am propus să elaborăm cu ajutorul metodelor fizico-chimice, o metodă rapidă şi suficient de precisă, care să permită într-un timp scurt caracterizarea tipului de ciment.

Astfel de încercări au mai fost întreprinse de către Locher şi Richartz [1] care au obţinut unele rezultate prin spectrografie, prin difracţie şi fluorescenţă X, dar aceste metode, aşa cum este arătat de altfel şi în literatura de specialitate, prezintă dezavantajul că necesită aparate costisitoare.

În vederea elucidării acestei probleme, am ales şase tipuri de cimenturi diferite, atît din punct de vedere al calităţilor mecanice cît şi chimice, pe care le-am recoltat de la fabrica din Bicaz. Cimenturile alese sînt indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr.	Marca cimentului
1	BSS
2	RIM
3	P 400e
4	M 400
5	Pz 400i
6	P 500

Tabelul 2

Nr. crt.	Marca cimentului	Apă %	Începutul prizei min	Sfîrşitul prizei min
1	BSS	27,66	120	180
2	RIM	27,53	90	165
3	P 400 e	28,50	180	255
4	M 400	27,86	150	225
5	Pz 400 i	28,66	135	150
6	P 500	27,84	165	240

Întrucît metoda propusă de noi pentru caracterizarea tipului de ciment foloseşte pastă de ciment, s-a determinat cu ajutorul sondei Tetmayer cantitatea de apă de amestecare pentru obţinerea unei paste de consistenţă normală. În continuare s-a determinat începutul şi sfîrşitul prizei cu aparatul Vicat. Rezultatele obţinute sînt arătate în tabelul 2.

2. Proprietăţile dielectrice ale cimenturilor

Deoarece (după T o b i o [2]) normele utilizate pentru timpul de priză a cimentului (acul Vicat sau cel al lui Gilmore) sînt imprecise şi avînd în vedere unele lucrări de specialitate [3], [4] referitoare la evaluarea capacităţii de absorţie şi de reflexie faţă de undele electromagnetice a unor materiale de construcţie (gips, ciment, cărămidă), determinîndu-se în acest scop permitivitatea şi pierderile dielectrice, punînd aceste rezultate şi în conexiune cu gradul de umiditate, noi ne-am propus, în ceea ce priveşte cimenturile cercetate, de a întregi studiul acestora prin determinarea proprietăţilor lor dielectrice (permitivitate şi tangenta unghiului de pierderi) şi variaţia lor în timp la o frecvenţă de lucru constantă. Măsurătorile experimentale pentru frecvenţa de 10 kHz au fost efectuate cu o punte Tesla, iar pentru frecvenţa de 20 MHz cu un Q-metru Tesla.

S-a determinat permitivitatea şi tg δ pentru pastele de ciment de consistenţă normală. Probele de ciment au fost introduse în celule de construcţie proprie, cilindrice, de capacitate C_0, calculabilă cu formula:

$$C_0 = \frac{0{,}8686\, l}{\log_{10}(R_2/R_1)}, \tag{1}$$

unde: l — lungimea celulei cilindrice, R_1 — raza interioară a celulei, R_2 — raza exterioară a celulei.

La frecvenţa de 10 kHz pierderile dielectrice, exprimate prin tg δ, s-au citit direct iar permitivitatea s-a calculat prin determinarea variaţiei capacităţii ΔC a celulei cilindrice prin introducerea probei de ciment. În vederea determinării capacităţii ΔC s-a măsurat iniţial, în punte, capacitatea celulei goale şi a firelor de legătură (C_1) şi apoi capacitatea celulei plină cu proba de ciment prevăzută de asemenea cu firele de legătură (C_2). Mărimea ΔC a rezultat din diferenţa $C_2 - C_1$ iar permitivitatea probei respective de ciment din relaţia:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta C}{C_0}. \tag{2}$$

Pentru frecvenţa de 20 MHz valoarea lui tg δ a rezultat din relaţia:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 Q_2} \cdot \frac{C_1}{C_2}, \tag{3}$$

unde: Q_1 — factorul de calitate al circuitului cu celula goală, Q_2 — factorul de calitate al circuitului cu celula umplută cu ciment, C_1, C_2 avînd aceleaşi semnificaţii ca în cazul precedent.

Evident, permitivitatea se calculează şi de data aceasta cu relaţia (2).

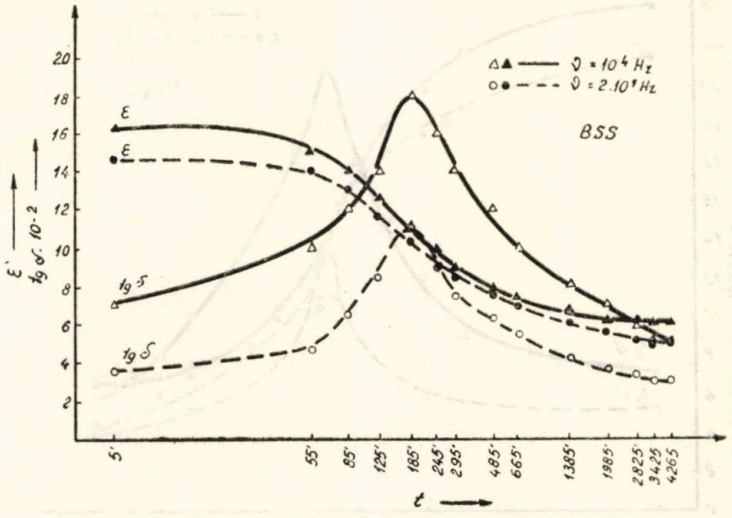

ν = 10⁴ Hz
ν = 2·10² Hz
BSS
ε
ε
tg δ
tg δ
ε' tg δ · 10-2
t
5'
55'
85'
125'
185'
245'
295'
485'
665'
1385'
1985'
2825'
3425'
4265'

Fig. 1

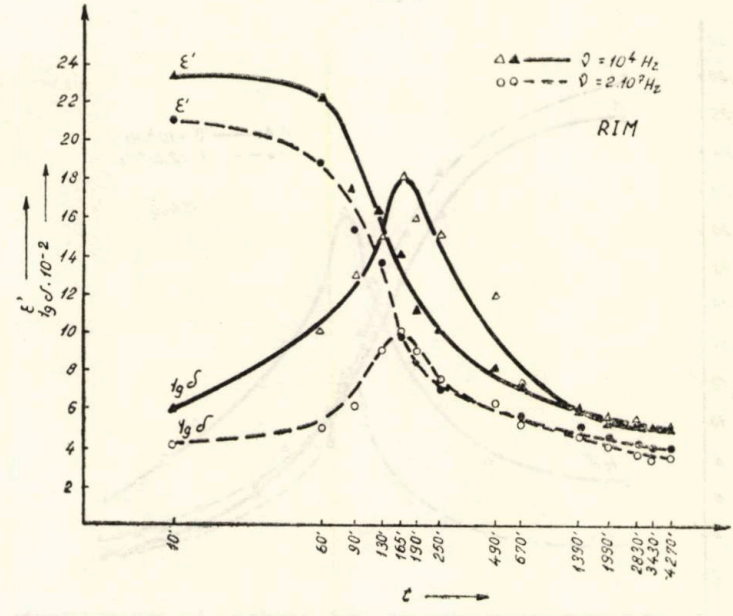

ν = 10⁴ Hz
ν = 2·10² Hz
RIM
ε'
ε'
tg δ
tg δ
ε' tg δ · 10-2
t
10'
60'
90'
130'
165'
190'
250'
490'
670'
1350'
1990'
2830'
3430'
4270'

Fig. 2

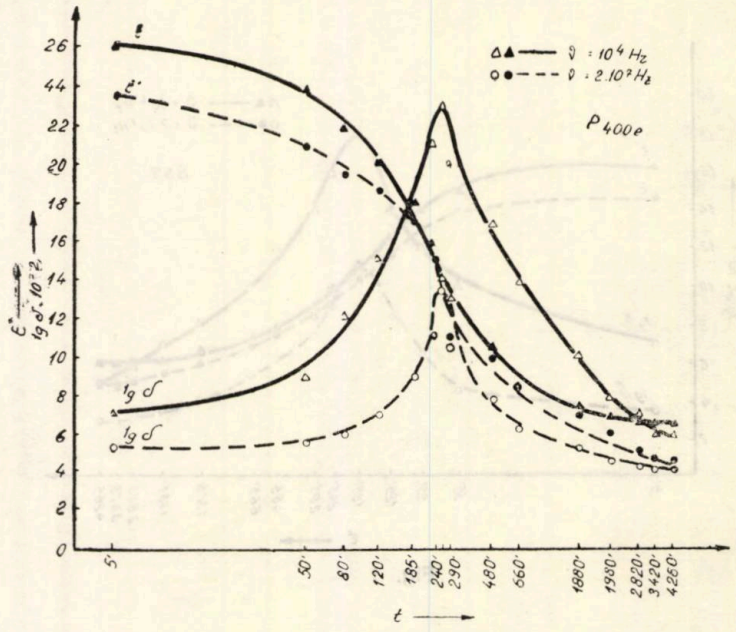


Fig. 3

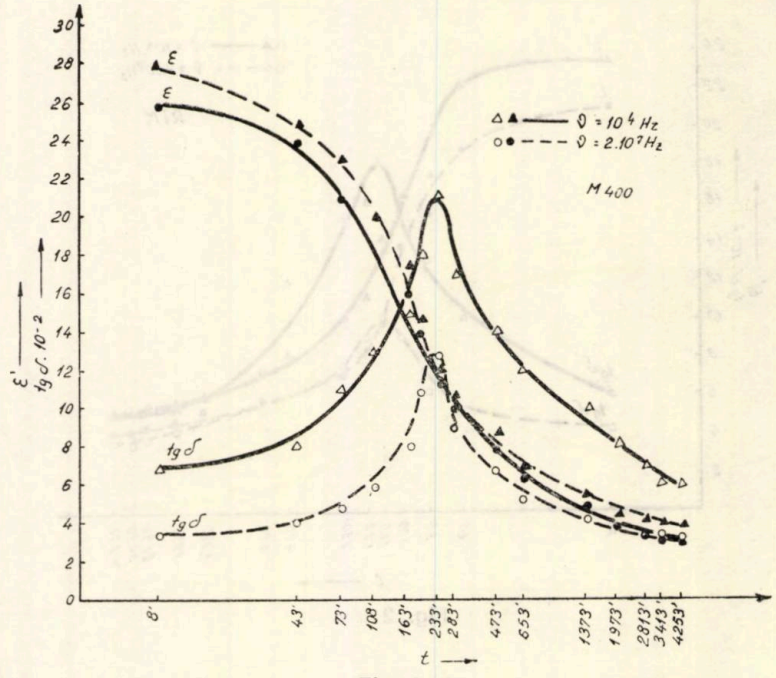


Fig. 4

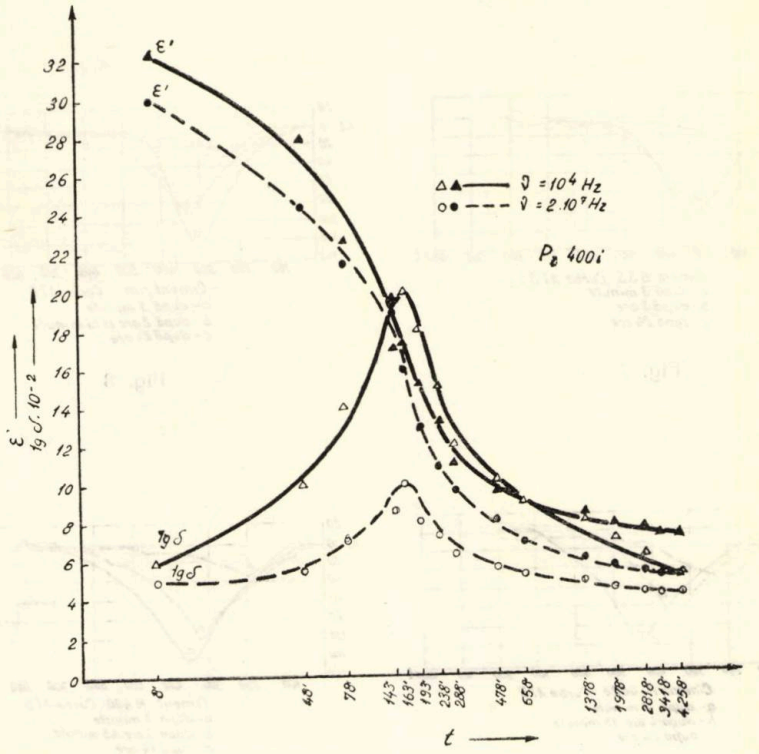

ε'
ε'
ν = 10⁴ Hz
ν = 2.10⁷ Hz
P₂ 400i
tg δ
tg δ
ε' tg δ · 10⁻²
t

Fig. 5

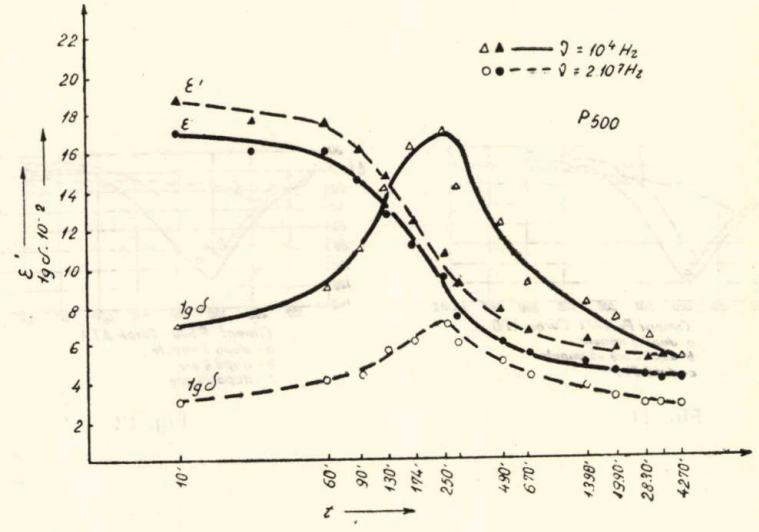
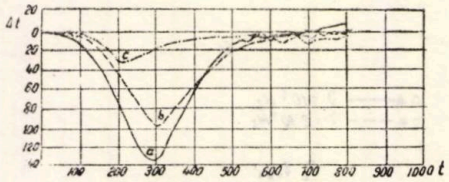
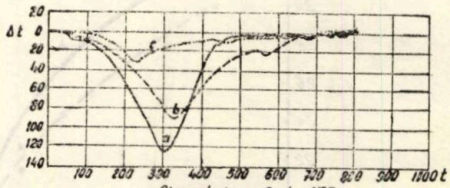

ν = 10⁴ Hz
ν = 2.10⁷ Hz
P500
ε'
ε
tg δ
tg δ
ε' tg δ · 10⁻²
t

Fig. 6



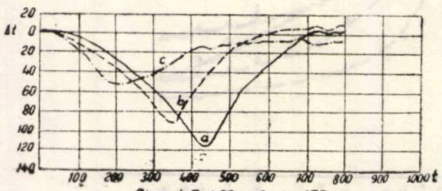
- Ciment B.S.S. Curbe ATD:
a - după 3 minute
b - după 3 ore
c - după 24 ore

Fig. 7



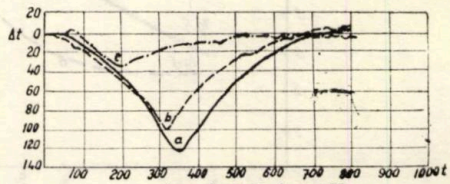
- Ciment rim Curbe ATD
a - după 3 minute
b - după 2 ore și 15 minute
c - după 24 ore

Fig. 8



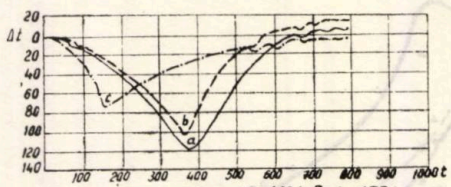
Ciment P-400e Curbe ATD
a - după 3 minute
b - după 4 ore 15 minute
c - după 24 ore

Fig. 9



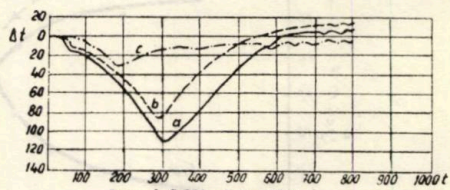
Ciment M 400 Curbe ATD
a - după 3 minute
b - după 3 ore 45 minute
c - după 24 ore

Fig. 10



Ciment P_Z 400 i Curbe ATD
a - după 3 minute
b - după 2 ore 45 minute
c - după 24 ore

Fig. 11



Ciment P 500 Curbe A.T.A.
a - după 3 minute
b - după 4 ore
c - după 24 ore

Fig. 12

REZULTATE EXPERIMENTALE

Atît pentru frecvenţa de 10 kHz cît şi pentru cea de 20 MHz, rezultatele obţinute pentru mărcile de ciment studiate sînt redate în fig. 1...6.

Din analiza curbelor de variaţie a permitivităţii şi a pierderilor dielectrice, exprimate prin tg δ, funcţie de timp (scară semilogaritmică, timpul fiind exprimat logaritmic), rezultă:

a) În cazul ambelor frecvenţe utilizate, permitivitatea scade lent cu creşterea timpului la toate mărcile de ciment utilizate, în timp ce tg δ prezintă iniţial o creştere, atinge un maxim după un anumit timp şi apoi scade în mod continuu.

b) În timp ce Balachandran [4], studiind un anumit tip de ciment, însă la altă frecvenţă şi cu altă metodă, face afirmaţia că valoarea maximă a lui tg δ este atinsă după circa 3 ore de la amestecarea cimentului cu apă, fără a face vreo legătură cu timpul de priză, noi am constatat că la cele şase mărci de ciment studiate, tg δ atinge valoarea maximă după timpuri diferite, care coincid cu sfîrşitul prizei, determinat pentru fiecare marcă de ciment cu ajutorul aparatului Vicat. Acest aspect ne permite a considera că variaţia lui tg δ funcţie de timp, respectiv determinarea timpului după care tg δ ajunge la valoarea maximă, ar putea fi folosită ca o metodă de determinare a sfîrşitului timpului de priză al cimenturilor.

c) După circa 50 ore, ε′ şi tg δ ajung, la toate mărcile de ciment, la valori relativ constante.

d) Valorile lui ε′ şi tg δ, pentru toate mărcile de ciment, sînt mai mici pentru frecvenţa de 20 MHz decît cele obţinute la 10 kHz, alura curbelor rămînînd aceeaşi.

e) La calcularea mărimilor ε′ şi tg δ, la amestecurile respective de ciment, nu s-au aplicat diversele formule ale amestecurilor indicate de Bruggemann [5], Weiner, Lichtenecker [6], Niesel [7], deoarece, după cum indică literatura [3], aceste formule nu sînt valabile, întrucît între pulberea de ciment şi apă au loc reacţii chimice.

3. Analiza termică diferenţială

În continuare, în vederea caracterizării mărcii de ciment am întreprins cercetări asupra pastei de ciment de consistenţă normală cu ajutorul analizei termice diferenţiale (ATD), metodă care a făcut obiectul a numeroase cercetări dintre care citäm cele efectuate de Rey [8], care s-a ocupat de analiza termică a lianţilor hidraulici hidrataţi, de Courtault [9], care a studiat reacţiile în fază solidă cu ajutorul ATD, de Nicol [10] care s-a ocupat de evoluţia silicaţilor şi aluminaţilor de calciu cristalizaţi, în contact cu o cantitate de apă limitată, de Petzold şi Talke [11], care au studiat cu ajutorul ATD cimentul în curs de întărire.

Analiza termică diferenţială s-a efectuat într-un cuptor tubular iar variaţiile de temperatură au fost înregistrate la un potenţiometru electronic de tip EPP-09. Termocuplul a fost confecţionat din Cromel-Alumel. Viteza

de încălzire a fost de 300°C/h. Pasta de ciment, de consistenţă normală, a fost supusă analizei termice diferenţiale: a) după 3 min de la amestecare — aşa cum a procedat şi Lommatzsch [12]; b) după timpul necesar efectuării prizei şi c) după 24 de ore.

REZULTATE EXPERIMENTALE

Rezultatele obţinute sînt redate în fig. 7...12.

Cercetînd curbele obţinute la pastele de ciment supuse analizei termice după 24 de ore de la amestecarea cimentului cu apă se observă o oarecare asemănare a alurei lor, rezultînd că nu este posibil să se distingă mărcile de ciment cu ajutorul lor.

Curbele obţinute la pastele care au fost supuse analizei termice diferenţiale după 3 min şi după timpul de priză au toate un maxim endoterm şi acuză la temperaturi diferite o inflexiune foarte adîncă.

Pentru fiecare marcă de ciment, studiul curbelor ATD (analiză termică diferenţială) conduce la următoarele concluzii:

a) *Proba nr. 1 (ciment BSS).* Curba obţinută după trei ore are o inflexiune endotermă adîncă care atinge valoarea maximă la temperatura de 280°C, după care mai prezintă încă trei mici inflexiuni la temperaturile de 620°; 650° şi 680°C. Curba ATD obţinută după 3 min de la amestecare are un maximum endoterm la 310°C şi apoi prezintă încă patru inflexiuni şi anume la 630°; 705°; 740° şi 780°C, după care curba devine paralelă cu linia de zero (fig. 7).

b) *Proba nr. 2 (ciment RIM).* Curba obţinută după 3 min posedă o inflexiune adîncă la 300°C, după care urmează două mici inflexiuni la 440° şi 690°C. După 2 h şi 45 min alura curbei ATD capătă maximum de inflexiune la 330°C şi apoi se observă inflexiuni mai modeste la 560°; 660°; 725° şi 760°C, după care curba devine paralelă cu linia de zero (fig. 8).

c) *Proba nr. 3 (Ciment P 400 e).* Curba obţinută după 3 min prezintă un maxim endoterm la 440°C, după care prezintă mici inflexiuni la 730° şi 770°C. O altă probă supusă încălzirii după 4 h şi 15 min are un maximum endoterm la 340°C, după care prezintă mici inflexiuni la 520°; 750 şi 770°C (fig. 9).

d) *Proba nr. 4 (ciment M 400.* Proba supusă la încălzire după 3 min prezintă o inflexiune endotermă la 340°C, după care mai urmează mici inflexiuni la 660°; 750°; 780° şi 800°C, şi apoi curba devine paralelă cu linia de zero. Curba obţinută, după ce proba a fost lăsată 3 h şi 45 min, are un maximum de inflexiune la 305°C şi apoi inflexiuni mai reduse la 750° şi 760°C. Ambele inflexiuni se găsesc în domeniul endoterm (fig. 10).

e) *Proba nr. 5 (ciment Pz 400 i).* Proba supusă la încălzire după 3 min prezintă o curbă a cărei inflexiune maximă are loc la 370°C, după care curba mai are mici inflexiuni la 600°; 660° şi 780°C. La încălzirea probei după 2 h şi 45 min curba prezintă o inflexiune maximă la 345°C şi apoi inflexiuni mai reduse la 550°; 660° şi 700°C (fig. 11).

f) *Proba nr. 6 (ciment P 500).* Curba ATD obţinută la încălzirea probei după 3 min de la amestecare are un maximum endoterm la 300°C, după care mai prezintă inflexiuni reduse la 580°; 660°; 750° şi 790°C. Curba ADT obţinută după patru ore prezintă un maximum de inflexiune endotermă la 280°C, urmată apoi de inflexiuni mai reduse la 500° şi 745°C (fig. 12).

Din studiul curbelor ATD obţinute şi care au valori maxime de inflexiune endotermă la Δt diferite şi la temperaturi diferite, se poate trage concluzia că această metodă poate servi la caracterizarea mărcilor de ciment.

4. Concluzii

S-a studiat posibilitatea caracterizării unor cimenturi prin analiza termică diferențială, după ce în prealabil s-a determinat justețea aprecierii sfîrșitului prizei cu ajutorul aparatului Vicat, prin intermediul pierderilor dielectrice. În urma cercetărilor efectuate și a datelor experimentale obținute s-a ajuns la următoarele concluzii:

1. Pierderile dielectrice, exprimate prin tg δ, au un maxim care diferă pentru fiecare marcă de ciment și care coincide din punct de vedere al evoluției în timp, cu timpul de priză determinat cu ajutorul aparatului Vicat.

2. Determinarea pierderilor dielectrice (tg δ) poate servi la determinarea sfîrșitului prizei unui ciment oarecare.

3. Pierderile dielectrice (tg δ) precum și permitivitatea (ε′) nu prezintă nici o inflexiune la început, care ar putea să coincidă cu începutul prizei, determinat cu aparatul Vicat.

4. Analiza termică diferențială efectuată după 3 min și după timpul necesar efectuării prizei, este caracterizată prin rezultate diferite pentru fiecare marcă de ciment în parte și poate servi la determinarea mărcii de ciment.

Institutul politehnic, Iași
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Locher F. W., Richartz W., Zement, Kalk, Gips, 1962, *1*, S. 10–16.
2. Tobio J. M., Cemento Hormigon Esp., 1961, *27*, pp. 114–124.
3. Surber W. H., Grouch G. E., J. of Appl. Phys., 1948, **19**, p. 1130.
4. Balachandran M., Ztschr. f. angew. Phys., 1955, **VII**, *12*, S. 588–593.
5. Bruggeman D. A. G., Ann. Phys., 1935–1936, **24**, S. 636, 645.
6. Lichtenecker K., Phys. Ztschr., 1926, **27**, S. 115.
7. Niesel W., Ann. Phys., 1952, **10**, p. 335 ; Ibid., 1953, **12**, p. 410.
8. Ray M., Rev. Matér. Constr. Fr., 1956, *490–491*, pp. 187–189.
9. Courtault B., R. Matér. Constr. Fr., 1963, *573*, pp. 190, 263.
10. Nicol A., R. Matér. constr. Fr, 1955, *478–479*, pp. 181–192.
11. Petzold A., Talke I., Silikattechnik, 1960, *3*, S. 122–125.
12. Lommatzsch A., Silikattechnik, 1956, *5*, S. 188–190.

ÉTUDE PAR LES MÉTHODES PHYSICO-CHIMIQUES DE CERTAINES TYPES DE CIMENTS

(Résumé)

Quelques types de ciments ont été étudiés afin de pouvoir les caractériser par l'analyse thermique différentielle et par leurs propriétés diélectriques.

L'analyse thérmique différentielle efectuée après l'obtention de la pâte de consistence normale et à la fin du temps nécessaire pour la prise est caractéristique pour chaque sorte de ciment.

Les pertes diélectriques, exprimées par tg δ, ont une valeur maxima qui diffère pour chaque type de ciment et qui coïncide avec la fin de la prise.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 668.8/.9 ; 678.76

IPSOSUL CU ADAOSURI DE POLIMERI SAU DE LIANŢI MINERALI (I)

DE

ELISABETA PĂUNEL, FLORICA VASILESCU, C. CARAMAN, I. BURLACU şi I. MUNTEANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Ipsosul este consacrat de multă vreme pentru anumite forme de utilizare în construcţie, datorită calităţilor pe care le posedă. Fiind însă un liant aerian, domeniile în care se utilizează sînt limitate.

Astăzi cînd se pune accentul tot mai mult pe grăbirea ritmului de execuţie a construcţiilor şi realizarea lor la un preţ de cost cît mai scăzut, ipsosul poate fi folosit cu succes la atingerea acestor obiective. În consecinţă, în toată lumea se cercetează posibilităţile de a-i extinde sfera de utilizare prin îmbunătăţirea rezistenţelor mecanice şi în special a comportării faţă de acţiunea apei. Metodele aplicate pentru creşterea stabilităţii faţă de acţiunea apei se bazează fie pe procedee de izolare hidrofugă prin imersie, fie prin adaosuri care să reducă solubilitatea ipsosului[1]), ori prin creşterea compactităţii aplicînd procedee mecanice.

În cele ce urmează se expun rezultatele şi observaţiile noastre asupra comportării şi structurii ipsosului în prezenţa unor adaosuri de polimeri, atunci cînd se află în medii cu umidităţi diferite, în comparaţie cu efectul adaosului de ciment sau de var.

2. Adaosul de polimeri în pasta de ipsos

S-a experimentat adaosul de aracet[2]), epodur E[3]), latex natural. Aprecierile asupra comportărilor s-au bazat în special pe modificările rezistenţei la compresiune în funcţie de gradul de umiditate al mediului. Majoritatea probelor au fost confecţionate din pastă de ipsos de consistenţă normală (v. tabelele 1, 2).

---

[1]) În străinătate rezultate satisfăcătoare s-au obţinut prin adaosul de dietildiclorsilan ($(C_2H_5)_2 Si Cl_2$) în proporţie de 4...5% din greutatea ipsosului.

[2]) Aracet : acetat de polivinil în emulsie neplastifiat, cu 45...50% solide (fabrica Rîşnov).

[3]) Epodur E : a) răşină epoxidică frecată cu TiO_2, ZnO + solvenţi : acetonă, xilen, acetat de butil: b) întăritorul: etilendiamină, răşină epoxidică şi solvenţi. Raportul de amestec : a) 1 kg + b) 0,3 kg.

Cuburile au fost introduse după 7 zile, 2 luni și 10 luni[4]) de la confecționare în medii diferite: o serie în atmosferă umedă, altă serie în apă, iar cuburile martor au fost păstrate în aer. După 3 zile de tratament în aceste condiții, probele au fost încercate la

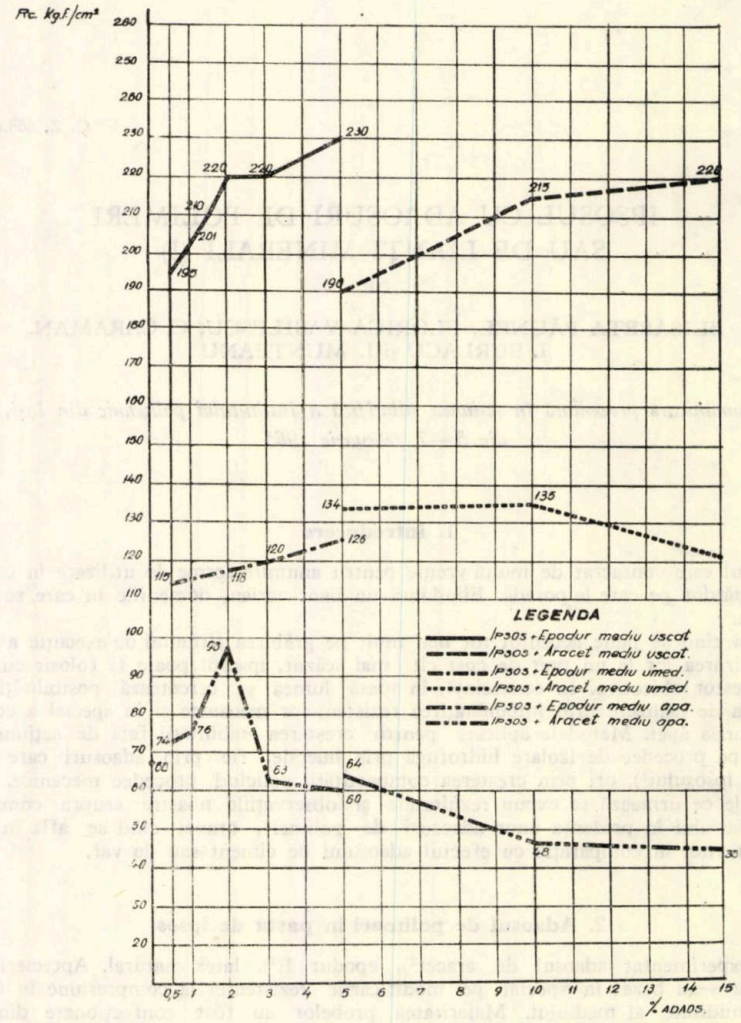


Fig. 1. — Variația rezistenței la compresiune a ipsosului în funcție de proporția de epodur și aracet la 7 zile de la confecționare + 3 zile tratament în: aer, mediu umed ori apă.

[4]) S-a constatat că adaosurile întîrzie uscarea epruvetelor, ceea ce ne-a determinat să efectuăm încercările la intervale mai lungi (două luni). Considerînd că în timp se pot petrece fenomene și reacții care să ducă la o îmbunătățire a comportării, s-au întreprins încercări și la 10 luni de la confecționarea probelor.

Tabelul 1

Rezistența la compresiune a ipsosului cu adaos de polimeri

Nr. crt.	Compoziția	Timpul după care s-au făcut încercările	În mediu uscat		În mediu umed		În apă	
			R_c kgf/cm²	R_t kgf/cm²	R_c kgf/cm²	R_t kgf/cm²	R_c kgf/cm²	R_t kgf/cm²
1	Ipsos cenușiu 100 g, apă (const. norm.) 49 cm³	7 zile	164		122		68	
2	Ipsos cenușiu 99,5%, epodur 0,5%, apă 49 cm³	7 zile 2 luni 10 luni	194 204 224	10 12,4	115	4,3	74	
3	Ipsos cenușiu 99 g, epodur 1%, apă 49 cm³	7 zile 10 luni	205 224	10	115	4,3	76	3,4
4	Ipsos cenușiu 98,5 g, epodur 1,5 g, apă 49 cm³	7 zile 2 luni 10 luni	210 224	10	116 128	4,4	76 88	3,6
5	Ipsos cenușiu 98 g, epodur 2 g, apă 49 cm³	7 luni 2 luni 10 luni	220 220 228	10,5	118 130	4,5	98 98 98	3,7
6	Ipsos cenușiu 97 g, epodur 3 g, apă 49 cm³	7 zile 2 luni 10 luni	220 220 222	10,5	120 132 132	4,7	63 80 80	3,3
7	Ipsos cenușiu 95 g, epodur 5 g, apă 49 cm³	7 zile 2 luni 10 luni	230 232 235	10,7	126 136	4,9	60 80 78	
8	Ipsos cenușiu 91 g, epodur 49 g, apă 49 cm³	7 zile 2 luni 10 luni					58 76	2,9
9	Ipsos 95 g, acetat 5 g, apă 49 cm³	7 zile 10 luni	190 201		134 112		64	
10	Ipsos 90 g, acetat 10 g, apă 49 cm³	7 zile 10 luni	215 228		135 96		48 48	
11	Ipsos 85 g, acetat 15 g, apă 49 cm³	7 zile 10 luni	220 230		122		35	
12	Ipsos 90 g, acetat 10%, apă 43 cm³	7 zile 10 luni	235 244		135		64	
13	Ipsos 85 g, acetat 15 g, apă 36 cm³	7 zile 10 luni	260 274		116 124		42 42	
14	Ipsos 99 g, latex 1 g, apă 49 cm³	7 zile	181	9	107	5,5	75	3,5
15	Ipsos 99 g, latex 1%, apă 49 cm³, hexametafosfat de sodiu 2,04 g	7 zile	174	8,7	94	4,7	74	3,8

compresiune. În tabelul 1 şi fig. 1 sînt prezentate rezultatele acestor încercări în comparaţie cu ipsosul fără adaos. Se pun în evidenţă următoarele aspecte:

a) Dacă faţă de rezultatele obţinute la 7 zile comportarea este mult mai bună la 2 luni de la confecţionare, la 10 luni nu se înregistrează o creştere evidentă a rezistenţelor (v. tabelul 1).

b) O îmbunătăţire mai evidentă a rezistenţelor mecanice (fig. 1) faţă de probele martor (fără adaos) se pune în evidenţă în prezenţa adaosului de epodur şi de aracet în mediu uscat,

Tabelul 2

Durata prizei la ipsos cu adaos de latex şi aracet

Compoziţia	Apa de amestecare %	Începutul prizei min.	Sfîrşitul prizei min.
Ipsos curat (martor)	55	2'30''	6'30''
Ipsos 99%, latex 1%	45	4'30''	9'30''
Ipsos 99%, latex 1%	47,5	5'	9'30''
Ipsos 99%, latey 1% (pastă consistenţă normală)	49	6'30''	10'30''
Ipsos 90%, aracet 10% (pastă consistenţă normală)	43	17'	25'
Ipsos 85%, aracet 15% (pastă consistenţă normală)	36	16'... 17'	27'... 28'

ca urmare a faptului că aceste adaosuri contribuie la creşterea compactităţii masei prin umplerea golurilor dintre cristalii şi germenii cristalini de $CaSO_4 . 2H_2O$ cît şi a granulelor care au fost complet hidratate. Nu s-au sesizat reacţii chimice între ipsos şi adaosurile de polimeri.

c) În mediu umed, în prezenţa ambelor adaosuri, rezistenţa la compresiune este aproximativ egală cu cea a probelor fără adaos (fig. 1).

d) În apă, probele cu adaos de epodur înregistrează o uşoară creştere a rezistenţei la compresiune, faţă de probele fără adaos (fig. 1), epodurul fiind un polimer cu o bună comportare faţă de apă; cele cu adaos de aracet au rezistenţe mai scăzute decît probele fără adaos.

3. Adaosul de P.V.C. în ipsos uscat

Amestecul s-a realizat în stare uscată iar pentru obţinerea pastei a fost folosit plastifiant în doze mărite (tabelul 3). Probele obţinute după tratamentul termic sînt impermeabile; chiar la fierbere în apă (96°C) nu a avut loc hidratarea ipsosului.

În perioada de maturare, după mojarare pînă la amestecare (v. tabelul 3), plastifiantul adăugat a umflat granulele de P.V.C. pe un strat superficial. Ulterior la cald, totul s-a transformat într-o masă cu vîscozitate redusă, care prin răcire a trecut în stare gelică. Această masă gelică formată realizează legătura între granulele de ipsos, care joacă rolul unui agregat în masa gelică. Nu s-au sesizat reacţii chimice între ipsos şi P.V.C.

Pentru a provoca hidratarea ipsosului s-a experimentat adaosul unei sări cu multă apă de cristalizare şi anume s-a lucrat cu $Na_2CO_3 . 10 H_2O$, care pierde apa la 112°C. Această sare s-a adăugat în cantitate calculată stoechiometric. În ruptură parte din granule se văd cu ochiul liber; nici în acest caz n-a avut loc hidratarea.

Probele obţinute prezintă elasticitate, nu absorb apă şi au aspectul unui linoleum. Dozajele cu care s-a experimentat sînt date în tabelul 3; sînt posibile îmbunătăţiri modificînd dozajele.

Tabelul 3

Condiţiile în care au fost confecţionate probele din ipsos + P. C. V.

Nr. crt.	Dozaj	Etapa I amestecurile :		Etapa II		
		1	*2*	Amestecarea	Fasonarea	Polimerizarea continuată de presare la cald
1	Ipsos 50 g, P.V.C. 50 g, plastifiant 40% dietil sebacit (masă fluidă)	Ipsos + plastifiant 10 cm^3, 2 ore	P.V.C. + plastifiant 30 cm^3, 2 ore	Amestec *1 + 2* 30 min	Între 2 foi metalice — plăci 3 mm uşor presate	În etuvă la 168°... 173°C, 3/4 ore
2	Ipsos 90 g, P.V.C. 10 g, plastifiant 40% (masă cu vîscozitate mare)	Ipsos + plastifiant 30 cm^3, 2 ore	P.V.C. + plastifiant 10 cm^3, 2 ore	15 min	idem	Proba fisurează şi se închide la culoare, aderă la metal
3	Ipsos 80 g, P.V.C. 20 g, plastifiant 40 cm^3 (masă fluid vîscoasă)	Ipsos + plastifiant 30 cm^3, 2 ore	P.V.C. + plastifiant 10 cm^3, 2 ore	15 min (masă fluidă)	idem	După 10 min se înmoaie, după 20 min se colorează cenuşie
4	Ipsos 60%, P.V.C. 40 g, plastifiant 40 cm^3	Ipsos + plastifiant 20 cm^3, 2 ore	P.V.C. + plastifiant 20 cm^3, 2 ore	idem	idem	În etuvă la 168°... 173°C, 3/4 oră
5	Ipsos 80%, P.V.C. 20 g, plastifiant 20 cm^3	Ipsos + plastifiant 8 cm^3, 2 ore	P.V.C. + plastifiant 12 cm^3, 2 ore	idem	idem	idem
6	Ipsos 60%, P.V.C. 40 g, plastifiant 30 cm^3	Ipsos + plastifiant 8 cm^3, 2 ore	P.V.C. + plastifiant 22 cm^3, 2 ore	idem	idem	idem

4. Ipsos cu adaos de ciment

Din cercetările noastre precedente cît şi din cele efectuate în lucrarea de faţă rezultă (tabelele 4, 5, fig. 2, 3):

a) Adaosul de ciment în proporţie de 5... 15% aduce o creştere evidentă a rezistenţelor la compresiune a probelor păstrate în mediu uscat, umed şi în apă timp de 7, 14, 21 zile, după întărire în aer timp de 7, 14 zile. La un adaos de ciment pînă la 10% se obţine o

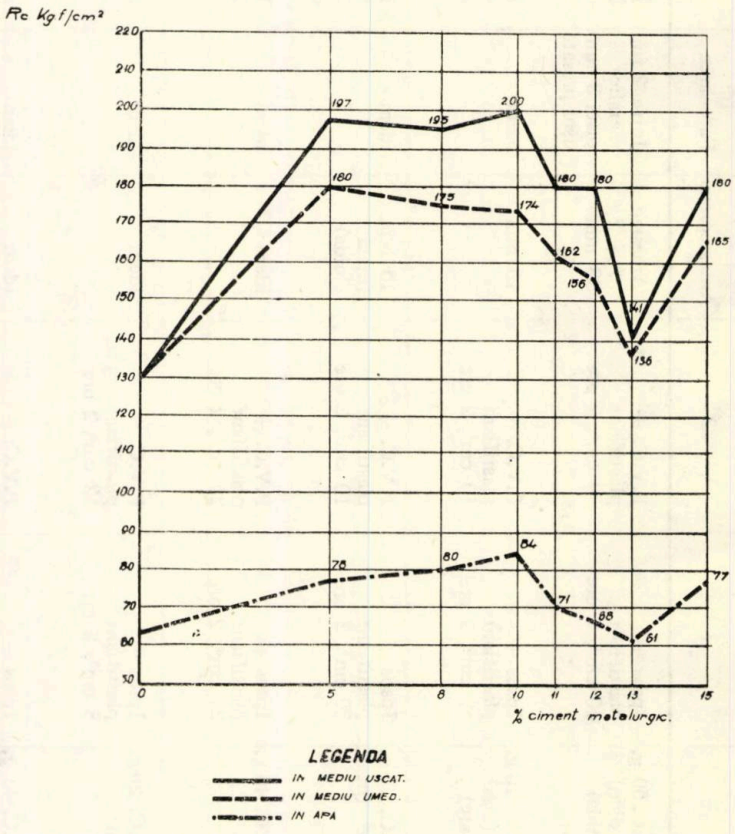


Fig. 2. — Variaţia rezistenţei la compresiune la cuburile de ipsos cu adaos de ciment metalurgic, ţinute în aer uscat 7 zile şi apoi 7 zile în mediu umed ori în apă.

creştere a rezistenţei la probele păstrate în cele trei medii; rezistenţa este mai scăzută la probele cu adaos de ciment în proporţie de 11... 13%, iar la probele cu adaos de 15% ciment rezistenţele cresc din nou (v. tabelul 4 şi fig. 2).

b) Se înregistrează variaţii de rezistenţă la compresiune şi în funcţie de tipul de ciment (v. tabelele 4, 5). S-a lucrat cu ciment RIM, P 400, P 300 şi M 400. În genere adaosul de ciment metalurgic aduce o creştere mai mare a rezistenţei la compresiune a ipsosului în cele

Tabelul 4

Variația rezistenței la compresiune în funcție de dozaj și mediu (kgf/cm²)

Ciment M 400 la % ipsos	Martor mediu uscat				După 7 zile în aer uscat						După 14 zile în aer			
					în aer umed			în apă			în aer umed		în apă	
	7	14	21	28	7	14	21	7	14	21	7	14	7	14
0	75	130	130	—	84	112	—	48	33	—	116	—	40	—
5	130	194	194	197	165	185	180	79	85	78	160	170	88	85
8	103	185	185	195	108	170	175	86	79	80	165	173	70	83
10	85	149	149	200	148	153	174	87	83	84	147	141	77	83
11	96	150	150	180	116	147	162	72	68	71	137	124	63	73
12	88	166	166	180	120	131	156	67	70	68	108	126	71	72
13	86	140	140	141	116	140	136	75	69	61	132	115	71	66
15	110	140	140	180	140	160	165	88	80	77	160	161	27	82

Tabelul 5

Rezistența la compresiune a ipsosului cu adaos de ciment P 300, P 400, RIM

Adaos de ciment		De la confecționare 7 zile în mediu uscat		
Marca	Proporția %	+ 7 zile în mediu uscat R_c kgf/cm²	+ 7 zile în mediu umed R_c kgf/cm²	+ 7 zile în apă R_c kgf/cm²
P 300	—	80	84	30
	5	97	102	39
	10	96	138	40
	11	100	126	41
	12	104	124	42
	13	93	120	40
	20	83	198	40
		De la confecționare 3 zile în mediu uscat		
		+ 3 zile în mediu uscat R_c kgf/cm²	+ 3 zile în mediu umed R_c kgf/cm²	+ 3 zile în apă R_c kgf/cm²
P 400	10	195	108	96
RIM	10	208	124	100

trei medii decît adaosul de alte cimenturi (în aceleași proporții și condiții). Cu adaosul de ciment RIM, probele menținute în medii umede înregistrează valori mai mari decît cele cu adaos de ciment P 400; diferența nu se sesizează la probele imersate în apă (v. tabelul 5).

c) Interesante sînt următoarele rezultate: cînd probele sînt introduse în mediu umed, la 7 zile de la confecționare (fig. 3), rezistența la compresiune continuă să crească (în mediu umed) spre deosebire de probele introduse în mediu umed la 14 zile de la confecționare, în care caz rezistența la compresiune în mediu umed are, în timp, valori mai reduse decît cea a probelor introduse în acest mediu la 7 zile de confecționare, ca o consecință desigur a condițiilor diferite din timpul hidratării cimentului. La probele introduse în apă, atît la 7 zile cît și la 14 zile de la confecționare, rezistențele la compresiune sînt uneori chiar mai mici decît cele ale probelor la 7 zile de la confecționare (fig. 3 c).

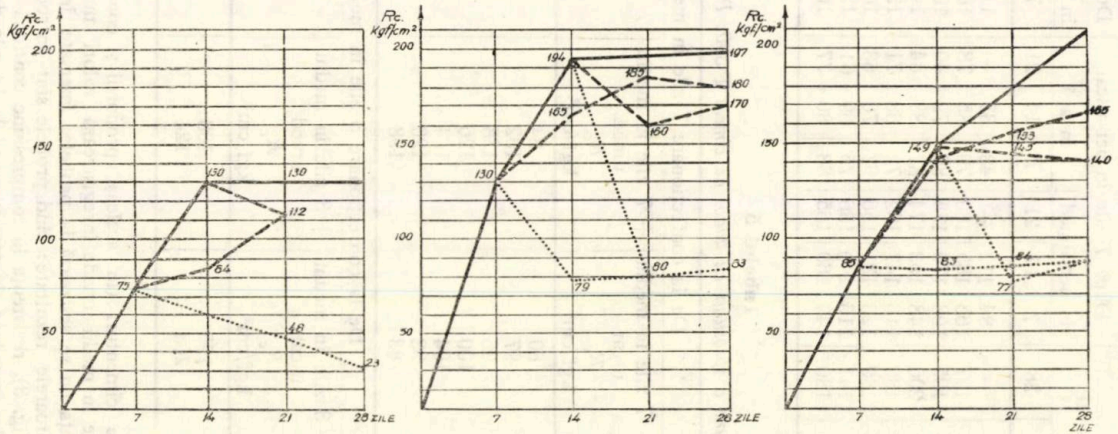


Fig. 3. — Variația rezistenței la compresiune a cuburilor din ipsos cu adaos de ciment metalurgic, în funcție de timp și mediu.

Considerăm că îmbunătăţirea rezistenţei la compresiune a ipsosului, în cele trei medii, în prezenţa adaosului de ciment, este o consecinţă a unor fenomene chimice şi fizice care au loc.

Ipsosul nu se comportă satisfăcător în mediu umed, căci $CaSO_4 . 2H_2O$ format este în oarecare măsură solubil în apă (saturarea se realizează cu 2 g/l). Din cauza porozităţii masei de ipsos întărit apa pătrunde în întreaga masă, produce solvirea treptată în timp iar în consecinţă porozitatea creşte mereu.

d) Cimentul adăugat, pune în libertate prin hidratare $Ca(OH)_2$. În apă vor apărea ioni comuni de Ca^{2+}, care iau parte la saturarea apei:

$$Ca(OH)_2 \rightarrow Ca^{2+} + 2(OH)^-, \quad CaSO_4 \rightarrow Ca^{2+} + (SO_4)^-.$$

În cazul ipsosului curat 1 l apă solvă 0,0116 moli $CaSO_4 . 2H_2O$.

În prezenţa adaosului de ciment, deci în prezenţa ionilor comuni de Ca (1 l apă + $CaSO_4 . 2H_2O$ + $Ca(OH)_2$), solubilitatea sulfatului de calciu se reduce.

e) Comportarea mai bună a ipsosului cu adaos de ciment metalurgic faţă de cea a ipsosului cu adaos de ciment portland o explicăm prin prezenţa zgurei care conţine CaS şi care pune în libertate $Ca(OH)_2$:

$$2\,CaS + 2\,H_2O \rightarrow Ca(SH)_2 + Ca(OH)_2.$$

Avantajul pe care îl prezintă adaosul de ciment la ipsos faţă de adaosul de var, rezultă din faptul că hidratarea cimentului şi a zgurei au loc continuu, în timp îndelungat, şi în modul acesta se pun mereu în libertate noi cantităţi de $Ca(OH)_2$ care menţin echilibrul soluţiei fără participarea ionilor de Ca^{++} din ipsos (nu s-a determinat constanta de volum care ar furniza indicaţii dacă în acest caz intervine vreo modificare evidentă de volum).

f) Îmbunătăţire rezistenţelor mecanice în mediu umed se datoreşte şi reacţiei:

$$3\,CaO . Al_2O_3 + 3\,CaSO_4 + H_2O \rightarrow 3\,CaO . Al_2O_3 . 3\,CaSO_4 . 31\,H_2O.$$

Noul component format, cristalin şi cu volum mărit faţă de componenţii din care a rezultat, este insobilul şi contribuie la creşterea capacităţii masei întărite. Influenţa este favorabilă dacă proporţia în care se formează corespunde cantităţii necesare umplerii porilor (de aici şi necesitatea de a se stabili proporţia optimă de adaus de ciment).

5. Adaosul de var la ipsos şi imersia probelor în soluţie de acid oxalic

La pasta de ipsos s-a adăugat $Ca(OH)_2$ (12,5% faţă de ipsos) şi s-au confecţionat cuburi. După 2 luni de zile de la imersia în soluţia de acid oxalic, s-au lăsat o zi şi apoi s-au supus tratamentului (mediu uscat, mediu umed, apă). Din rezultatele obţinute la încercări rezultă o îmbunătăţire în comportare a probelor în mediu umed, ca o consecinţă a formării oxalatului de calciu (sare insolubilă) care impermeabilizează suprafaţa ipsosului.

Tabelul 6

Rezistenţa la compresiune a ipsosului cu adaos de var şi imersat în soluţii de acid oxalic

	Întărire 2 luni în mediu uscat		
	3 zile în mediu uscat R_c kgf/cm²	3 zile în mediu umed R_c kgf/cm²	3 zile în apă R_c kgf/cm²
Proba martor (ipsos fără adaos)	164	122	68
Ipsos + $Ca(OH)_2$, imersie în acid oxalic	170	160	88

6. Concluzii

1. Adaosurile de epodur, aracet şi latex natural la ipsos contribuie în genere la creşterea în timp a rezistenţei la compresiune faţă de proba martor (ipsos fără adaos).

2. Creşterea rezistenţei la compresiune a probelor de ipsos cu adaosuri variază în funcţie de tipul de adaos (epodur, aracet, latex natural), cu proporţia de adaos, cu mediul în care se păstrează probele, cu intervalul de timp după care se efectuează încercarea (tabelul 1). Rezultatele cele mai bune pentru cele trei medii (uscat, umed, apă) s-au obţinut cu adaos de epodur.

3. Adaosul de ciment 5...15% aduce o creştere evidentă a rezistenţelor la compresiune a probelor păstrate în cele trei medii. Tipul de ciment adăugat influenţează de asemenea asupra rezistenţelor (v. tabelele 4...6).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geologie şi geotehnică,
Laboratorul de materiale
de construcţii

BIBLIOGRAFIE

1. Бульчиков Г. Г., *Смешанные гипсы.* Госстройиздат, М., 1952, стр. 133.
2. Duriez M., Arrambide J., *Noveau Traité de Matériaux de Construction.* T. **I**, Dunod, Paris, 1961, pp. 594–597.
3. Elkinson R. Z., *Îmbunătăţirea calităţii formelor de ipsos.* Caiet selectiv, „Materiale de construcţii", 1960, *8*, pag. 49.
4. Hoffmann H., Sarack A., *Tratamentul suprafeţei ipsosului turnat pentru a-i ameliora rezistenţa la apă.* Caiet selectiv, „Materiale de Construcţii", 1963, *8*, pp. 452–456.
5. Niemann H., *Răşini epoxidice întărite cu poliamide, folosite în construcţii.* Materiale de Construcţii, 1962, **10**, *3*.
6. Wlassak B., Wlassak P., *Ipsos poros.* Materiale de Construcţii, 1962, **10**, *11* pp. 633–637.
7. Kern F., *Ein neuer Putzgips.* Baustoffindustrie, 1959, *11*, S. 171.
8. * * * *Ipsosul polimer pe bază de răşini fenolfurfurolice.* Caiet selectiv, „Materiale de Construcţii", 1961, *2*.
9. * * * *Ameliorarea proprietăţilor ghipsului cu ajutorul răşinilor sintetice.* „Materiale de Construcţii", 1962, **10**, *12*.

LE GYPSE À ADDITIONS DE POLYMÈRES OU DE LIANTS MINÉRAUX (I)

(Résumé)

On présente les résultats et les observations concernant le comportement du gypse en présence de certaines additions de polymères (acétate de polyvinile, résine époxidique, chlorure de polyvinile), lorsque ceux-ci se trouvent dans des milieux à humidités différentes de celle du gypse auquel on a ajouté la ciment ou la chaux.

L'interprétation des résultats est faite compte tenu des variations de la résistance à la compression dans des conditions d'humidité différentes.

Explication des figures

Fig. 1. — Variation de la résistance à la compresion du gypse, fonction de la proportion d'épodur et d'aracet, 7 jours après que l'on confectionne les preuves + 3 jours de traitement dans l'air, en milieu humide où bien dans l'eau.

Fig. 2. — Variation de la résistance à la compression des cubes de gypse avec addition de ciment métalurgique, maintenues dans l'air sec 7 jours et puis 7 jours en milieu humide où bien dans l'eau.

Fig. 3. — Variation de la résistance à la compression des cubes de gypse avec addition de ciment métalurgique, en fonction du temps et du milieu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. Z. 620.193; 669.14; 66.097.7

DESPRE EFECTELE INHIBITORULUI TIOUREE ASUPRA COROZIUNII OŢELULUI OLC 45 IN ACID SULFURIC

DE

ŞT. IVĂŞCANU şi VIORICA FILIP

1. Introducere

Distrugerile provocate de coroziune la construcţiile metalice de către mediile agresive acide se pot micşora prin folosirea inhibitorilor. Aceştia, adăugaţi în cantităţi mici în mediul agresiv, reduc în mare măsură procesele de coroziune şi contribuie la micşorarea consumului de acizi. În acelaşi timp, micşorează depunerile în instalaţiile metalice permiţînd realizarea unui transfer mai bun de căldură.

În legătură cu acţiunea de frînare a coroziunii de către aceste substanţe se întreprind numeroase cercetări.

Majoritatea inhibitorilor, descrişi şi studiaţi, care frînează dizolvarea fierului în acidul sulfuric, sînt substanţe organice ce conţin ca elemente caracteristice azot, sulf, oxigen sau combinaţii ale acestora [1].

În conformitate cu teoria lui Machu [2], privind acţiunea inhibitorilor asupra coroziunii oţelului, inhibitorul formează pe suprafaţa metalului (pe anozii locali), prin adsorbţie reversibilă (adsorbţie fizică) fie ireversibilă (chemosorbţie) un strat de acoperire şi anume, un gen de barieră ce prezintă, în general, aceleaşi proprietăţi ca şi un strat de oxid. Această barieră posedă o rezistenţă ohmică importantă şi împiedică mai mult sau mai puţin — pe cale pur mecanică — reacţiile de coroziune prin blocarea centrilor activi de pe suprafaţa oţelului [3].

Inhibitorii cei mai eficace în soluţii de acid sulfuric sînt compuşii organici ce conţin sulf bivalent: mercaptanii şi derivaţii lor, tioacizii precum şi amidele tioacizilor. Unul dintre acestea — mult utilizat — este tioureea. Deşi prezintă o mare eficacitate, utilizarea ei atrage după sine unele acţiuni nefavorabile asupra proprietăţilor mecanice ale oţelului şi anume apariţia fragilităţii [4].

În cele ce urmează ne-am propus să cercetăm unele aspecte privind efectele inhibitorului tiouree în acidul sulfuric asupra oţelului OLC 45 (proporţia de carbon 0,42... 0,50%) în funcţie de următorii parametri: temperatura, concentraţia inhibitorului şi timpul de contact dintre oţel şi mediul agresiv.

2. Partea experimentală

Pentru studiul coroziunii şi a efectelor de inhibare s-au utilizat epruvete din oţel OLC 45 în formă de disc cu suprafaţa de 0,001174 m^2, pregătite în modul cunoscut şi anume prin: polizare, degresare şi decapare.

După spălare cu apă epruvetele au fost ţinute în exicator pentru ca întreaga suprafaţă să capete aceeaşi activitate. Viteza procesului de coroziune a fost determinată cu ajutorul indicelui gravimetric în baza a două cîntăriri: înainte şi după coroziune. Instalaţia utilizată este redată în fig. 1.

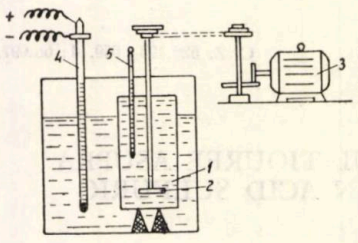


Fig. 1. — Schema instalaţiei: *1* — vas termostat, *2* — disc probă, *3* — electromotor, *4* — termometru de contact, *5* — termometru de control.

Epruvetele metalice au fost prinse solidar la axul de angrenare după care au fost scufundate în mediul agresiv. Condiţiile de efectuare a experienţelor au fost următoarele: mediul agresiv — acid sulfuric 0,5 *n*; temperaturile experimentate — 30°; 40° şi 50°C; concentraţia inhibitorului în acid sulfuric — 1 : 1 000; 1 : 10 000; 1 : 20 000. Timpul de expunere a probei în mediul agresiv a variat de la o oră la 20 ore. Temperatura a fost menţinută constantă, la valoarea fixată, prin intermediul unui termostat cu o toleranţă de $\pm$ 0,1°C.

Experienţele au fost efectuate în condiţiile hidrodinamice determinate de agitarea epruvetei de oţel (la 800 rot/min) cu ajutorul unui motor electric prin intermediul axului de angrenare. În toate experienţele a fost menţinut acelaşi număr de rotaţii.

Se ştie că influenţa vitezei de curgere a mediului agresiv asupra procesului de coroziune este complexă [5]. În cazul de faţă viteza de curgere a fost realizată prin rotirea discului probă. Sub acţiunea forţei centrifuge produsele anodice ale coroziunii fiind mai dense decît mediul agresiv sînt proiectate spre periferie în timp ce hidrogenul, ca rezultat al procesului catodic de coroziune a unui metal în mediu acid, este menţinut „strîns" pe suprafaţa eprubetei. În acest mod rotirea epruvetei are o acţiune acceleratoare asupra procesului anodic de coroziune şi din contra, de polarizare a procesului catodic.

3. Rezultatele experimentale şi discuţia lor

În fig. 2... 4 sînt redate vitezele de coroziune a epruvetelor din oţel OLC 45 în acid sulfuric cu şi fără adaos de inhibitor pentru cele trei temperaturi cercetate. Se observă clar diminuarea coroziunii odată cu adăugarea inhibitorului în acid.

Avînd în vedere modul de acţiune al inhibitorilor este de presupus că la interacţiunea oţelului cu acidul sulfuric, în prezenţa inhibitorului, se formează o peliculă de inhibitori pe suprafaţa metalului. Formarea acestei pelicule ar reprezenta — aşa cum s-a arătat — rezultatul unor fenomene fizice şi chimice de adsorbţie. O asemenea peliculă de inhibitori se comportă la fel ca o peliculă de oxid anorganic. După afirmaţiile cercetătorilor [6] nu există o deosebire esenţială între un strat de oxid anorganic şi un strat

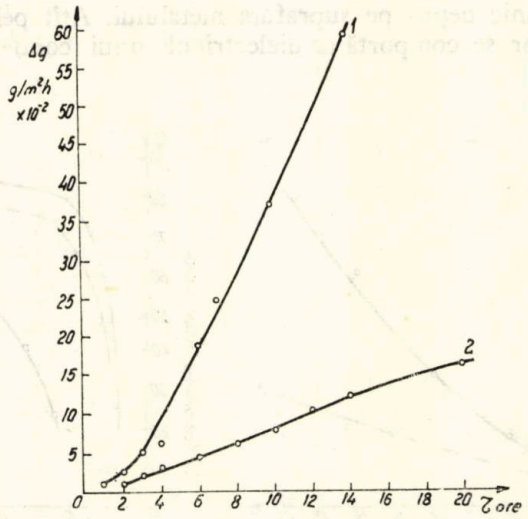


Fig. 2. — Variaţia vitezei de coroziune a epruvetei din oţel OLC 45 în acid sulfuric 0,5 *n* la 30°C; *1* — fără inhibitor, *2* — cu inhibitor 1 : 10 000.

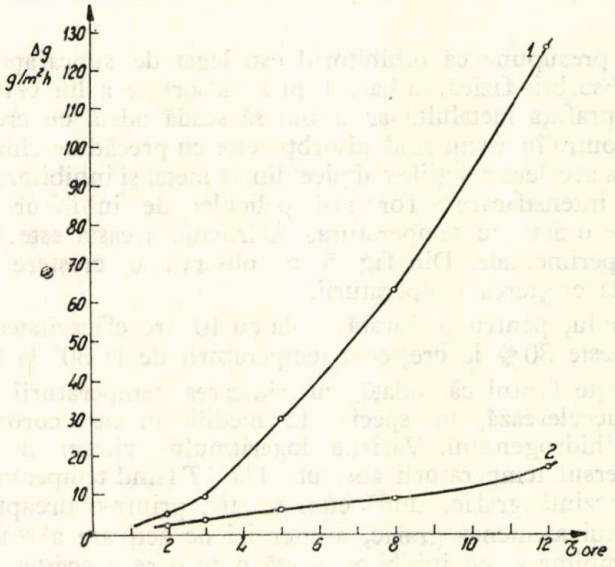


Fig. 3. — Variaţia vitezei de coroziune a epruvetei din oţel OLC 45 în acid sulfuric 0,5 *n* la 40° C; *1* — fără inhibitor, *2* — cu inhibitor 1 : 10 000.

de inhibitor organic depus pe suprafaţa metalului. Atît pelicula de oxid cît şi cea de inhibitor se comportă ca dielectricul unui condensator, aflat între metal şi soluţie.

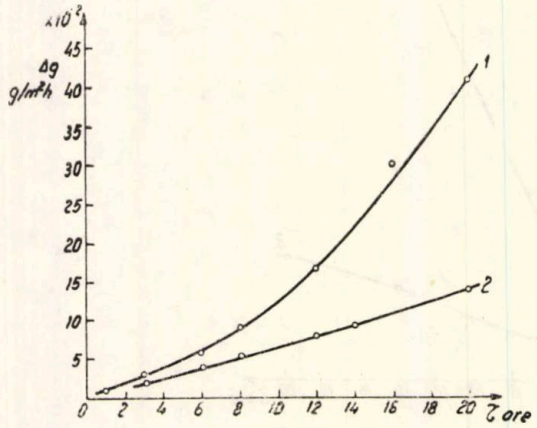


Fig. 4. — Variaţia vitezei de coroziune a epruvetei din oţel OLC 45 în acid sulfuric 0,5 *n* la 50°C; *1*— fără inhibitor, *2* —cu inhibitor 1 : 10 000.

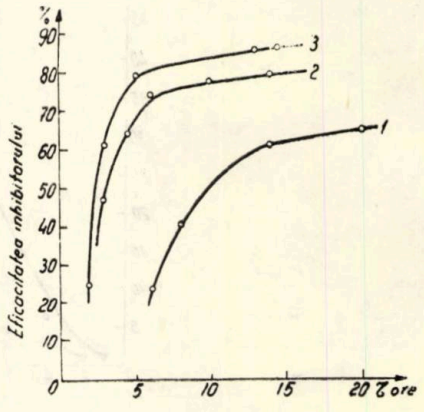


Fig. 5. — Variaţia eficacităţii inhibitorului, în timp, la temperaturile de: 1—30°C; *2* — 40°C; *3* — 50°C.

Dacă se presupune că inhibitorul este legat de suprafaţa metalului în special prin absorbţie fizică, în baza legii de adsorbţie a lui Gibbs, concentraţia sa la suprafaţa metalului ar trebui să scadă odată cu creşterea temperaturii. Din contra în cazul cînd adsorbţia este cu precădere chimică, creşterea temperaturii va accelera reacţiile chimice dintre metal şi inhibitor. În acest mod va avea loc o intensificare a formării peliculei de inhibitor a cărei rezistenţă va creşte o dată cu temperatura. Afirmaţia aceasta este confirmată de rezultatele experimentale. Din fig. 5 se observă o creştere a eficacităţii inhibitorului la creşterea temperaturii.

De exemplu, pentru o durată egală cu 10 ore eficacitatea inhibitorului a crescut cu peste 30 % la creşterea temperaturii de la 30° la 50°C.

Se cunoaşte faptul că odată cu ridicarea temperaturii procesele de coroziune se accelerează, în special în mediile în care coroziunea are loc cu degajarea hidrogenului. Variaţia logaritmului vitezei de coroziune în raport cu inversul temperaturii absolute $1/T$ (T fiind temperatura exprimată în °K) se reprezintă grafic, după cum se ştie, printr-o dreaptă. Calcularea, cu ajutorul unui asemenea grafic, a energiei de activare a reacţiei de coroziune fără inhibitor şi cu inhibitor arată o scădere a acestei energii de la 4 660 cal/mol la 1 660 cal/mol, în cazul utilizării inhibitorului. Această micşorare a energiei de activare s-ar putea explica prin modificarea structurii stratului de inhibitor ce se formează pe suprafaţa oţelului.

În urma formării unei asemenea pelicule reacția oțelului cu acidul sulfuric ar putea avea loc numai în urma difuziei, fie a ionilor agentului agresiv fie, mai probabil, a atomilor metalului prin porii fini ai stratului sau peliculei de inhibitor.

Stadiul limitativ al procesului de coroziune îl constituie difuzia.

La temperaturi mai ridicate cantitatea de inhibitor care determină această „pasivizare" a suprafeței oțelului este mai mare în comparație cu cea necesară la temperaturi mai joase, întrucît formarea peliculei protectoare are loc mai repede decît dizolvarea ei.

În fig. 6 se poate observa faptul că formarea peliculei protectoare se desfășoară lent.

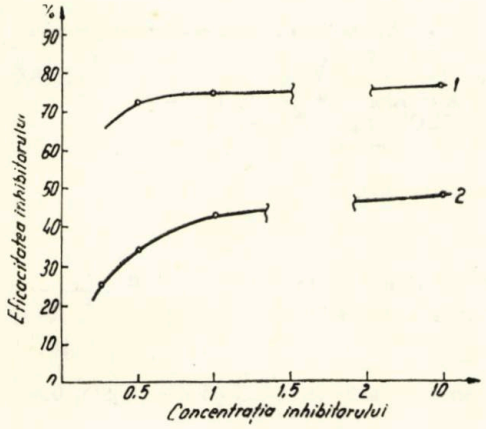


Fig. 6. — Eficacitatea inhibitorului în funcție de concentrația sa în acid sulfuric, în timp de: *1* — 10 ore; *2* — 4 ore.

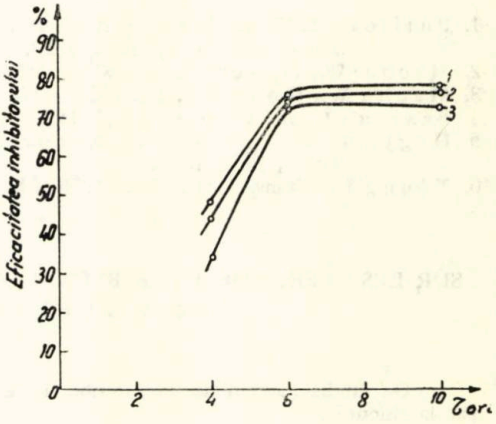


Fig. 7. — Variația eficacității inhibitorului în timp, la diferite concentrații.: *1* — 1 : 1000; *2* — 1 : 10 000; *3* — 1 : 20 000.

Procesele fizice și în special chimice care duc la formarea stratului de inhibitor pe suprafața metalului ajung abia după un timp anumit la o stare de echilibru stabil. La această stare, care depinde de concentrația inhibitorului și de temperatură, se poate obține efectul de inhibare maxim.

Efectul de inhibare al tioureei crește odată cu creșterea concentrației inhibitorului, fapt ce este pus în evidență în fig. 7.

Este de presupus că la o concentrație maximă toate forțele van der Waals și valențele chimice ale suprafeței oțelului sînt saturate și nu mai este posibilă o altă admisie la suprafața metalului, ajungîndu-se în felul acesta la efectul de inhibare maxim.

4. Concluzii

Se cercetează acţiunea de inhibare a coroziunii oţelului OLC 45 în acidul sulfuric 0,5 *n*, de către tiouree. Se studiază eficacitatea inhibitorului la următoarele temperaturi: 30°; 40° şi 50° C precum şi la următoarele concentraţii: 1 : 1 000; 1 : 10 000; 1 : 20 000. Ipotezele existente cu privire la modul de acţiune al inhibitorului se confirmă prin rezultatele experimentale obţinute.

Primită la 10 V 1967

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Putilova I. N., Balezin S. A., Baranik V. P., *Inhibitor pentru combaterea coroziunii metalelor*. I. D. T., Buc., 1959, (trad. din l. rusă).
2. Machu W., Morcos I. H., Werkstoffe u. Korrosion, 1960, *11*, S. 81 – 87, 156, 162.
3. Machu W., Gouda V. K., Werkstoffe u. Korrosion, 1962, *6*, *S.* 171 — 174.
4. Балезин С. А., Соловьев Д. И., ДАН СССР, 1950, **72**, стр. 811.
5. Hagymaş Gh., Firoiu C., Radovici O., *Coroziunea şi protecţia metalelor*. Ed. Tehn., Buc., 1963.
6. Young L., Trans. Farad. Soc., 1955, **51**, p. 250– 260.

SUR LES EFFETS DE L'INHIBITION DE LA CORROSION DE L'ACIER OLC 45 DANS H_2SO_4 0,5 *n* PAR LA THIOURÉE

(Résumé)

On étudie l'action de l'inhibition de la corrosion de l'acier OLC 45 dans H_2SO_4 0,5 *n* par la thiourée.

On recherche l'efficacité de l'inhibiteur, pour les températures suivantes : 30° ; 40° et 50°C et pour les concentrations suivantes : 1 : 1 000 ; 1 : 10 000 ; 1 : 20 000.

Les hypothèses existantes quant au mode d'action de l'inhibiteur sont confirmées par les résultates expérimentaux acquis.

Explication des figures

Fig. 1. — Schéma de l'instalation ; *1* — vase thermostat ; *2* — disque d'essai ; *3* — électromoteur ; *4* — thermomètre de contact ; *5* — thermomètre de contrôle.

Fig. 2. — Variation de la vitesse de corrosion de l'éprouvette d'acier OLC 45, dans H_2SO_4 0,5 *n*, à 30°C ; *1* — sans inhibiteur ; *2* — avec inhibiteur 1 : 10 000.

Fig. 3. — Variation de la vitesse de corrosion de l'éprouvette d'acier OLC 45, dans H_2SO_4 0,5 *n*, à 40°C ; *1* — sans inhibiteur ; *2* — avec inhibiteur 1 : 10 000.

Fig. 4. — Variation de la vitesse de corrosion de l'éprouvette d'acier OLC 45 dans H_2SO_4 0,5 *n* à 50°C ; *1* — sans inhibiteur ; *2* — avec inhibiteur 1 : 10 000.

Fig. 5. — Variation de l'efficacité de l'inhibiteur, fonction du temps, aux températures : *1* — 30°C ; *2* — 40°C ; *3* — 50°C.

Fig. 6. — Efficacité de l'inhibiteur en fonction de sa concentration en H_2SO_4, pendant : *1* — 10 heures; *2* — 4 heures.

Fig. 7. — Variation de l'efficacité de l'inhibiteur, fonction du temps, aus différentes concentrations : *1* — 1 : 1 000 ; *2* — 1 : 10 000 ; *3* — 1 : 20 000.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 620.193 ; 669.14

ASUPRA MACROCINETICII PROCESULUI CORODĂRII OŢELULUI ÎN ACID SULFURIC

DE

C. CALISTRU şi I. GRIGORIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965.

1. Introducere

Influenţa structurii macroscopice a solidului asupra vitezei proceselor chimice, în care acesta participă ca reactant, a fost semnalată şi cercetată de numeroşi autori [1] ... [5]. În cele ce urmează ne propunem să folosim procesul corodării unui oţel obişnuit (OLC 45) într-o soluţie apoasă de acid sulfuric, în scopul obţinerii unor date asupra rolului variaţiei macrostructurii reactantului. Se subliniază că prin procesul chimic se va înţelege nu numai reacţia chimică propriu-zisă ci şi toate procesele elementare de transformare şi transfer care-l pot alcătui.

2. Metodica cercetării experimentale

Se consideră că procesul corodării oţelului este constituit din următoarele procese macroscopice elementare: a) reacţia electrochimică la polul +; b) transferul electronilor între polii pilei; c) transferul ionilor H^+ prin soluţia lichidă apoasă; d) reacţia electrochimică la polul —; e) dizolvarea fierului; f) transferul ionilor Fe^{3+} prin soluţia apoasă lichidă; g) formarea, creşterea şi deplasarea bulelor de hidrogen.

Desfăşurarea unui astfel de proces este determinată şi de structura macroscopică a oţelului. Modificările acestuia din urmă pot fi puse în evidenţă şi prin determinarea schimbărilor factorului suprafaţă din ecuaţia cinetică a procesului; pentru aceasta este însă nevoie să se creeze condiţiile experimentale corespunzătoare unei anumite desfăşurări a procesului de corodare.

Ţinînd seama de procesele macroscopice elementare care intervin în procesul corodării oţelului, astfel de condiţii experimentale pot fi realizate dacă experienţa se efectuează în condiţii termice şi hidrodinamice cunoscute. În acest mod se poate elimina influenţa transferului asupra vitezei procesului, respectiv se poate asigura desfăşurarea procesului în domeniul cinetic.

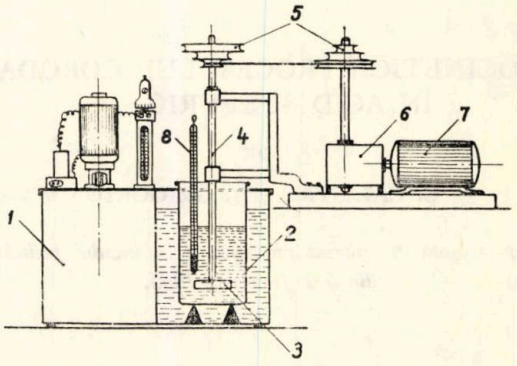


Fig. 1. — Schema instalaţiei experimentale folosite pentru corodarea oţelului în soluţii de acid sulfuric ; *1* — termostat, *2* — vas de corodare, *3* — disc în rotaţie, *4* — tija discului, *5* — sistemul de transmisie a mişcării prin curele, cu variaţia turaţiei, *6* — reductor de viteză, *7* — motor electric, *8* — termometru.

Pentru îndeplinirea condiţiilor menţionate mai sus s-a efectuat corodarea în soluţii apoase de acid sulfuric a oţelului sub formă de disc rotativ. Acest proces este caracterizat prin faptul că grosimea atît a stratului limită hidrodinamic cît şi a celui de difuzie au fiecare valori constante pe întreaga suprafaţă a discului. Coeficientul de transfer de masă prin faza lichidă poate fi determinat exact [6]. În aparatul de experimentare folosit viteza de corodare a oţelului este influenţată de viteza procesului de transfer de masă numai la anumite numere de rotaţii ale discului. S-a lucrat cu un număr de rotaţii pe minut care asigură desfăşurarea procesului în domeniul cinetic (800 rot/min).

În fig. 1 este reprezentată schema instalaţiei experimentale.

3. Datele experimentale şi prelucrarea lor

În fig. 2 sînt reprezentate pe diagrama logaritmul variaţiei greutăţii discului — timp, izotermele 30°; 40°; 50°; 60°C, trasate pentru viteza de 800 rot/min.

Valorile obţinute s-au recalculat, înlocuindu-se variaţia greutăţii discului prin variaţia numărului de moli de acid sulfuric dintr-un volum de

soluție de un litru. Cu ajutorul datelor recalculate s-a construit diagrama $C_{H_2SO_4} - \tau$, reprezentată în fig. 3.

Prin derivare grafică și logaritmare s-au calculat valorile $\log (dC_{H_2SO_4}/d\tau)$ și s-a construit diagrama $\log (dC_{H_2SO_4}/d\tau) - \log C_{H_2SO_4}$, reprezentată în fig. 4,

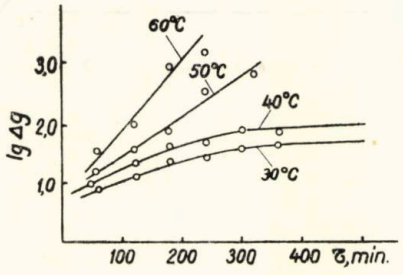


Fig. 2. — Variația logaritmului diferenței de greutate a discului în timp.

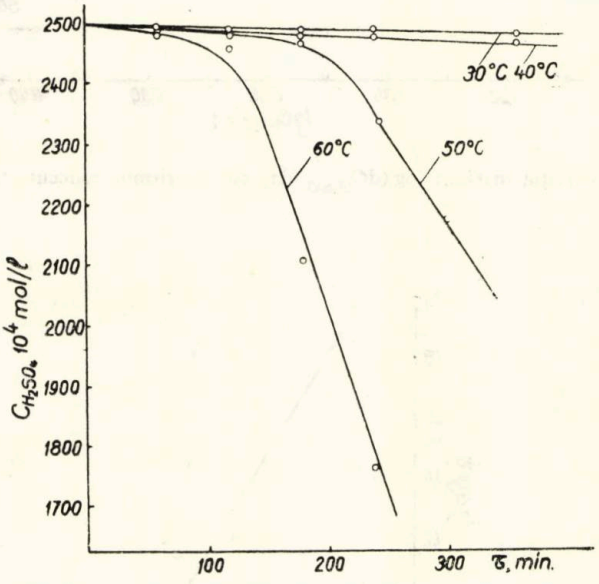


Fig. 3. — Variația concentrației soluției de acid sulfuric în timp.

Din diagramă se constată că viteza reacției nu variază cu concentrația într-un anumit interval de timp, crește apoi brusc, pentru ca, în continuare, să rămînă iarăși independentă de concentrație. Variația bruscă a vitezei procesului de corodare poate fi explicată, în condițiile experimentale date, prin

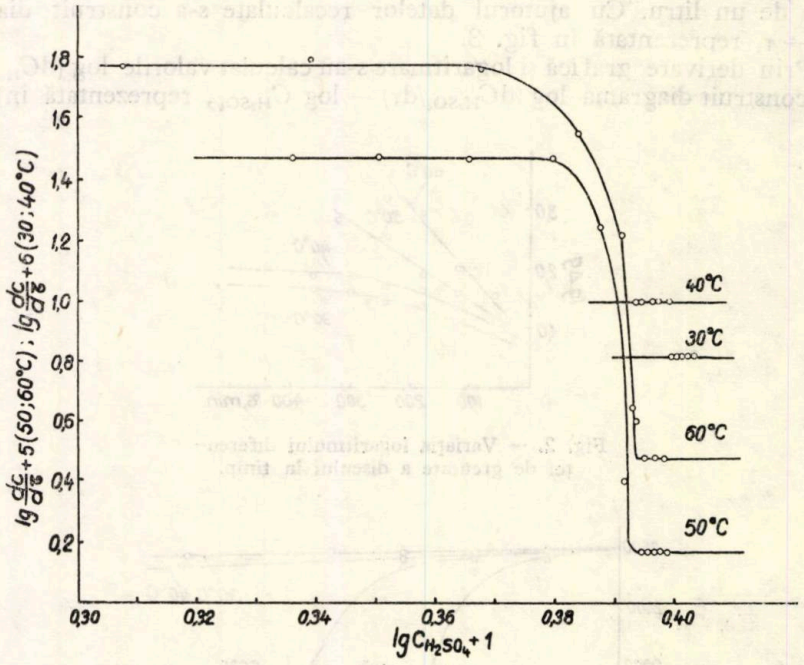


Fig. 4. — Variația mărimii $\log (dC_{H_2SO_4}/d\tau)$ cu logaritmul concentrației.

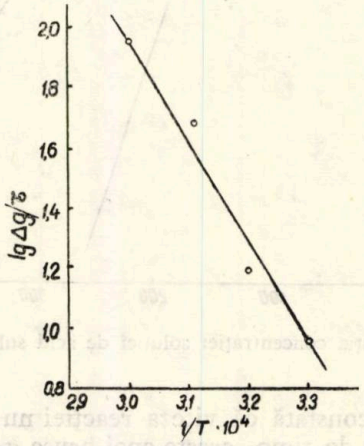


Fig. 5. — Variația mărimii $\log (\Delta g/\tau)$ cu temperatura.

schimbarea domeniului de desfășurare a procesului sau prin variația mărimii suprafeței.

Pentru cercetarea primei posibilități s-a determinat, prin metoda variației vitezei de reacție cu temperatura, domeniul în care se desfășoară procesul. În fig. 5 este reprezentată curba caracteristică în coordonatele logaritmul vitezei de coroziune — $1/T$[°K].

Energia de activare, calculată cu ajutorul panta dreptei obținute, are valoarea de 15 000 cal/mol, ceea ce arată că procesul se desfășoară în domeniul cinetic. În același timp, valoarea experimentală a mărimii K s-a comparat cu valoarea calculată a coeficientului de transfer de masă, din relația:

$$K = \frac{D}{\delta}. \tag{1}$$

Pentru $\mathcal{R}e < 10^5$, se rezolvă ecuația diferențială a difuziei convective la suprafața discului rotativ pentru domeniul difuziei, respectiv $C^s_{H_2SO_4} = 0$, și se obține pentru grosimea stratului limită de difuzie relația [6]:

$$\delta = 1{,}62\, D^{1/3} \nu^{1/6} \omega^{-1/2}. \tag{2}$$

În tabelul 1 sînt date valorile coeficientului de transfer calculate în ipoteza desfășurării procesului în domeniul difuziei după relațiile de mai sus și valorile experimentale ale aceleași mărimi.

Tabelul 1

T °K	$K_{tr\,exper}$ 1/m² sec	$K_{tr\,calc}$ 1/m² sec
303	$1{,}11.10^{-7}$	$7{,}73.10^{-4}$
313	$1{,}67.10^{-7}$	$7{,}95.10^{-4}$
323	5.10^{-6} *)	$8{,}18.10^{-4}$
	$2{,}47.10^{-7}$ **)	
333	1.10^{-5} *)	$8{,}44.10^{-4}$
	5.10^{-7} **)	

*) pentru viteza la începutul procesului ;
**) pentru viteza după apariția saltului .

Se constată că valorile coeficienților de transfer calculate sînt mult mai mari decît cele determinate experimental. Rezultă că aceștia din urmă coeficienți sînt constante ale vitezei de reacție și deci se ajunge la aceeași concluzie și anume că procesul de corodare se desfășoară în domeniul cinetic. De altfel aceeași concluzie se desprinde și din examinarea fig. 5.

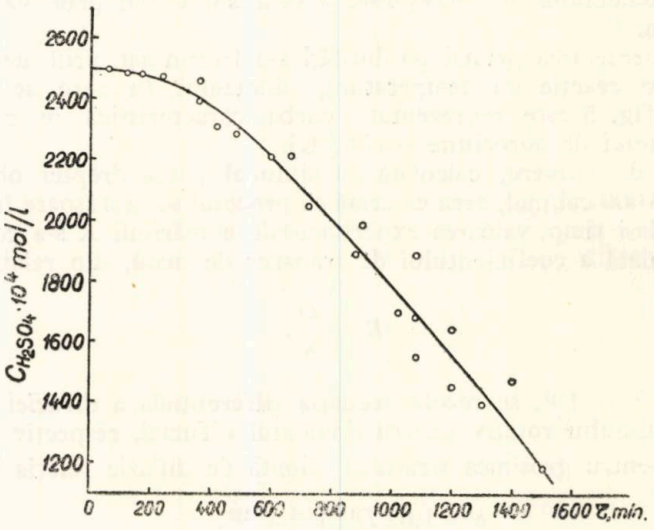


Fig. 6. — Variația concentrației soluției de acid sulfuric la temperatura de 40°C ($\tau_{max} = 25$ ore, $n = 800$ rot/min).

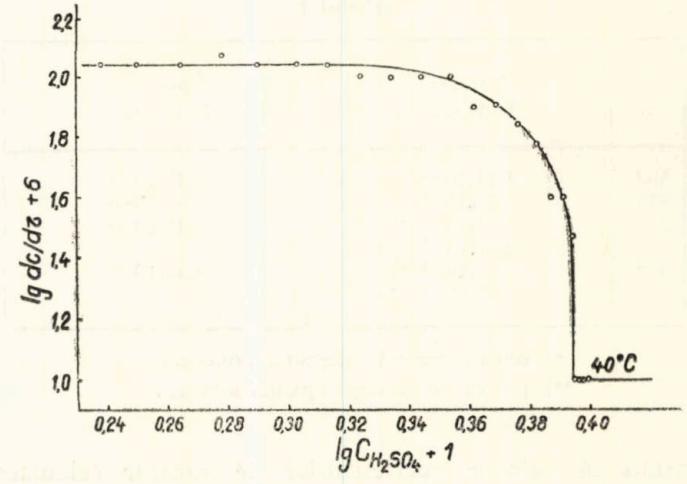


Fig. 7 — Variația mărimii log ($dC_{H_2SO_4}/d\tau$) cu logaritmul concentrației soluției de acid sulfuric, la temperatura de 40°C ($n = 800$ rot/min).

Mărimea K din ecuația (1) poate fi exprimată prin relația:

$$K = K_1 S. \tag{3}$$

Așa cum s-a arătat, mărimea K este specifică domeniului cinetic și, prin urmare, la temperatură constantă ea variază numai datorită modificării mărimii S.

La temperaturi joase și într-o perioadă de timp de șase ore, modificarea suprafeței discului rămîne practic neglijabilă. La temperaturi mai ridicate modificarea suprafeței discului devine apreciabilă și viteza reacției crește; la temperaturi joase saltul apare la durate mult mai mari ale procesului de coroziune (fig. 6 și fig. 7).

Rezultă că variația liniară a vitezei se datorește schimbării bruște a factorului S din ecuația cinetică.

Y. Suezawa prelucrează datele experimentale obținute la corodarea oțelului într-o soluție de acid clorhidric cu ajutorul ecuației cinetice [7]:

$$Sh = C\,Re^m\,Se^n \tag{4}$$

și ajunge la concluzia că mărimea C depinde de rugozitatea oțelului, cu alte cuvinte de variația suprafeței inițiale a oțelului supus corodării.

În condițiile experimentării menționate în această lucrare se constată o variație bruscă a suprafeței și nu una continuă. Presupunem că această variație bruscă a suprafeței se datorește modului în care se manifestă variația structurii macroscopice a oțelului.

Aceasta înseamnă că în cursul procesului de corodare, efectuat în condițiile menționate, macrostructura oțelului folosit nu rămîne neschimbată, ci se modifică brusc. Metoda folosită poate, așadar, să furnizeze date asupra schimbării macrostructurii solidelor în timpul desfășurării procesului chimic.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia substanțelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Кайнарский И. С., Судоров М. А., ЖПХ, 1956, **XXXIX**, *12*, стр. 1785—1792.
2. Calistru C., Leonte C., Bul. Inst., polit. Iași, 1960, **VI (X)**, *3—4*, p. 107—116.
3. Tikkanen M. A., Génie chimique, 1964, 92, *3*, p. 57.
4. Гарнер В. Е., *Химия твердого состояния*. ИИЛ, М. 1961, (пер. с. англ.)
5. Хауффе К., *Реакции в твердых телах и на их поверхности*. Т. **II**, ИИЛ, М., 1963. (пер. с. нем.).
6. Левич В. Г., *Физико-химическая гидродинамика*. Изд. АН СССР, М., 1952.
7. Suezawa Y., Chem. Eng. Japan, 1963, **27**, pp. 694—702.

ON MACROKINETICS OF THE CORROSION PROCESS OF STEEL IN SULPHURIC ACID

(Abstract)

The authors study the influence of the structural change of the contact surface on the corrosion process of the rotative steel disc in aqueous solutions of sulphuric acid.

They established that this influence is discontinuously manifested.

The method indicated by the authors can be used for the research of the influence of the macrostructure change of the solids on the development of the chemical process.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Experimental instalation used for the steel corrosion in the solutions of sulphuric acid.

Fig. 2. — Variation of logaritm of the weight difference of the disc in time.

Fig. 3. — Variation of the concentration of the solution of sulfuric acid in time.

Fig. 4. — Variation of log $(dC_{H_2SO_4}/d\tau)$ as function of log $C_{H_2SO_4}$.

Fig. 5. — Variation of log $(\Delta g/\tau)$ as function of $1/T$[°K] .

Fig. 6. — Variation of the concentration of the solution of sulphuric acid in time at $t = 40$°C ($\tau_{max} = 25$ h, $n = 800$ rot/min).

Fig. 7. — Variation of log $(dC_{H_2SO_4}/d\tau)$ as function of log $dC_{H_2SO_4}$ at $t = 40$°C ($n = 800$ rot/min).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 678.76 ; 578.08

POLIMERI ANALOGI VINILICI CU ACTIVITATE BIOLOGICĂ

DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
MARIA GRIGORAŞ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat reacţia de transformare a alcoolului polivinilic cu diclorhidratul de hidrazină în prezenţa clorurii de zinc anhidre, care a condus la crearea de verigi vinil-hidrazinice pe catena macromoleculară.

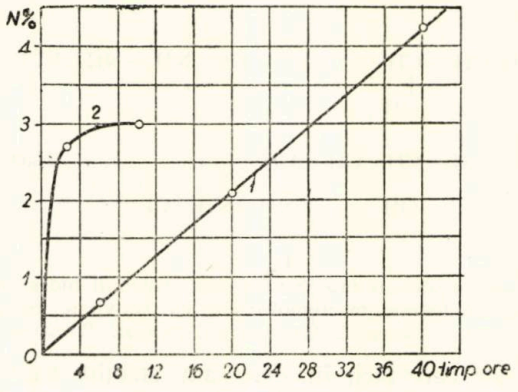
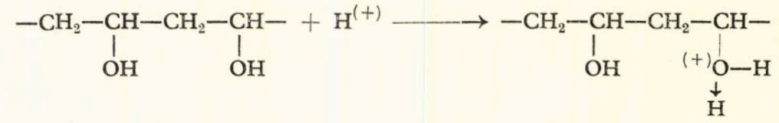
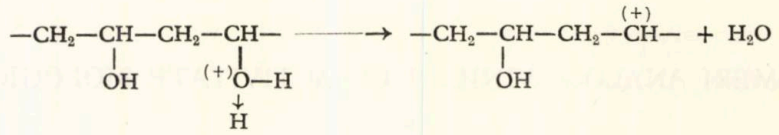


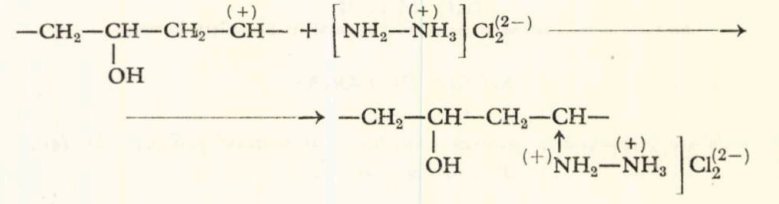
Fig. 1

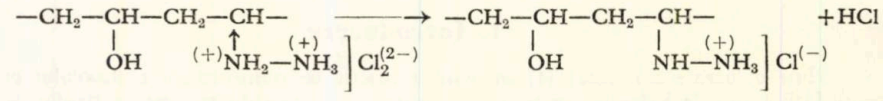
Studiind în continuare aspectele cinetice ale acestei reacţii, se constată că substituind diclorhidratul de hidrazină cu monoclorhidrat de hidrazină, viteza de reacţie scade după cum se poate observa din fig. 1. În această figură este indicată variaţia conţinutului în azot în raport cu timpul la produsul reacţiei polivinil-alcoolului cu monoclorhidrat de hidrazină (*1*) şi cu diclorhidrat de hidrazină (*2*).

Din aceste date rezultă că acidul clorhidric din diclorhidratul de hidrazină catalizează reacţia prin protonul său, conform următoarei scheme de reacţii:

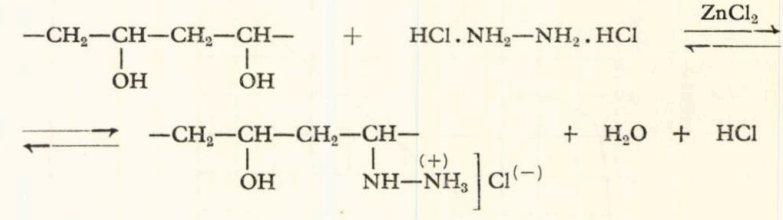
(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

Prezenţa acidului clorhidric în mediul de reacţie catalizează, însă, reacţia inversă de scindare a grupelor hidrazinice, curba cinetică tinzînd spre echilibru după un timp relativ scurt de reacţie:

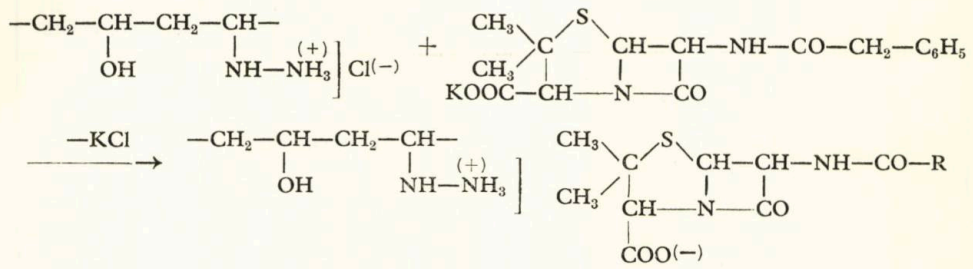


În aceeaşi lucrare am obţinut prin condensarea polivinil-hidrazinei cu clorura acidului *N*-acetil-sulfanilic, sulfonhidrazide macromoleculare cu activitate bacteriostatică faţă de o serie de bacterii ca: stafilococ *aureus, Escherichia coli, Proteus, Pseudomonas, Salmonela Thyphi.*

Bazaţi pe aceste cercetări, în care am stabilit faptul că substituirea unei catene macromoleculare în medicamente de tipul solfon-hidrazidă sau sulfoguanidină nu le inhibă activitatea bacteriostatică precum şi pe unele date din literatură [2], am urmărit, în lucrarea de faţă, sintetizarea altor polimeri biologic activi, fie prin modificarea grupelor bazice de pe catena copolimerului vinil-hidrazinic, fie prin introducerea de alte grupe bazice pe catena polivinil-alcoolului.

2. Rezultatele cercetării

Prezenţa verigilor bazice de vinil-hidrazină sub formă de clorhidrat, pe catena polimerului transformat, ne-a permis să grefăm printr-o reacţie de schimb ionic, penicilină *G* pe lanţul macromolecular, pentru a obţine astfel un derivat de penicilină cu acţiune retard după reacţia:



Folosind un polimer cu un conţinut de 7,6% verigi vinil-hidrazinice s-a obţinut o sare macromoleculară a penicilinei *G* cu o activitate — determinată atît iodometric, cît şi pe cale biologică — în jur de 390 UI/mg polimer.

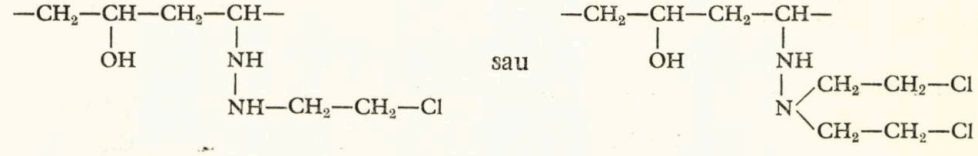
Activitatea antibacteriană s-a determinat în comparaţie cu un standard de penicilină *G* sare de potasiu, folosindu-se metoda diluţiilor succesive în bulion simplu pH = 7,2, cu un germene test stafilococ 209 *P*.

Rezultatele cercetărilor experimentale comparative ale celor două peniciline sînt indicate în tabelul 1.

Din rezultatele analizei biologice se constată că prin grefare pe catena macromoleculară, activitatea penicilinei *G* sare polimeră scade faţă de unele tulpini, rămînînd apropiată de cea a penicilinei *G* sare de potasiu, faţă de alte tulpini.

Continuînd seria cercetărilor, am urmărit transformarea grupării bazice de pe catena macromoleculară a copolimerului vinil-hidrazinic, în grupe bis-β-clor-etil-vinilhidrazină.

Prin această reacţie de transformare, pe care am realizat-o prin tratarea copolimerului cu un conţinut de 7% verigi vinil-hidrazinice pe catena macromoleculară cu dicloretan, într-un exces de piridină ce joacă rol şi de solvent şi de acceptor de acid clorhidric, se obţin pe catenă structuri de tipul:



La diluţia la care s-a lucrat, nu au avut loc reacţii intercatenare.

Din datele analitice privitoare la dozarea azotului şi clorului (1,21% N şi 3,19% Cl) rezultă că predomină structurile bis-β-clor-etil-vinilhidrazinice.

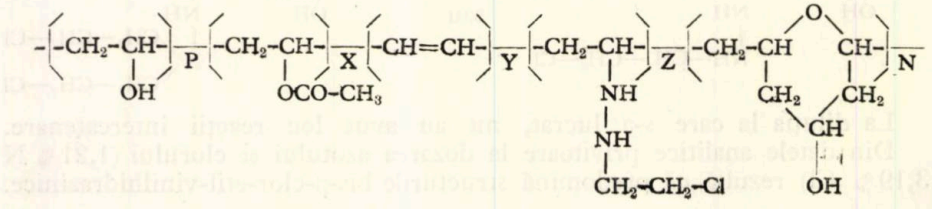
Tabelul 1

Cercetări privind spectrul antibacterian al unei peniciline G sare macromoleculară în comparaţie cu penicilina G sare de potasiu

Nr. crt.	Tulpina	Doza minimă inhibitoare UI/ml	
		Penicilina *G* sare de potasiu	Penicilina *G* sare macromoleculară
1	Stafilococ *Oxford*	0,19	0,09
2	Stafilococ *321*	0,39	0,09
3	Stafilococ *412*	0,19	0,06
4	Stafilococ *Vittorio*	0,39	0,09
5	Stafilococ *92*	0,78	0,04
6	Stafilococ *94*	1,56	0,09
7	Stafilococ *crem*	0,39	0,06
8	Stafilococ *128*	50,00	0,18
9	Stafilococ *781*	12,50	0,06
10	Stafilococ *182*	12,50	0,15
11	Streptococ *viridans*	0,78	0,19
12	Pneumococ	0,39	0,09
13	Enterococ *1*	50,00	12,50
14	Enterococ *2*	25,00	3,12
15	Coli *5*	50,00	50,00
16	Coli *Bruxelles*	50,00	50,00
17	Coli O_{55} B_5	50,00	25,00
18	Coli O_{11} B_4	50,00	50,00
19	*Escherichia Freundii*	50,00	50,00
20	*Klebsiella*	50,00	50,00
21	*Neisseria Cataralis*	3,00	0,78
22	*Shigella Flexner*	50,00	50,00
23	*Shigella Sonne*	50,00	50,00
24	*Sublilis Oxford*	0,39	0,09
25	*Bacil cereus*	12,00	3,12
26	*Proteus vulgaris*	50,00	50,00
27	*Pseudomonas aeroginosa*	50,00	50,00

Prezenţa grupei β-clor-etilice a fost pusă în evidenţă şi prin spectrul de absorbţie IR (fig. 2) prin banda de absorbţie la 885 K, caracteristică legăturii C — Cl, prezentă în substanţele liniare cu structură complicată [3].

Pe baza datelor analitice, precum şi prin studiul spectrului IR propunem pentru produsul sintetizat următoarea structură:



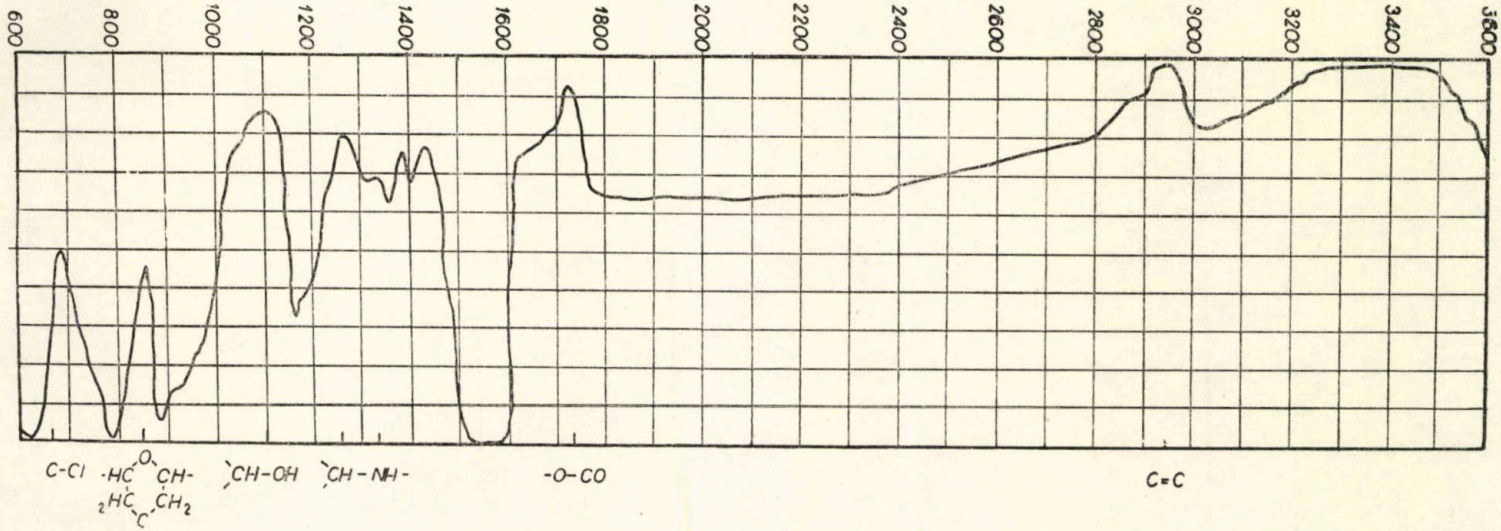

600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
C-Cl
-HC
O
CH-
2HC
C
CH2
CH-OH
CH-NH-
-O-CO
C=C

Fig. 2

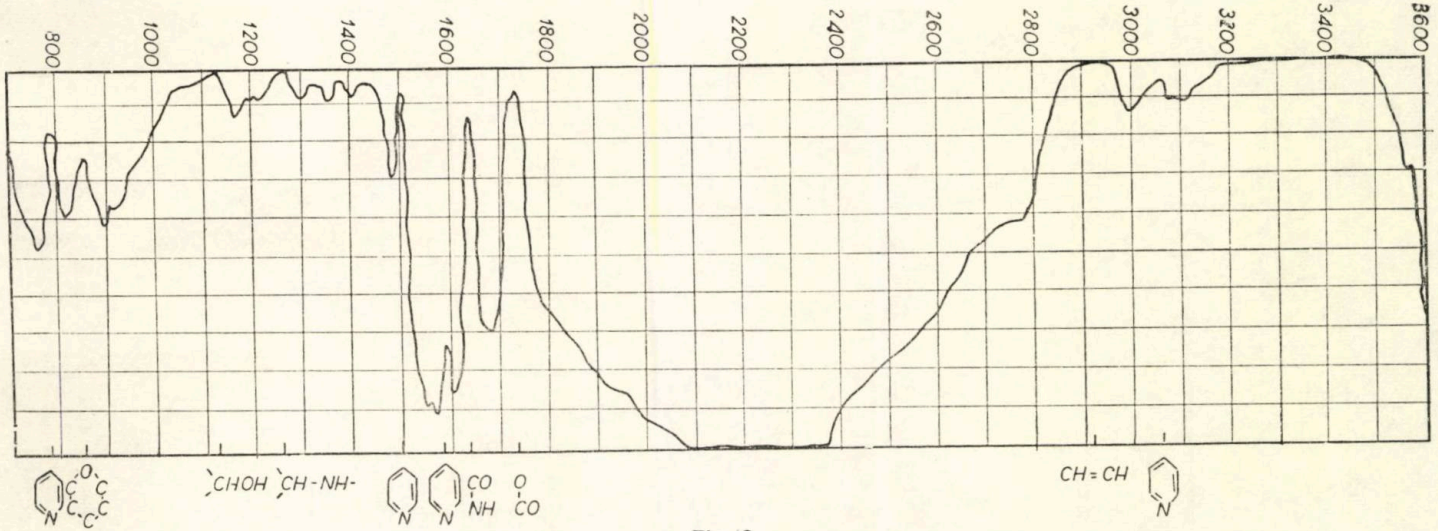
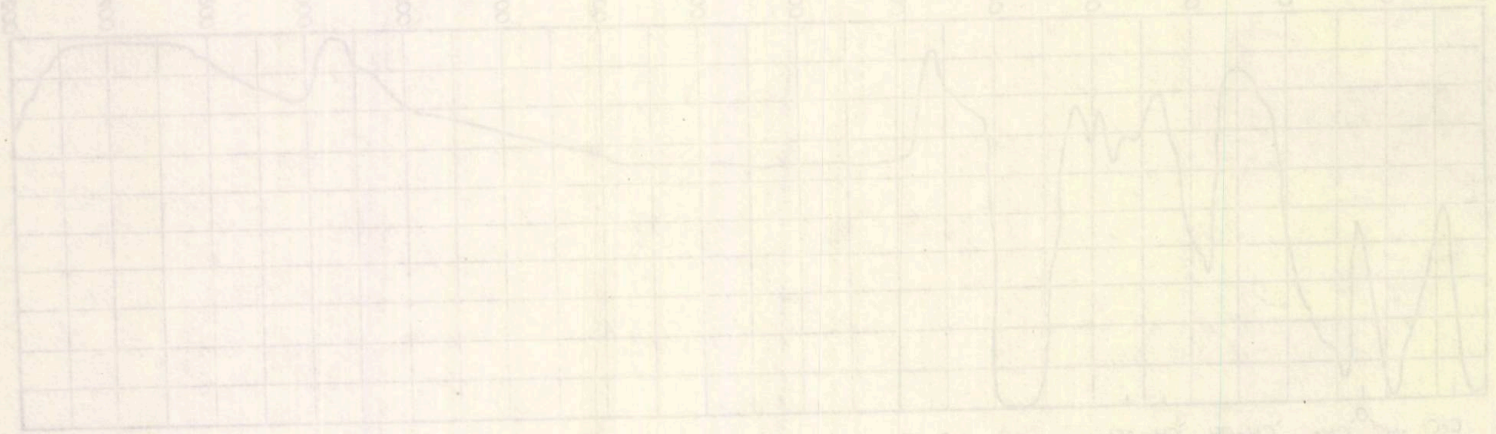
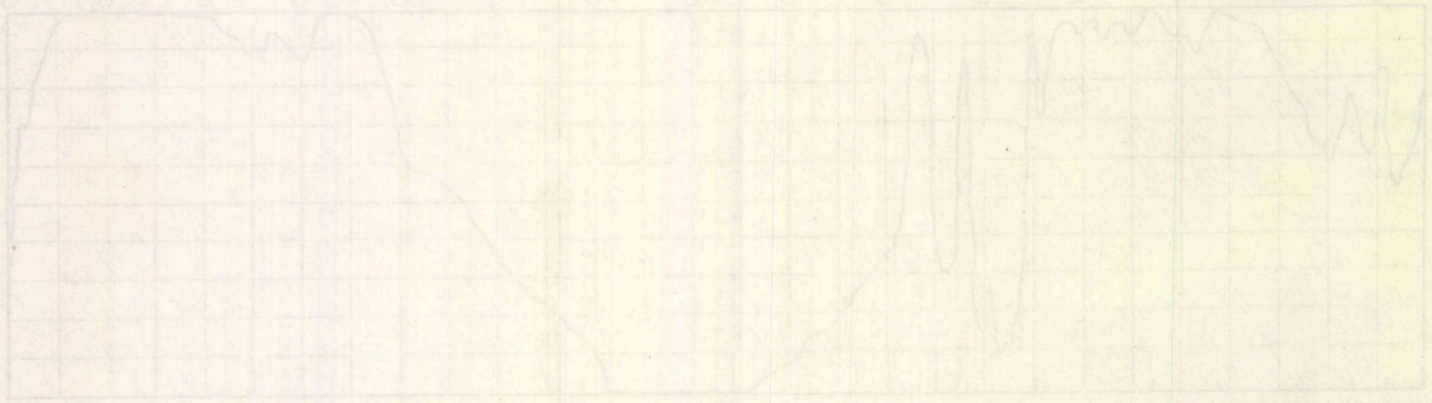

800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
CHOH
CH-NH-
CO
NH
O
CO
CH=CH
N

Fig. 3





în care grupele esterice sînt verigi reziduale de acetat de vinil din polimerul inițial, iar legăturile duble și resturile de tetrahidropiran provin din reacții secundare pe catenă.

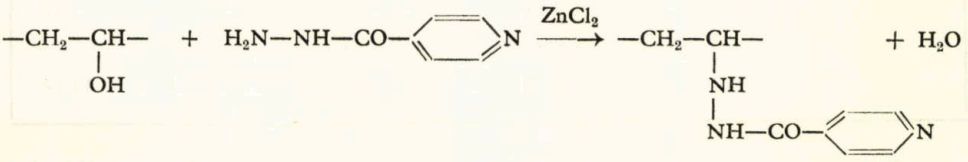
Prezența grupelor β-clor-etil-aminice poate conferi polimerului interesante proprietăți biologice.

3. Polimeri vinilici cu grupe active față de bacilul tuberculos

Prezența resturilor de hidrazină pe catena polimerului vinilic permite grefarea de resturi hidrazid-izonicotinice, conducînd la polimeri cu eventuală activitate antituberculoasă.

Polimeri vinilici cu grupe active față de bacilul tuberculos, de tip PAS, au fost obținuți de C. N. Uşakov și colaboratori [4], prin reacția dintre alcoolul polivinilic și clorura acidului *p*-amino-salicilic.

Noi am realizat polimeri modificați, cu grupe active izonicotinhidrazidice pe catena macromoleculară, printr-o reacție directă între alcoolul polivinilic și hidrazida izonicotinică, condusă în mediu de dimetilformamidă, în prezența clorurei de zinc, ca deshidratant:



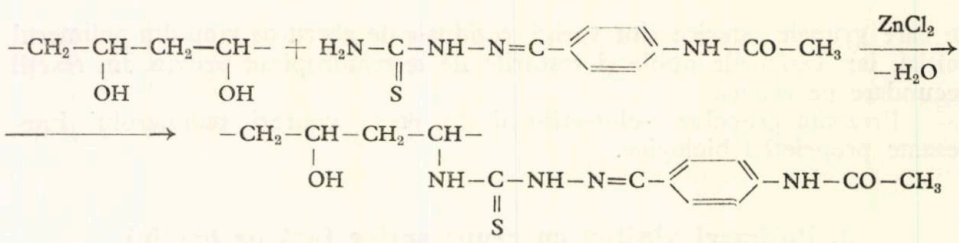
Din încercări rezultă că viteza de reacție este influențată favorabil de prezența acidului clorhidric conținut în clorhidratul hidrazid-izonicotinic, care exercită un rol catalitic prin protonul de hidrogen.

În tabelul 2 se indică, pentru cîteva probe, variația gradului de transformare al alcoolului polivinilic, stabilit prin determinarea conținutului în azot, funcție de raportul molar acid clorhidric/hidrazidă izonicotinică.

Prin această reacție solubilitatea polimerului se modifică. În apă, dimetilformamidă, piridină — dizolvanți ai polivinil-alcoolului — polimerul se umflă la rece și se dizolvă parțial la cald. Polimerul este insolubil în etanol, metanol, alcool benzilic, acetonă, eter, dicloretan, cloroform. Este solubil în apă sub formă de clorhidrat sau acetat.

Din studiul spectrului IR (fig. 3) rezultă că produsul sintetizat are o structură asemănătoare cu cea dată anterior, cu deosebire că în locul grupelor β-clor-etil-hidrazinice conține, grefate, resturi de HIN pe catena polimeră.

Folosind aceleași condiții de reacție am obținut, în continuare, un alt polimer cu grupe active de tip TB_1, prin acțiunea tebezonei asupra polivinil-alcoolului:



Tabelul 2

Variaţia gradului de transformare al alcoolului polivinilic

Nr. crt.	Raport molar HIN/mol-verigă vinil-alcool	Raport molar $ZnCl_2$/mol-verigă vinil-alcool	Raport molar ClH/HIN	Timp ore	N %
1	1 : 1	1 : 1	0	2	2,61
2	1 : 1	1 : 1	0	4	6,43
3	1 : 1	1 : 1	0,5 : 1	2	9,17
4	1 : 1	1 : 1	0,5 : 1	6	14,14

Polimerul rezultat este colorat în maro-roşcat, cu o solubilitate diferită de cea a polimerului de plecare; devine solubil în acetonă putînd fi scos din soluţia acetonică prin precipitare cu apă. Este de asemenea solubil în acid lactic, acid acetic glacial, acid clorhidric. Este parţial solubil la cald în dimetilformamidă, piridină, alcool benzilic şi insolubil în metanol, etanol, cloroform, dicloretan, acetat de etil.

S-a ajuns la un grad de substituţie pe catena polivinil-alcoolului de 15...20 % mol-verigi tebezonice (media exprimată în greutate 52 %).

4. Partea experimentală

a) *Sarea macromoleculară a penicilinei G*

5 g copolimer vinil-hidrazinic cu un conţinut de 7,6 % mol-verigi vinil-hidrazinice, se dizolvă în 20 cm^3 apă distilată şi se transformă în clorhidrat prin neutralizare cu 5,4 cm^3 soluţie *n*/1 HCl. Soluţia răcită la 0°C se tratează cu 2 000 000 U. I. penicilină *G* sare de potasiu, dizolvată în cîţiva cm^3 apă distilată. După 2 ore, la 0°C, polimerul se extrage din soluţie prin precipitare cu acetonă. Se purifică prin cîteva solviri în apă rece, urmate de precipitări cu acetonă.

Activitatea dozată iodometric = 390 U. I./mg.

b) *Polimer vinil-bis-β-clor-etil-hidrazinic*

3 g copolimer vinil-hidrazinic cu un conţinut de 7,6 % mol-verigi vinil-hidrazinice se dizolvă la cald în 40 cm^3 piridină şi se tratează cu 4 cm^3 dicloretan. Se refluxează timp de 5 ore. Din soluţia răcită, polimerul, care precipită parţial la rece, se precipită cu acetonă. Pentru purificare se dizolvă în dimetilformamidă şi se precipită cu acetonă, după care se fac cîteva extracţii cu acetonă la cald.

Analize:

N %	Cl %
1,21	3,19

c) *Polimer vinil-izonicotin-hidrazidic* (proba *3*, tabelul 2)

15,6 g hidrazidă izonicotinică se dizolvă la cald în alcool etilic şi se tratează cu 4,74 cm^3 acid clorhidric $d=1,19$. Alcoolul se evaporă şi amestecul de hidrazidă izonicotinică şi clorhidrat de hidrazidă izonicotinică se usucă în etuvă la 105°C.

5 g alcool polivinilic cu un conţinut rezidual de 14% mol-verigi acetat de vinil şi o greutate moleculară medie de 30 000...40 000 se dizolvă la cald, împreună cu amestecul de hidrazidă şi clorhidrat de hidrazidă, în 100 cm^3 dimetilformamidă anhidră. Se adaugă apoi 15,5 g clorură de zinc anhidră. Amestecul se refluxează sub agitare timp de 2 ore.

Polimerul se separă din mediul de reacţie prin tratare cu acetonă. Se purifică prin solviri repetate în apă acidulată cu HCl şi precipitări cu acetonă.

Analize:

N %
19,7

d) *Polimer vinil-tebezonic*

4,4 g alcool polivinilic se dizolvă la cald, împreună cu 15,7 g tebezonă, în 100 cm^3 dimetilformamidă anhidră (raportul molar tebezonă/mol-verigă vinil-alcool este de 1 : 0,75). Se adaugă 27 g clorură de zinc anhidră (2 mol $ZnCl_2$/mol-verigă vinil-alcool).

Amestecul de reacţie se refluxează 12 ore şi la sfîrşitul reacţiei se distilă 1/3 din solvent. Polimerul se separă, din soluţia astfel concentrată şi răcită, cu apă.

Pentru purificare se dizolvă într-o soluţie acetonică de acid acetic glacial şi se precipită cu soluţie apoasă de hidroxid de amoniu. Polimerul precipitat se extrage cu soluţie concentrată de hidroxid de amoniu, la cald, pentru eliminarea tebezonei micromoleculare nereacţionate şi apoi se extrage, repetat şi la cald, cu apă distilată, pînă la dispariţia ionului Cl din filtrat. Final se dizolvă în acetonă şi din soluţia acetonică filtrată se precipită cu apă distilată.

Analize:

N %	S %
13,3	8,0

5. Concluzii

S-a urmărit sintetizarea de noi polimeri vinilici cu grupe biologic-active ataşate la catena macromoleculară.

Printr-o reacţie de schimb ionic a unui copolimer vinil-hidrazinic, obţinut într-o lucrare anterioară, şi sarea de potasiu a penicilinei *G*, a rezultat sarea macromoleculară a penicilinei *G*, care, după cum reiese din cîteva încercări biologice, îşi păstrează proprietăţile bacteriostatice.

S-au preparat de asemenea polimeri cu verigi bis-β-clor-etil-vinilhidrazinice pe catenă macromoleculară, ce pot prezenta interesante proprietăţi biologice.

Prin reacţia directă a alcoolului polivinilic cu hidrazida izonicotinică şi cu tiosemicarbazona aldehidei *N*-acetil-*p*-amino-benzoice, s-au obţinut polimeri cu grupe active faţă de bacilul tuberculos, legate covalent la catena polimeră.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Matei I., Grigoraş M., *Transformations polymères-analogues du polyvinyl-alcool.* Omagiu Acad. Prof. Raluca Ripan, Ed. Acad. R. S. România, 1966, p. 363.
2. Ушаков С. Н., Макнок В. О., ДАН СССР, 1959, **128**, стр. 1317—1320.
3. Thomson, Torkington, Proc. Royal. Soc., 1945, **A 184**, p. 21.
4. Ушаков С. Н., *Синтетические полимеры лекарственного назначения.* М., 1963, стр. 36.

POLYMÈRES ANALOGUES VINYLIQUES AYANT UNE ACTION BIOLOGIQUE

(Résumé)

On a effectué la synthèse de quelques polymères vinyliques ayant des groupements biologique-actifs, greffés sur la chaîne macromoléculaire.

En utilisant une réaction d'échange ionique d'un copolymère vinylhidrazinique, obtenu par les Auteurs dans un travail antérieur [1], et le sel potassique de la pénicilline *G*, il en résulte le sel macromoléculaire de la pénicilline *G*, qui garde ses propriétés bactériostatiques.

On a obtenu aussi des polymères ayant des chaînons bis-β-chlore-éthyle-vinyl-hydrazinіques qui peuvent présenter nombre de propriétés biologiques intéressantes.

Par la réaction directe du polyvinyl-alcool avec la hydrazide izonicotinique et la thiosemicarbazone de l'aldéhyde *N*-acétyl-*p*-amino-benzoïque ils en résultent des polymères ayant des groupements actifs par rapport au bacille phtysique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 678.76

POLIMERI DEL CLORURO DI VINILE INNESTATI SU ELASTOMERI OLEFINICI, DOTATI DI ELEVATA RESISTENZA ALL'URTO

Nota II
RISULTATI SPERIMENTALI E DISCUSSIONE

DI

G. NATTA, F. SEVERINI, M. PEROGARO, E. BEATI, G. AURELLO e S. TOFFANO

1. In una nostra Nota precedente, inserita nel medesimo *Bollettino* [1], gli AA., seguendo l'ordine delle idee della serie di loro lavori propri [2]...[5], e prendendo per il modello il loro lavoro [6], hanno descritto un metodo di preparazione di cloruro di polivinile innestato su un copolimero elastomerico etilenepropilene, mediante polimerizzazione in sospensione, ed il frazionamento delle miscele polimeriche ottenute.

Sono state studiate le proprietà meccaniche dei grezzi di polimerizzazione e delle loro miscele con CPV commerciale, confrontando i risultati con quelli ottenuti impiegando miscele meccaniche elastomero-CPV.

In ciò che segue si presentano i risultati sperimentali e discussione, dalla quale risulta soprattutto il fatto di aver registrato come particolarmente elevata la resilienza dei prodotti contenenti il polimero innestato, anche a temperature inferiori a quella ambiente.

2. L'effettivo meccanismo della reazione di innesto non è stato da noi appositamente indagato. Si può però ritenere che esso sia connesso alla formazione di un radicale libero sulla catena dell'elastomero (verosimilmente per transferimento di idrogeno legato all'atomo di carbonio terziario) e successiva reazione del radicale libero così formato, con il monomero o con una catena di accrescimento. E' possibile anche che abbia luogo un trasferimento di radicali tra le catene di CPV in accrescimento (formatesi per opera dell'iniziatore radicalico) e la catena polimerica dell'elastomero. In ogni caso si ha formazione di ramificazioni sulla catena dell'elastomero costituita da catene di CPV.

Dai dati sperimentali risulta che nelle condizioni da noi usate [1, tabella 1], la quantità di elastomero che partecipa alla reazione di innesto rappre-

senta il 60...90% del peso di elastomero presente all'inizio della reazione; che il materiale innestato contiene una percentuale di cloruro di vinile non superiore al 21%. Risulta inoltre che l'efficienza di innesto definita come rapporto cloruro di vinile innestato/cloruro di vinile totale polimerizzato, è solo di circa il 3%. Cionondimeno i prodotti ottenuti nelle prove riportate in [1], malgrado il basso tenore di monomero innestato possono essere sufficienti a produrre miglioramenti sostanziali delle proprietà antiurto del materiale grezzo risultante. Ciò non toglie che modificando le condizioni operative la resa di innesto possa migliorare.

La bassa resa di innesto può essere attribuita o alla bassa percentuale del perossido di benzoile presente o prevalentemente alle limitate reazioni di trasferimento di catena del radicale $-\overset{\overset{Cl}{|}}{CH}{}^{*}$ con il copolimero C_2-C_3, dato che è nota la relativamente elevata reattività del predetto radicale nelle reazioni di trasferimento con il monomero nel caso delle omopolimerizzazioni [7], [8].

Nel presente lavoro si descrivono e discutono le caratteristiche meccaniche dei copolimeri grezzi innestati ottenuti, come si è descritto nella Nota [1], [6], tal quali o miscelati con CPV (*Vipla*) e quelle di miscele meccaniche di CPV (*Vipla*) e di copolimero C_2-C_3 eseguite a scopo di confronto.

I grafici 1...7 e le tabelle 2...4 [1] illustrano i risultati da noi ottenuti.

Per tutte le miscele grezzo di innesto-polivinilcloruro da noi preparate si osserva che il carico di snervamento a trazione (*yield point*) σ_{max}, il carico di rottura a trazione σ_R e a flessione σ_{rf}, la durezza H, la temperatura di rammollimento secondo Vicat ed il modulo elastico flessionale E, decrescono al crescere del contenuto di elastomero nella miscela. Simili andamenti si ritrovano nel caso delle semplici miscele meccaniche CPV-C_2-C_3 e sono in accordo con i risultati ottenuti in analoghe ricerche eseguite da altri AA. [9] nel caso di prodotti antiurto ottenuti da altri elastomeri e CPV. Dal confronto si osserva l'analogia di comportamento dei due tipi di materiale; valori leggermente più elevati del modulo elastico, del carico di rottura a trazione e flessione caratterizzano le miscele contenenti il polimero innestato. Particolarmente interessante e differenziata è la variazione della resilienza R in funzione del contenuto di copolimero etilene-propilene nelle miscele studiate (fig. 7). In questo caso si osserva che impiegando miscele contenenti il copolimero innestato la resilienza cresce notevolmente al crescere del contenuto in elastomero. Miscele meccaniche del polimero convenzionale con elastomero non innestato forniscono invece valori della resilienza che aumentano fino a raggiungere il valore massimo di 8 kg cm/cm di intaglio per miscele contenenti il 12% di elastomero e quindi decrescono fino a raggiungere, per un contenuto di copolimero del 25%, un valore inferiore a quello proprio del CPV.

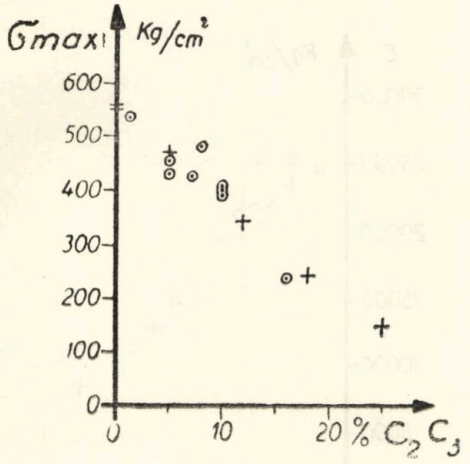


Fig. 1. — Carico di snervamento a trazione σ_{max} di miscele di *CPV* e di copolimero C_2-C_3 in funzione della percentuale di C_2-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘;
b — in assenza di polimero innestato +.

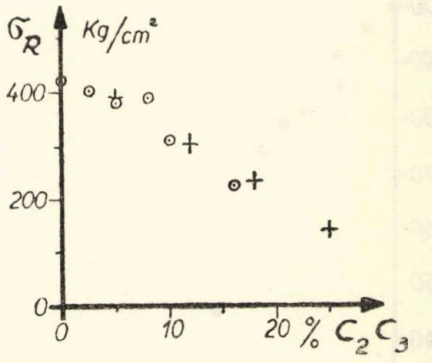


Fig. 2. — Carico di rottura a trazione σ_R di miscele $CPV-C_2-C_3$ in funzione della percentuale di C_2-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘,
b — in assenza di polimero innestato +.

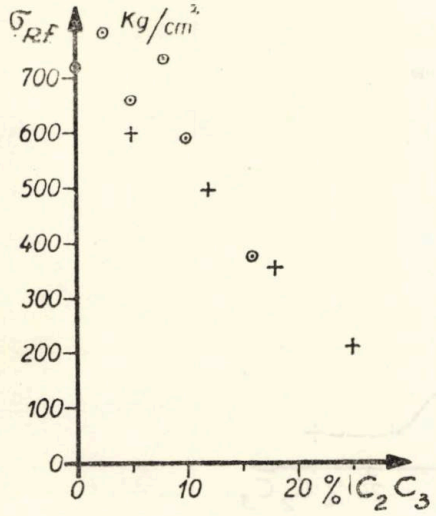


Fig. 3. — Carico di rottura a flessione σ_{Rf} di miscele $CPV-C_2-C_3$ in funzione della percentuale di C_3-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘,
b — in assenza di polimero innestato +.

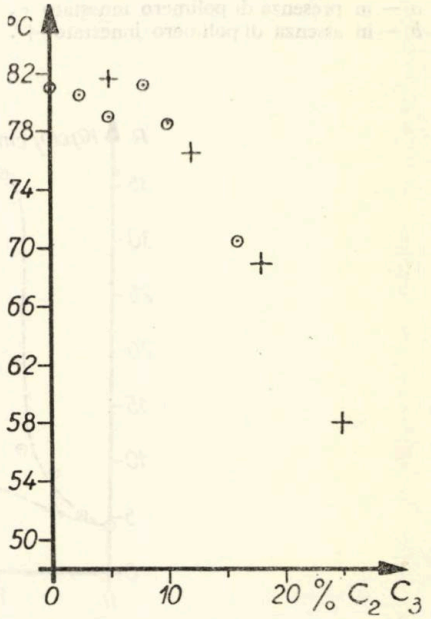


Fig. 4. — Temperatura di rammollimento secondo Vicat di miscele $CPV-C_2-C_3$ in funzione della percentuale di C_2-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘,
b — in assenza di polimero innestato +.

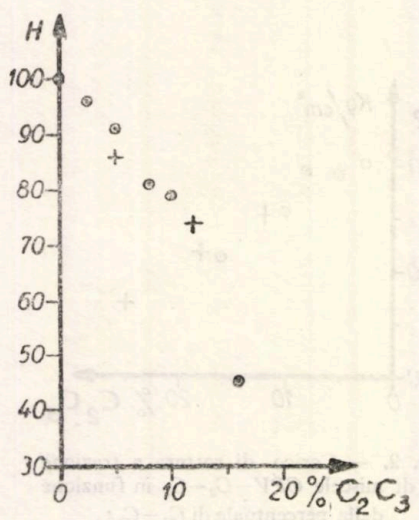


Fig. 5. — Durezza Rockwell scala *L* di miscele $CPV-C_2-C_3$ in funzione della percentuale di C_2-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘,
b — in assenza di polimero innestato +.

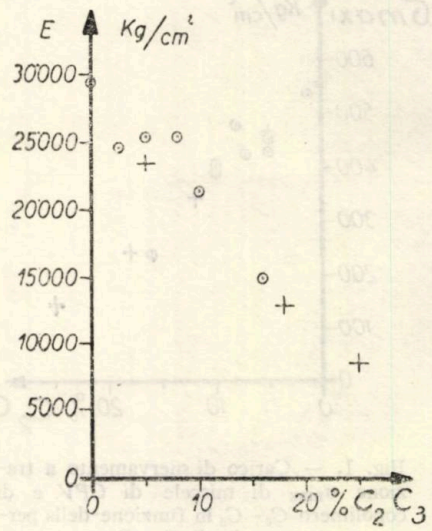


Fig. 6. — Modulo elastico a flessione di miscele $CPV-C_2-C_3$ in funzione della percentuale di C_2-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘,
b — in assenza di polimero innestato +.

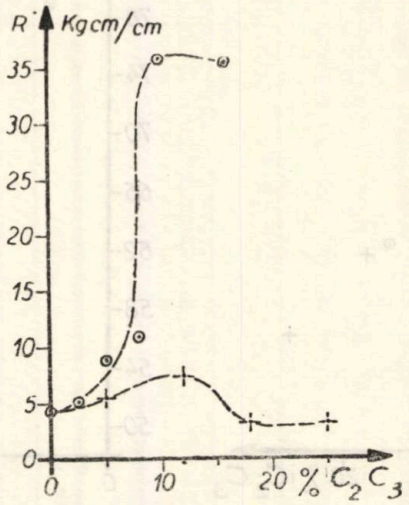


Fig. 7. — Resilienza Izod con intaglio di miscele $CPV-C_2-C_3$ in funzione della percentuale di C_2-C_3;
a — in presenza di polimero innestato ∘,
b — in assenza di polimero innestato +.

Miscele contenenti il copolimero innestato hanno buoni valori della resilienza anche al di sotto di 0°C [1, tabella 4] e risultano quindi essere buoni materiali anche per impieghi alle basse temperature.

Le prove normalmente effettuate per caratterizzare le proprietà antiurto dei polimeri sono, come è noto, eseguite con martelli a pendolo standardizzati che colpiscono il provino (prove Charpy e Izod). Nel caso del CPV gli AA. di solito usano provini con intaglio: esso consente di localizzare una concentrazione di sforzi tale da far partire la frattura da una stretta zona che è la stessa per tutti i provini: si è dimostrato inoltre [10] che i valori così ottenuti danno indicazioni che sono in buon accordo con i risultati che si hanno nell'impiego pratico in strutture di forma anche complessa. Nelle nostre prove noi abbiamo usato il metodo Izod secondo le norme ASTM D 256-56.

L'interpretazione in base alla struttura molecolare, delle proprietà meccaniche dei composti e delle miscele da noi preparate, caratterizzate dalla presenza di due componenti polimerici aventi temperature di transizione vetrosa distinte e molto diverse, è oltremodo complesso. Secondo le moderne teorie [11] le inclusioni di un materiale eterogeneo (nel nostro caso C_2-C_3) nel materiale considerato (CPV) provocano una concentrazione di sforzi; essi raggiungono quindi valori locali molto superiori al valor medio dello sforzo applicato e tali da provocare localmente la rottura che si estende poi a tutto il campione. Ciò provoca una diminuzione del carico di rottura apparente del materiale che viene calcolato in base agli sforzi medi e non a quelli locali. Questa diminuzione appare tanto maggiore quanto maggiore è, a parità di altre condizioni, la percentuale del concentratore di sforzi (C_2-C_3). Ciò è in buon accordo con l'andamento sperimentale decrescente con il crescere della percentuale di C_2-C_3 del carico di rottura a trazione e a flessione e dell'allungamento a rottura, riscontrato sia nel caso delle miscele meccaniche che nel caso dei materiali contenenti il polimero innestato (fig. 2 e 3). Anche la sensibile diminuzione del modulo elastico con la percentuale di elastomero (fig. 6) è prevedibile secondo la teoria di Kerner [12], essendo il modulo elastico dell'elastomero molto inferiore a quello del CPV. L'andamento della durezza è simile a quello del modulo elastico in quanto con il metodo di prova dettato dalla norma ASTM D 785-62 si misura una proprietà che è principalmente determinata dal modulo elastico del materiale [13]. L'andamento del punto di rammollimento secondo Vicat anche se intuitivo è però difficilmente interpretabile in base alle teorie esistenti. Tutte le determinazioni da noi eseguite, devono essere considerate prove di lunga durata. Ricordiamo che nelle prove meccaniche eseguite sui materiali viscoelastici, si deve confrontare il tempo t di applicazione del carico, con quello di rilassamento τ, caratteristico della transizione vetrosa → gommosa. Come è noto [14] i materiali viscoelastici si comportano come materiali di Hooke (fragili) se t è inferiore di un certo limite a τ. Questo è il caso delle prove d'urto eseguite sul CPV omopolimero, che è caratterizzato da un tempo di rilassamento τ molto elevato (10^6 sec a 60°C, [15]). Il tempo

di rilassamento è funzione del tipo di moto molecolare considerato e della temperatura [16]; a basse temperature si osservano tempi di rilassamento più lunghi.

Il copolimero C_2-C_3 si comporta a temperatura ambiente da elastomero anche nel caso di sollecitazioni di brevissima durata: da ciò si deduce che per esso τ ha valori molto piccoli. I materiali misti costituiti da PVC e da C_2-C_3 sono caratterizzati dalla coesistenza dei due tempi medi di rilassamento caratteristici dei due polimeri, di cui uno brevissimo. Tutte le prove da noi eseguite su di essi hanno superato in durata il tempo τ caratteristico dall'elastomero e hanno trovato perciò il materiale in condizioni di viscoelasticità.

L'eterogeneità dei tempi di rilassamento in una mescola ha per conseguenza un aumento della sua resistenza all'urto in quanto rende possibile l'estensione del volume interessato dalla sollecitazione meccanica d'urto e quindi l'assorbimento di un maggiore lavoro di deformazione [16]. Infatti quando in seguito all'urto si rompono i legami secondari intermolecolari (è improbabile una rottura dei legami covalenti) le zone caratterizzate da brevi tempi di rilassamento (C_2-C_3) possono rapidamente riformare legami secondari efficienti con zone vicine, non ancora investite dalla rottura, mentre quelle che hanno lunghi tempi di rilassamento (CPV) non possono fare altrettanto, aprendo così una via preferenziale alla rottura stessa. Essendo statistica la distribuzione delle suddette zone, la rottura procede in direzioni casuali, interessando così un ampio volume. La concentrazione degli sforzi si mantiene in tal caso bassa. Se il materiale fosse caratterizzato invece da legami intermolecolari del tutto omogenei e quindi da un tempo di rilassamento identico in tutto il volume, i legami secondari o non avrebbero il tempo di riformarsi o lo farebbero in modo simmetrico, permettendo alla frattura di procedere su uno stretto fronte con alta concentrazione di sforzi.

L'interpretazione precedente è in accordo con la teoria di Griffith [17] secondo cui l'energia elastica assorbita durante l'urto è proporzionale alla grandezza della superficie di rottura generatasi ed è quindi maggiore nel caso di sistemi eterofasici caratterizzati dall'esistenza di numerose microrotture in virtù della prezenza di alte concentrazioni locali di sforzo. Altri AA. [18] hanno proposto un meccanismo di rottura che si fonda sull'assorbimento di lavoro di deformazione da parte dell'elastomero inglobato nel materiale rigido, una volta che questo abbia subito delle rotture locali (fessure); l'elastomero può assorbire energia, sino a che non interviene il suo distacco dalla matrice circostante.

Secondo queste due ultime teorie e in acordo coi risultati sperimentali è possibile elevare la resilienza di un materiale fragile incorporando in esso un materiale elastomerico a condizione che il materiale elastomerico si trovi uniformemente disperso nella matrice sotto forma di particelle discrete e quindi in modo da non formare un sistema omogeneo su scala molecolare (soluzione solida); tra i sistemi di questo tipo è stato particolarmente studiato il polistirolo antiurto. Composizioni polimere dello stirolo dotate di elevata

resilienza sono costituite infatti da una dispersione microscopica nella matrice rigida, di geli insolubili costituiti verosimilmente da materiali elastomerici reticolati ed innestati con catene di polistirolo. In questo caso la disperdibilità dell'elastomero a livello molecolare è impedita della parziale reticolazione del materiale rinforzante, mentre l'adesione alla matrice resta garantita dalle catene di polistirolo presenti e legate chimicamente all'elastomero. I materiali grezzi ottenuti polimerizzando il cloruro di vinile in presenza del copolimero etilene-propilene non sono praticamente reticolati e sono solubili ad esempio in tetraidrofurano. In questo caso l'azione di rinforzo esplicata dall'elastomero innestato aumentando la resistenza all'urto della matrice può essere spiegata ammettendo che data l'elevata incompatibilità del polivinil cloruro e dell'elastomero, quest'ultimo sebbene innestato e non reticolato, non si disperde nella matrice a livello molecolare ma sottoforma di minuscoli globuli che aderiscono tenacemente alla matrice per mezzo delle catene laterali innestate di CPV. Per le miscele meccaniche del copolimero non modificato con il CPV non si osservano miglioramenti sensibili della resistenza all'urto. Infatti essendo i due polimeri poco compatibili l'elastomero tende a separarsi dalla matrice rigida di CPV; quindi la superficie interfasica, da cui dipende il lavoro di deformazione assorbito nell'urto, risulta ridotta rispetto a quella ottenibile nel caso di mescole contenenti i prodotti innestati, ma risulta crescente col crescere della percentuale e quindi del numero delle particelle di elastomero, sino a che, per elevate percentuali di elastomero, la coalescenza delle particelle elastomeroche porta una diminuzione del valore della superficie interfasica. Ciò spiega l'andamento a massimo della resilienza delle miscele meccaniche (fig. 7). Nel caso di mescole contenenti il polimero innestato esiste una ottima ed omogenea disperdibilità dei nuclei elastomerici nella matrice rigida, che ha il pregio di mantenersi col tempo a differenza delle miscele meccaniche, come conseguenza dell'esistenza di catene di CPV innestate sulle catene elastomeriche; inoltre le possibilità di coalescenza di tali nuclei sono molto ridotte. Ciò spiega i più lati valori della resilienza delle miscele contenenti il polimero innestato e la mancanza di un massimo apprezzabile, nei limiti delle circostanze di elastomero da noi sperimentate.

Pervenuta il 28 XI 1966

Instituto di Chimica Industriale del Politecnico, Milano, Italia

BIBLIOGRAFIA

1. Natta G., Severini F., Pegoraro M., Beati E., Aurello G., Toffano S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 233—240.
2. Natta G., Zambelli A., Pasquon I., La Chimica e l'Industria, 1966, **48**, *12*, pp. 1298—1306.
3. — La Chimica e l'Industria, 1966, **48**, *12*, pp. 1307—1315.
4. Danusso F., Ferruti P., Peruzzo G., Natta G., La Chimica e l'Industria, 1966, **48**, *5*, pp. 466—470.

5. Natta G., Pegoraro M., Szilágyi L., La Chimica e l'Industria, 1967, **49**, *1*, pp. 1—6 e 7—15.
6. Natta G., Severini F., Pegoraro M., Beati E., Aurello G., Toffano S., La Chimica e l'Industria, 1965, **47**, *9*, pp. 960—965.
7. Danusso F., Sianesi D., La Chimica e l'Industria, 1955, **37**, p. 695.
8. Nozaki, Disc. Faraday Soc., 1947, **2**, p. 337.
9. Wich G., König H., Kunststoffe, 1959, **49**, *10*, S. 506.
10. Reid D. R., Horsley R. A., British Plastics, 1959, **4**, p. 156.
11. Condon E. V., Am. J. Phys., 1954, **22**, p. 224.
12. Kerner E. H., Proc. Phys. Soc. London, 1956, *693*, p. 808.
13. Nielsen L. E., *Mechanical Properties of Polymers*. Reinhold, New York, 1962, p. 132.
14. Stuart H. A., *Die Physik der Hochpolymeren*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Göttingen, 1956, S. 34.
15. Sommer W., Koll. Z., 1959, *167*, S. 97.
16. Morey D. R., Ind. Eng. Chem., **37**, p. 255.
17. Griffith A. A., Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1920, **221A**, p. 163.
18. Merz E. H., Claver G. C., Boer M., J. Polymer Sci., 1956, **22**, p. 325.

POLIMERI DIN CLORURĂ DE VINIL GREFAŢI PE ELASTOMERI OLEFINICI, CU REZISTENŢĂ LA ŞOC

Nota II

Rezultate experimentale şi discuţie

(Rezumat)

Se prezintă unele rezultate experimentale referitoare la polimerii din clorură de vinil grefaţi pe elastomeri olefinici, cu rezistenţă înaltă la şoc.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Sarcina limită la tracţiune σ_{max} a amestecului de CPV şi a copolimerului $C_2 - C_3$ în funcţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + — în absenţa polimerului injectat.

Fig. 2. — Sarcina de rupere la trancţiune σ_R a amestecului CPV — $C_2 - C_3$ în funcţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + — în absenţa polimerului injectat.

Fig. 3. — Sarcina de rupere la încovoiere σ_{Rf} a amestecului CPV — $C_2 - C_3$ în funcţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + în absenţa polimerului injectat.

Fig. 4. — Temperatura de înmuiere (după Vicat) a amestecurilor CPV — $C_2 - C_3$, în funcţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + — în absenţa polimerului injectat.

Fig. 5. — Duritarea Rockwell, scara L, a amestecurilor de CPV — $C_2 - C_3$ în funcţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + — în absenţa polimerului injectat.

Fig. 6. — Modulul elastic de încovoiere al amestecurilor CPV — $C_2 - C_3$ în funcţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + — în absenţa polimerului injectat.

Fig. 7. — Rezilienţa Izod cu tăiere a amestecurilor CPV — $C_2 - C_3$ în funţie de proporţia de $C_2 - C_3$; o — în prezenţa polimerului injectat, + — în absenţa polimerului injectat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 677.1 ; 677.463

UNTERSUCHUNGEN IM BEREICHE DER HYDRATCELLULOSEFASERN VOM VISCOSETYPUS

VON

ELENA CALISTRU und N. VOICULESCU

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] wurden die Modifizierungen der Zellstoffe im technologischen Herstellungsvorgang von Kunstfasern des Viskosetypus studiert, wobei die chemischen Eigenschaften (α-Cellulose-Gehalt, mittlere DP-Grad und Kupferzahl) des Rohstoffes sowie der Zwischen- und Endprodukte bestimmt wurden. Die strukturellen Modifikationen wurden durch die Absorptionsspektren im IR und die Beugungsspektren mittels Roentgenstrahlen veraugenscheinlicht.

Im Nachfolgenden werden wir die Ergebnisse von Untersuchungen vorlegen, die an einheimischen und ausländischen zellstoffhaltigen Kunstfasern ausgeführt wurden, wobei versucht werden soll, eine Wechselbeziehung zwischen den Faktoren des technischen Herstellungsvorganges und den bedeutendern physikalisch-mechanischen Kennziffern, sowie der Ausrichtung in den Fasern durch Röntgenstrahlbeugung festzustellen. Die Arbeiten wurden von der Abteilung für Zellstoff, Papier und Kunstfasern an der Technischen Hochschule in Zusammenarbeit mit dem Chemischen Institut „Petru Poni"" in Jassy durchgeführt.

2. Versuchsergebnisse und ihre Auswertung

a) *Analysiertes Zellstoffmaterial*

Beim Studium ging man von den folgenden vier Cellulose-Kunstfasern des Viskosetypus aus: a) Zellwolle vom Baumwolltypus; b) Zellwolle vom Wolltypus; c) Super-Kordfaser; d) Super-Polynosicfaser T_{61}.

Die ersten drei Proben stammten aus der inländischen Kunstfasererzeugung, die vierte war von der belgischen Firma „Fabelta" hergestellt worden.

Es ist bekannt, dass die grosse Vielfältigkeit der Eigenschaften, welche die chemischen Fasern aufweisen, in grösstem Ausmasse von den betreffenden Herstellungsverfahren abhängt [2]. Die Natur der Viskose, des Spinnbades, sowie die Operationen der Endbearbeitung der inländischen Fasern, die sich im kontinuierlichen Verfahren der Verspinnung und Ausfertigung im Faden ergeben, sind im Folgenden angegeben.

Viskose: 6 ... 6,5% NaOH; 7 ... 7,5% Cellulose; 2% Schwefel; 40 ... 50 Sekunden Viskosität des Spinnbades und eine Hottenrothreife von 11.

Spinnbad: 100 g/l Schwefelsäure; 280 g/l Natriumsulfat; 9,0 g/l Zinksulfat; Dichte bei 45°C, 1 270.

Die Fasern wurden auf bekannte Weise ausgefertigt, bzw. neutralisiert, gebleicht, aviviert und gestreckt. Bei Zellwolle *B* wurden sowohl die erste als auch die zweite Streckung auf lufttrockenem Faden ausgeführt, wobei eine Gesamtstreckung von 50% erzielt wurde.

Beim technologischen Herstellungsverfahren von Superkordfasern wurden die von der italienischen Firma „Chatillon" vorgeschlagenen „Modifiers" verwendet, welche in drei Portionen und zwar bei der Zerfaserung, bei der Auflösung und im Spinnbad zugesetzt wurden. Bei der chemischen Verarbeitung wurden Kondensationsprodukte des Äthylenoxyds mit verschiedenen Alkoholen, wie auch Natriumsulforizinate mit einem Sulfonierungsgrad von ungefähr 50% verwendet; in das Spinnbad fügte man als Modifikator Lauryl-pyridinsulfat zu.

Was die Polynosicfaser T_{61} advanced betrifft, geht aus den anlässlich des Chemiezellstoff-Symposions in Helsinki im Mai 1966 geführten Gesprächen [3] hervor, das man in Belgien die industrielle Erzeugung dieser Faser wieder aufgenommen hat, welche alle wichtigen Eigenschaften der Polynosicfasern aufweisen.

b) *Bestimmung der Kettenlänge — DP*

Bei der Besprechung des Einflusses der Zellstoffqualität auf die Kennzalen der Polynosicfasern hat Temmernaru [3] gezeigt, dass für das Gelingen der Faserqualität eine bedeutende Rolle dem Polymerisierungsgrad des Ausgangs-Zellstoffes, sowie der Bewahrung eines hohen mittleren Polymerisierungsgrades in der Faser zukommen. Von dieser Voraussetzung ausgehend, bestimmte man anfänglich den mittleren DP-Wert der Analyseproben. Zu diesem Zwecke benützt man die viskosimetrische Methode, wobei die Hydratcellulosen im Eisen-Weinsäure-Natrium-Reagens (EWNN) gelöst wurde [4]. Die Bestimmung der Viskosität der Lösungen von 0,2% wurde mit einem Ubbelohde II-Viskosimeter durchgeführt, $K = 0{,}10015$. Die Berechnung von η aus den Viskositätsdaten erfolgte nach der Formel von G. V. Schulz und Blaschke [5]:

$$[\eta] = \frac{\eta_{sp}/c}{1 + K_\eta \eta_{sp}},$$

wobei $K_\eta = 0{,}339$, $c = g/100$ ml.

Aus dem Werte $[\eta]$ ergab sich der Mittelwert von DP aus der Standard-Kurve, welche von Edelmann und Horn [6] erhalten worden war; die Werte sind auf Tabelle 1 ersichtlich. Sie ordnen sich innerhalb der Grenzwerte der mittlern Polymerisationsgrade für die betreffenden Fasern ein, die sich in der Fachliteratur finden [7], [8], wo sie nach andern üblichen Methoden bestimmt wurden.

Tabelle 1

Die Werte der mittlern Polymerisationsgrade in EWNN

Nr. der Probe	Natur des Faserstoffes	$(DP)_{EWNN}$
1.	Zellwolle Typus *B*	400
2.	Zellwolle Typus *L*	360
3.	Super-Kordfaser	480
4.	Super-Polynosicfaser T_{61}	530

c) *Physikalisch-mechanische Kennwerte*

Die Dehnung im Spinnvorgang der Kunstfasern vom Viscosetypus führt zur Ausrichtung der Makromolekel paralell zu der Faserachse und demgemäss zu einer Steigerung der Zugfestigkeit.

Die Zugfestigkeit einer Faser stellt einen Höchstwert vor, den die Längsspannung erreicht bevor das Reissen stattfindet, wobei die Faser einfachen Zugbeanspruchungen unterworfen ist.

Die absolute Festigkeit (Reissbelastung) P ist eben diese Längsspannung. Sie wird mit Hilfe eines Schopper-Dynamometers bestimmt und in gf/Faser ausgedrückt, wobei die Formel

$$P = \frac{DX}{100} + G_p$$

angewendet wird, in welcher bedeuten: D — das am Pendel angehängte Gewicht, X — die Teilung an der Kraftskala, G_p — Gewicht der Vordehnungsvorrichtung.

Auf Tabelle 2 zeigen wir die Werte der Festigkeit und der Verlängerung der studierten Fasern, sowohl im Trockenzustand (konditioniert), wie auch nass. Bei allen Proben wurden die physikalisch-mechanischen Kennziffern an der Faser bestimmt, ausgenommen Probe *3*, wo Super-Kord als Faden geprüft wurde.

Tabelle 2

Die physikalisch-mechanischen Kennziffern der Hydratcellulosefasern

Nr. der Probe	Natur des Faserstoffes	Festigkeit gf/F		Verlängerung %	
		trocken	nass	trocken	nass
1.	Zellwolle *B*	3,55	1,48	20,4	23,1
2.	Zellwolle *L*	10,48	5,48	14,8	36,6
3.	Super-Kord	7,60	5,27	14,2	18,4
4.	Super-Polynosic	7,55	4,95	13,9	13,9

Bei der Analyse der obigen Ergebnisse stellt man fest, dass bei Zellwolle die Festigkeit in nassem Zustande kaum 50% der Trockenfestigkeit beträgt; demgegenüber erhält man bei modifizierten Fasern — mittels Modifikatoren oder Polynosic — eine Nassfestigkeit die 69 bzw. 65,3% der Trockenfestigkeit ausmacht. Man stellt ein maximales Anwachsen der Nass-Dehnung bei Zellwolle vom Wolle-Typus fest, während sie bei der Super—Polynosicfaser merklich dieselbe bleibt [9].

d) *Die Orientierung in den Fasern mittels der Röntgenbeugung*

Es ist bekannt, dass die systematische Untersuchung des intimen Baus der Fasern vom Viskosetypus zum Verständnis ihres Verhaltens beigetragen hat; sie führte in einem gewissen Masse zur Aufstellung von Beziehungen zwischen Bau und physikalisch-mechanischen Eigenschaften, wobei schliesslich rationelle Arbeitsgänge festgestellt werden konnten, um Fasern mit bestimmten Eigenschaften zu erhalten [10] ... [12].

Die strukturellen Modifizierungen der Fasern bei Behandlung mit NaOH werden von Drisch mittels Röntgenstrahlung [8] anlässlich des Vergleichs der klassischen Fasern vom Viskosetypus mit den Polynosicfasern verfolgt. Die Abänderung der mittleren molekularen Orientierung wird durch die Erweiterung der Interferenzen im Schaubild durch Röntgenstrahlung charakterisiert.

Der Polynosic-Charakter der Fasern besteht nach Bouriot [13] in der Unabhängigkeit der beiden strukturellen Angaben: mittlere Orientierung und Kompaktheit der amorphen Bereiche, bzw. Energie der Wasserstoffbindungen.

Die Abbildungen 1...4 geben die Debyegramme der studierten Fasern wieder.

Die Beugungsbilder wurden mit Hilfe des Apparates TUR M-60 erhalten, wobei die Strahlung CuCd, $\lambda = 1{,}5418$ Å, Arbeitsspannung 42 kV, $I = 14$ mA verwendet wurden.

Es wurden Beugungskammern Debye-Scherrer mit symetrischer Filmanordnung verwendet. Alle vier Proben wurden gleichzeitig während 6 Stunden exponiert. Die Photometrierung wurde mit dem Mikrophotometer LIREPHO-2, einem Umwandlungsverhältnis 1/1 und einer Verschiebungsgeschwindigkeit des Papiers von 10 mm, bei einem Winkel von 2° am Film ausgeführt.

Die Auswertung der Cellulose-Kristallinität in den studierten Proben wurde nach der von O. Ant-Wuorinen und A. Visapää angegebenen Methode [14] ausgeführt, die auch von den sowjetischen Forschern benützt wird [15]. Das Beugungsmaximum wurde in einem Intervall von 8 bis 12 Graden und das Minimum zwischen 16 und 21 Graden bestimmt. Die Ergebnisse sind auf Tabelle 3 verzeichnet.

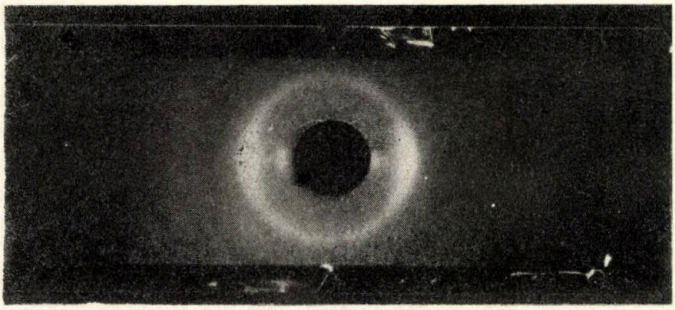


Abb. 1. — Debyegramm für Zellwolle Typus *B.*

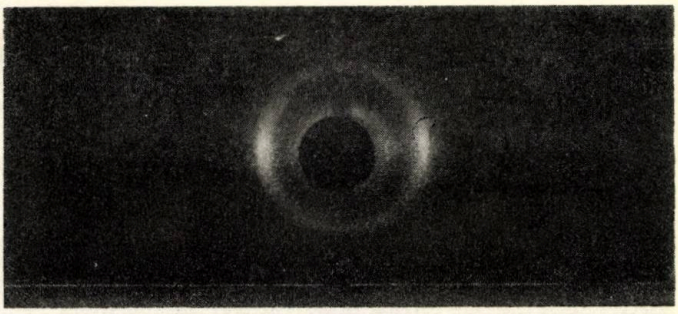


Abb. 2. — Debyegramm für Zellwolle Typus *L.*

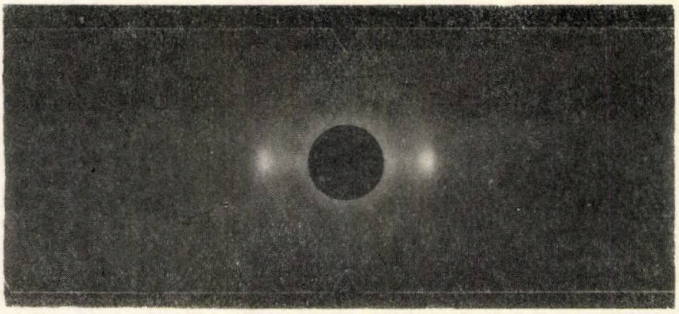


Abb. 3. — Debyegramm für Super-Kordfaden.

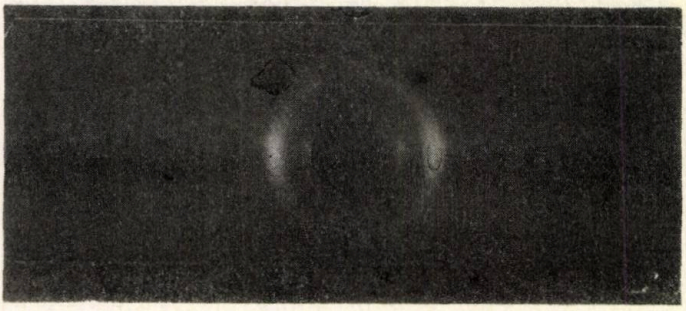


Abb. 4. — Debyegramm für die Super-Polynosicfaser T_{61} adv.

Tabelle 3

Kristallinitätswerte der analysierten Proben

Fasern / Berechnete Werte	Zellwolle *B*	Zellwolle *L*	Super-Kord	Super-Polynosic
Gesamthöhe (h_{tot})	180	81	100	161
Höhe der amorphen Portion (h_{am})	78	26	25	52
Höhe der kristallinen Portion (h_{cr})	102	55	75	109
Kristallinitätswert (I_{cr})	0,235	0,527	0,666	0,522

Die Werte der Höchst-, Mindest-, und Gesamthöhen sind in arbiträren Einheiten angegeben.

Nach den zitierten Verfasser gilt:

$$h_{cr} = h_{tot} - h_{am}.$$

Der Kristallinitätswert einer Probe wird aus der Formel

$$I_{cr} = 1 - \frac{h_{am}}{h_{cr}}$$

erhalten.

Diese Menge stellt aber nicht den prozentuellen Anteil der kristallinen Portion aus den Zellstoffproben, sondern den allgemeinen Ordnungszustand vor.

Aus Tabelle 3 ergibt sich folgende Klassifizierung des allgemeinen Ordnungszustandes für die analysierten Fasern: a) Super-Kord, b) Zellwolle *L*, c) Super-Polynosic, d) Zellwolle *B*. Es ergibt sich eine vollständige Übereinstimmung zwischen der beim Verspinnen verwendeten Streckung der Fäden und dem Werte I_{cr}.

Dasselbe lässt sich bezüglich der Übereinstimmung zwischen den physikalisch-mechanischen Werten der Proben aus Tabelle 2 und der Verspinnungsstreckung sagen.

Die höheren Polymerisationsgrade beim Super-Polynosic- und beim Super-Kord-Faden spiegeln sich auch in einem kleineren Abfallen der Festigkeit dieser Fasern im nassen Zustand gegenüber jener im Trockenzustand.

3. Schlussfolgerungen

1. Es wurden von CFA-Brăila erzeugte Hydratcellulosefasern vergleichsweise mit einer Super-Polynosicfaser T_{61} adv. studiert.

2. Die physikalisch-mechanischen Kennwerte von Fasern im nassen und im trockenen Zustand spiegeln das zu ihrer Herstellung verwendete technische Verfahren wieder.

3. Der allgemeine Ordnungszustand in der Faser, der sich aus dem Verhältnis von Ant-Wuorinen ergibt, entspricht dem Werte der physikalisch-mechanischen Kennziffern, die nach der Streckung beim Spinnvorgang erhalten werden.

4. Der Wert der Polymerisationsgrade der Hydratcellulosefasern, die mechanischen Kennziffern und der Kristallinitätswert stimmen vollständig mit den Bedingungen des Herstellungsprozesses der Fasern überein.

5. Sie stellen bedeutende Faktoren für die Abschätzung des Baues der Cellullose-Kunstfasern vor.

Eingegangen am 26 VI 1967

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Zellstoff, Papier und Kunstfasern

LITERATURVERZEICHNIS

1. Calistru E., Gheorghiu A., Celuloză şi hîrtie, 1965, **14**, *7-8-9*, p. 385.
2. Jacquemert J., Bull. I.T.F., 1962, *102*, p. 963.
3. Jayme G., Das Papier, 1966, *8*, S. 481.
4. Bergmann W. u. a., Das Papier, 1964, *4*, S. 150.
5. Calistru E., Ciovică S., Celuluză şi hîrtie, (unter Druck).
6. Edelmann K., Horn Z., Faserforschung und Textiltechnik, 1958, *11*, S. 493.
7. Schmiedeknecht H. u. a., Cellulose Chem. a. Technol., Bucarest, 1967, *1*, p. 231.
8. Drisch N., Priou R., Bull. I.T.F., 1962, *101*, p. 231.
9. Treiber E., Chemiefasern, 1964, *1*, p. 25.
10. Меос А. И. и сотр., Химические волокна, 1964, *2*, стр. 43.
11. Legrand C., Bull. I.T.F., 1966, p. 519.
12. Dumitriu M., Răduleanu M., Celuloză şi hîrtie, 1966, **15**, *5*, p. 165.
13. Bouriot P., Bull. I.T.F., 1962, *103*, p. 1197.
14. Ant-Wuorinen O. u. a., Norelco Reporter, 1962, **IX**, *2*, p. 48.
15. Petropavlovschi G. A. u. a., Cellulose Chem. a. Technol., Bucarest, 1967, *1*, p. 211.

CERCETĂRI ÎN DOMENIUL FIBRELOR HIDRATCELULOZICE TIP VISCOZĂ

(Rezumat)

Se expun studiile efectuate asupra unor fibre artificiale indigene (celofibră *B*, celofibră *L*, supercord) şi străine (fibră superpolinozică T_{61} adv., produs al firmei „Fabelta)".

Se stabileşte o corelaţie între parametrii procesului tehnologic de obţinere a fibrelor, indicii fizico-mecanici ai materialului uscat şi umed şi orientarea în fibre prin difracţie cu raze X. Evaluarea cristalinităţii celulozei s-a efectuat după metoda dată de O. Ant-Wuorinen şi colaboratori, (starea generală de ordonare în fibră). Se ajunge la concluzia că există o concordanţă deplină între factorii studiaţi.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Debyegrama pentru celofibra tip *B*.
Fig. 2. — Debyegrama pentru celofibra tip *L*.
Fig. 3. — Debyegrama pentru firul supercord.
Fig. 4. — Debyegrama pentru fibra superpolinozică T_{61} adv.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 547.992.3

ДИНАМИКА И СТРУКТУРА ГЛАВНЫХ ХИМИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТОВ ЗДОРОВЫХ И ТУМОРАЛЬНЫХ РАСТИТЕЛЬНЫХ ТКАНЕЙ

I. ВЛИЯНИЕ СТИМУЛЯТОРОВ И ИНГИБИТОРОВ РОСТА НА РАЗВИТИЕ НОРМАЛЬНЫХ И ТУМОРАЛЬНЫХ ТКАНЕЙ ТОМАТОВ *(SOLANUM LYCOPERSICUM)*

МАРГАРЕТА ГРИГОРАШ, АГАТА ЧЕРНЭТЕСКУ-АСАНДЕЙ и Г. РОЗМАРИН

1. Известно влияние некоторых ингибиторов на процесс лигнификации растительных тканей [1]...[6]. Действие стимуляторов роста в данной области может в некоторой степени уточнить причину изменения соотношений главных химических компонентов растений. Большое количество работ [7]...[21] касается главным образом физиологических изменений растения под влиянием биостимуляторов (вырастание семян, изменение размеров клеток или органов растения и тому подобное).

2. Наши исследования относятся к изменениям химического состава томатов *(Solanum lycopersicum)*, у которых вызвали раковые заболевания Кроун-Галл (Crown-Gall) искусственным путем при помощи *Bacterium tumefaciens*; растение обрабатывали — либо через корневую систему, либо путем опрыскивания листьев — стимуляторами (гиберелином Г и альфа-нафтилуксусной кислотой АНУК) и ингибиторами роста (пропилгаллатом ПГ). Контрольными образцами служили растения, зараженные *Bacterium tumefaciens*.

3. Первая группа опытов охватывает растения, которым подавали через корневую систему водный раствор Г или АНУК (0,025 г/л) по методике, описанной в одной из предыдущих работ [1]. Пробы снимали по истечению 30, 45, 60 и 77 дней непревывной обработки.

Химический состав первой группы растений, обработанных через корневую систему, представлен в таблице 1. Содержание лигнина и спиртнобензольного экстракта определяли по стандарду ТАППИ [22], [23], а для определения целлюлозы и гемицеллюлоз использовали соответственно методы Кюршнера-Хоффера [24], Даттона [25] и Арсено [26].

Таб

Химический состав растений, обработанных через

Анализируемый образец		Время (В					
		30				45	
		спиртно-бензольный экстракт %	целлюлоза %	лигнин %	гемицеллюлозы %	спиртно-бензольный экстракт %	целлюлоза %
Здоровая ткань *)	Свидетель	2,92	31,46	7,95	11,29	4,32	29,90
	Обработка Г	3,07	35,92	9,15	11,28	4,25	33,15
	Обработка АНУК	8,44	29,36	7,44	8,27	5,63	27,48
Туморальная ткань **)	Свидетель	6,72	20,96	10,45	15,36	7,53	20,94
	Обработка Г	6,64	27,88	11,90	9,32	6,85	27,54
	Обработка АНУК	6,11	21,27	10,92	13,62	8,91	18,96

*) Растительные ткани стебля выше опухоли и до вершины помидора.
**) Опухоль.

У проб стебля, срезанных чуть выше опухоли и вплоть до вершины, т.е. у здоровых тканей помидора, предварительно подвергнутых соответствующему размолу, найден ряд изменений химического состава:

а) Спиртно-бензольный экстракт повышается лишь в случае томатов, обработанных АНУК-ом, причем существенную разность можно отметить у 30-дневной обработки; в остальном, различия остаются незначительными.

б) Процентное содержание целлюлозы и лигнина завышено у помидоров, развитых под влиянием Г, однако под влиянием АНУК содержание этих компонентов получается заниженным в начальном периоде обработки и лишь по истечению двух месяцев констатируется значительный рост содержания лигнина.

в) Гемицеллюлозная фракция становится большей только после 60 дней обработки растения составом Г.

Картина же химических изменений опухолевых образований следующая:

а) Спиртно-бензольный экстракт повышается в результате 45-дневной обработки АНУК-ом.

б) Содержание целлюлозы в туморальных тканях достигает максимальной величины после 60 дней обработки раствором АНУК.

лица 1

корневую систему биостимуляторами роста Г и АНУК

обработок днях)									
		60				77			
лигнин %	гемицеллюлозы %	спиртно-бензольный экстракт %	целлюлоза %	лигнин %	гемицеллюлозы %	спиртно-бензольный экстракт %	целлюлоза %	лигнин %	гемицеллюлозы %
9,05	13,08	6,29	30,15	7,53	9,52	4,93	35,44	8,54	10,15
10,33	6,14	4,37	33,57	8,66	11,18	3,18	36,25	9,55	13,33
6,57	4,72	7,51	28,56	10,13	13,53	5,33	31,58	10,29	8,43
14,33	12,47	10,39	20,59	8,99	14,69	8,52	20,00	9,54	12,58
13,00	12,72	4,28	29,55	13,99	9,26	4,74	26,13	14,76	13,00
14,50	12,46	10,15	19,82	14,35	16,81	6,08	18,50	11,63	12,13

в) Процентное содержание лигнина опухолей, развитых под влиянием обоих стимуляторов роста, остается приблизительно постоянным в течение 60 дней, после чего наблюдается существенное повышение.

г) По истечению 60 дней обработки раствором АНУК содержание гемицеллюлоз повышается.

Из сравнения изменений химического состава здоровых и туморальных тканей под действием стимуляторов роста для первой группы растений вытекает, что АНУК благоприятствует повышению спиртно-бензольных экстрактивных веществ, а Г вызывает увеличение содержания целлюлозы и в здоровой части растения (на 11%), и особенно в опухоли (на 12...14%), причем максимальное значение достигается после 60 дней обработки.

4. Как уже было показано, далее мы изменили методику обработки растения путем опрыскивания листьев растворами стимуляторов роста, используя данные литературы [7]...[21]. Таким образом, во вторую группу опытов вошли помидоры, обрызгиваемые многократно водными растворами (0,005%) ПГ, Г и АНУК, причем эту операцию начинали за 40 дней до заражения растений *Bacterium tumefaciens* и повторяли ежедневно в течение последующих 49 дней. Контролем служили помидоры, обрызгиваемые таким же способом чистой водой. Отметим, что группа охватывает также влияние ингибитора роста ПГ. Все полученные данные, относящиеся к изменению химического состава, указаны в таблице 2.

Таблица 2

Химический состав растений, обработанных путем опрыскивания листьев биостимуляторами роста Г и АНУК и ингибиторами ПГ

Анализируемый образец			Спиртно-бензольный экстракт %	Целлюлоза %	Лигиин %	Гемицеллюлозы %
Здоровая ткань *)	Опрыскивание раствором :	водой	5,65	30,17	8,10	11,48
		Г	4,92	33,72	7,82	12,36
		АНУК	4,37	31,56	8,18	12,07
		ПГ	5,86	28,51	7,61	7,51
Тумораль-ная ткань **)	Опрыскивание раствором :	водой	13,60	19,39	10,35	14,28
		Г	9,28	23,77	9,88	14,70
		АНУК	8,23	20,10	10,62	14,82
		ПГ	12,07	20,51	10,00	11,29

*) Растительные ткани стебля выше опухоли и до вершины помидора.
**) Опухоль.

Растения, выращенные под влиянием стимуляторов роста Г и АНУК, развили свои стебли и листья в ускоренном темпе по сравнению с партиями помидоров, выращенных под действием ингибитора роста ПГ, или по сравнению с контролем (томаты, опрыскиваемые простой водой).

Данные химического анализа второй группы растений показывают, что под влиянием стимуляторов роста Г и АНУК спиртно-бензольный экстракт падает, а содержание целлюлозы несколько повышается; в то же самое время отмечают незначительное повышение гемицеллюлозной фракции и несущественные изменения для лигнина.

Обработка ингибитором роста ПГ привело к уменьшению содержания лигнина, гемицеллюлоз и целлюлозы, за исключением последней в опухоли. Спиртно-бензольный экстракт повышается в здоровой и понижается в опухолевой частях растения.

Выводы

Приведены экспериментальные данные, которые указывают, что обработка томатов гиберелином ведет в обоих случаях (обработка через корневую систему и опрыскивание листьев) к повышению процентного содержания целлюлозы. Растения развивают сильную систему листьев и стеблей в случае применения метода опрыскивания растворами гиберелина.

Поступила 16 VI 1967 г.

Академия С. Р. Румынии,
Институт макромолекулярной химии
„П. Пони“, г. Яссы

ЛИТЕРАТУРА

1. Simionescu Cr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, V (IX), *3—4*, p. 155.
2. Simionescu Cr., Calistru E., Simionescu N., Rev. Chim., Acad. R. P. R., 1961, 6, p. 235.
3. Simionescu Cr., Calistru El., Simionescu N., Hrihorov M., St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1961, 12, p. 241.
4. Симионеску Кр., ДАН СССР, 1962, 143, стр. 239.
5. Лисиц Д. В., Круглякова К. Е., Постникова М. С., Эмануэль Н. М., ДАН СССР, 1962, 145, стр. 212.
6. Grigoraş M., Simionescu N., Simionescu Cr., St şi cerc. şt., Chim., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1964, 13, p. 535.
7. Yatazava M., Matsui M., Wilde S. A., Univ. Wis. Forestry Research Notes, 1960, 52, p. 2.
8. Аветисян А. А., Тр. Ереванского Зооветер. ин-та, 1960, 24, стр. 267.
9. Chaudhury B., Singh S. N., Indian J. Hort, 1960, 17, p. 48.
10. Tavant H., C. R., Ac. Sci., Paris, 1960, 251, p. 1815.
11. — C. R., Ac. Sci., Paris, 1960, 251, p. 3057.
12. — C. R., Ac. Sci., Paris, 1960, 253, p. 901.
13. — Ann. Sci. Univ. Besançon, 2e Séries, Botanique, 1961, p. 51.
14. — C. R., Ac. Sci., Paris, 1961, 253, p. 1485.
15. — Bull. Soc. Hist. nat., Doubs, 1961, 63, p. 37.
16. Melkior G. H., Knapp R., Silvae Genetica, 1962, 11, p. 29.
17. Vasiliev A. E., A. B. I. P. C., 1962, 33, p. 1895.
18. Dankanits E., Haring P., St. şi cerc. Biochim., Acad. R. P. R., 1963, 6, p. 395.
19. Вывалько И. Т., ДАН СССР, 1963, 149, стр. 979.
20. Томбург К. З., Мальцева В. Н., ДАН СССР, 1964, 154, стр. 1214.
21. Володарский Н. И., Поцелуева В. Т., ДАН СССР, 1964, 154, стр. 476.
22. * * * TAPPI, T 13*m*—54.
23. * * * TAPPI, T 6*m*—59.
24. Lévy-Hulot G., *L'analyse immédiate des bois*. Masson, Paris, 1946, p. 103.
25. Dutton G. G., Murata T. G., Canad. J. Chem., 1961, 39, p. 1995.
26. Arseneau D. F., Canad. J. Chem., 1961, 39, pp. 1915.

DINAMICA ŞI STRUCTURA COMPONENTELOR CHIMICE PRINCIPALE ALE ŢESUTURILOR VEGETALE NORMALE ŞI TUMORALE

I. Influenţa stimulatorilor şi inhibitorilor de creştere asupra dezvoltării ţesuturilor normale şi tumorale ale roşiilor *(Solanum lycopersicum)*

(Rezumat)

Se studiază influenţa unor stimulatori şi inhibitori de creştere exercitată asupra dezvoltării ţesuturilor normale şi tumorale ale roşiilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 678.5; 536.371

METODE DE CERCETARE A MATERIALELOR PLASTICE PRIN EXAMENUL DE FLUORESCENŢĂ

DE

M. POPOVICI, AL. PETRESCU, AL. REDEŞ şi ELENA POPOVICI

Comunicare prezentată în sesiune ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5–7 februarie 1965

1. Introducere

Cu studiul fenomenelor de luminiscenţă în razele ultraviolete filtrate, s–au ocupat numeroşi cercetători.

Examenul maselor plastice se efectuează în mai multe moduri. Astfel, este cunoscut examenul fizic — organoleptic, densitate, însuşiri mecanice, însuşiri optice (culoare în reflexie şi transmisie, reflexia de raze invizibile şi vizibile, spectrul), comportarea produselor la ardere în flacără şi la încălzirea în tubuşor (culoarea flacării, mirosul etc.). analiza cu raze Röntgen, analiza de fluorescenţă etc.

Examenul maselor plastice se mai poate efectua şi prin studiul comportării faţă de diverşi agenţi chimici (clor, fosfor, azot, sulf), precum şi în raport cu cifra de saponificare etc.

În cele ce urmează ne–am ocupat de studiul comportării maselor plastice faţă de acţiunea razelor ultraviolete (analiza prin fluorescenţă).

Din observaţiile a diverşi cercetători (M. Guyot [9], J. A. Radley [12], Seyewetz [13], O. Gerngross şi M. Schultz [8], C. Kostka [10], M. Déribéré [4], [5], P. W. Danckwortt [2] şi alţii [3], [7], [11], rezultă că masele plastice prezintă, în general, fluorescenţe care pot folosi la identificarea unor specii sau varietăţi de mase plastice.

Obiectul cercetărilor noastre l–a constituit obţinerea unei metode rapide de control tehnic de fabricaţie, de recepţie, de control al gradului de alterare şi al uzurii maselor plastice.

Ne–am propus să verificăm valoarea metodei de analiză prin fluorescenţă a maselor plastice şi pe de o parte, să găsim, factorii care determină sau influenţează fluorescenţa şi, pe de altă parte, să stabilim relaţii între grupele chimico–tehnice şi sortimentele, cu formele şi varietăţile lor.

2. Partea experimentală

a) *Aparatura.* Am folosit în experimentări ca aparatură lampă de cuarţ analitică „Hanau" şi lampă „Philora" H. P. W. de 75 W (Philips), microscop de fluorescenţă (Rippert–Bernheim), spectroscop, fluorometru cu celulă fotoelectrică.

Examenul s–a efectuat la o distanţă de 20 cm de ecranul filtrat de sticlă neagră tip „Wood", cu radiaţii ultraviolete între 440 nm şi 280 nm, cu 90 % din radiaţii având $\lambda = 365$ nm, date de aparatura noastră.

S-au cercetat fluorescenţele unui mare număr de produse din mase plastice.

Observaţiile noastre au fost făcute pe circa 1 000 de substanţe.

b) *Factorii care influenţează luminiscenţa.* Luminiscenţa este influenţată de numeroşi factori fizici şi chimici, care favorizează sau frînează sau chiar exting (sting) fluorescenţa.

Dintre cei mai importanţi factori care influenţează fluorescenţa sînt: temperatura, dizolvanţii, gradul de diluţie, oxigenul, antioxidanţii, constituţia chimică a substanţei analizate, fineţea particulelor corpurilor solide, felul şi modul de absorbţie, gradul de puritate etc. De toţi aceşti factori trebuie să se ţină seama în analizele de luminiscenţă. Cele mai însemnate calităţi care trebuie avute în vedere sînt: gradul de puritate şi constituţia chimică a materialului ce se analizează.

c) *Caracteristicile analizei prin luminiscenţă.* Analiza prin luminiscenţă are următoarele caracteristici remarcabile: a) se efectuează destul de lesne, iradiind obiectul de cercetat cu raze ultraviolete filtrate; b) are o precizie ridicată, uneori superioară analizei chimice; c) efectuarea analizei se realizează cu o extrem de mare rapiditate, ce întrece cu mult toate celelalte metode analitice; d) analiza de luminiscenţă, combinată cu un dispozitiv automat fotoelectric, poate servi la o *sortare automată, rapidă şi precisă a obiectelor ce se supun examenului prin această metodă.*

Dezavantajele analizei prin luminiscenţă sînt următoarele: a) dacă metoda nu este bine pusă la punct, poate da rezultate eronate; b) dacă cel ce execută analiza în luminiscenţă nu cunoaşte bine condiţiile în care se prezintă obiectul analizat şi diferiţii factori care influenţează luminiscenţa, de asemenea se obţin rezultate eronate.

3. Rezultate experimentale

Pe baza observaţiilor noastre, rezultatele analizei prin fluorescenţă a materialelor plastice, comparate cu observaţiile autorilor citaţi, permit formularea următoarelor concluzii:

1°. Examenul luminiscenţei emise de masele plastice sub excitaţia cu raze ultraviolete filtrate reprezintă o metodă preţioasă, rapidă şi foarte sensibilă, dar orientativă şi adiţională, care, în unele cazuri, poate fi de mare utilitate.

2°. Nu sîntem de acord cu unii autori care generalizează cazuri particulare, apreciind examenul de fluorescenţă ca fiind precis şi sensibil pentru întreaga categorie de materiale plastice.

Astfel, reluînd cercetările lui G. Kostka (*op. cit.*), am constatat, de exemplu, că numai, în unele cazuri se pot deosebi prin luminiscenţă răşinile fosile de cele actuale sau de unele imitaţii sau înlocuitori. De asemenea, masele plastice, aşa cum ele se aduc în comerţ, ca materiale de construcţie în domenii diverse, ca obiecte casnice etc., au uneori fluorescenţe remarcabile, dar nu totdeauna şi caracteristice.

3°. Fluorescenţele plastifianţilor sînt remarcabile, unele fiind foarte puternice şi caracteristice.

Astfel dioctil-ftalatul şi dibutil-sebacatul emit fluorescenţe nete în galben, pe care le comunică masei plastice în care sînt înglobate: dibenzil-ftalatul are o fluorescenţă albăstruie. Însă tricresilftalatul şi tricresilfosfatul (TKF) emit fluorescenţe puternice violacee-albastre, care se comunică maselor plastice (policlorura de vinil, acetilceluloză, lacuri nitrocelulozice etc.). Aceste fluorescenţe pot permite urmărirea şi identificarea rapidă (spectru $\lambda = 430$ nm, $\lambda = 477 \ldots 485$ nm, max $\lambda = 482$ nm; $\lambda = 711$ nm) şi chiar dozarea tricresilfosfatului conţinut de masa plastică. *Deoarece se cunoaşte toxicitatea tricresilfosfatului, în special a izomerului orto, se poate urmări dacă un material plastic, destinat a veni în atingere cu alimentele* (tuburi pentru apa potabilă, folii pentru ambalarea alimentelor etc.), *conţine sau nu — şi în ce proporţie — o-tricresilfosfat.*

Am urmărit să stabilim relaţia ce există între culoarea şi luminiscenţa fluorescenţei unor mase plastice şi proporţia de plastifiant TKF. În acest scop am supus unui examen prin fluorescenţă diferite amestecuri de PVC cu diferite proporţii de tricresilfosfat, de la 0,1 g la 1 g pentru o parte de masă plastică. Aspectul fluorescenţelor este diferit în funcţie de proporţia de TKF.

4° Prezenţa de antioxidanţi în masele plastice comunică materialului fluorescenţele lor proprii, fluorescenţe puternice care distrug sau acoperă fluorescenţele coloranţilor. Antioxi-

danții ca stabilitul (NN-difenlendiamina), neozonul D (fenil-β-naftilamina), hidrochinona ș.a. prezintă fluorescențe albastre sau violete.

Neozonul D emite o puternică fluorescență violetă extrem de intensă (luminanța 90 față de luminanța etalonului de referință, salicilatul de sodiu, $i = 100$). Astfel, probele de polimeri ai butadienei și copolimerii respectivi examinați, care conțin neozon, au prezentat foarte puternice fluorescențe violete (exemplu carom 1 500, cauciucul sintetic de Borzești cu conținut de neozon), de asemenea și clorocauciucul cu neozon.

Intensitatea fluorescenței (luminanța) poate fi măsurată cu fluorometrul cu fotocelulă și deci *se poate determina rapid, prin examenul fluorescenței, proporția de neozon din masele plastice care conțin polimeri ai butadienei și copolimerii respectivi.* Metoda este practic sensibilă la 1×10^{-3}; aplicarea ei poate înlocui analiza chimică clasică care este greoaie și necesită un timp incomparabil mai lung.

5°. Lacurile prezintă fluorescențe în general apreciabile și în multe cazuri caracteristice. Din 20 de probe cercetate, au prezentat fluorescențe:

Nr. probelor	Fluorescența globală
2	zero, întunecat
2	fluorescență indigo și violacee
3	lila
3	cafea cu lapte
4	galben-galben-ocru
3	brun și zahăr ars
3	foarte slabe fluorescențe

În cadrul fiecărei grupe, produsele se deosebesc net între ele, putîndu-se face astfel un control fluorescent la sortarea și chiar în timpul procesului tehnologic.

Fluorescențele au fost examinate ținîndu-se probele la 10 și 20 cm depărtare de emițătorul de raze ultraviolete filtrate Wood.

S-a constatat o diferență apreciabilă între culorile fluorescențelor la distanțele respective. Restul observațiilor asupra materialelor plastice prezentate în lucrarea de față s-au efectuat constant la distanța de 20 cm între obiect și ecranul lămpii de cuarț, observațiile făcîndu-se sub incidența razelor UV, fluorigene, la 45° pe probe și examinîndu-se în direcția la 45° pe probe, respectiv 90° față de direcția razelor UV.

4. Fluorescențe caracteristice ale unor mase plastice tipice din diferite grupe

a) *Masele plastice acrilice* incolore sînt uneori puternic fluroscente. Astfel este poliacrilonitrilul care are o puternică fluorescență galbenă $\lambda = 600 \ldots 603$ nm și $\lambda = 688 \ldots 690$ nm. Polimetacrilatul emite o fluroscență albăstruie. Adaosul de coloranți fluorescenți în masă schimbă fluorescența produsului.

b) *Masele plastice fenolice.* Rășinile fenolformaldehidice și cele crezolformaldehidice au fluorescențe, în genere, în spectrul indigo și violet.

Rășina melaminică (cu celuloză) are fluorescență dicroică-albăstruie și gălbuie.

c) *Polietilenele colorate* prin adiționare în masa lor a anumitor coloranți fluorescenți au prezentat culorile și fluorescențele comunicate de către aceștia. Exemple: c_1) culoarea roșie ($\lambda = 626 \ldots 635$ nm) și fluorescența gălbuie ($\lambda = 576 \ldots 582$ nm, $\lambda = 560$ nm), dată de rodamina *S* (C. I. 743): c_2) culoarea galben-portocalie ($\lambda = 572 \ldots 575$ nm, $\lambda = 583$ nm, $\lambda = 590$ nm), dată de rodamina 6 *G* (Schulz VII 864; C. I. 750), fluorescența galbenă cu $\lambda = 525 \ldots 562$ nm; c_3) culoarea galbenă și fluorescența verde-gălbuie intensă ($\lambda = 580 \ldots 583$ nm și $\lambda = 506 \ldots 510$ nm, max $\lambda = 575$ nm), emisă de acriflavină; c_4) culoarea galbenă ($\lambda = 545$ nm, $\lambda = 573 \ldots 579$ nm,

max λ = 576 nm, λ = 523 ... 540 nm) şi fluorescenţa verde foarte luminoasă (λ = 525 nm, λ = 537 ... 550 nm, max λ = 545 nm, λ = 565 nm), dată de acridina galbenă *G* (Schulz VII 901; C. I. 785).

d) *Masele plastice vinilice* prezintă slabe fluorescenţe albăstrui sau albastru-cenuşii sau alburii-opalescente.

Masele plastice vinilice colorate cu coloranţi fluorescenţi prezintă asemenea culori apropiate de cele ale coloranţilor incluşi.

Masele plastice vinilice cu adaosuri minerale de umplutură, colorate sau incolore, sînt în genere cu fluorescenţe întunecate ori foarte slab fluorescente.

Polivinilcarbazolul are o fluorescenţă albastră foarte intensă (λ = 453 ... 460 nm).

Acetatul şi formiatul de polivinil au fluorescenţe albastre deschise (λ = 454 ... 486 nm).

e) *Masele plastice din aminoplaste incolore* dau fluorescenţe gălbui. Cele care conţin adaosuri de substanţe fluorescente sînt şi ele fluorescente în nuanţe apropiate de cele ale adaosurilor.

f) *Masele polistirenice incolore* prezintă în genere fluorescenţe violacee sau albăstrui, rar violacee-roşcate cu luminanţă slabă.

g) *Polistirenele colorate* şi chiar necolorate pot prezenta fluorescenţe datorită conţinutului în substanţe fluorescente incluse în masa lor. Uneori asemenea produse prezintă frumoase efecte de culori şi luminiscenţe, de exemplu în nuanţele următoare obţinute de noi:

g_1) *culoare galbenă şi fluorescenţă verzuie* (λ = 530 ... 534 nm, λ = 546 ... 550 nm, λ = = 556 nm, λ = 775 nm) a comunicat masei stirenice auramina OF 2;

g_2) *culoare galbenă*, în transmisie, şi *fluorescenţă galbenă aurie*, în reflexie (λ = 540 ... 556 nm, λ = 580 ... 586 nm, max λ = 583 nm) a comunicat auramina C. I. 655;

g_3) *culoare galbenă şi fluorescenţă galbenă* a comunicat crisoidina (λ = 574 ... 585 nm, max λ = 581 nm);

g_4) *culoare galben canar* (λ = 568 ... 575 nm, max λ = 571 nm, λ = 582 nm) în transmisiune şi *fluorescenţă verde* (λ = 516 ... 524 nm a prezentat o mostră de polistiren colorată cu galben de tioflavină *T* (C. I. 815);

g_5) *fluorescenţă în albastru turcoază celest* (λ = 491 ... 495 nm) a comunicat unei mostre de polistiren incolore adaosul în masă al unei proporţii de 2 ... 7% etil-carbonat de chinină;

g_6) *culoare roşie stacojie şi fluorescenţă roşie* (λ = 616 ... 618 nm, λ = 621 ... 628 nm, max λ = 625 nm, λ = 635 ... 649 nm, max λ = 643 nm), dată de alizarina roşie 2 *B* (C. I. 275);

g_7) *culoare roşie portocalie* cu puternică *fluorescenţă verde* (λ = 430 ... 435 nm, λ = = 496 ... 509 nm, max λ = 503 nm, λ = 612 ... 825 nm) determinate de prezenţa eosinei *G*;

g_8) *culoarea roşie aprinsă în transmisie* (λ = 610 ... 622 nm; max λ = 619 nm, λ = = 626 ... 635 nm, şi *fluorescenţă galbenă portocalie* (λ = 574 ... 589 nm, max λ = 582 nm), date de prezenţa rodaminei *B* (VII Schulz 861, C. I. 749).

h) *Rezinele ureo-formaldehidice incolore* prezintă fluorescenţe în culorile indigo sau albăstrui. Produsele cu încărcare de pigmenţi coloraţi anorganici sînt, în genere, întunecoase în ultraviolet (Wood). Cele cu adaosuri de pigmenţi luminiscenţi sau coloranţi fluorescenţi din contra.

i) *Masele plastice poliamidice* prezintă fluorescenţe dicroice, o pronunţată fluorescenţă albăstruie şi o slabă fluorescenţă gălbuie, cum se prezintă igamida *B* (poli-ε-aminocaprolactamă), respectiv poliamida „6 Relon", igamida *A*, corespunzător „nylon 66", şi igamida 5*A* (copolimer din igamidă *A* şi igamidă *B*).

j) *Fluorescenţa maselor plastice pe bază de derivaţi ai celulozei.* Aceste mase plastice prezintă, în genere, fluorescenţele materialor celulozice din care provin; aceste fluorescenţe sînt influenţate, mai mult sau mai puţin, fie de procesul tehnologic, fie de adaosurile de alte substanţe ca: plastifianţi, materiale de umplutură, coloranţi, stabilizatori etc. De exemplu: j_1) *celofanul* prezintă, în genere, o fluorescenţă violacee; j_2) *celonul* din acetat de celuloză are o slabă fluorescenţă alburie, aproape invizibilă, uneori mai pronunţată pînă la alb-gălbui-cenuşiu; j_3) *celuloidul* prezintă o fluorescenţă albăstruie-verzuie; dacă este plastifiat cu ulei de ricin, are fluorescenţă albastră-palidă; dacă este plastifiat cu ulei de in, prezintă fluorescenţă violet; cînd este plastifiat cu dietilftalat, are fluorescenţă violetă; j_4) *celuloidul*, cu camfor 0 ... 60%, prezintă fluorescenţă galbenă; j_5) *trolitul* are fluorescenţă albastră puternică.

k) *Masele plastice proteinice* au, în general, o fluorescență albăstruie-violetă, cum este: *galalitul* cu fluorescență albă-albăstruie; o masă plastică pe bază de gelatină pură a prezentat o fluorescență albastră cu o largă bandă ($\lambda = 510...460$ nm, max $\lambda = 462$ nm); o masă plastică pe bază de ovalbumină a prezentat o fluorescență dicroică, în galben și albastru-violet, (cu o bandă largă de emisiune, de la mijlocul violetului pînă la începutul verdelui, max $\lambda = 445$ nm).

Institutul de științe economice „V. I. Lenin",
București,
Institutul pedagogic, Pitești,
Institutul de cercetări pedagogice,
București

BIBLIOGRAFIE

1. Bandel G., Ang. Chem., 1938, **51**, S. 570.
2. Danckwortt P. W., *Lumineszenz-Analyse.* 1928, 1935.
3. Danckwortt P. W., Eisenbrand J., *Lumineszenz-Analyse im filtrierten ultravioletten Licht.* Leipzig, 1964.
4. Déribéré M., Rev. gén. mat. plastiques, sept. 1935.
5. — Rev. gén. mat. plastiques, mai 1939.
6. — *Les applications pratiques de la luminiscence.* Dunod, Paris, 1938.
7. Gavăț I., Costescu D., *Produși macromoleculari.* Ed. tehn., Buc. 1954, p. 417.
8. Gerngross O., Schulz M., Chemiker Ztg., 1927, *51*, S. 501.
9. Guyot M., Chimie et Industrie, nr. spécial du V-ème Congrès, 1926, p. 226.
10. Kostka M. G., Chemiker Ztg., 1929, *53*, *117*, *138*.
11. Popovici M., Apostol L., Redeș Al., Popovici El., *Fluorescența unor rășini fosile (chihlimbare) românești și de Baltica.* Comunicare prezentată în sesiunea științifică jubiliară a Universității „Al. I. Cuza" din Iași, din 28—30 oct. 1960.
12. Radley J. A., Rayon Record, 1933, **7**, p. 21.
13. Seyewetz, Blanc, Bull. Soc. Chim., 1928, **45**, p. 611.

FORSCHUNGEMETHODEN DER PLASTISCHN MATERIALE DURCH DIE FLUORESZENZ-ANALYSE

(Zusammenfassung)

In diesem Werk zeigt man die Haltung der plastischen Materiale den ultravioletten Strahlen (Wood Licht) gegenüber. Man prüft den Wert der Methode der Analyse durch die Fluoreszenz der plastischen Materiale, und man zeigt dass diese Fluoreszenz von den Plastifianten abhängt. Einige dieser Plastifiante haben eine sehr starke und charakteristische Fluoreszenz die man schnell verfolgen und identifizieren kann, wie z. B. Trikresilphosphat. Man hat die Beziehung zwischen Farbe und Luminiszenz der Fluoreszenz einiger plastischen Materiale so wie das Plastifiant Trikresilphosphat Verhältnis festgestellt.

Man zeigt die Fluorezenz einiger reinen plastischen Materiale oder abhängig von dem Antioxydanten-Gehalt, und man zeigt dass man durch die Fluoreszenz-Probe das Verhältnis des Neozon aus den plastischen Materialen welche Polymere des Butadien enthalten und die entsprechenden Mischpolymere, Methode die auf 1×10^{-3} reagiert, schnell festellen kann.

Man zeigt die charakteristische Fluoreszenz einiger typischen plastischen Materiale aus verschieden Gruppen (acrylische plastische Materiale, phenolische, vinylische, polyamidische etc.).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 633.11 ; 538.6

ACŢIUNEA CÎMPURILOR MAGNETICE ASUPRA CÎTORVA SOIURI DE GRÎU

DE

CHIRIL POPESCU, E. ANDRONESCU şi M. ŢIBU

1. Introducere

Cercetările au dovedit că prin diferite tratamente fizice se poate modifica metabolismul celulei vegetale, obţinîndu-se în unele cazuri o intensificare a procesului de sinteză a substanţei organice şi o sporire a producţiei la plantele de cultură.

În ultimul timp se studiază acţiunea cîmpurilor magnetice asupra celulei vii, vegetale şi animale, şi rezultatele obţinute dovedesc că şi pe această cale se poate influenţa în mod evident metabolismul plantelor şi animalelor. Astfel, Tarakanova şi colaboratorii [8] au urmărit influenţa intensităţii cîmpurilor şi a orientării seminţelor faţă de polii cîmpului magnetic şi constată că intensitatea de 20 Oe accelerează mai mult creşterea decît o intensitate de 10 Oe. Orientarea seminţelor spre polul sud intensifică ritmul de creştere al plantelor în comparaţie cu orientarea spre polul nord al cîmpului. Strekova şi colaboratorii [7] ajung la concluzia că sub acţiunea cîmpurilor magnetice se măreşte volumul celulelor din rădăcina plantei de porumb şi lupin şi se intensifică activitatea mitotică în zona de creştere a rădăcinii şi tulpinii. U. J. Pittman [3]...[5] cercetînd efectul magnetismului asupra creşterii şi germinaţiei la cerealele panificabile precum şi la alte plante de cultură, ajunge la concluzia că stimularea magnetică determină o translocaţie a substanţelor de creştere existente în sămînţă, sau o activare a auxinelor şi a sistemului enzimatic. Şahbazov şi colaboratorii [6] precum şi Mocialkin şi colaboratorii [2] au urmărit influenţa exercitată de cîmpurile magnetice constante asupra germinării seminţelor şi constată o accelerare a creşterii rădăcinilor sub influenţa tratamentului. R. P. Mericle şi colaboratori [1] au studiat acţiunea cîmpurilor magnetice asupra germinaţiei seminţelor şi dezvoltării iniţiale a plantelor şi au găsit că acest tratament a egalat sau a depăşit efectul radiaţiilor ionizante.

Din literatura consultată rezultă că pînă în prezent s-a studiat în special acţiunea cîmpului magnetic uniform, produs de magneţi permanenţi sau de curent electric continuu, ţinîndu-se seama în cele mai multe cazuri de orientarea seminţelor faţă de polii magnetici.

În lucrarea de faţă ne-am propus să urmărim acţiunea cîmpurilor magnetice asupra germinării seminţelor, absorbţiei substanţelor nutritive în timpul germinării, creşterii, dezvoltării şi producţiei la cîteva soiuri de grîu de toamnă.

2. Metoda de lucru

Au fost luate în studiu un număr de 17 soiuri de grîu de toamnă (tabelul 1), ale căror boabe, cu umiditatea de 12...14%, au fost supuse acţiunii cîmpurilor magnetice la temperatura de 20°...23°C. Pentru tratare s-a folosit aparatul „Magnetodiaflux" care a furnizat un cîmp magnetic pulsatoriu de joasă frecvenţă (50...100 Hz), aplicat cu sau fără întreruperi. Cîmpul magnetic a fost produs de un curent redresat a cărui intensitate a variat între 1,3...2,6 A, cu frecvenţa de 50...100 Hz. În cazul regimului de lucru cu cîmp întrerupt excitaţiile au fost ritmice: 3 sec excitant, 3 sec pauză. În cazul folosirii a două intensităţi ale cîmpului magnetic tratamentul s-a aplicat după cum urmează: 3 sec cu intensitatea de 90 G, 3 sec pauză, după care a urmat, timp de 3 sec, tratamentul cu intensitatea de 180 G. Durata de expunere a seminţelor acţiunii cîmpurilor magnetice a fost de 200 min (10 şedinţe zilnice a cîte 20 min).

Pe variante s-au aplicat tratamentele notate în tabelul 2.

Tabelul 1

Soiurile tratate

Ponca	Tenmarq
Beloţerkovskaia 198	Kanred
Bezostaia 1	Heine
Skorospelka	Mironovskaia 808
Brucker 6	Funone
Autonimia	Triumph
Svetlana	Bankut 1 201
Nr. 301	Mironovskaia
Bankut G	264

Tabelul 2

Tratamentul aplicat seminţelor la diferite variante

Varianta	Intensitatea cîmpului magnetic G	Regim de lucru	Timp de tratare min
V_1	90	întrerupt	200
V_2	180	întrerupt	200
V_3	90 şi 180	întrerupt	200
V_4	180	continuu	200
V_5	martor netratat		

După aplicarea acestui tratament s-a urmărit absorbţia de către boabe a fosforului P_{32} şi în acest scop boabele au fost umectate timp de 48 ore cu o soluţie ce conţinea forfor radioactiv. Substanţa radioactivă de la suprafaţa boabelor a fost apoi îndepărtată prin spălare şi s-a determinat cantitatea de fosfor radioactiv care a pătruns în interiorul boabelor.

De asemenea s-a determinat energia germinativă, capacitatea germinativă şi creşterea tinerelor plantule provenite din seminţe tratate în comparaţie cu cele obţinute din seminţe netratate.

Pentru a cunoaşte acţiunea tratamentului aplicat asupra rezistenţei plantelor la iernare, modul de dezvoltare a lor şi producţia care se obţine, s-au însămînţat boabele în cîmp, în toamnele anilor 1964 şi 1965. Experienţele în cîmp au fost organizate pe parcele cu suprafaţa de 2 m^2 şi trei repartiţii petnru fiecare variantă.

Datele notate în figuri reprezintă media rezultatelor obţinute şi cuprind soiurile care au reacţionat cel mai bine la tratamentul respectiv.

3. Rezultatele obținute și interpretarea lor

Urmărind influența cîmpurilor magnetice asupra procesului de absorbție a fosforului radioactiv de către boabele de grîu, s-au înregistrat datele din fig. 1; acestea dovedesc că tratamentul aplicat schimbă capacitatea de absorbție a boabelor. Astfel boabele tratate din soiurile Ponca, Nr. 301, Triumph, Bankut 1 201 etc. au absorbit cu 10...27,2% mai mult fosfor decît boabele netratate. Astfel se dovedește că plantele din aceste soiuri se pot dezvolta mai rapid în primele faze de vegetație. Există însă și soiuri la care tratamentul menționat a modificat prea puțin cantitatea de fosfor radioactiv absorbit de către boabe. Așa este cazul cu soiurile Skorospelka 3, Mironovskaia 808, Svetlana, Tenmarq etc. Așadar capacitatea de absorbție a fosforului radioactiv nu se modifică în aceeași măsură la toate soiurile sub influența cîmpurilor magnetice.

Pentru stimularea absorbției fosforului radiactiv s-au dovedit potrivite tratamentele aplicate variantelor V_2 și V_3, adică cu cîmpuri magnetice în regim de lucru întrerupt (excitant).

Cercetînd energia germinativă, capacitatea germinativă și creșterea tinerelor plante în laborator, la o temperatură de 20°...23°C, s-au observat diferențe evidente între boabele tratate și cele netratate; rezultatele sînt notate în fig. 2 și 3. Energia germinativă a crescut cu 5...33% în urma tratamentului aplicat, iar capacitatea germinativă a boabelor tratate atinge valori cu 9% superioare față de cele ale boabelor netratate. Dintre soiurile la care s-a modificat în mod evident energia și capacitatea germinativă pot fi citate: Beloțerkovskaia 198, Bezostaia 1, Ponca, Nr. 301, Funone etc. Tratamentele cele mai potrivite s-au dovedit și în acest caz cele aplicate variantelor V_2 și V_3.

La 12 zile după ce boabele au fost puse la germinat s-a măsurat lungimea rădăcinilor și tulpinilor tinerelor plantule, iar media acestor măsurători este notată în fig. 4 și 5 și arată că viteza de creștere a rădăcinilor la plantele provenite din boabele tratate a depășit martorii netratați, atingînd la soiul Funone valori de 35,7 mm sau 124,4%. La soiurile Bezostaia 1, Ponca, Beloțerkovskaia 198, Nr. 301 etc. lungimea rădăcinilor plantelor provenite din boabe tratate a depășit pe cea a martorilor netratați cu 2,9...21,3 mm, adică cu 5,6...69,9%. Sub valorile corespunzătoare martorilor se situează soiurile Tenmarq, Mironovskaia 808, Autonimia, la care rădăcinile plantelor provenite din boabe tratate sînt mai mici cu 16,3...4,4 mm, respectiv cu 35,2...8%.

Experimentînd cu cîmp magnetic constant la o intensitate de 450...20 Oe, Șahbazov și colaboratorii [6] constată că se produce o accelerare a creșterii rădăcinii cu 136...154%. Rezultatele obținute de noi sînt asemănătoare cu cele obținute de Șahbazov.

La tulpini viteza de creștere depășește de asemenea cea a martorului cu 1,1...40,4 mm sau 4,8...108,3% la soiurile Bezostaia 1, Beloțerkovskaia 198, Funone etc., atingînd 26,0 mm sau 110,5% la soiul Ponca. De asemenea tratamentele cele mai potrivite s-au dovedit a fi cele aplicate variantelor V_2 și V_3.

Rezultă deci că sub acţiunea cîmpurilor magnetice plantele de grîu de la cele mai multe soiuri capătă însuşirea de a creşte mai repede în primele faze de vegetaţie. La unele soiuri această acţiune a cîmpului magnetic nu se resimte ; aşa sînt de exemplu soiurile: Kanred, Mironovskaia 808, Autonimia, Bankut-G.

Observaţiile făcute în timpul vegetaţiei concordă cu rezultatele obţinute în laborator în ceea ce priveşte germinaţia şi viteza de creştere a plantelor în primele faze de vegetaţie. Urmărind înfrăţirea plantelor din toamnă şi comportarea lor la iernare nu s-au putut sesiza diferenţe evidente. Formarea tulpinii şi înspicarea s-au produs aproximativ în acelaşi timp la toate variantele unui soi, dar s-au putut sesiza diferenţe în ceea ce priveşte înălţimea tulpinii, lungimea spicului şi numărul spiculeţelor în spic.

Urmărind influenţa cîmpului magnetic asupra creşterii spicului la plantele de grîu, s-au obţinut datele notate în fig. 6. Aceste date dovedesc că tratamentul aplicat modifică la unele soiuri lungimea spicului precum şi numărul spiculeţelor în spic. Se remarcă din acest punct de vedere soiurile Bankut 1 201, Beloţerkovskaia 198, Ponca, Funone etc., la care lungimea spicului ajunge să depăşească pe aceea a martorului netratat cu 20 mm sau 45,4%, iar numărul de spiculeţe în spic (fig. 7) sporeşte cu 3,6 sau 25%. Tratamentele cele mai potrivite şi din acest punct de vedere s-au dovedit a fi cele aplicate variantelor V_2 şi V_3.

La unele soiuri s-a observat şi o creştere ceva mai viguroasă a tulpinii. Astfel, la soiurile Beloţerkovskaia 198, Bezostaia 1, Bankut 1 201, Ponca, plantele provenite din boabele tratate au depăşit martorul cu 23...159 mm sau 2,4...22,9%.

Producţia de boabe la soiurile cu care s-a lucrat a fost de asemenea influenţată de tratamentul aplicat, aşa după cum se poate vedea din datele notate în fig. 8. La unele soiuri, cum ar fi: Ponca, Bezostaia 1, Beloţerkovskaia 198, nr. 301, Funone etc., se obţin sporuri ale recoltei de boabe care ajung pînă la 17,7% (soiul Ponca). La alte soiuri de grîu cum ar fi: Skorospelka 3, Kanred, Mironovskaia 808, Bankut G, producţia rămîne aproximativ constantă, iar la altele — Mironovskaia 264, Tenmarq, Svetlana, Brucker 6, Heine, producţia înregistrează valori sub nivelul martorului. Ca şi la celelalte determinări tratamentele aplicate variantelor V_2 şi V_3 s-au dovedit a fi cele mai potrivite.

La determinarea masei a 1 000 boabe şi a masei hectolitrice a recoltei obţinute din această experienţă s-au înregistrat datele cuprinse în fig. 9 şi 10; acestea dovedesc că tratamentul aplicat a determinat la soiurile care au dat producţii bune şi o sporire oarecare a greutăţii boabelor. Astfel, masa a 1 000 boabe depăşeşte martorul la aceste soiuri cu 2...11%. Sporul recoltei de boabe se datoreşte prin urmare numărului mai mare de spiculeţe în spic şi greutăţii mai mari a boabelor.

Rezultă deci că sub acţiunea cîmpurilor magnetice se produce o modificare a metabolismului plantei, ceea ce determină la unele soiuri o intensificare a ritmului de absorbţie a substanţelor nutritive în primele faze de

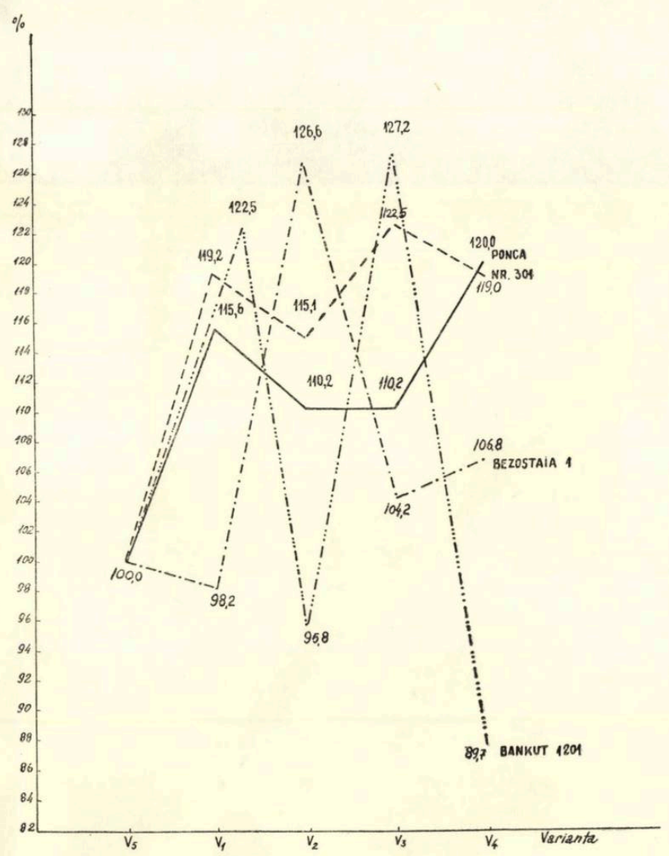


Fig. 1

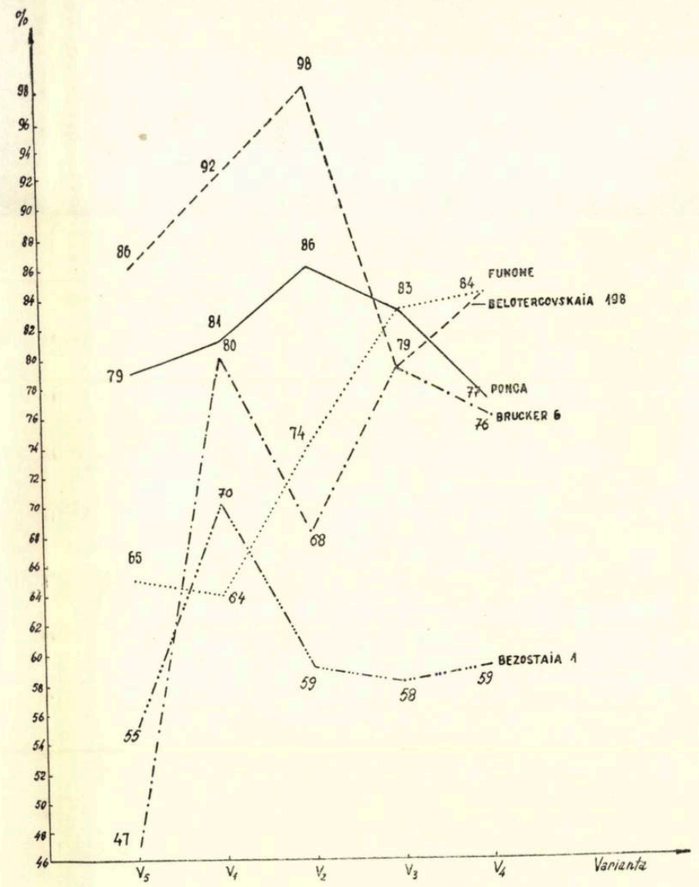


Fig. 2

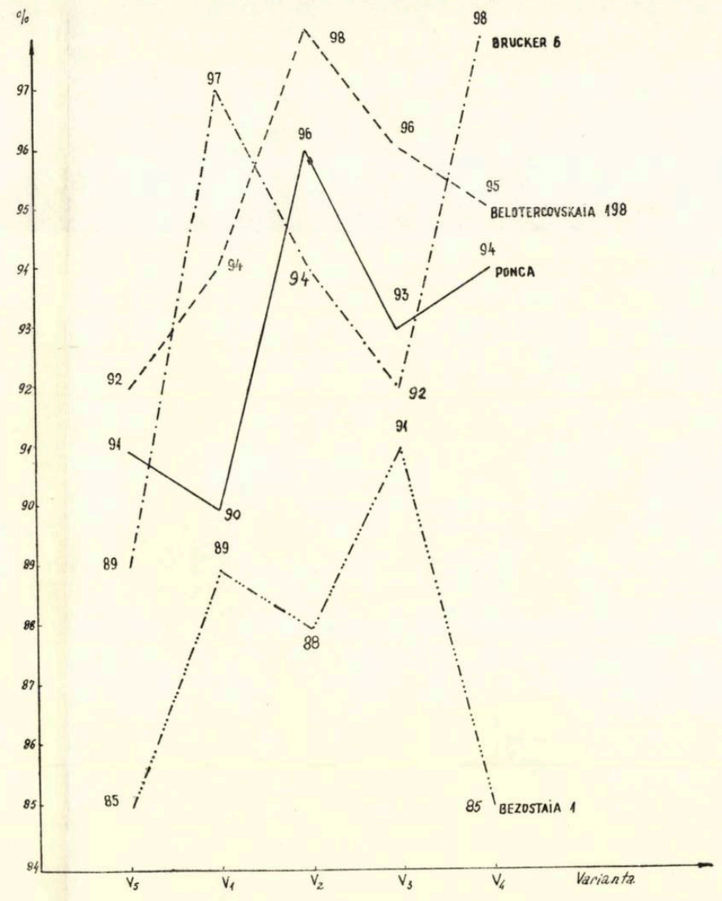


Fig. 3

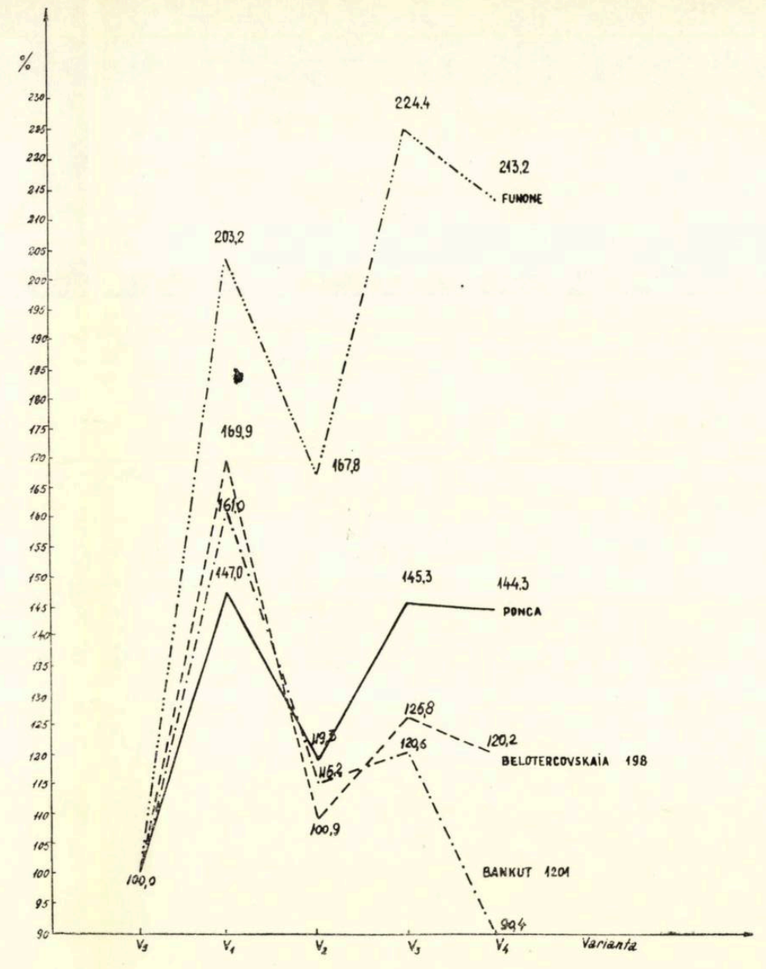


Fig. 4

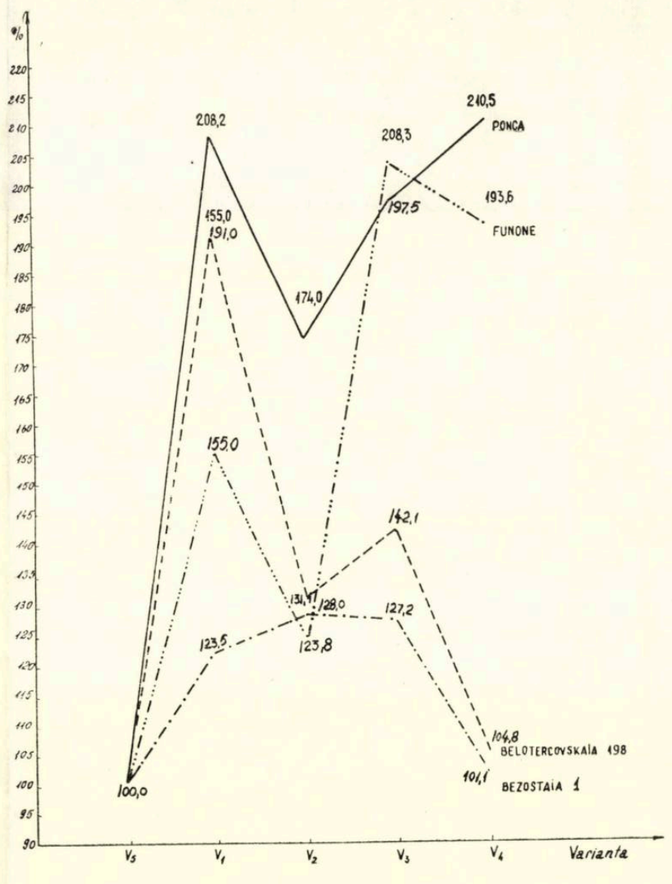


Fig. 5

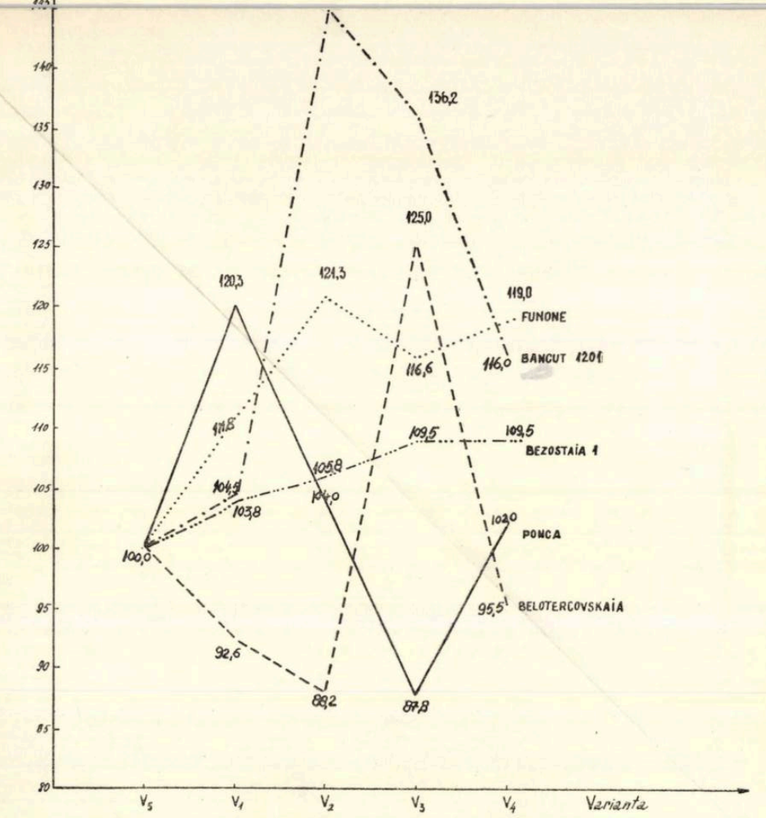


Fig. 6

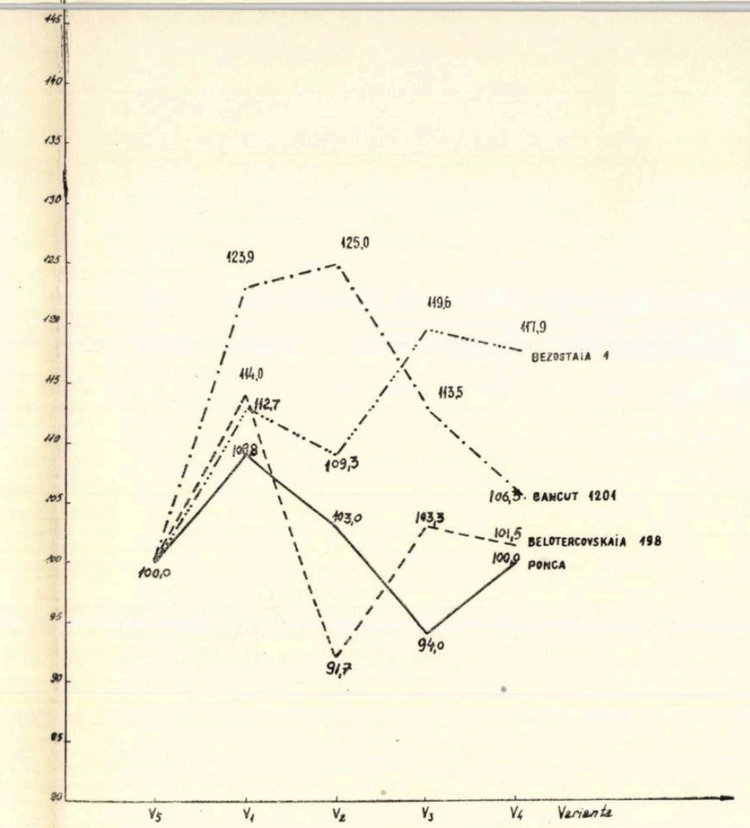


Fig. 7

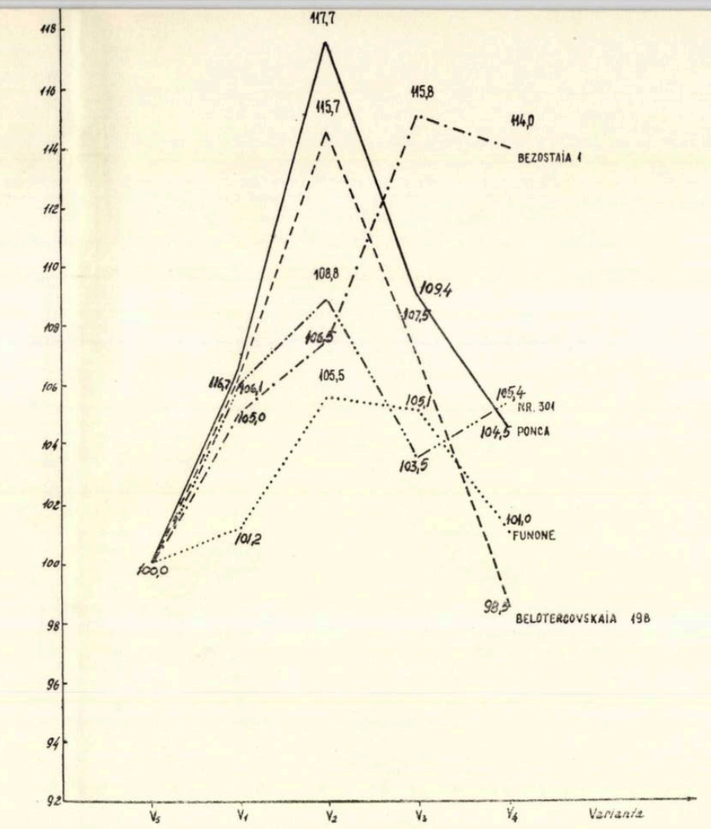


Fig. 8

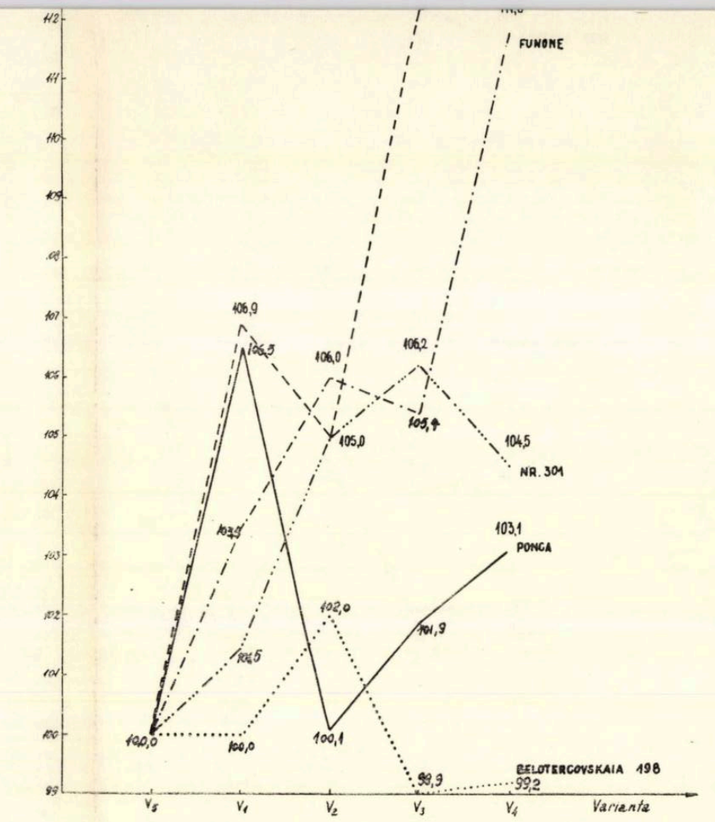


Fig. 9

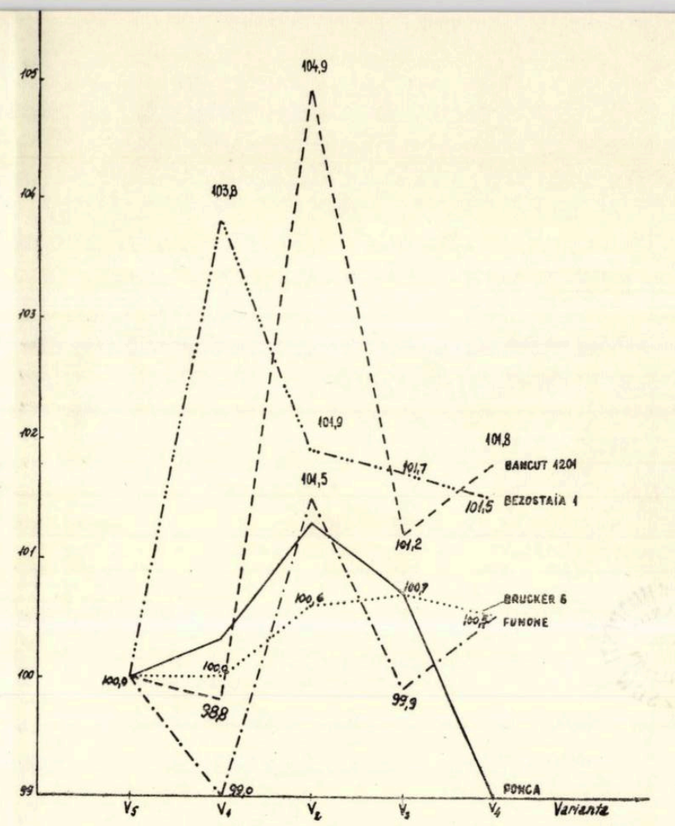


Fig. 10

vegetație, sporirea capacității germinative și a vitezei de creștere la plantele tinere, creșterea mai înaltă a tulpinii, formarea unor spice mai lungi cu un număr mai mare de spiculețe și cu boabe mai multe și mai grele.

4. Concluzii

Datele cuprinse în această lucrare conduc la următoarele concluzii:

1. Cîmpurile magnetice influențează în mod evident germinarea boabelor și creșterea plantelor de grîu în primele faze de vegetație. Sporurile realizate la determinarea energiei și a capacității germinative ajung pînă la 32% iar viteza de creștere a tulpiniței și rădăciniței depășește pe cea a martorului cu 124,4%.

2. Sub acțiunea cîmpurilor magnetice plantele își modifică ritmul de absorție a fosforului în primele faze de vegetație, înregistrîndu-se valori ce depășesc pe cele a martorului cu 27,2%.

3. Plantele obținute din boabe supuse acestui tratament își modifică lungimea spicului, numărul spiculețelor în spic, greutatea boabelor și producția.

4. Soiurile cu care s-a lucrat reacționează în mod deosebit la acest tratament. Au reacționat favorabil soiurile: Ponca, Bezostaia 1, Beloțerkovskaia 198, Nr. 301, obținîndu-se sporuri ale recoltei de boabe care ajung pînă la 17,7%, iar la soiurile Mironovskaia 264, Tenmarq, Skorospelka 3, Heine, nu se obțin sporuri de recoltă.

5. Cîmpurile magnetice cu intensitatea de 90 și 180 G, cu regim de lucru întrerupt și durata de tratare 200 min, s-au dovedit cele mai eficace, în condițiile în care s-a lucrat.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de combaterea eroziunii solului și agricultură

BIBLIOGRAFIE

1. Mericle R. P., Mericle L. W., Montgomery D. J., *Magnetic Fields and Ionizing Radiation. Effects and Interaction Germination and Early Seedling Development.* Radiat. Bot., 1966, **6**, *2*, pp. 111—127.
2. Мочалкин А. И., Рик Г. Р., Батыгин Н. Ф., *К вопросу о влиянии магнитного поля на биологические объекты.* Сб. тр. по агрон. физ., 1962, *10*, стр. 48—50.
3. Pittman U. J., *Magnetism and Plant Growth. Effect on Germination and Early Growth.* Canad. J. Pl. Sci., 1965, **45**, *6*, pp. 549—555.
4. — *Effects of Magnetism on Seedling Growth of Cereal Plants.* Biomed. Sci. Instr., **1**, Plenum Press, N. Y., 1963, pp. 117—122.
5. — *Magnetism and Plant Growth.* (I. *Effect on Germination and Early Growth of Cereal Seeds*). Canad. J. Plant. Sci., 1963, **43**, *4*, pp. 513—518.
6. Шахбазов В. Г., Грабина В. А., Жиляна Г. Е., Застела Л. И., *Некоторые проявления действия постоянного магнитного поля на прорастание семян.* Физ. раст., 1965, **12**, *17*, стр. 5.

7. Стрекова В. И., Тараканова Г. А., Прудникова В. П., Новицкий И. И., *Некоторые физиологические и цитологические изменения у прорастающих семян в постоянном магнитном поле* (I). Физ. раст., 1965, **12**, *5*, стр. 920—929.
8. Тараканова Г. А., Стрекова В. И., Прудникова В. П., Новицкий И. И., *Некоторые физиологические и цитологические изменения в постоянном магнитном поле* (II). Физ. раст., 1965, **12**, *6*, стр. 1 029.

ACTION DES CHAMPS MAGNÉTIQUES SUR CERTAINES VARIÉTÉS DE BLÉ

(Résumé)

On étudie l'action des champs magnétiques sur la germination des sémences, sur l'absorbtion des substances nutritives, sur la croissance des plantes et sur la récolte de 17 variétés de blé.

Les recherches ont prouvé que ce traitement exerce une influence considérable tant sur l'énergie et sur la capacité germinative qui marquent des augmentations jusqu'à 32%, que sur la vitesse de croissance de la tige et de la racine des jeunes plantes, vitesse qui dépasse celle de la plante témoin de 124%.

Les champs magnétiques modifient le rythme d'absorbtion du phosphore dans les premières phases de végétation, enregistrant des valeurs qui dépassent celles de la plante temoin de 27%.

Les plantes issues des graines soummises à ce traitement modifient la longueur de leur épi, le nombre des épilletes dans l'épi, le poids des graines et la production.

Parmi les variétés expérimentées celles qui ont réagi favorablement à ce traitement ont été les suivantes: Ponca, Bezostaïa 1, Belotzerkovskaïa, Nr. 301, et on en a obtenu une augmentation de la production de grains de 17,7%.

Les champs magnétiques ayant une intensité de 90 et 180 G, à un régime de travail interrompu et à une durée de traitement de 200 min, se sont avérés les plus efficaces.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 3—4, 1967

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. Z. 537.525

ASUPRA TEORIEI APRINDERII ÎN CAZUL DESCĂRCĂRILOR INTERMITENTE

DE

EMIL LUCA, OVIDIU SCUTARU şi ANASTASIA VASILIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5–7 februarie 1965

1. Consideraţii generale

Oscilaţiile de relaxare obţinute prin descărcarea intermitentă a unui condensator printr-un gaz ce se află sub o presiune de cîţiva mm col. Hg a constituit obiectul a numeroase cercetări. Iniţial [1]...[4] tubul de descărcare a fost asimilat cu o rezistenţă pură, ceea ce a permis să se poată determina frecvenţa oscilaţiilor obţinute.

Ulterior, Abraham şi Bloch [5], A. Liénard [6] şi în special van der Pol [7], includ oscilaţiile de relaxare în teoria generală a oscilaţiilor, considerîndu-le oscilaţii sinusoidale deformate. Anume, în relaţiile stabilite ei introduc, fie inductanţa circuitului, fie că atribuie descărcării însăşi proprietăţi analoge celor ale unei inductanţe [8]...[10].

În cazul descărcărilor intermitente alimentarea condensatorului C făcîndu-se de la o sursă de tensiune continuă U, prin intermediul unui rezistor R, nu se obţin descărcări decît atunci cînd parametrii R, C şi U au valori bine definite. Din această cauză, iniţial, descărcările intermitente au fost studiate funcţie de aceşti parametri [11]...[16].

Studiul caracteristicii dinamice în funcţionarea intermitentă a unui asemenea tub, deci posibilitatea obţinerii la un oscilograf catodic a ciclului de relaxare al acestor descărcări, a făcut ca cercetările ulterioare, întreprinse printre alţii de W. Leyshon [17], M. Laporte [18], E. Blum [19] şi în special de J. Moussiegt [20], să stabilească faptul că rolul fundamental într-o descărcare intermitentă îl joacă curentul ce traversează tubul cu gaz în timpul descărcării intermitente a condensatorului şi nu parametrii R şi U.

Intensitatea curentului în timpul descărcării intermitente trecînd printr-o valoare maximă (i_{max}), atenţia autorilor citaţi a fost reţinută în special de această valoare.

Pe de altă parte, în procesul unei descărcări intermitente condensatorul încărcîndu-se pînă la o anumită tensiune pentru care descărcarea intermitentă se aprinde în tub, s-a introdus şi noţiunea de „tensiune de aprindere" şi „timp de aprindere".

Pe baza acestor considerente J. Moussiegt emite „teoria aprinderii", în ceea ce priveşte producerea descărcărilor intermitente (respectiv producerea oscilaţiilor de relaxare), considerînd că în procesul de aprindere al descărcării intermitente se atinge foarte repede densitatea de curent limită într-un canal foarte îngust, plasat pe axul tubului şi apoi curentul urmează fidel şi instantaneu variaţiile tensiunii. Canalul se lărgeşte treptat, extinzîndu-se paralel cu suprafaţa catodei, din aproape în aproape, tinzînd a produce aceeaşi densitate de

curent limită în toate punctele catodei şi în întreg volumul interior al tubului, ca şi cum ar fi vorba de o propagare a aprinderii. Extinderea aprinderii descărcării pe întreaga suprafaţă a catodului se face după o lege exponenţională.

Din studiul soluţii'or ecuaţiilor diferenţiale ale caracteristicii dinamice obţinute în acest caz, Moussiegt ajunge la următoarele rezultate :

a) Inversul curentului maxim ($1/i_{max}$) pentru o capacitate constantă este, cel puţin pentru valori mici ale lui r, o funcţie liniară a rezistenţei de descărcare r, ceea ce permite a se determina valoarea lui i_M (unde i_M este curentul maxim corespunzător lui $r = 0$).

b) Curba de variaţie a lui $1/i_M$ în funcţie de $1/C$ este o parabolă.

c) Curba de variaţie a lui i_M/C în funcţie de $1/i_M$ este o dreaptă.

Aceste concluzii teoretice sînt verificate de J. Moussiegt pe cale experimentală în cazul: a) unui tub cu neon, cu electrozi axiali, de 2 mm diametru, plasaţi axial, faţă în faţă, la distanţa de 3 mm, b) unui tub cu neon cu electrozi plani, c) unui tub cu neon cu electrozi cilindrici coaxiali în sită.

Rezultatele experimentale obţinute cu aceste tuburi au confirmat numai parţial justeţea concluziilor teoretice.

Deoarece în două lucrări anterioare ([21] şi [22]) ne-am ocupat cu descărcările intermitente obţinute în tuburile cu neon, cu electrozi cilindrici coaxiali, compacţi, şi cu electrozi în spirală, în sensul că în prima lucrare am utilizat valoarea maximă a curentului de descărcare la obţinerea unor capacimetri de mare sensibilitate, iar în a doua lucrare, din măsurarea suprafeţei ciclului de relaxare am determinat energia consumată în tub pe ciclu, ne propunem, în prezenta lucrare, să stabilim dacă teoria aprinderii emisă de J. Moussiegt poate fi aplicată şi în cazul descărcărilor intermitente, obţinute cu aceste tuburi.

2. Rezultatele experimentale

Pentru obţinerea ciclurilor de relaxare, am utilizat un montaj clasic, folosit printre alţii şi de W. A. Leyshon [17], Reich şi Depp [23], R. W. Sloane [24], L. F. Richardson [25], J. G. Walle [26], J. Moussiegt [20] etc. şi utilizat de noi în lucrările citate [21], [22].

Lucrînd, în ceea ce priveşte valoarea capacităţii C, în domeniul de valori cuprinse între 120 pF şi 1 μF, în care descărcările intermitente sînt stabile, iar în ceea ce priveşte valoarea rezistenţelor de descărcare r, în domeniul de valori cuprinse între 200 Ω şi 12 000 Ω, în fig. 1 s-au trasat curbele de variaţie ale lui i_{max} funcţie de r, pentru diferite valori ale lui C, observîndu-se, ca şi în cazul curbelor obţinute de Moussiegt, că i_{max} scade odată cu creşterea lui r, tinzînd către o valoare limită pentru valori ridicate ale lui r.

Calculînd inversul lui i_{max} şi trasînd curba de variaţie a lui $1/i_{max}$ funcţie de r, pentru diverse valori ale capacităţii C (fig. 2), se observă din alura curbelor că pentru valori mici ale rezistenţei r mărimea $1/i_{max}$ variază liniar cu r, conform cu rezultatele stabilite pe cale teoretică de Moussiegt, ceea ce permite ca prin extrapolare să se determine valoarea intensităţii

maxime (i_M) a curentului de descărcare în tub, pentru valoarea $r = 0$ a rezistenţei de descărcare.

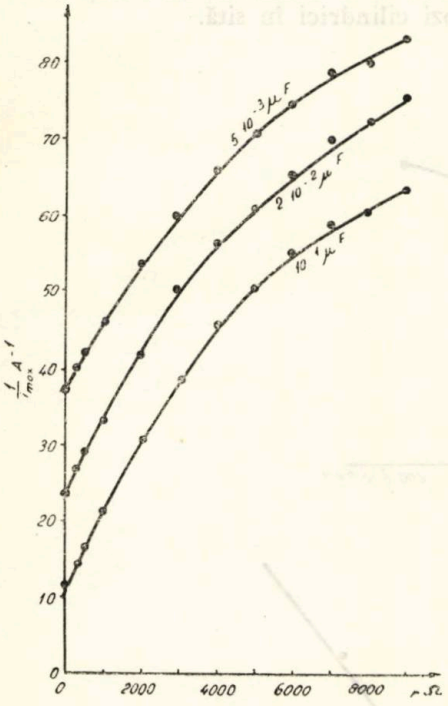


Fig. 1

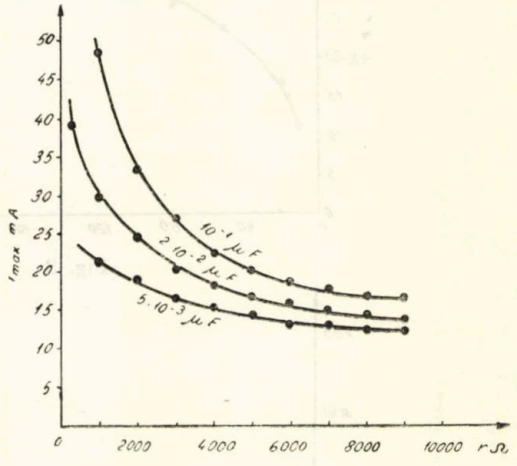


Fig. 2

În fig. 3 este trasată curba de variaţie a lui $1/i_M$ funcţie de $1/C$, obţinîndu-se ca alură generală o parabolă, în concordanţă cu teoria aprinderii a lui Moussiegt.

Cunoscînd valorile lui i_M, în fig. 4 este trasată curba de variaţie a raportului i_M/C funcţie de $1/i_M$. Se constată că forma curbei obţinute este diferită de o dreaptă, aşa cum prevedea teoria aprinderii a lui Moussiegt.

Aceleaşi determinări experimentale au fost întreprinse şi asupra unui tub cu neon cu electrozi în spirală. Rezultatele obţinute sînt concretizate în curba din fig. 5 unde este trasată variaţia raportului i_M/C funcţie de $1/i_M$.

Şi în acest caz între curba obţinută experimental şi cea teoretică rezultată din teoria lui Moussiegt, apare o deosebire evidentă.

Din analiza curbelor trasate pe baza datelor experimentale obţinute atît în cazul tuburilor cu neon cu electrozi cilindrici coaxiali compacţi, cît şi al tuburile cu neon cu electrozi în spirală, rezultă că aceste curbe diferă

sensibil de cele prevăzute de teoria aprinderii emisă de Moussiegt şi verificată de acesta numai în cazul tuburilor cu neon cu electrozi axiali, faţă în faţă, şi a electrozilor plani paraleli, ele apropiindu-se ca formă de cele obţinute de Moussiegt în cazul tuburilor cu electrozi cilindrici în sită.

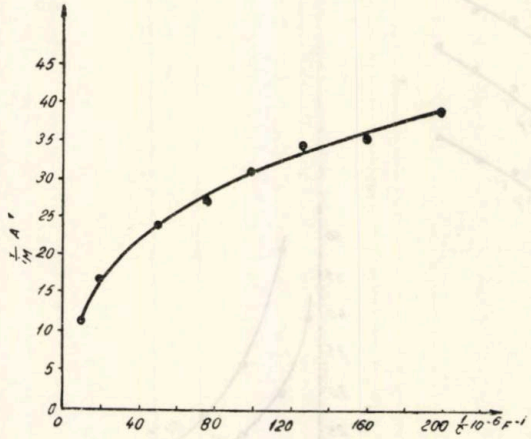


Fig. 3

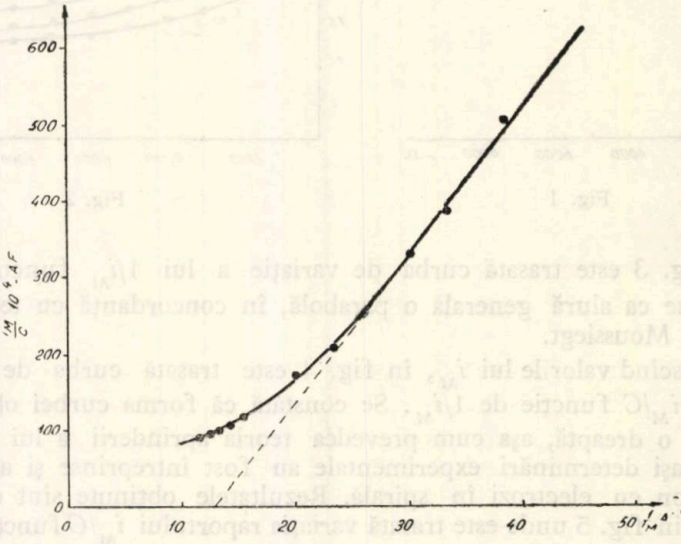


Fig. 4

Faptul că însuşi Moussiegt constată că rezultatele teoretice nu sînt confirmate experimental decît în cazul tuburilor cu electrozi axiali sau plan paraleli, este justificat de acesta în sensul că amorsajul descărcării se produce

într-o regiune privilegiată, care în cazul tubului cu electrozi axiali, coincide în mod obligatoriu cu axa tubului, între extremităţile celor doi electrozi. În cazul tuburilor cu electrozi coaxiali sau cu electrozi în spirală, condiţiile de simetrie nu impun existenţa unei poziţii precise a canalului iniţial, de-a lungul căruia să se propage aprinderea, ci pot avea loc simultan mai multe asemeni aprinderi, în diverse puncte ale catodei.

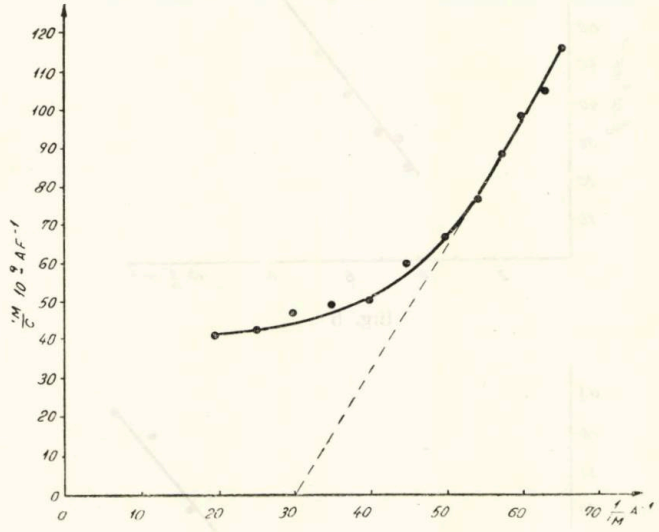
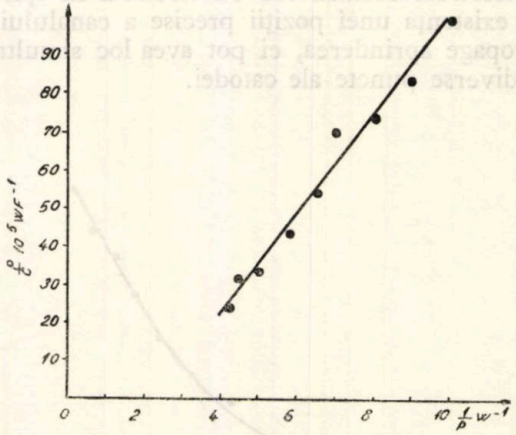


Fig. 5

J. Moussiegt mai face şi ipoteza că în regiunea atinsă iniţial de descărcare, intensitatea curentului capătă, aproape instantaneu, valoarea limită şi că apoi urmează fidel şi instantaneu variaţiile de tensiune. Din cauza neconcordanţei între teorie şi rezultatele experimentale din cazul tuburilor cu electrozi cilindrici coaxiali el consideră însă că în realitate există şi o oarecare întîrziere în ceea ce priveşte valoarea intensităţii curentului în raport cu tensiunea.

În consideraţiile sale teoretice J. Moussiegt admite că rolul hotărîtor în procesul unei descărcări intermitente îl joacă intensitatea curentului de descărcare şi în special intensitatea maximă. În realitate, însă, în timpul unei descărcări intermitente se produce şi o variaţie a căderii de tensiune pe tub şi în acest caz condiţiile de producere a descărcării intermitente vor fi definite atît de intensitatea curentului din timpul unei descărcări intermitente, cît şi de căderea de tensiune de pe tub. Aceste două mărimi — intensitatea curentului şi căderea de tensiune — definind energia consumată în timpul unei descărcări intermitente, respectiv puterea pe tub, considerăm

că în funcţie de această mărime trebuie formulată teoria aprinderii a lui Moussiegt.



Eig. 6

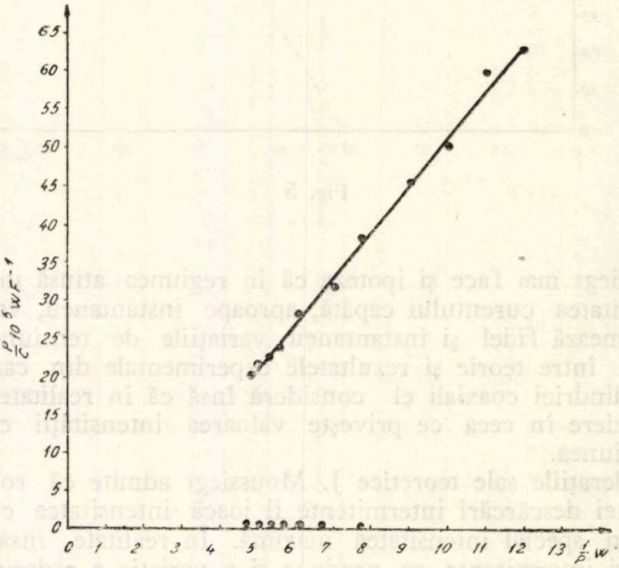


Fig. 7

Plecînd de la posibilitatea măsurării puterii pe tub din suprafaţa ciclurilor de relaxare, utilizînd procedeul indicat în lucrările anterioare [21] şi [22], şi pe baza măsurărilor efectuate, în fig. 6 şi 7 sînt redate, pentru tuburile

cu electrozi cilindrici coaxiali compacţi şi cu electrozi cilindrici în spirală curbele de variaţie ale raportului P/C (P — puterea pe tub) funcţie de $1/P$. Se constată că de această dată curbele obţinute sînt drepte, conform prevederilor teoretice ale lui J. Moussiegt. Aşadar în acest caz teoria aprinderii ar trebui să ţină seama nu numai de valoarea maximă a curentului de descărcare din timpul unui ciclu ci de toate mărimile ce determină descărcarea intermitentă, adică atît de intensitatea curentului din timpul unui ciclu cît şi de valoarea căderii de tensiune pe tub, mărimi ce definesc puterea pe tubul de descărcare.

3. Concluzii

Utilizînd în cazul descărcărilor intermitente tuburi cu neon cu electrozi cilindrici compacţi, cît şi tuburi cu neon cu electrozi în spirală, se constată că rezultatele experimentale, în ceea ce priveşte curba de variaţie a raportului i_M/C funcţie de $1/i_M$ nu este o dreaptă, aşa cum prevede teoria aprinderii a lui Moussiegt ci, în special pentru valori mari ale capacităţii, după cum a constatat şi Moussiegt în cazul tuburilor cu electrozi cilindrici în sită, se abate sensibil de la forma rectilinie.

Dacă însă, în procesul unui ciclu, se ia în considerare atît intensitatea curentului de descărcare cît şi căderea de tensiune pe tub, deci puterea tubului, obţinută din suprafaţa ciclului de relaxare, se constată că curba de variaţie a raportului P/C funcţie de $1/P$ este o dreaptă, verificînd teoria aprinderii emisă de Moussiegt. Prin urmare în cadrul acestei teorii ar trebui să se ţină seama şi de valoarea căderii de tensiune pe tub, nu numai de valoarea maximă a curentului de descărcare corespunzătoare unui ciclu de relaxare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Perkins J., C. R. Ac. Sci., Paris, 1909, **148**, p. 1170.
2. Athouard M. R., J. de Phys., 1927, **8**, p. 522.
3. Gill W. B., Phil. Mag., 1929, **8**, p. 155.
4. Mitra S. K., Syam Premtosh, Phil. Mag., 1932, **14**, p. 616.
5. Abraham H., Bloch W., Ann. de Phys., 1919, **12**, p. 237.
6. Liénard A., Rev. Gén. d'Électr., 1928, **23**, p. 901.
7. van der Pol B., Phil. Mag., 1926, **2**, p. 978.
8. Kaufman G., Ann. der Phys., 1900, **2**, S. 158.
9. Herweg J., Phys. Ztschr., 1912, **13**, S. 603.
10. Penning F. N., Phys. Ztschr., 1932, **33**, S. 816.
11. Taylor J., Phil. Mag., 1927, **3**, p. 358.
12. Clarkson W., Phil. Mag., 1927, **4**, p. 121.
13. Gill W. B., Phil. Mag., 1929, **8**, p. 955.
14. Gawen H., Ann. der Phys., 1934, **20**, S. 601.
15. Trichel G. W., Phys. Rev., 1938, **54**, p. 1078.

16. Funk J., Seeliger W., Ztschr. f. Phys., 1939, **113**, S. 203.
17. Leyshon W. A., Proc. Roy. Soc., 1929–1930, **42**, p. 157.
18. Laporte M., J. de Phys., 1937, **8**, p. 332.
19. Blum E., Ann. der Phys., 1938, **31**, S. 585.
20. Moussiegt J., Ann. der Phys., 1949, **4**, S. 593.
21. Luca E. şi colab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1-2*, p. 289.
22. Luca E. şi colab., Bul. Inst. polit., Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3-4*, p. 243.
23. Reich R., Depp A., Phys. Rev., 1934, **20**, p. 245.
24. Sloane R. W., Phil. Mag., 1937, **23**, p. 534.
25. Richardson L. F., Proc. Roy. Soc., 1937, **132**, p. 293.
26. Walle G., Phys. Ztschr., 1926, **27**, S. 473.

SUR LA THÉORIE DE L'AMORÇAGE DANS LE CAS DES DÉCHARGES INTERMITTENTES

(Résumé)

Basé sur des mesures expérimentales, on constate que la théorie de l'amorçage concernant les décharges intermittentes dans les gas, aux pressions réduites, émise par J. Moussiegt [20] et verifiée dans le cas des tubes au néon, avec des électrodes cylindriques axiales où avec des électrodes parallèles, n'est pas valable dans le cas des tubes à électrodes cylindriques coaxiales, compactes ou à electrodes en spirale, car la courbe i_M/C en fonction de $1/i_M$ n'est pas une droite.

En utilisant au lieu du courant de décharge maximum d'un cycle, la valeur de la puissance du tube, obtenue de la surface du cycle de rélaxation décrit et en traçant les courbes de variation du rapport P/C en fonction de $1/P$, tant pour les tubes au néon à électrodes cylindriques, coaxiales, compactes, que pour ceux à électrodes en spirale, on obtient des droites conformément à la théorie de Moussiegt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

Д. К. 621.3.014.31

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОДУГОВЫХ УСТАНОВОК

В. И. КРЫЛОВИЧ и О. И. ЯСЬКО

1. *Введение*

Интенсивное развитие высокотемпературной техники в научных исследованиях и в промышленности требует разработки различных источников, служащих для получения высоких температур. Одним из наиболее распространенных являются устройства, использующие электрическую дугу. В настоящее время создается множество различных типов электродуговых подогревателей, расширяется сфера их применения. В связи с этим возникла острая необходимость в разработке инженерных методов расчета таких электродуговых аппаратов.

Среди сложного комплекса задач, возникающих при создании электродуговых подогревателей для промышленного применения, выделяется две проблемы — разработка инженерного метода расчета характеристик электрической дуги, позволяющего использовать накопленные экспериментальные данные, и проблема обеспечения длительной устойчивости электродов. В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы, связанные с указанными проблемами.

2. *Обобщение характеристик электрических дуг методами теории подобия*

Теоретические расчеты электродуговых процессов наталкиваются на значительные математические трудности и на отсутствие сведений по многим необходимым физическим свойствам. Более реальным и практически реализуемым средством расчета является использование экспериментальных данных. Но в этом случае возникает задача научно обоснованной обработки полученных данных с целью максимально эффективного использования результатов эксперимента и моделирования процессов на лабораторных установках.

В последнее время появилось ряд работ [1]...[3], использующих теорию подобия для обобщения характеристик электрических дуг. Таким путем удалось обобщить ряд некоторых частных случаев. Имеется, однако, необходимость рассмотреть этот вопрос в несколько более широком плане с целью определить тот ряд критериев, которые могут быть существенными в различных электродуговых процессах, и определить области их применения.

В работе [3] сделана попытка получить полную систему критериев методом анализа размерностей. Такой подход, однако, затрудняет выяснение физического смысла критериев и осложняет выбор наиболее существенных из них. В данной работе эта задача решается методами теории подобия.

Процесс преобразования электрической энергии в тепловую, протекающий в электрической дуге при высоких температурах и больших температурных градиентах, связан с диссоциацией и ионизацией частиц, с химическими реакциями, с электромагнитными и диффузионными явлениями. Чтобы учесть весь этот комплекс процессов можно составить систему уравнений [4], [5]:

а) закон сохранения количества движения

$$\varrho \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \operatorname{div} \hat{\mathbf{P}} + \sum \mathbf{F}_k \varrho_k; \tag{1}$$

б) закон сохранения массы для каждой из компонент

$$\frac{d\varrho_k}{d\tau} = -\varrho_k \operatorname{div} \mathbf{W} - \operatorname{div} \mathbf{I}_k + \Gamma_k; \tag{2}$$

в) закон сохранения энергии

$$\varrho \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathbf{W}^2}{2} + u\right) = \operatorname{div}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{W}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \sum \mathbf{F}_k \varrho_k \mathbf{W}_k; \tag{3}$$

г) уравнения состояния для каждой из компонент

$$P_k = n_k k T; \tag{4}$$

е) уравнения электромагнитного поля:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \dfrac{e}{\varepsilon_0} \varrho_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Сюда также следует добавить зависимости потоков массы и энергии от параметров среды и градиентов, а также зависимость свойств

газа от параметров среды. Кроме того, следует учесть соотношения между отдельными величинами, входящими в уравнения:

$$\mathbf{W} = \frac{\sum \varrho_k \mathbf{W}_k}{\sum \varrho_k}, \quad \varrho_k = \sum \varrho_k, \quad \mathbf{I}_k = \varrho_k (\mathbf{W}_k - \mathbf{W}). \tag{6}$$

Внешними силами, действующими на единицу массы компоненты k, являются:

а) электрические силы

$$\mathbf{F}_{1k} = \frac{Z_k e \mathbf{E}}{m_k}; \tag{7а}$$

б) магнитные силы

$$\mathbf{F}_{2k} = \frac{Z_k e}{m_k} \mathbf{W}_k \times \mathbf{B}; \tag{7б}$$

в) сила тяжести

$$\mathbf{F}_{3k} = \mathbf{g}. \tag{7в}$$

В зависимости от состава нагреваемой смеси и температуры дугового столба число компонент может достигать нескольких десятков.

Очевидно, что решение такой системы уравнений является сложной задачей. Систему необходимо упростить, исключая те уравнения и отдельные члены, которые не оказывают заметного влияния на исследуемый процесс. Прежде всего, можно ограничиться рассмотрением только стационарного процесса. Далее, следуя работам [5], [6], плазму электрической дуги будем рассматривать как трехкомпонентную, состоящую из ионов, электронов и нейтральных частиц, не делая различия между отдельными видами нейтральных частиц и ионов. При этом, используя методы термодинамики необратимых процессов [7], [8], можно получить выражения для плотности тока, потока нейтральных частиц и теплового потока. Такие выражения были получены в работах [5], [6].

Дальнейшие упрощения могут быть произведены путем оценки членов уравнения по некоторым принятым характерным значениям размеров дугового столба, силы тока, напряженностей электрического и магнитного полей и температуры дугового столба.

В работе принято, что температура и диаметр дугового столба не изменяются вдоль оси дуги. Характерный диаметр дуги принят равным 4 мм, а характерная температура столба 20 000°К. Предполагается, что сила тока не превышает 2...3 ка. Напряженность электрического поля при оценках применялась равной 20...40 в/см, индукция внешнего магнитного поля 0,1 в сек/м². Принимается, что скорость газа может достигать скорости звука.

В результате проведенных упрощений получена система уравнений:

(8 а) $$\varrho(\mathbf{W}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{W} = \mathrm{div}\,\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{j}\times\mathbf{B},$$

(8 б) $$\mathrm{div}\,\varrho\mathbf{W} = 0,$$ (8 в) $$\mathrm{div}\;\mathbf{j} = 0,$$

(8 г) $$\mathbf{jE} = \varrho\,\mathbf{W}\,\mathrm{grad}\left(h + \frac{W^2}{2}\right) - \mathrm{div}\,(\lambda\,\mathrm{grad}\,T) + Q_л,$$

(8 д) $$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_c = \mu_0\mathbf{j},$$ (8 е) $$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E},$$

которая дополняется зависимостью свойств от параметров среды:

$$\varrho = \varrho(P, T), \quad h = h(P, T), \quad \lambda = \lambda(P, T),$$
$$\sigma = \sigma(P, T), \quad \nu = \nu(P, T), \quad Q_л = Q_л(P, T).$$

Тензор напряжения задается своими компонентами:

(9) $$\hat{p}_{ik} = p\delta_{ik} + \varrho\nu\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\frac{\partial W_m}{\partial x_m}\right).$$

Величина $Q_л$ введена для учета объемного излучения.

Индукция магнитного поля состоит из индукции собственного и внешнего полей $\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_b$.

Приведя уравнения (8)...(9) к безразмерному виду, получаем ряд критериев:

$$\Pi_1 = \frac{P_0}{\varrho_0 W_0^2}, \quad \Pi_2 = \frac{j_0 B_b L_0}{\varrho_0 W_0^2}, \quad \Pi_3 = \frac{\nu_0}{W_0 L_0},$$

$$\Pi_4 = \frac{\mu_0 j_0 L_0}{B_b}, \quad \Pi_5 = \frac{\varrho_0 W_0 h_0}{j_0 E_0 L_0}, \quad \Pi_6 = \frac{\varrho_0 W_0^3}{j_0 E_0 L_0},$$

$$\Pi_7 = \frac{Q_{л0}}{j_0 E_0}, \quad \Pi_8 = \frac{\lambda_0 T_0}{j_0 E_0 L_0^2}, \quad \Pi_9 = \frac{\sigma_0 E_0}{j_0}.$$

Критерии $\Pi_1 = Eu$, $\Pi_3 = 1/Re$ широко используются для обобщения различных процессов. Критерий Π_2 является специфическим магнитогазодинамическим безразмерным числом, характеризующим соотношение между электромагнитными и газодинамическими силами. Критерии $\Pi_5 \ldots \Pi_8$ характеризуют энергетические соотношения в дуге. Эти критерии являются специфическими для электрической дуги, поскольку они отражают процессы преобразования энергии в дуговом столбе: критерий Π_5 характеризует долю джоулевого тепла, использованного на нагрев рабочего тела. Критерий Π_6 показывает долю тепла, затраченного на ускорение газа, а Π_8 и Π_7, соответственно, доли мощности, отводимой от дуги посредством теплопроводности и

излучения. Критерий Π_4 отражает соотношение магнитных полей, а Π_9 — электропроводностей.

Для обдуваемых электрических дуг в качестве определяющих величины удобно принимать силу тока, расход газа, характерный размер, свойства газа. Тогда, используя соотношения для тока и расхода газа $I \sim j_0 L_0^2$, $G \sim \varrho_0 W_0 L_0^2$ и критерий Π_9, получим обобщенные аргументы в виде, удобном для обобщения процессов тепло- и массообмена в электрической дуге:

$$\Pi_1'' = \frac{IB_b}{\varrho_0 W_0^2 L_0}, \quad \Pi_4' = \frac{\mu_0 I}{B_b L_0}, \quad \Pi_5' = \frac{\varrho_0 W_0 h_0 \sigma_0 L_0^3}{I^2},$$

$$\Pi_6' = \frac{\varrho_0 W_0^3 \sigma_0 L_0^3}{I^2}, \quad \Pi_7' = \frac{Q_{л0} \sigma_0 L_0^4}{I^2}, \quad \Pi_8' = \frac{\lambda_0 \sigma_0 T_0 L_0^2}{I^2},$$

$$\Pi_2'' = \frac{IB_b \varrho_0 L_0^3}{G^2}, \quad \Pi_5'' = \frac{Gh_0 \sigma_0 L_0}{I^2}, \quad \Pi_6'' = \frac{G^3 \sigma_0}{I^2 \varrho_0^2 L_0^3}.$$

Кроме указанных критериев требуется учитывать параметрические критерии, характеризующие условия однозначности. В эти критерии входят такие величины как начальная температура газа, температура стенок разрядной камеры, давления в разрядной и рабочей камере, геометрические размеры камеры и т. п.

Из выражений для свойств рабочего тела также можно получить ряд безразмерных чисел. В случае аппроксимации зависимостей свойств в виде степенной функции энтальпии или температуры (например, $\varrho = \varrho_0 (T/T_0)^n$ или $\sigma = \sigma_0 (h/h_0)^m$), такими безразмерными критериями будут являться показатели степени.

Коэффициент теплопроводности должен учитывать диффузионную и лучистую составляющую ($Q_л$ учитывает только объемное излучение).

В зависимости от условий горения дуги преобладающее значение приобретают те или иные критерии. В устройствах с высоким коэффициентом полезного действия (кпд) основную роль играет критерий Π_5, а в случае низких кпд — критерий Π_8. Критерий Π_7 может играть заметную роль при высоких температурах и малых оптических толщинах дугового столба. В установках с магнитным вращением дуги сказывается критерий Π_2, а в подогревателях с вихревой газовой стабилизацией при ламинарных течениях — критерий Π_3. Критерием Π_6 можно пренебречь при дозвуковых скоростях потока. В большинстве случаев можно пренебречь также рядом параметрических критериев. Например, практически можно не учитывать температуры стенок разрядной камеры, начальную температуру газа и т. п.

Благодаря указанным упрощениям, во многих случаях оказывается возможным выразить характеристики дуги в виде зависимостей между небольшим количеством безразмерных чисел.

При высоких температурах и небольших линейных размерах дугового столба в нем имеют место большие температурные градиенты. Поскольку физические свойства газа зависят от температуры, то в дуге наблюдается резкая неравномерность свойств. В критерии подобия входят определяющие значения этих свойств. Приведенная методика дает возможность выявить только безразмерные числа, а определяющие значения физических свойств остаются неизвестными. Это обстоятельство сильно затрудняет применение полученных критериев для обобщения характеристик электрических дуг. Однако в случае некоторого данного газа при постоянном давлении определяющие значения физических свойств остаются постоянными. В каждом критерии их можно учитывать в виде постоянного множителя, не зависящего от других определяющих величин, и обобщение можно проводить в размерных комплексах, соответствующих безразмерным критериям. Таким путем, в частности, можно проверить возможность обобщения в полученных критериях вольтамперных характеристик электрических дуг.

В работах [1], [2] показана возможность обобщения характеристик подогревателей, обладающих высоким кпд в виде зависимости $\Pi_9 = f(\Pi_5)$ и для устройств с невысоким кпд в виде $\Pi_9 = f(\Pi_8)$. При этом критерий Π_9 преобразовывался к виду $\Pi'_9 = \sigma_0 E_0 L_0^2 / I$ или при пренебрежении приэлектродными падениями напряжения — к виду $\Pi''_9 = \sigma_0 U L_0 / I$.

В работе [9] показана возможность обобщения характеристик электродуговых подогревателей в безразмерных критериях.

В качестве неопределяющего критерия, кроме Π_9, получаемого непосредственно из системы уравнений (8), (9), можно также использовать и другие критерии. Для обобщения процессов преобразования энергии удобными являются критерии:

$$\Pi_{10} = \frac{\Pi'_9}{\Pi''_5} = \frac{EIL_0}{\sigma_0 h_0}, \quad \Pi'_{10} = \frac{\Pi''_9}{\Pi''_5} = \frac{UI}{Gh_0},$$

$$\Pi_{11} = \frac{\Pi'_9}{\Pi'_8} = \frac{EI}{\lambda_0 T_0}, \quad \Pi'_{11} = \frac{\Pi''_9}{\Pi''_8} = \frac{UI}{\lambda_0 T_0 L_0}.$$

Критерии Π_{10}, Π'_{10} показывают отношение мощности, выделенной в дуговом столбе к мощности, затраченной на нагрев газа конвективным путем; критерии Π_{11}, Π'_{11} выражают долю мощности, отведенную от дугового столба путем теплопроводности. Они являются неопределяющими, поскольку в них входит напряжение на дуге или напряженность электрического поля (в работе принято в качестве определяющей величины считать ток дуги).

Полученные критерии могут быть использованы при обобщении не только вольтамперных, но также и других характеристик электродуговых подогревателей. Например, в работе [2] приведено обобще-

ние температуры на оси водостабилизированной дуги, а в работе [10] — обобщение профиля струи установки с вихревой газовой стабилизацией.

Таким образом, применение теории приближенного подобия к электрическим дугам открывает новые возможности для разработки инженерного метода расчета различных электродуговых устройств путем обобщения экспериментальных данных.

3. *Тепловой режим электродов*

Износ электродов в разрядной камере электродугового подогревателя может быть вызван двумя причинами. Это, во-первых, эрозия в движущихся дуговых (катодном и анодом) пятнах, когда температура поверхности электрода за пределами пятна ниже температуры плавления материала электрода. Величина эрозии зависит от материала электрода, скорости движения пятна, температуры электрода вне пятна и других факторов. Полностью исключить унос вещества из дуговых пятен, по-видимому, нельзя.

Во-вторых, может имет место случай, когда средняя (при стационарной работе плазматрона) температура поверхности электродов в районе пробегания дуговых пятен окажется равной температуре плавления материала электрода. Износ электродов при этом будет более интенсивным.

При правильном выборе толщины охлаждаемого электрода, его размеров, режима охлаждения указанную вторую причину износа можно устранить. При этом толщина электрода должна быть такой, чтобы средняя (по времени) температура, теплонапряженной его поверхности в области пробегания дугового пятна была ниже температуры плавления материала электрода, а разность максимальной температуры охлаждаемой поверхности и температуры насыщения (кипения) охлаждающей жидкости не превышала критического температурного напора, соответствующего переходу от пузырькового режима кипения у охлаждаемой поверхности к пленочному. Если известны граничные условия, то эту толщину можно определить аналитически.

Рассмотрим, как часто встречающуюся, разрядную камеру и цилиндрическими охлаждаемыми электродами и вращающейся дугой. При большой скорости вращения дуги зона теплового воздействия дугового пятна на электрод вырождается в замкнутую полосу с некоторым поперечным (то есть, вдоль цилиндра) распределением плотности теплового потока $q_1(z)$. Кроме этого, на электрод воздействует тепловой поток от высокотемпературного рабочего газа (плазмы); будем считать его плотность постоянной по длине электрода и равной q_0. Таким образом, граничным условием на неохлаждаемой (внутренней) поверхности будет тепловой поток плотности

$$q(z) = q_0 + q_1(z).$$

Если принять, что $q(-z) = q(z)$ и $q(z) \to 0$ при возрастании $|z|$, то стационарное температурное поле в бесконечно длинном полом цилиндре, охлаждаемом с внешней стороны имеет вид (решение задачи дано в [11]):

$$t(R, Z) = t_e + \frac{q_0 r_1}{\lambda B_i} - \frac{q_0 r_1}{\lambda} \ln R +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{K_0(\alpha R) M(\alpha) + I_0(\alpha R) N(\alpha)}{K_1\left(\alpha \frac{r_1}{r_2}\right) M(\alpha) - I_1\left(\alpha \frac{r_1}{r_2}\right) N(\alpha)} \Phi(\alpha) \cos(\alpha Z) \frac{d\alpha}{\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\Phi(\alpha) = -\frac{r_2}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty q(z) \cos \alpha z \, dz,$$

$$M(\alpha) = \alpha I_1(\alpha) + B_i I_0(\alpha), \quad N(\alpha) = \alpha K_1(\alpha) - B_i K_0(\alpha),$$

$$R = \frac{r}{r_2}, \quad Z = \frac{z}{r_2}, \quad B_i = \frac{\alpha r_2}{\lambda}.$$

Для конечного цилиндра полудлины L, теплоизолированного с торцов, выражение для температурного поля может быть получено в виде:

$$t(R, Z) = \Phi(0) R_1 \left(\frac{1}{B_i R_2} - \ln \frac{R}{R_2} \right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n} \cdot \frac{I_0(\pi n R) N(\pi n R_2) + K_0(\pi n R) M(\pi n R_2)}{K_1(\pi n R_1) M(\pi n R_2) - I_1(\pi n R_1) N(\pi n R_2)} \cos \pi n Z. \tag{11}$$

Здесь

$$\Phi(n) = \frac{L}{\lambda} \int_0^1 q(Z) \cos(\pi n Z) \, dz, \quad (n = 0, 1, 2\ldots),$$

$$M(\pi n R_2) = \pi n I_1(\pi n R_2) + B_i I_0(\pi n R_2),$$

$$N(\pi n R_2) = \pi n K_1(\pi n R_2) - B_i K_0(\pi n R_2),$$

$$R_1 = \frac{r_1}{4}, \quad R_2 = \frac{r_2}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad B_i = \frac{\alpha L}{\lambda}.$$

На рис. 1 в качестве иллюстрации приведены зависимости $t(r_1, 0)$ от толщины охлаждаемого электрода с $r_1 = 2$ см, $L = 6$ см, рассчитанных по формуле (11) для $q_1(z)$ в виде

$$q_0 = 0, \quad q_1(z) = \begin{cases} q_1, & |z| \leqslant \delta/L, \\ 0, & |z| > \delta/L. \end{cases}$$

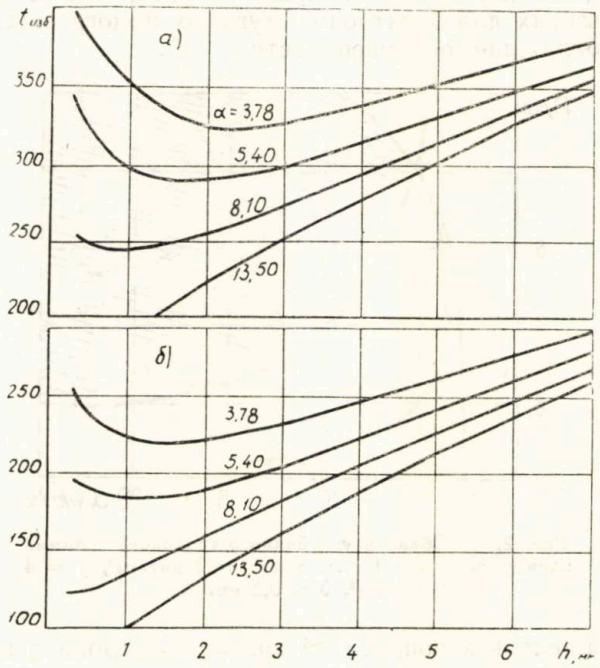


Рис. 1. Максимальная избыточная температура ($q_0 = 0$, $t_0 = 0$) поверхности электрода в зависимости от толщины электрода с $r_1 = 2$ см при различных α, вт/см² град: а) $\delta = 0{,}1$ см, $q_1 = 4{,}3$ квт/см²; б) $\delta = 0{,}5$ см, $q_1 = 0{,}8$ квт/см².

Видно, что при небольших α существует критическая толщина охлаждаемой стенки, при которой имеют место наилучшие условия теплоотвода. Наличие критической толщины было выявлено также при исследовании на электрических моделях и объясняется двумерностью задачи.

На рис. 2 приведены полученные методом электромоделирования значения толщин охлаждаемого медного электрода с $r_1 = 0{,}7$ см и коэффициентов теплообмена, при которых температура на теплонапряженной поверхности, то есть $t(r_1, 0)$, равна температуре плавления меди,

1086°С, (кривая *1*), и температура на охлаждаемой поверхности, $t(r_2, 0)$, соответствует возникновению пленочного кипения для воды при $p = 30$ атм (кривая *2*). При этом предполагалось, что

$$q(z) = q_0 + q_1 \exp[-(z/\delta)^2].$$

Заштрихованная область соответствует устойчивому режиму работы электродов. Как видно, главным лимитирующим фактором при толщинах, обычных для электродов дуговых подогревателей, является температура охлаждаемой поверхности.

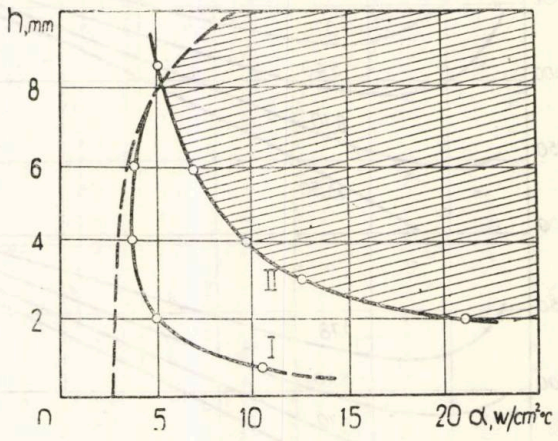


Рис. 2. — Область устойчивого теплового режима электрода с $r_1 = 0{,}7$ см для $q_0 = 2$ квт/см², $q_1 = 4$ квт/см², $\delta = 0{,}2$ см.

Вернемся теперь к вопросу об эрозии электрода в пятне. С точки зрения теории теплопроводности износ электрода в пятне происходит потому, что не вся энергия, поступающая в пятно, отводится в электрод, если иметь в виду чисто тепловой механизм разрушения электрода в пятне.

Можно показать [12], что если радиус пятна удовлетворяет условию:

$$r_{кр} = \frac{1}{2}\left|\frac{(t_{пл} - t_0)\lambda}{2q}\right|^2 \frac{\pi v}{a}, \qquad (12)$$

где $t_{пл}$ — температура фазового превращения в дуговом пятне (она, по-видимому, не равна температуре плавления и разная для катодного и анодного пятна), то весь тепловой поток будет отводиться в электрод, так как температура поверхности за время прохождения пятна не успеет достичь $t_{пл}$. Формула (12) верна для больших значений критерия $vr_{кр}/2a$.

В случае, если радиус дугового пятна $r_0 \gg r_{кр}$, температура поверхности в пятне практически везде будет равна $t_{пл}$ и для определения теплоотвода в электрод необходимо решать задачу теплопроводности (в данном случае уравнение Фурье-Кирхгоффа) при граничных условиях первого рода в движущемся пятне. Расчеты показывают, что при плотностях тока в пятне $j > 10^4$ а/см^2, $v \sim 10...100$ м/сек и не очень больших значениях $\Delta t = t_{пл} - t_0$ условия $r_0 \gg r_{кр}$ выполняются.

Нами приближенно решена задача о температурном поле под быстродвижущимся пятном для полубесконечного пространства при условии $t = t_{пл}$ в пятне и отсутствия теплового потока на поверхности вне пятна (решение см. в [12]). Тепловой поток, отводимый в электрод в стационарном случае ($\tau \to \infty$) от круглого пятна радиуса r_0 при условии $vr_0/2a \gg 1$, оказывается равным

$$Q = 4\lambda (t_{пл} - t_0) r_0 \left(\frac{2vr_0}{\pi a} \right)^{1/2}.$$

Тепловой поток, поступающий от дуги в анод, Q_α, и катод, Q_k, приближенно можно подсчитать по формуле:

$$Q_k = I(\Delta U_k - \varphi), \quad Q_\alpha = I(\Delta U_\alpha + \varphi).$$

Сравнивая эти величины с Q и учитывая, что для средней плотности тока

$$I = j\pi r_0^2, \quad r_0 = \sqrt{\frac{I}{\pi j}},$$

нетрудно убедиться, что для медных электродов, если считать плотность тока в дуговых пятнах порядка 10^5 а/см и более, практически вся энергия, поступающая в пятно, должна идти на износ электродов (для реальных значений $t_{пл} - t_0$). Если в пятне $j \sim 10^4$ а/см^2, то легко можно осуществить полный теплоотвод. При расчетах в качестве t_0 следует брать значения $t(r, z)$, определенные из решений (11) или (12).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1875

Обозначения

a — температуропроводность; $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; Eu — число Эйлера; e — заряд электрона; $\mathbf{F}_k$ — внешняя сила, действующая на единицу массы; G — расход рабочего тела; g — ускорение силы тяжести; h — энтальпия; Γ_k — масса частиц k-той компоненты, возникающая за счет химических реакций в единице объема в единицу времени; I — сила тока; I_k — поток массы k-той компоненты через единицу площади в единицу времени; $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; j — плотность тока; k — постоянная Больцмана; L_0 — определяющий размер; m_k — масса частиц k-той компоненты; n_k — число частиц k-той компоненты в единице объема, $\hat{\mathbf{P}}$ — тензор напряжения; P — давление; p_1, p_2 — внутренний и внешний радиус цилиндрического электрода; p_0 — радиус дугового пятна; $Q_л$ — мощность излучения из единицы объема газа (вт/м^3); q — тепловой поток через единицу площади; Re — число Рейнольдса; T

— температура рабочего тела (°К); t_c — температура среды, охлаждающей электроды (°С); U — напряжение; ΔU_a, ΔU_k — прианодное и прикатодное падение потенциала; u — внутренняя энергия единицы массы рабочего тела; v — скорость движения дугового пятна; W — скорость газа; x — координаты; Z_k — зарядное число иона k-той компоненты; δ_{ik} — символ Кронекера; ε — диэлектрическая проницаемость пустоты; λ — коэффициент теплопроводности; μ_0 — магнитная проницаемость пустоты; ν — коэффициент кинематической вязкости; ϱ — плотность; σ — коэффициент электропроводности; τ — время; φ — работа выхода электрона.

Индексы

0 — обозначение относится к определяющей величине; i, k, m — порядковый номер компоненты, координаты.

Поступила 25 I 1966 г.

Институт тепло- и массо-обмена
Академия Наук БССР,
Минск, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Ясько О. И., ИФЖ, 1964, *4*.
2. Ясько О. И., ИФЖ, 1964, *12*.
3. Даутов Г. Ю., Жуков М. Ф., ПМТФ, 1965, *2*.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. Е., *Магнитная гидродинамика*. Ф.—М., М., 1962.
5. Финкельнбург В., Меккер Г., *Электрические дуги и термическая плазма*, ИЛ, М., 1961.
6. Maecker H., Peters T., Z. Phys., 1956, **144**.
7. Де Гроот С. Г., *Термодинамика необратимых процессов*. Гостехиздат, М.,1956.
8. Лыков А. В., Михайлов Ю. А., *Теория тепло- и массопереноса*. ГЭИ, М.—Л., 1963.
9. Коротеев А. С., Ясько О. И., ИФЖ (в печати).
10. Гаркавый Е. В., Ясько О. И., ИФЖ, 1963, *11*.
11. Крылович В. И., ИФЖ, 1963, *8*.
12. Крылович В. И., Абраменко Т. Н., *Теплофизика высоких температур* (в печати).

UNELE PROBLEME ALE CALCULULUI INGINERESC AL INSTALAŢIILOR CU ARC

(Rezumat)

Se deduc criterii adimensionale pentru caracteristicile arcului electric. Prin metodele teoriei similitudinii se obţin criterii pentru descărcările în arc stabilizat sau mobil în cîmp magnetic.

Se dau soluţiile problemelor de conductibilitate termică şi rezultatele modelării cîmpului de temperatură al electrozilor răciţi ai instalaţiilor cu arc. Rezultatele obţinute permit alegerea geometriei şi a grosimii optime a electrozilor, ceea ce asigură eficienţa maximă a instalaţiilor cu funcţionare continuă.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Temperatura suplimentară maximă ($q_0 = 0$, $t_c = 0$) a suprafeţei electrodului, funcţie de grosimea electrodului cu $r_1 = 2$ cm, pentru diferiţi α, în W/cm² grad: a) $\delta = 0{,}1$ cm, $q_1 = 4{,}3$ kW/cm²; b) $\delta = 0{,}5$ cm, $q_1 = 0{,}8$ kW/cm².

Fig. 2. — Domeniul de regim termic stabil al electrodului cu $r_1 = 0{,}7$ cm pentru $q_0 = 2$ kW/cm², $q_1 = 4$ kW/cm², $\delta = 0{,}2$ cm.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. Z. 621.317.44

TRADUCTOR DE UNGHI FOLOSIND METODA SONDEI MAGNETICE

DE

NINA POEATĂ, GH. VASILIU şi CAMELIA ANDRONE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5–7 februarie 1965

1. Introducere

În literatura de specialitate [1] este descris traductorul de inducţie folosit în măsurarea unghiurilor în asociaţie cu un circuit integrator. Într-un cîmp magnetic constant (inductorul) se deplasează o bobină cu w spire (indusul) cu unghiul α, de măsurat.

Tensiunea electromotoare indusă fiind dată de relaţia $e = -w\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ rezultă că:

$$\int_0^{t_1} e\,\mathrm{d}t = -w\int_{\Phi(0)}^{\Phi(\alpha)} \mathrm{d}\Phi\,, \tag{1}$$

unde t_1 este timpul necesar pentru a deplasa indusul cu unghiul α de măsurat. Rezultă că:

$$\int_0^{t_1} e\,\mathrm{d}t = w\,[\Phi\,(0) - \Phi\,(\alpha)]\,. \tag{2}$$

Cu alte cuvinte integrala tensiunii electromotoare indusă în intervalul de timp t_1 în care s-a deplasat indusul cu unghiul de măsurat α, este o funcţie determinată de α şi poate fi deci folosită pentru măsurarea lui.

În lucrarea de faţă se indică posibilitatea realizării unui traductor de unghi foarte sensibil pe baza folosirii sondei magnetice.

2. Principiul metodei

Principiul de funcţionare al sondei magnetice este descris în [2]. Fenomenele fundamentale aflate la baza funcţionării sondei magnetice sînt similare cu cele din cazul amplificatoarelor magnetice [3].

Amintim că în prezent sondele magnetice sînt folosite la explorarea şi măsurarea cîmpurilor magnetice slabe. În [2] s-a aratat că sensibilitatea unei astfel de sonde este mai mare în cazul în care ea este alimentată cu curent sinusoidal decît în cazul cînd este alimentată cu tensiune sinusoidală.

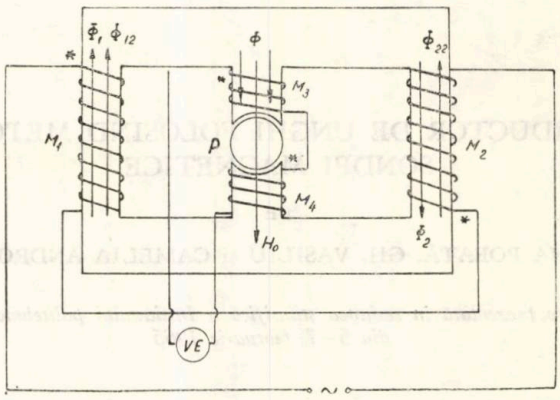


Fig. 1

Pentru construirea unui traductor de unghi care să funcţioneze pe principiul sondei magnetice, am folosit schema din fig. 1. Bobinele M_1 şi M_2, identice, cu cîte w spire fiecare, se conectează aditiv şi se alimentează cu curentul instantaneu sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$. Fluxurile Φ_1 şi Φ_2, create de cîmpurile magnetice h_1 şi h_2 ale acestor bobine, variază în timp cu frecvenţa sursei de alimentare, după o lege periodică dar în general diferită de cea a cîmpului magnetizant, datorită caracteristicii neliniare $\Phi = f(h)$ a miezului. Cînd miezul este magnetizat numai de cîmpul alternativ se obţine un flux $\Phi(\omega t)$ simetric faţă de axa ωt (fig. 2, curba *1*), care nu conţine în spectrul său armonici pare chiar dacă este nesinusoidal.

Magnetizînd suplimentar circuitul magnetic cu un cîmp constant punctul de funcţionare corespunzător stării de magnetizare a miezului se deplasează spre porţiunea saturată, iar componenta alternativă a fluxului devenind nesimetrică faţă de abscisă (fig. 2, curba *2*), rezultă că spectrul acesteia conţine armonici pare.

Armonicile pare ale fluxurilor Φ_1 şi Φ_2 se închid prin miezul central, inducînd în bobinele M_3 şi M_4, plasate pe acest miez, tensiuni electromotoare care conţin numai armonici pare. În schema din fig. 1 componenta continuă a cîmpului magnetizant este produsă de magnetul permanent P introdus în miezul central. Acesta, rotit cu unghiul de măsurat α, crează în miezul central o componentă continuă $H_0 = H \sin \alpha$, unde H este intensitatea maximă a cîmpului magnetizant continuu, corespunzînd cazului cînd axa polilor magnetului permanent coincide cu verticala.

Datorită faptului că H_0 este o funcţie de α rezultă că şi tensiunea electromotoare indusă în M_3 şi M_4 este de asemenea o funcţie de α.

Pentru o analiză cantitativă a fenomenelor care au loc în traductorul propus, vom folosi metoda de aproximare printr-un polinom a caracteristicii neliniare $\Phi = f(h)$ [4].

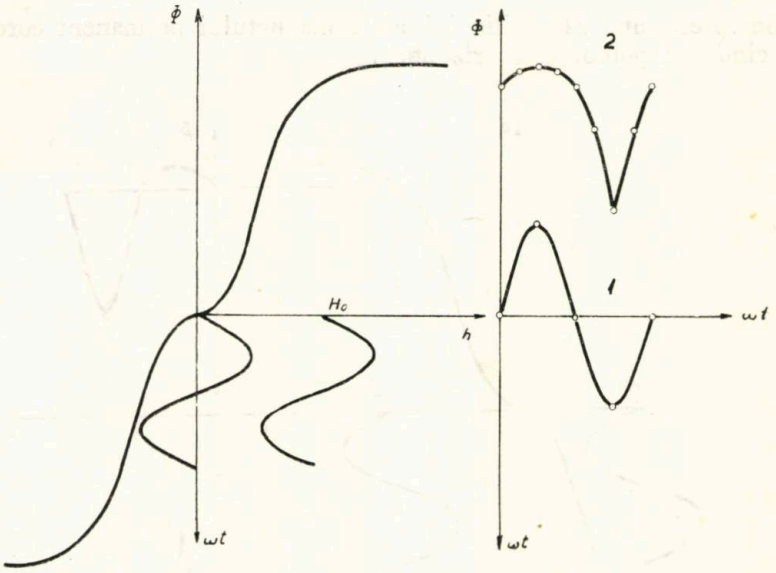


Fig. 2

Pentru a creşte precizia se pot calcula coeficienţii polinomului pe intervale limitate. În cele ce urmează ne vom limita numai la trei termeni ai polinomului de aproximare a curbei de isterezis.

Coeficienţii polinomului depind de material şi de porţiunea de lucru. Datorită modului de conexiune a bobinelor M_1 şi M_2, jumătate din componenta continuă a cîmpului magnetic din miezul central se sumează la cîmpul magnetic alternativ din miezul din stînga, iar cealaltă jumătate se scade din cîmpul magnetic alternativ al miezului din dreapta.

Notînd cîmpurile magnetice rezultante din cele două miezuri cu h_1' şi h_2' vom obţine:

$$h_1' = H_m \sin \omega t + \frac{H_0}{2}, \quad h_2' = H_m \sin \omega t - \frac{H_0}{2}, \tag{3}$$

în care $H_m = kwI_m$, iar $H_0 = H \sin \alpha$ este cîmpul constant în timp, dar care variază cu unghiul de măsurat α.

Funcţionarea este optimă atunci cînd $H_m \ll H_0$.

În fig. 3 se indică punctele de funcţionare corespunzătoare miezurilor laterale în prezenţa cîmpului constant $H_0/2$, pentru o anumită valoare a unghiului α. Introducerea componentei continue H_0 deplasează punctul de funcţionare al miezului din stînga în punctul A, iar al celui din dreapta în punctul B.

Vom presupune că poziţia iniţială a magnetului permanent corespunde cazului cînd axa polilor este orizontală.

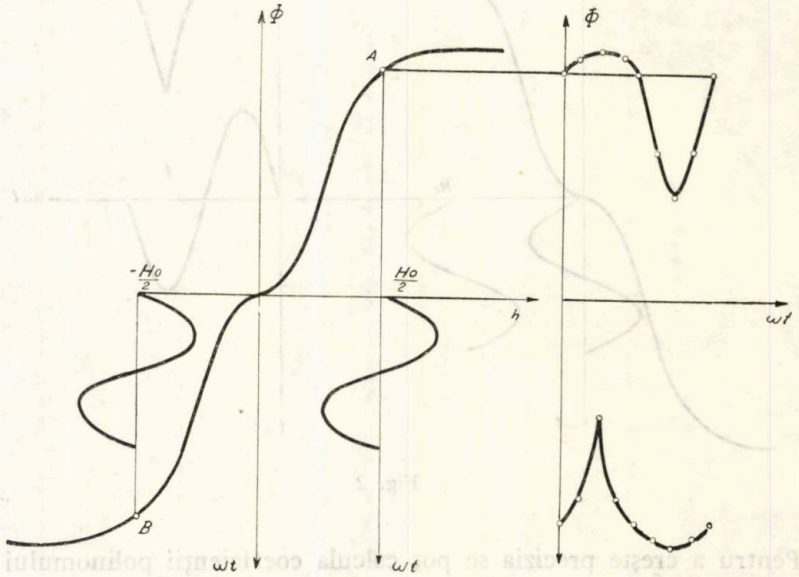


Fig. 3

In absenţa componentei verticale H_0 în miezul central, fluxurile Φ_1 şi Φ_2 nu conţin armonici pare. La o variaţie a unghiului α de la 0 la $\pi/2$ cîmpul constant variază între limitele 0 şi H; în consecinţă punctul de funcţionare A se deplasează pe porţiunea pozitivă a caracteristicii $\Phi(h)$ iar punctul B pe porţiunea sa negativă.

Porţiunea pozitivă a caracteristicii $\Phi(h)$ va fi aproximată prin polinomul:

$$\Phi_1 = a_1 h_1 + a_2 h_1^2 + a_3 h_1^3, \tag{4}$$

unde constantele a_1, a_2 şi a_3 pot fi calculate cunoscînd trei puncte de pe caracteristica statică.

Datorită simetriei curbei $\Phi(h)$ faţă de origine aproximarea acesteia pentru valorile negative se va face cu un polinom de forma $\Phi_2(h) = -\Phi_1(-h)$, anume:

$$\Phi_2 = a_1 h_2 - a_2 h_2^2 + a_3 h_2^3. \tag{5}$$

Introducînd (3) în (4) şi (5) se obţine:

$$\begin{cases} \Phi_1 = a_1\left(H_m \sin\omega t + \dfrac{H_0}{2}\right) + a_2\left(H_m \sin\omega t + \dfrac{H_0}{2}\right)^2 + a_3\left(H_m \sin\omega t + \dfrac{H_0}{2}\right)^3, \\ \Phi_2 = a_1\left(H_m \sin\omega t - \dfrac{H_0}{2}\right) - a_2\left(H_m \sin\omega t - \dfrac{H_0}{2}\right)^2 + a_3\left(H_m \sin\omega t - \dfrac{H_0}{2}\right)^3. \end{cases} \tag{6}$$

Efectuînd calculele se obţine în final:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{10} + \Phi_{11m} \sin\omega t - \Phi_{12m} \cos 2\omega t - \Phi_{13m} \sin 3\omega t, \\ \Phi_2 = \Phi_{20} + \Phi_{21m} \sin\omega t + \Phi_{22m} \cos 2\omega t - \Phi_{23m} \sin 3\omega t, \end{cases} \tag{7}$$

în care Φ_{j0} este componenta continuă a fluxului Φ_j, iar Φ_{jim} este amplitudinea armonicii i a fluxului Φ_j, $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$.

În cazul nostru expresiile acestor coeficienţi sînt:

$$\begin{cases} \Phi_{10} = \Phi_{20} = a_1 \dfrac{H_0}{2} + a_2\left(\dfrac{H_0}{2}\right)^2 + a_3\left(\dfrac{H_0}{2}\right)^3 + \dfrac{a_2}{2} H_m^2 + \dfrac{3}{4} a_3 H_0 H_m^2 = \Phi_0, \\ \Phi_{11m} = \Phi_{21m} = a_1 H_m + a_2 H_0 H_m + \dfrac{3}{4} a_3 H_m^3 + 3a_3 H_m \left(\dfrac{H_0}{2}\right)^2 = \Phi_{1m}, \\ \Phi_{12m} = \Phi_{22m} = \dfrac{3}{4} a_3 H_0 H_m^2 + \dfrac{1}{2} a_2 H_m^2 = \Phi_{2m}, \\ \Phi_{13m} = \Phi_{23m} = \dfrac{1}{4} a_3 H_m^3 \sin 3\omega t = \Phi_{3m}. \end{cases} \tag{8}$$

Expresiile (7) pun în evidenţă faptul că armonicile pare ale fluxurilor Φ_1 şi Φ_2 sînt în opoziţie de fază, iar cele impare sînt în fază. Acest aspect este echivalent cu a considera că fluxurile armonicilor pare din miezurile laterale sînt orientate unul faţă de altul aşa cum se indică în fig. 1. Datorită acestui fapt ele se închid prin miezul central al traductorului. De altfel acest fapt rezultă şi din calcularea fluxului din miezul central, care este $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2\Phi_0 - 2\Phi_{2m} \cos 2\omega t$.

Deci prin miezul central, în ipotezele de mai sus, se închid numai componentele de frecvenţă pară ale fluxurilor laterale, inclusiv cele continue. Tensiunea electromotoare indusă în bobinele M_3 şi M_4 de pe miezul central,

dacă aceste bobine sînt conectate aditiv şi au numărul total de spire egal cu w_0, este dată de expresia:

$$e = -w_0 \frac{d\Phi}{dt} = -4w_0 \omega \Phi_{2m} \sin 2\omega t, \tag{9}$$

ar tensiunea măsurată la gol, la bornele acestei bobine, ţinînd seama de expresia lui Φ_{2m}, este:

$$u = \omega w_0 (3a_3 H_0 H_m^2 + 2a_2 H_m^2) \sin 2\omega t. \tag{10}$$

Pentru creşterea sensibilităţii în măsurarea lui α, interesează ca primul termen din paranteză să fie cît mai mare. Deci miezul trebuie să fie de aşa natură ca a_3 să fie cît mai mare. În literatură [4] adeseori se neglijează în aproximarea caracteristicii de magnetizare termenul a_2 şi se menţionează că o astfel de curbă poate fi folosită cu rezultate satisfăcătoare în majoritatea cazurilor întîlnite curent în practică.

3. Partea experimentală

Pentru încercările practice am folosit schema electrică reprezentată în fig. 4.

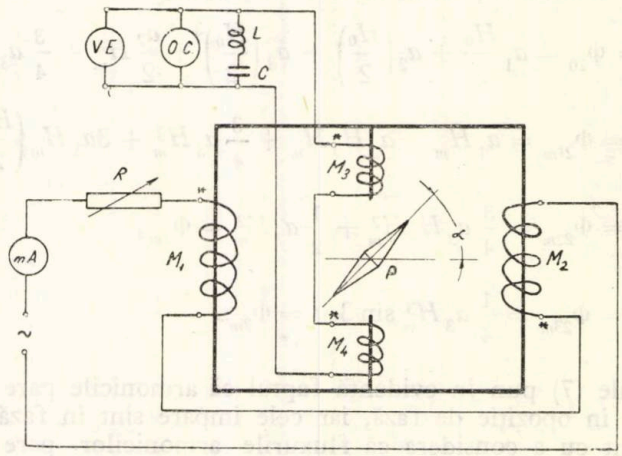


Fig. 4

Traductorul realizat a avut următoarele caracteristici: circuitul magnetic confecţionat din tole de mumetal de grosime 0,35 mm, format E (78/52/26/13) şi I (78/13), bobinele M_1 şi M_2 cu cîte 250 spire, iar bobinele M_3 şi M_4 cu cîte 3 500 spire fiecare.

În serie cu bobinele M_1 şi M_2 s-a conectat rezistorul adiţional reglabil R care introdus în circuit permite alimentarea primarului cu un curent sinusoidal.

Tensiunea de la bornele bobinelor M_1 şi M_2 se măsoară cu voltmetrul electronic *VE* iar forma curbei acestei tensiuni se urmăreşte la osciloscopul catodic *OC*. Circuitul *LC* are drept scop filtrarea frecvenţei duble. Valorile parametrilor C şi L s-au definitivat pe cale experimentală. Un calcul riguros întîmpină o serie de dificultăţi, deoarece la bornele circuitului *LC* sînt conectate aparatele de măsură şi totodată bobinele M_3 şi M_4, ale căror inductivităţi sînt funcţii de M_0.

Schema a fost alimentată de la un generator de ton.

Dacă se respectă conexiunea corectă a bobinelor M_1 şi M_2, se observă că traductorul funcţionează în condiţii bune şi are sensibilitatea maximă numai pentru anumite valori ale t.e.m. alternative.

În condiţiile schemei realizate am constatat că se obţine o funcţionare optimă la frecvenţa de 100 Hz şi în limitele unei intensităţi a curentului alternativ de 4 ... 12 mA.

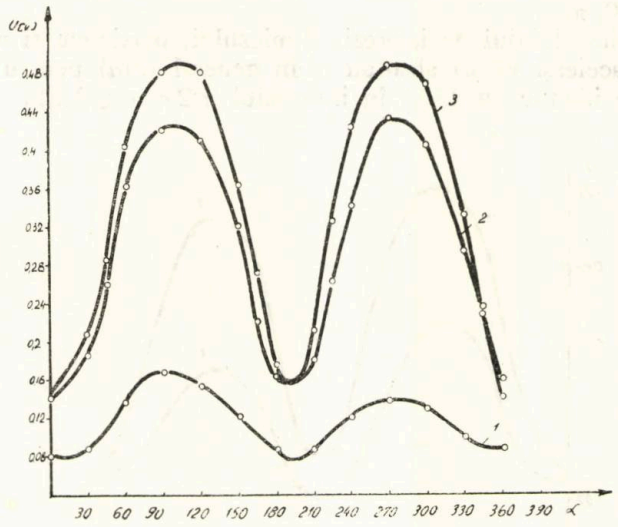


Fig. 5

Curbele de variaţie a tensiunii U de la ieşire, măsurată cu voltmetrul electronic, funcţie de unghiul de deviaţie α al magnetului permanent, pentru intensităţi de curent de 4; 8 şi 12 mA, sînt redate în fig. 5.

Curbele de variaţie în timp a acestei tensiuni pentru valorile $\alpha = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, la aceleaşi valori ale intensităţilor de curent, sînt arătate în oscilogramele din fig. 7.

Din analiza fig. 5 rezultă următoarele:

a) Tensiunea de frecvenţă dublă, măsurată la bornele bobinelor M_3 şi M_4, este maximă pentru $\alpha = \pi/2,\ 3\pi/2$. În acest caz $H_0 = H$ şi este maxim.

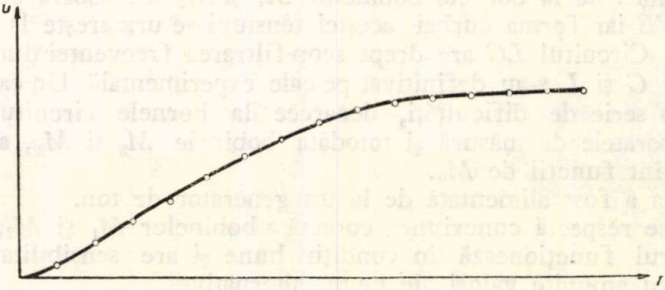


Fig. 6

b) Sensibilitatea traductorului ($dU/d\alpha$) este maximă în jurul valorilor $\alpha = 0; \pi$. Întradevăr $H_0 = H \sin\alpha$, or $\sin\alpha$ are variaţia maximă în jurul valorilor $\alpha = 0; \pi$.

c) Datorită ciclului de isterezis al miezului, maximele şi minimele tensiunii nu au aceleaşi valori absolute şi în general $U(\alpha)$ pentru $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ nu este identic cu $U(\alpha)$ în intervalul $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$.

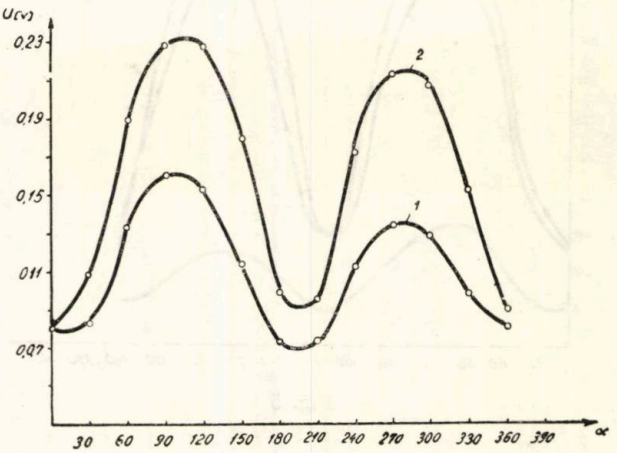


Fig. 8

d) Diferenţa dintre maxime şi minime se diminuează pe măsură ce intensitatea curentului alternativ creşte.

În fig. 6 este reprezentată variaţia tensiunii maxime de la ieşire corespunzător cazului $H_0 = H$ în funcţie de curentul alternativ. În fig. 7 sînt

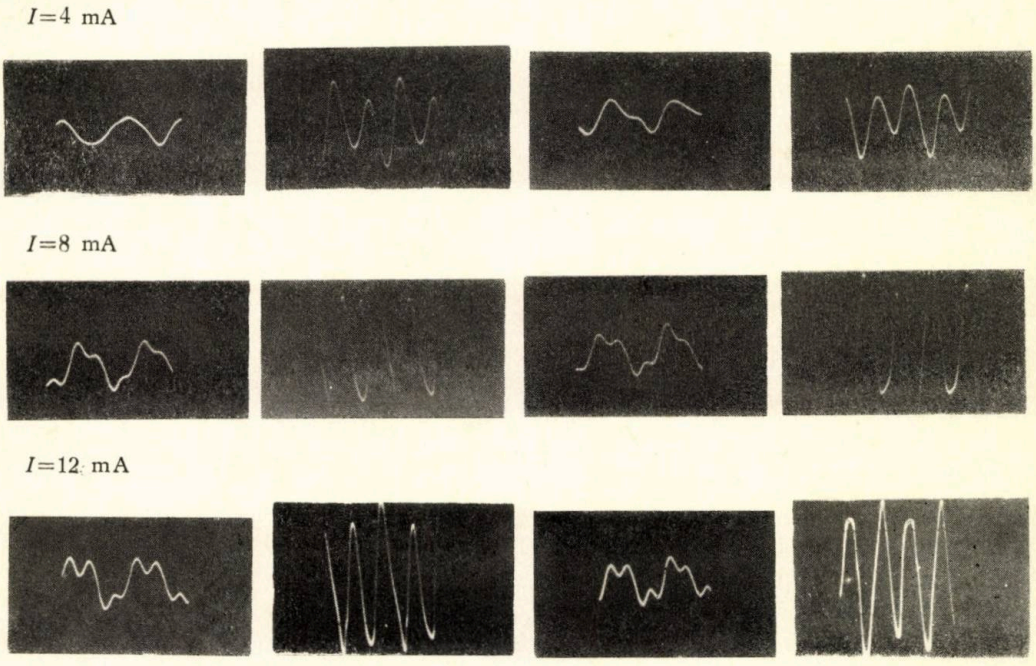


Fig. 7

redate oscilogramele acestei tensiuni pentru diferiţi curenţi. Din analiza fig. 6 se constată că tensiunea maximă de la ieşire creşte la început repede cu creşterea curentului, apoi creşterea devine mai lentă.

În fig. 8 s-au trasat curbele $U(\alpha)$ pentru o aceeaşi valoare a curentului magnetizant, odată cu rezistorul R introdus în schemă (*1*) şi a doua oară fără acest rezistor (*2*). S-a constatat că sensibilitatea traductorului este mai ridicată atunci cînd curentul de alimentare este mai apropiat de sinusoidă.

4. Concluzii

Partea experimentală confirmă concluziile teoretice. Micile neconcordanţe semnalate se datoresc condiţiilor de realizare imperfectă a traductorului cu care am lucrat, anume: simetria imperfectă a miezului magnetic, scurtcircuitarea unor tole la execuţie, caracterul nesinusoidal al tensiunii sursei de alimentare etc.

Ţinînd seama de aceste observaţii se poate afirma că printr-o realizare îngrijită este posibil să se obţină un traductor de unghi foarte sensibil în anumite limite de variaţie a unghiului de măsurat, utilizabil cu succes în circuitele de automatizare ale instalaţiilor industriale. Traductorul amintit are avantajul de a fi robust şi foarte sigur în funcţionare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Turicin A. M., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*. Ed. Tehn., Buc., 1947, (trad. din l. rusă).
2. Vasiliu Gh., Calinicenco N., Poeată N., Rosman H., Gavrilaş N., Suchar I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *1—2*, p. 203.
3. Storm H. F., *Magnetic Amplifiers*. J. Wiley, N. Y., 1955.
4. Cunningham W. J., *Introduction to nonliniar Analysis*. Mc. Graw-Hill Book Co., N.Y., 1958.

УГЛОВОЙ ДАТЧИК ПО МЕТОДУ МАГНИТНОГО ЗОНДА

(Резюме)

Авторы, используя метод магнитного зонда, предлагают принцип и детали изготовления весьма чувствительного и долговечного углового датчика.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 621.317.382; 621.317.385

ASUPRA MĂSURĂRII PUTERII ŞI ENERGIEI DE NESIMETRIE[1])

DE

LAURIAN PREDA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Galaţi, din 19—20 mai 1967

1. Introducere

Puterea maximă ce poate fi transmisă la consumator trifazat, pierderile pe linie fiind date, se calculează cu relaţia [1], [2]:

$$P^2_{\max} = P^2 + Q^2 + P^2_{nes},$$

unde P — puterea activă, Q — puterea reactivă, P_{nes} — puterea de nesimetrie.

Expresia analitică a indicaţiei unui wattmetru monofazat montat în cele nouă moduri posibile într-o reţea trifazată cu trei conductoare în regim simplu simetric dezechilibrat de curenţi este [3]:

$$(a, b, ..., i) = k_1 P + k_2 Q + k_3 p_1 + k_4 q_1 + k_5 p_2 + k_6 q_2,$$

unde: $p_1 = 3U_1 I'' \cos \varphi''_1$, $p_2 = 3U_1 I'' \cos \varphi''_2$, $q_1 = 3U_1 I'' \sin \varphi''_1$, $q_2 = 3U_1 I'' \sin \varphi''_2$ I'' — componenta inversă a curentului, φ''_1 şi φ''_2 sînt defazajele între componentele inverse ale curentului şi tensiunii, considerate aceleaşi în cazul permutării circulare a valorilor curenţilor în raport cu fazele [3].

2. Măsurarea puterii şi energiei de nesimetrie

Analizînd cele 54 de expresii analitice, cu scopul punerii în evidenţă a montajelor cu cîte două echipaje din care se elimină P şi Q rămînînd doar puterile active şi reactive de nesimetrie (p_1, q_1 respectiv p_2, q_2), se constată că există următoarele posibilităţi:

---

[1]) Cercetare efectuată sub conducerea ştiinţifică a tov. prof. dr. doc. V. Petrescu.

$$(\alpha)\quad \left.\begin{array}{l} 1^\circ\ g-b=g+b' \\ 2^\circ\ c-d=c+d' \\ 3^\circ\ e-i=e+i' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \text{A)}\ -\frac{p_1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}q_1, & \text{D)}\ -\frac{p_2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}q_2, \\ \text{B)}\ +p_1, & \text{E)}\ +p_2, \\ \text{C)}\ -\frac{p_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}q_1, & \text{F)}\ -\frac{p_2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}q_2; \end{array}\right.$$

$$(\beta)\quad \left.\begin{array}{l} 1^\circ\ i-a=i+a' \\ 2^\circ\ b-f=b+f' \\ 3^\circ\ d-h=d+h' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \text{A)}\ -\frac{p_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}q_1, & \text{D)}\ -\frac{p_2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}q_2, \\ \text{B)}\ -\frac{p_1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}q_1, & \text{E)}\ -\frac{p_2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}q_2, \\ \text{C)}\ +p_1, & \text{F)}\ +p_2; \end{array}\right.$$

$$(\gamma)\quad \left.\begin{array}{l} 1^\circ\ a-e=a+e' \\ 2^\circ\ h-c=h+c' \\ 3^\circ\ f-g=f+g' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \text{A)}\ +p_1, & \text{D)}\ +p_2, \\ \text{B)}\ -\frac{p_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}q_1, & \text{E)}\ -\frac{p_2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}q_2, \\ \text{C)}\ -\frac{p_1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}q_1, & \text{F)}\ -\frac{p_2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}q_2. \end{array}\right.$$

Schemele $(a, b, ..., i)$ corespund indicaţiilor din tabelul 1.
$A, B, ..., F$ corespund următoarelor cazuri:

Tabelul 1

	I_a	I_b	I_c
U_{ab}	a	b	c
U_{bc}	d	e	f
U_{ca}	g	h	i

A) $I_a > I_b > I_c$, D) $I_a > I_c > I_b$,

B) $I_b > I_c > I_a$, E) $I_b > I_a > I_c$,

C) $I_c > I_a > I_b$, F) $I_c > I_b > I_a$.

Nu există deci nici un montaj cu două echipaje care să fie capabil, în toate cele şase cazuri $(A, B, ..., F)$, să măsoare direct puterile active (p) sau reactive (q) de nesimetrie. Rezultatul măsurătorii se modifică odată cu valorile curenţilor.

Cele trei grupe de montaje (α, β, γ) corespund fig. 1.

Considerînd primele două montaje (α_1 şi α_2) şi efectuînd permutarea fazelor în cele şase moduri posibile, se constată că acestea se reduc la două montaje independente (I şi II, fig. 2). Montajul I este cunoscut în literatură [2]. Pentru măsurarea puterii de nesimetrie vom utiliza montaje din grupe diferite (α, β, γ), adunînd (rezultatul fiind M_1) şi scăzînd (M_2) indicaţiile instrumentelor de măsură. Se efectuează deci pentru cele şase cazuri $(A, B, ..., F)$

operaţiile: $(\alpha \pm \beta)$, $(\alpha \pm \gamma)$ şi $(\beta \pm \gamma)$. Calculînd $\sqrt{M_1^2 + M_2^2/3}$ [2] se constată că pentru oricare din cele trei grupări $(\alpha \pm \beta, \alpha \pm \gamma, \beta \pm \gamma)$, indiferent de caracterul dezechilibrului $(A, B, ..., F)$ se obţine:

$$\sqrt{M_1^2 + \frac{1}{3} M_2^2} = \sqrt{p^2 + q^2} = 3U_1 I'' = P_{nes}. \tag{1}$$

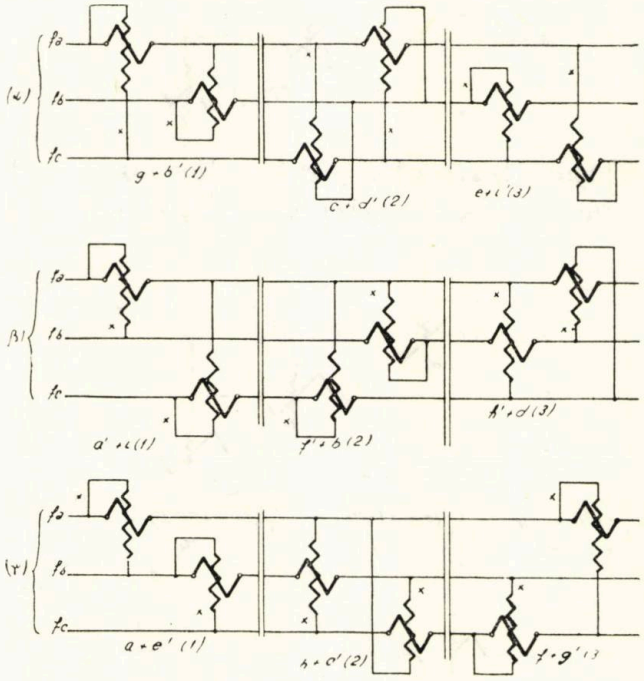


Fig. 1

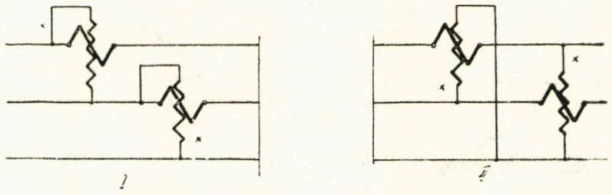


Fig. 2

Deoarece în (1) intervin cantităţile M_1^2 şi M_2^2, rezultă că semnul expresiilor M_1 şi M_2 poate fi oarecare. Deci grupările de montaje preconizate permit inversarea capetelor bobinelor de tensiune (la toate cele patru echipaje) fără ca rezultatul să se modifice.

Pentru măsurarea energiei de nesimetrie pot fi folosite două contoare obişnuite de energie activă, conexiunile la reţea realizîndu-se conform montajelor din grupele α, β, γ respectiv $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$. În cazul schimbării dezechilibrului curenţilor în raport cu fazele, sensul de rotaţie

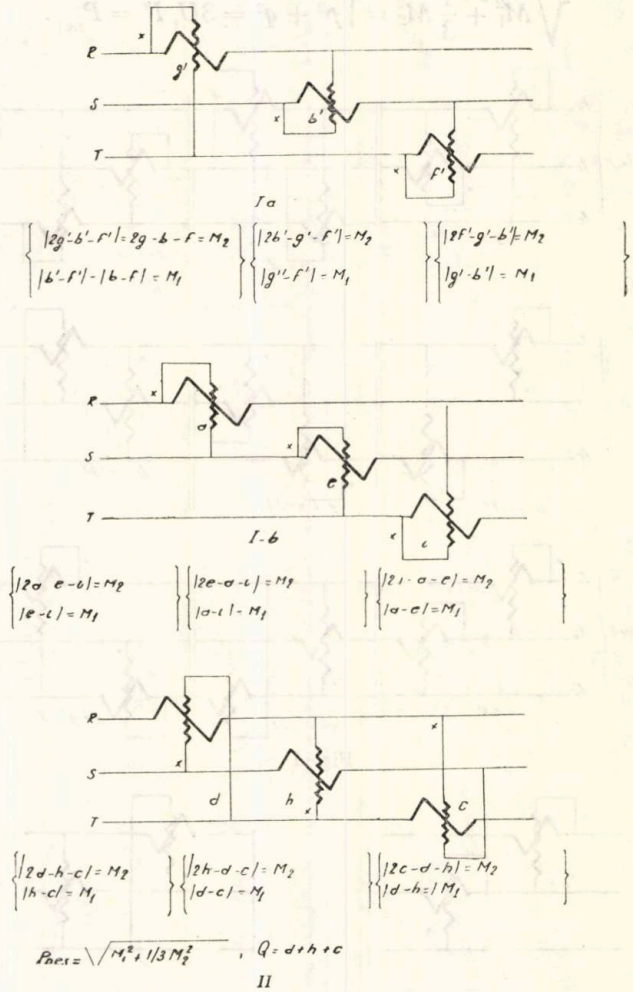


Fig. 3

se poate modifica. Măsurarea trebuind efectuată într-un acelaşi sens, indiferent de sensul de rotaţie al discurilor, sînt necesare două mecanisme capabile să permită măsurarea valorii absolute (numărul total de rotaţii al fiecărui disc), indiferent de sens. Acest mecanism a fost conceput după cum este

indicat în fig. 7.2. Sînt necesare apoi două mecanisme care să efectueze suma (M_1) respectiv diferenţa (M_2) celor două mărimi. Pentru aceasta se utilizează mecanisme diferenţiale obişnuite (fig. 7.1), care acţionează două mecanisme integratoare ce vor măsura $|M_1|$ şi $|M_2|$. Aplicînd aceeaşi relaţie (1) se calculează energia de nesimetrie (W_{nes}).

Pentru măsurarea energiei de nesimetrie sînt necesare două contoare trifazate de energie activă cu cîte două echipaje, deci în total patru bobine de tensiune şi patru bobine de curent. Numărul de conductoare fiind trei, cel puţin două bobine de curent şi două bobine de tensiune vor fi conectate în acelaşi mod. Există deci posibilitatea utilizării unor bobine cu dublu efect [4], rezultînd trei tipuri de contoare.

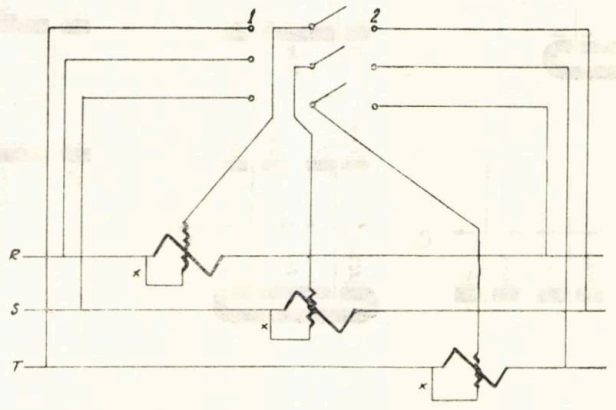


Fig. 4

Analizînd cele trei grupări de montaje ($\alpha \pm \beta$, $\alpha \pm \gamma$, $\beta \pm \gamma$) se constată că se obţin 27 variante (deoarece α, β, γ pot fi obţinute fiecare cu cîte trei montaje distincte). Considerînd şi montajele α', β' şi γ' rezultă în total 54 variante. Din primele 27 variante se constată că în nouă cazuri sînt suficiente doar trei echipaje. Efectuînd permutarea fazelor cele nouă cazuri acestea se reduc la două (I şi II, fig. 3). Inversarea a două faze transformă schema I-a în schema I-b. Schema II rămîne aceeaşi, indiferent de ordinea fazelor. Schemele permit măsurarea lui M_1, respectiv M_2 (conform relaţiilor din fig. 3), semnul fiind oarecare. Aceasta nu afectează rezultatul (P_{nes}) conform celor menţionate anterior. Schema I este cunoscută în literatură [2] nepermiţînd însă separarea în toate cazurile a puterii active de nesimetrie de cea reactivă de nesimetrie, considerate în raport cu φ_1'' şi φ_2'' (diferite deci de [2]). Schema I-b poate fi obţinută din schema I-a, prin inversarea a două faze, de ex. S cu T. În acest caz echipajele g', b', f' devin a, e, i. Utilizînd expresiile analitice ale indicaţiilor wattmetrelor monofazate [3] se constată că suma celor trei indicaţii din schemele I-a şi I-b furnizează, respectiv:

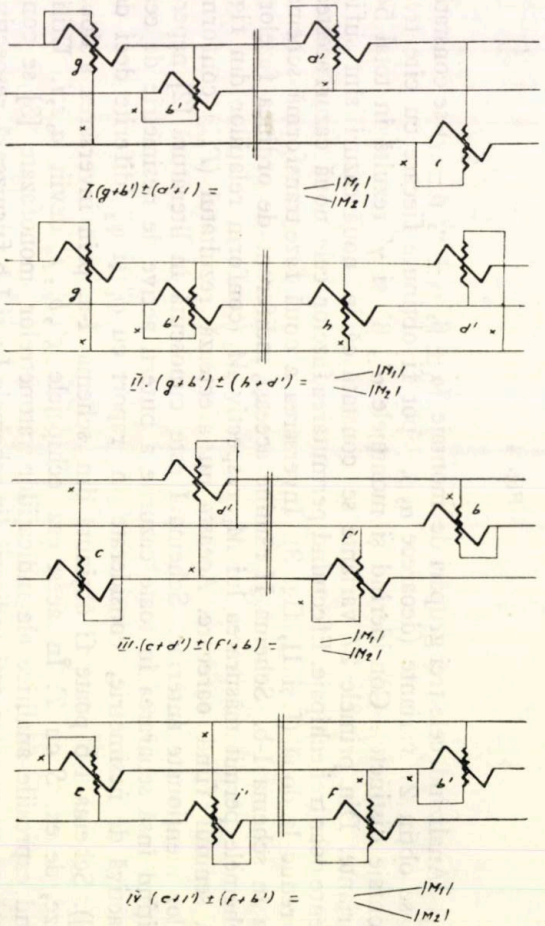

I.(g+b')±(a'+f) =
|M1|
|M2|
II. (g+b')±(h+d') =
|M1|
|M2|
III. (c+d')±(f'+b) =
|M1|
|M2|
IV (e+f)±(f+b') =
|M1|
|M2|

Fig. 5

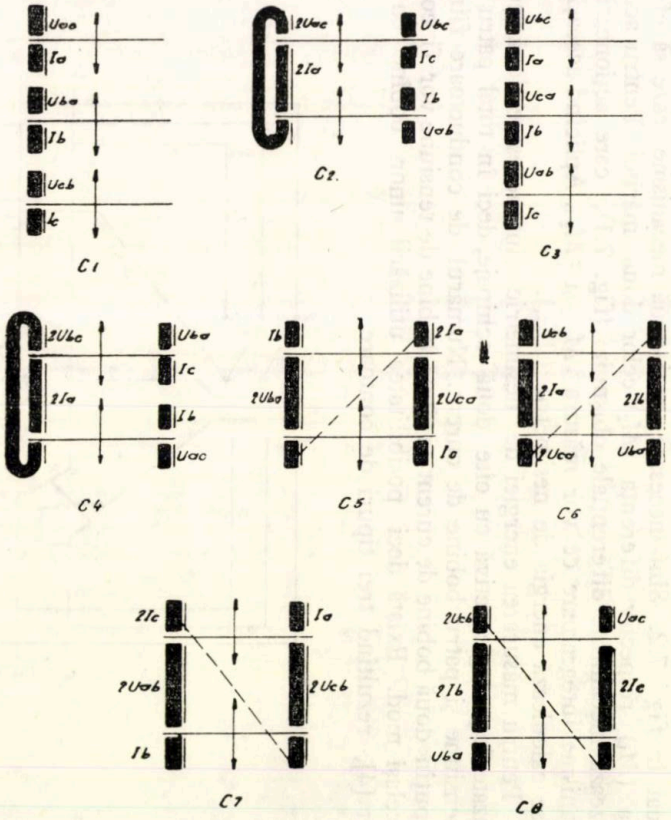

C1
C2.
C3
C4
C5
C6
C7
C8

Fig. 6

$$g' + b' + f' = \frac{3}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}Q \text{ (I-a)}, \quad a + e + i = \frac{3}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}Q \text{ (I-b)}.$$

Schema I-a poate fi transformată în schema I-b, cu ajutorul unui inversor de tensiune (fig. 4). Utilizarea sa permite calculul puterii active şi a celei reactive deoarece:

$$g' + b' + f' + a + e + i = 3P, \quad g' + b' + f' - a - e - i = \pm\sqrt{3}Q.$$

Deci schema I, asociată cu un inversor de tensiune (fig. 4), permite măsurarea puterii active şi reactive cu ajutorul celor şase lecturi precum şi a puterii de nesimetrie cu ajutorul a trei lecturi. Celelalte trei lecturi pot fi folosite pentru verificarea calculului puterii de nesimetrie. Schema II este cea clasică de măsurare a puterii reactive ($\sqrt{3}Q = d + h + c$). Se constată că această schemă permite şi măsurarea puterii de nesimetrie.

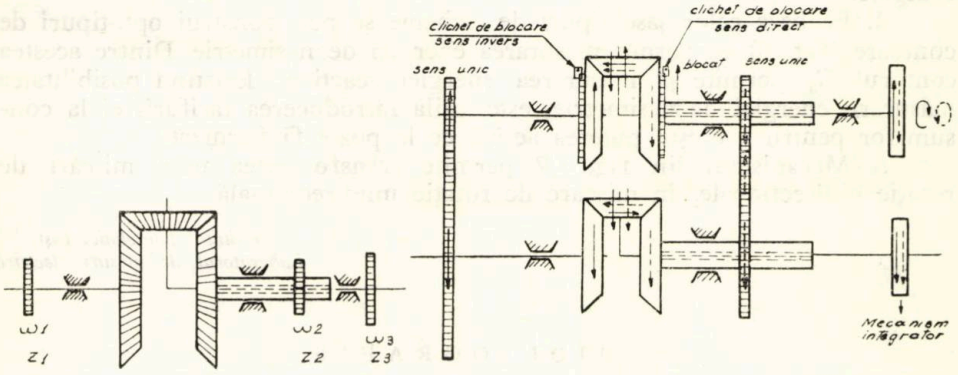


Fig. 7

Analizînd şi restul variantelor se observă că acestea se reduc la patru scheme (fig. 5) care utilizează însă patru echipaje.

Pe baza acestor şase scheme se pot construi opt tipuri de contoare capabile să măsoare energia de nesimetrie (fig. 6). Acestea pot fi cu trei discuri cu rotaţii independente (C_1 şi C_3) sau cu două discuri (C_2, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8). Numărul necesar de bobine scade la cinci sau şase, înlocuind două bobine legate în acelaşi mod cu una de efect dublu [4].

3. Concluzii

1. Măsurarea puterii de nesimetrie într-o reţea cu trei conductoare cu tensiuni simetrice, poate fi efectuată cu ajutorul wattmetrelor monofazate obişnuite, folosind schemele de tip I sau II din fig. 2. Schema de tip I este cunoscută în literatură [2].

2. Cele două tipuri de scheme (I şi II, fig. 2) pot constitui trei grupe (α, β, γ) ce dau aceeaşi indicaţie pentru un acelaşi tip de dezechilibru în raport cu fazele. Cu ajutorul lor se pot alcătui 27 scheme cu trei sau patru echipaje, ce permit măsurarea unor valori M_1 şi M_2 cu ajutorul cărora se calculează puterea de nesimetrie cu relaţia cunoscută (1). Schemele permit inversarea capetelor tuturor bobinelor de tensiune.

3. Schimbînd succesiunea fazelor cele 27 de scheme se reduc la şase. Dintre acestea, două permit măsurarea puterii de nesimetrie doar cu ajutorul a trei echipaje (I şi II, fig. 3). Schema I (fig. 3) este cunoscută. Se constată însă că ea permite, prin utilizarea unui inversor de tensiune (fig. 4), măsurarea atît a puterii active cît şi a celei reactive. Schema II (fig. 3) este cunoscută şi utilizată pentru măsurarea puterii reactive cu trei echipaje. Deci schema de măsurare a puterii reactive cu trei echipaje permite şi măsurarea puterii de nesimetrie, folosind aceleaşi trei lecturi. Celelalte patru scheme (I...IV, fig. 5) permit măsurarea puterii de nesimetrie cu patru echipaje.

4. Pe baza celor şase tipuri de scheme se pot construi opt tipuri de contoare (fig. 6) ce permit măsurarea energiei de nesimetrie. Dintre acestea contorul C_3 permite şi măsurarea energiei reactive. Existînd posibilitatea măsurării energiei de nesimetrie, este utilă introducerea tarifării ei la consumator pentru a creşte puterea activă ce le poate fi furnizată.

5. Mecanismul din fig. 7.2 permite transformarea unei mişcări de rotaţie bidirecţionale, în mişcare de rotaţie unidirecţională.

Institutul politehnic, Iaşi,
Laboratorul de măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Лурье Л. С., *Кажущаяся мощность в трехфазных системах.* Электричество, 1956, *2.*
2. Fränkel D., *Măsurarea puterii de nesimetrie şi a componentei inverse a curentului cu wattmetre.* Bul. şt. şi tehn. Inst. polit. Timişoara, 1960, 5 (**19**), *1—2*, pp. 139—142.
3. Preda L., *Analiza indicaţiilor unui wattmetru (contor) monofazat montat într-o reţea trifazată cu trei conductoare, în regim dezechilibrat (simplu simetric), la modificarea nesimetriei reţelei.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *3—4*, pp. 225—232.
4. — *Posibilităţi de măsurare cu patru echipaje a puterilor şi energiilor active şi reactive în reţele trifazate în regim dezechilibrat de curenţi.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII** (**XVII**), *1—2*, pp. 329—334.

ОБ ИЗМЕРЕНИИ МОЩНОСТИ И ЭНЕРГИИ НЕСИММЕТРИЙ

(Резюме)

При помощи аналитических выражений, установленных для показаний однофазного ваттметра, включенного в трехфазную сеть с тремя проводниками с простой несимметрией, в настоящей статье разработаны схемы для измерения мощностей несиметрий. На основе этих схем указана возможность конструкции счетчиков для измерения энергий несимметрий.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 621.3.015.33 ; 621.314.2

ASUPRA PRECIZIEI MODELĂRII FIZICE A FENOMENELOR DE IMPULS ÎN TRANSFORMATORUL CU DOUĂ ÎNFĂŞURĂRI

DE

N. GAVRILAŞ şi RODICA OLAH

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Timişoara, din 18—20 martie 1966

1. Introducere

În [1] se studiază precizia de modelare fizică a fenomenelor de impuls în transformatorul cu două înfăşurări, în a cărui schemă echivalentă nu se iau în considerare capacităţile între elementele în serie ale înfăşurărilor. Dată fiind simplificarea introdusă, concluziile rezultate nu sînt valabile decît pentru armonica fundamentală a oscilaţiilor din înfăşurări.

În lucrarea de faţă, adoptîndu-se o schemă echivalentă în care sînt luate în consideraţie şi capacităţile serie, se studiază precizia de modelare şi se verifică valabilitatea concluziilor din [1].

În [2] s-a obţinut pentru răspunsul tranzitoriu al tensiunilor în înfăşurarea primară, respectiv secundară, a transformatorului cu înfăşurarea secundară scurtcircuitată, neutrul ambelor înfăşurări fiind legat la pămînt, în cazul unei scheme echivalente ce conţine şi capacităţile serie, considerînd că la borna de intrare a înfăşurării primare se aplică saltul unitar de tensiune, următoarele expresii :

$$u_1(x, t) = 1 - \frac{x}{l} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \frac{x}{l} (A_{1n} \cos \Omega_n t + B_{1n} \cos \omega_n t), \tag{1}$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \frac{x}{l} (A_{2n} \cos \Omega_n t + B_{2n} \cos \omega_n t), \tag{2}$$

unde

$$\frac{A_{1n}}{B_{1n}} = \frac{1}{n\pi} \left\{ \frac{K_2 (C_1 + C_{12}) (n\pi/l)^2 + C}{K_1 K_2 (n\pi/l)^4 + K (n\pi/l)^2 + C} \mp \right. \tag{3}$$

$$\left. \mp \frac{2 [L_1 (C_1 + C_{12}) - MC_{12}] - \dfrac{K_2 (C_1 + C_{12}) (n\pi/l)^2 + C}{K_1 K_2 (n\pi/l)^4 + K (n\pi/l)^2 + C} [H (n\pi/l)^2 + S]}{\sqrt{(H^2 - 4 LK_1 K_2) (n\pi/l)^4 + 2 (HS - 2 LK) (n\pi/l)^2 + S^2 - 4 LC}} \right\},$$

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{1}{n\pi}\left\{ \frac{K_1 C_{12} (n\pi/l)^2}{K_1 K_2 (n\pi/l)^4 + K(n\pi/l)^2 + C} \pm \right.$$

(4)

$$\left. \pm \frac{2[M(C_1 + C_{12}) - L_2 C_{12}] + \dfrac{K_1 C_{12} (n\pi/l)^2}{K_1 K_2 (n\pi/l)^4 + K(n\pi/l)^2 + C} [H(n\pi/l)^2 + S]}{\sqrt{(H^2 - 4LK_1 K_2)(n\pi/l)^4 + 2(HS - 2LK)(n\pi/l)^2 + S^2 - 4LC}} \right\},$$

$$\frac{\Omega_n}{\omega_n} = \frac{\sqrt{2}\, n\pi/l}{\sqrt{H(n\pi/l)^2 + S \mp \sqrt{(H^2 - 4LK_1 K_2)(n\pi/l)^4 + 2(HS - 2LK)(n\pi/l)^2 + S^2 - 4LC}}}. \quad (5)$$

În expresiile de mai sus s-au utilizat notaţiile:

$$\begin{cases} S = L_1 (C_1 + C_{12}) + (L_2 (C_2 + C_{12}) - 2MC_{12}, \quad K = K_1 (C_2 + C_{12}) + K_2 (C_1 + C_{12}), \\ L = L_1 L_2 - M^2, \quad H = L_1 K_1 + L_2 K_2, \quad C = C_1 C_2 + C_1 C_{12} + C_2 C_{12}, \end{cases} \quad (6)$$

unde L_1, L_2 — inductivităţile proprii ale înfăşurărilor, M — inductivitatea mutuală între înfăşurări, C_1, C_2 — capacităţile faţă de pământ ale înfăşurărilor, C_{12} — capacitatea între înfăşurări, K_1, K_2 — capacităţile între elementele în serie ale înfăşurărilor, toţi parametrii fiind consideraţi pe unitatea de lungime axială a înfăşurărilor.

2. Răspunsul tranzitoriu al tensiunilor pentru schema echivalentă a modelului

Schema echivalentă a modelului transformatorului este constituită din-dr-un lanţ de cuadripoli, fiecare element al lanţului reprezentînd o porţiune din înfăşurare cu lungimea axială $\Delta l = l/m$, l fiind lungimea axială a înfăşurărilor, iar m — numărul total de elemente al lanţului de cuadripoli. In fig. 1 este dată schema echivalentă a modelului unui transformator cu două înfăşurări, cuprinzînd aceeaşi parametri ca şi schema echivalentă cu parametri uniform repartizaţi studiată în [2] şi pentru care s-a obţinut răspunsul tranzitoriu al tensiunilor dat de expresiile (1) şi (2). In această figură $C_1 \Delta l$, $K_1/\Delta l$, $L_1 \Delta l$ etc. sînt mărimile capacităţilor şi inductivităţilor corespunzătoare unui element al lanţului de cuadripoli.

Pentru calcul se utilizează schema elementului lanţului de cuadripoli avînd numărul de ordine s (fig. 2), unde, sub formă operaţională (transformarea Wagner-Carson), parametrii din schemă reprezintă:

$$\begin{cases} R_1 = pL_1 \Delta l, \quad R_2 = pL_2 \Delta l, \quad R = pM\Delta l, \quad G_1 = pC_1 \Delta l, \\ G_2 = pC_2 \Delta l, \quad G_{12} = pC_{12} \Delta l, \quad g_1 = pK_1/\Delta l, \quad g_2 = pK_2/\Delta l, \end{cases} \quad (7)$$

iar

$$E_1 = -R\mathcal{J}_s, \quad E_2 = -RI_s. \quad (8)$$

Pentru circuitul din fig. 2 sînt valabile ecuaţiile:

$$U_{s-1} - U_s = R_1 I_s + R\mathcal{J}_s, \quad (9) \qquad V_{s-1} - V_s = R_2 \mathcal{J}_s + RI_s, \quad (10)$$

$$I_{s-1} + g_1 (U_{s-2} - U_{s-1}) = I_s + g_1 (U_{s-1} - U_s) + \\ + G_1 U_{s-1} + G_{12} (U_{s-1} - V_{s-1}), \tag{11}$$

$$\mathcal{J}_{s-1} + g_2 (V_{s-2} - V_{s-1}) = \mathcal{J}_s + g_2 (V_{s-1} - V_s) + \\ + G_2 V_{s-1} - G_{12} (U_{s-1} - V_{s-1}). \tag{12}$$

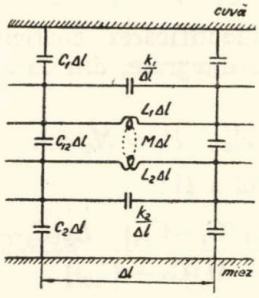


Fig. 1. — Schema echivalentă a modelului.

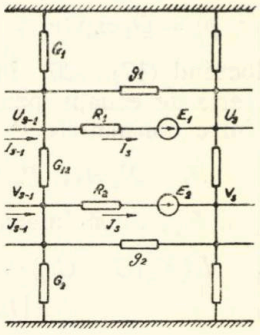


Fig. 2. — Schema elementului s al lanțului de cuadripoli.

Considerînd soluțiile lui U_s, I_s, V_s și $\mathcal{J}_s$ de forma:

$$U_s = A \exp(\nu s), \quad I_s = B \exp(\nu s), \quad V_s = P \exp(\nu s), \quad \mathcal{J}_s = Q \exp(\nu s),$$

unde A, B, P și Q sînt constante de integrare și înlocuindu-le în (9) ... (12), se obțin patru ecuații, din care, prin eliminarea constantelor de integrare, rezultă ecuația:

$$4 [1 + R_1 g_1 + R_2 g_2 + g_1 g_2 (R_1 R_2 - R^2)] (\operatorname{ch} \nu - 1)^2 - \\ - 2 [R_1 (G_1 + G_{12}) + R_2 (G_2 + G_{12}) - 2 R G_{12} + \\ + g_1 (R_1 R_2 - R^2) (G_2 + G_{12}) + g_2 (R_1 R_2 - R^2) (G_1 + G_{12})] (\operatorname{ch} \nu - 1) + \\ + (R_1 R_2 - R^2) (G_1 G_2 + G_1 G_{12} + G_2 G_{12}) = 0. \tag{13}$$

Ținînd seama de relațiile (7) și folosind notațiile din (6) se obține:

$$4 (LK_1 K_2 p^4 + Hp^2 + 1) (\operatorname{ch} \nu - 1)^2 - \\ - 2 (LKp^2 + S) p^2 (\Delta l)^2 (\operatorname{ch} \nu - 1) + LCp^4 (\Delta l)^4 = 0. \tag{14}$$

Rezolvînd ecuația (14) în raport cu $\operatorname{ch} \nu$ rezultă soluțiile:

$$\frac{\operatorname{ch} \nu_1}{\operatorname{ch} \nu_2} = 1 + \frac{p^2 (\Delta l)^2}{4} \cdot \frac{LKp^2 + S \pm \varphi}{LK_1 K_2 p^4 + Hp^2 + 1}, \tag{15}$$

unde

$$\varphi = \sqrt{(LKp^2 + S)^2 - 4LC (LK_1 K_2 p^4 + Hp^2 + 1)}. \tag{16}$$

Se observă că pentru variabila ν rezultă rădăcinile $\pm \nu_1$, $\pm \nu_2$. Deci soluţiile lui U_s, I_s, V_s şi $\mathcal{J}_s$ sînt de forma:

$$(17)\quad U_s(s, p) = A_1 \exp(\nu_1 s) + A_2 \exp(-\nu_1 s) + A_3 \exp(\nu_2 s) + A_4 \exp(-\nu_2 s),$$

$$(18)\quad I_s(s, p) = B_1 \exp(\nu_1 s) + B_2 \exp(-\nu_1 s) + B_3 \exp(\nu_2 s) + B_4 \exp(-\nu_2 s),$$

$$(19)\quad V_s(s, p) = P_1 \exp(\nu_1 s) + P_2 \exp(-\nu_1 s) + P_3 \exp(\nu_2 s) + P_4 \exp(-\nu_2 s),$$

$$(20)\quad \mathcal{J}_s(s, p) = Q_1 \exp(\nu_1 s) + Q_2 \exp(-\nu_1 s) + Q_3 \exp(\nu_2 s) + Q_4 \exp(-\nu_2 s).$$

Înlocuind (17)...(20) în (9)...(12), prin identificarea coeficienţilor se obţin o serie de ecuaţii pentru constantele de integrare, din care se deduc relaţiile între constantele P şi A:

$$(21)\qquad P_1 = N_1 A_1,\quad P_2 = N_1 A_2,\quad P_3 = N_2 A_3,\quad P_4 = N_2 A_4,$$

unde N_1 şi N_2, după înlocuirea din (7), rezultă a fi:

$$(22)\qquad \frac{N_1}{N_2} = \frac{L[K_2(C_1+C_{12}) - K_1(C_2+C_{12})]p^2 + L_1(C_1+C_{12}) - L_2(C_2+C_{12}) \mp \varphi}{2[LK_2 C_{12} p^2 + L_1 C_{12} - M(C_2 + C_{12})]}.$$

Deci V_s poate fi scris sub forma:

$$(23)\qquad V_s(s, p) = A_1 N_1 \exp(\nu_1 s) + A_2 N_1 \exp(-\nu_1 s) + A_3 N_2 \exp(\nu_2 s) + A_4 N_2 \exp(-\nu_2 s).$$

Constantele de integrare $A_1, \ldots, A_4$ pot fi determinate din condiţiile la limită. În cazul înfăşurării secundare scurtcircuitate, neutrul ambelor înfăşurări fiind legat la pămînt, dacă se consideră că la borna de intrare a înfăşurării primare se aplică saltul unitar de tensiune, condiţiile la limită sînt: $s = 0$, $U_s = 1$, $V_s = 0$; $s = m$, $U_s = 0$, $V_s = 0$. Înlocuindu-le în (17) şi (23) se obţin patru ecuaţii din care se determină constantele de integrare. Prin substituirea lor în (17) şi (23) rezultă:

$$(24)\qquad U_s(s, p) = \frac{N_2}{N_2 - N_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu_1 (m-s)}{\operatorname{sh} \nu_1 m} - \frac{N_1}{N_2 - N_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu_2 (m-s)}{\operatorname{sh} \nu_2 m},$$

$$(25)\qquad V_s(s, p) = \frac{N_1 N_2}{N_2 - N_1}\left[\frac{\operatorname{sh} \nu_1 (m-s)}{\operatorname{sh} \nu_1 m} - \frac{\operatorname{sh} \nu_2 (m-s)}{\operatorname{sh} \nu_2 m}\right].$$

Introducînd în (24) şi (25) N_1 şi N_2 din (22), rezultă:

$$(26)\quad U_s(s, p) = U_{s1}(s, p) + U_{s2}(s, p), \qquad (27)\quad V_s(s, p) = V_{s1}(s, p) + V_{s2}(s, p),$$

unde

$$(28)\qquad U_{s1}(s, p) = \frac{1}{2\varphi}\left\{\varphi + L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 + L_1(C_1 + C_{12}) - L_2(C_2 + C_{12})\right\}\frac{\operatorname{sh} \nu_1 (m-s)}{\operatorname{sh} \nu_1 m},$$

$$U_{s2}(s,\ p) = \frac{1}{2\varphi}\Big\{\varphi - L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 - \tag{29}$$
$$- L_1(C_1 + C_{12}) + L_2(C_2 + C_{12})\Big\}\frac{\operatorname{sh}\nu_2(m-s)}{\operatorname{sh}\nu_2 m},$$

$$V_{s1}(s,\ p) = -\frac{1}{\varphi}[LK_1C_{12}p^2 - M(C_1 + C_{12}) + L_2C_{12}]\frac{\operatorname{sh}\nu_1(m-s)}{\operatorname{sh}\nu_1 m}, \tag{30}$$

$$V_{s2}(s,\ p) = \frac{1}{\varphi}[LK_1C_{12}p^2 - M(C_1 + C_{12}) + L_2C_{12}]\frac{\operatorname{sh}\nu_2(m-s)}{\operatorname{sh}\nu_2 m}. \tag{31}$$

Urmează a se găsi originalele expresiilor $U_s(s,\ p)$ şi $V_s(s,\ p)$. In cele ce urmează se rezolvă această problemă pentru $U_{s1}(s,\ p)$, care poate fi pus sub forma

$$U_{s1}(s,\ p) = \frac{f(p)}{F(p)}, \tag{32}$$

unde

$$f(p) = \frac{1}{2\varphi}\{\varphi + L[K_2(C_1 + C_{12}) - K_1(C_2 + C_{12})]p^2 + L_1(C_1 + C_{12}) - \tag{33}$$
$$- L_2(C_2 + C_{12})\}\operatorname{sh}\nu_1(m-s),$$

$$F(p) = \operatorname{sh}\nu_1 m. \tag{34}$$

Conform teoremei dezvoltării a lui Heaviside, originalul expresiei (32) este

$$u_{s1}(s,t) = \frac{f(0)}{F(0)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{f(p_i)}{p_i F'(p_i)}e^{p_i t}, \tag{35}$$

unde p_i sînt rădăcinile ecuaţiei $F(p) = 0$, care rezultă pentru variabila ν:

$$\nu_1 = +j\frac{n\pi}{m},\quad \nu_2 = -j\frac{n\pi}{m},\quad (n = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{36}$$

De observat că pentru $n \geqslant m$ nu rezultă rădăcini noi pentru p. Aceasta duce la concluzia că schemei echivalente constituită dintr-un lanţ de cuadripoli cu m elemente îi corespund maximum $m-1$ armonici, în timp ce schemei cu constante uniform repartizate îi corespunde un număr nelimitat de armonici. Deci pentru ca pe model să se obţină armonica de spaţiu de ordin n trebuie ca lanţul de cuadripoli să aibă un număr de elemente $m \geqslant n + 1$.

Înlocuind ν_1 şi ν_2 în (15) se obţine după o serie de transformări:

$$p_{1n} = j\omega_n',\quad p_{2n} = -j\omega_n', \tag{37}$$

unde

$$\omega_n' = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{H\alpha^2 + S + \sqrt{(H\alpha^2 + S)^2 - 4L(K_1K_2\alpha^4 + K\alpha^2 + C)}}}, \tag{38}$$

în care

$$\alpha = \frac{2m}{l} \sin \frac{n\pi}{2m}. \tag{39}$$

Derivata expresiei $F(p)$ este

$$F'(p) = m \operatorname{ch} \nu_1 m \frac{d\nu_1}{dp}. \tag{40}$$

Punînd expresia lui $\operatorname{ch} \nu_1$ din (15) sub forma

$$\frac{2m}{l^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\nu_1}{2} = \frac{LCp^2}{LKp^2 + S - \varphi} \tag{41}$$

şi derivînd în funcţie de p se obţine:

$$p \frac{d\nu_1}{dp} = \frac{2}{\varphi} \operatorname{th} \frac{\nu_1}{2} \left[\varphi + LKp^2 - \left(\frac{2m}{l} \right)^2 (2LK_1 K_2 p^2 + H) \operatorname{sh}^2 \frac{\nu_1}{2} \right]. \tag{42}$$

Pe baza relaţiilor de mai sus se obţine $u_{s1}(s, t)$, apoi în mod analog $u_{s2}(s, t)$ şi în cele din urmă:

$$u_s(s, t) = 1 - \frac{s}{m} - \sum_{n=1}^{m-1} \sin n\pi \frac{s}{m} (A'_{1n} \cos \Omega'_n t + B'_{1n} \cos \omega'_n t), \tag{43}$$

$$v_s(s, t) = \sum_{n=1}^{m-1} \sin n\pi \frac{s}{m} (A'_{2n} \cos \Omega'_n t + B'_{2n} \cos \omega'_n t), \tag{44}$$

unde

$$\begin{aligned} \frac{A'_{1n}}{B'_{1n}} = \frac{1}{2m \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2m}} \Bigg\{ & \frac{K_2 (C_1 + C_{12}) \alpha^2 + C}{K_1 K_2 \alpha^4 + K\alpha^2 + C} \mp \\ & \mp \frac{2 [L_1 (C_1 + C_{12}) - MC_{12}] - \dfrac{K_2 (C_1 + C_{12}) \alpha^2 + C}{K_1 K_2 \alpha^4 + K\alpha^2 + C} (H\alpha^2 + S)}{\sqrt{(H^2 - 4LK_1 K_2) \alpha^4 + 2(HS - 2LK) \alpha^2 + S^2 - 4LC}} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \frac{A'_{2n}}{B'_{2n}} = \frac{1}{2m \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2m}} \Bigg\{ & \frac{K_1 C_{12} \alpha^2}{K_1 K_2 \alpha^4 + K\alpha^2 + C} \pm \\ & \pm \frac{2 [M (C_1 + C_{12}) - L_2 C_{12}] + \dfrac{K_1 C_{12} \alpha^2}{K_1 K_2 \alpha^4 + K\alpha^2 + C} (H\alpha^2 + S)}{\sqrt{(H^2 - 4LK_1 K_2) \alpha^4 + 2(HS - 2LK) \alpha^2 + S^2 - 4LC}} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{46}$$

$$(47)\quad \Omega'_n = \frac{\sqrt{2}\,\alpha}{\sqrt{H\alpha^2 + S - \sqrt{(H^2 - 4LK_1K_2)\,\alpha^4 + 2(HS - 2LK)\,\alpha^2 + S^2 - 4LC}}}.$$

În cazul în care nu se iau în considerare, în schema echivalentă, capacităţile serie, expresiile amplitudinilor şi pulsaţiilor oscilaţiilor din (43) şi (44) devin :

$$(48)\quad \frac{A'_{1n}}{B'_{1n}} = \frac{1}{2m\,\mathrm{tg}\,\dfrac{n\pi}{2m}}\left[1 \mp \frac{L_1(C_1 + C_{12}) - L_2(C_2 + C_{12})}{\sqrt{S^2 - 4LC}}\right],$$

$$(49)\quad \frac{A'_{2n}}{B'_{2n}} = \mp \frac{1}{m\,\mathrm{tg}\,\dfrac{n\pi}{2m}} \cdot \frac{M(C_1 + C_{12}) - L_2 C_{12}}{\sqrt{S^2 - 4LC}},\qquad (50)\quad \frac{\Omega'_n}{\omega'_n} = \frac{\sqrt{2}\,\alpha}{\sqrt{S \pm \sqrt{S^2 - 4LC}}}.$$

3. Precizia de modelare

Din compararea expresiilor (43) şi (44) cu (1), respectiv (2), cu care se determină răspunsul tranzitoriu al tensiunilor pe model, respectiv pe original, se observă structura identică a acestora. De asemenea se observă o structură identică a expresiilor care furnizează amplitudinile şi pulsaţiile oscilaţiilor pe model şi original. Expresiile respective diferă doar prin faptul că la model, în afara parametrului *n*, mai intervine şi parametrul *m* care reprezintă numărul de elemente al lanţului de cuadripoli. Evident, dacă $m \to \infty$ expresiile obţinute pentru model se confundă cu cele obţinute pentru original, fapt explicabil deoarece într-un asemenea caz schema cu constante concentrate a modelului se transformă într-o schemă cu constante uniform repartizate, cum este cea a originalului.

Practica modelării cere însă limitarea numărului de elemente al lanţului de cuadripoli pentru ca modelul să rezulte ieftin şi uşor de executat. Aceasta însă nu trebuie să influenţeze asupra exactităţii reproducerii pe model a fenomenelor din original, deci asupra preciziei de modelare.

Pentru a găsi numărul *m* de elemente al lanţului de cuadripoli capabil să asigure o precizie de modelare suficientă, este necesar să se evalueze erorile relative ale amplitudinilor şi pulsaţiilor oscilaţiilor de pe model în raport cu valorile reale de pe original anume: $(A_{1n} - A'_{1n})/A_{1n}$, $(B_{1n} - B'_{1n})/(B_{1n})$, $(A_{2n} - A'_{2n})/A_{2n}$, $(B_{2n} - B'_{2n})/B_{2n}$, $(\Omega_n - \Omega'_n)/\Omega_n$, $(\omega_n - \omega'_n)/\omega_n$, pentru diferite valori ale lui *m*.

Dată fiind forma complexă a expresiilor amplitudinilor şi pulsaţiilor nu există posibilitatea evaluării erorilor menţionate pentru cel mai general caz. Se intreprinde însă acest calcul, la fel ca şi în [2], pentru patru transformatoare ale căror caracteristici sînt date în tabelul 1 şi pentru care, calculîndu-se inductivităţile şi capacităţile considerate în schema echivalentă, s-au găsit rapoartele date în tabelul 2.

Tabelul 1

Transformatorul	Putere nominală MVA	Tensiuni nominale KV	Conexiuni	Raportul nr. de spire w_2/w_1
T-1	40	110/6,6	Yd	0,10
T-2	63	121/10,5	Yd	0,15
T-3	3,2	35/6	Yd	0,28
T-4	25	110/38,5	Yd	0,74

Tabelul 2

Transformatorul	$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{M}{L_2}$	$\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{C_{12}}{C_2}$	$\frac{C_1 l^2}{K_1}$	$\frac{K_2}{K_1}$
T-1	150	10	0,10	0,6	20	0,6
T-2	70	6	0,12	0,7	30	0,6
T-3	20	3	0,15	0,6	30	0,8
T-4	3	1,27	0,15	0,8	20	0,8

Pe baza datelor din tabelul 2 s-au calculat, pentru primele cinci armonici, erorile relative menţionate mai sus (tabelul 3). In acelaşi tabel sînt date şi erorile respective pentru cazul schemei echivalente în care s-au neglijat capacităţile serie şi anume : $(A_{1n}-A''_{1n})/A_{1n}=(A_{2n}-A''_{2n})/A_{2n}=(B_{1n}-B''_{1n})/B_{1n}=$ $=(B_{2n}-B''_{2n})/B_{2n}=(A_n-A''_n)/A_n$, $(\Omega_n-\Omega''_n)/\Omega_n=(\omega_n-\omega''_n)/\omega_n$. Nu sînt date erorile pentru amplitudinile A_{1n} ale oscilaţiilor de pulsaţie Ω_n din înfăşurarea primară, deoarece, aşa cum a rezultat în [2], acestea pot fi neglijate în raport cu oscilaţiile de pulsaţie ω_n.

4. Concluzii

Din examinarea rezultatelor cuprinse în tabelul 3 rezultă următoarele concluzii:

1. În toate cele patru cazuri, pentru $m=5$, erorile relative corespunzătoare primelor două armonici sînt sub 13,5 % pentru amplitudini şi sub 6 % pentru frecvenţe. Deci, dacă reţeaua de capacităţi a modelului conţine cel puţin 5 elemente, se asigură o precizie de modelare suficientă pentru primele două armonici. De menţionat că această concluzie a rezultat şi în [1], precum şi în lucrările lui A. Veverka [3].

2. În toate cazurile, erorile pentru amplitudinile şi pulsaţiile oscilaţiilor din înfăşurarea supusă la tensiunea de impuls sînt mai mici decît cele corespunzătoare celei de-a doua înfăşurări. Deci, dacă interesează transmisia fenomenelor de impuls în a doua înfăşurare, este necesar să se acorde o atenţie sporită pentru asigurarea unei precizii de modelare satisfăcătoare.

Tabelul 3

Transformatorul	m	n	$\frac{B_{1n}-B'_{1n}}{B_{1n}}\cdot 100$ %	$\frac{A_{2n}-A'_{2n}}{A_{2n}}\cdot 100$ %	$\frac{B_{2n}-B'_{2n}}{B_{2n}}\cdot 100$ %	$\frac{\omega_n-\omega'_n}{\omega_n}\cdot 100$ %	$\frac{\Omega_n-\Omega'_n}{\Omega_n}\cdot 100$ %	$\frac{A_n-A''_n}{A_n}\cdot 100$ %	$\frac{\omega_n-\omega''_n}{\omega_n}\cdot 100$ %
T-1	2	1	17,9	19,0	18,3	8,3	9,0	21,5	10,0
	3	1	7,4	8,8	7,9	2,8	3,5	9,4	4,5
		2	29,5	34,5	30,8	12,7	14,0	39,5	17,3
	5	1	2,3	2,7	2,5	1,0	1,2	3,0	1,6
		2	5,6	9,1	6,2	3,6	4,5	13,5	6,5
		3	12,4	21,5	14,5	6,8	9,5	31,4	14,2
		4	33,3	51,1	38,2	11,0	15,6	59,1	24,3
T-2	2	1	20,1	21,3	20,3	9,6	9,8	21,5	10,0
	3	1	8,6	9,3	9,0	4,0	4,2	9,4	4,5
		2	36,1	38,0	37,2	16,1	16,5	39,5	17,3
	5	1	2,7	2,9	2,8	1,3	1,4	3,0	1,6
		2	12,0	13,3	12,5	5,6	5,9	13,5	6,5
		3	26,1	30,0	27,0	12,6	13,5	31,4	14,2
		4	52,2	58,1	53,5	20,9	22,0	59,1	24,3
T-3	2	1	19,7	20,5	20,0	9,3	9,5	21,5	10,0
	3	1	8,3	9,0	8,6	3,6	4,0	9,4	4,5
		2	33,8	36,7	34,9	15,0	15,9	39,5	17,3
	5	1	2,5	2,8	2,6	1,2	1,3	3,0	1,6
		2	11,0	12,6	11,4	4,9	5,4	13,5	6,5
		3	24,2	28,1	25,9	10,0	11,5	31,4	14,2
		4	45,5	56,0	48,2	16,1	18,0	59,1	24,3
T-4	2	1	16,9	18,6	17,4	7,9	8,6	21,5	10,0
	3	1	7,0	8,1	7,5	2,6	3,2	9,4	4,5
		2	28,5	34,0	29,8	11,5	12,8	39,5	17,3
	5	1	2,1	2,5	2,3	0,9	1,1	3,0	1,6
		2	4,9	8,0	5,7	2,9	4,0	13,5	6,5
		3	11,0	20,3	13,1	5,0	7,8	31,4	14,2
		4	30,2	49,0	35,0	8,9	13,5	59,1	24,3

3. Se constată că asupra valorilor erorilor relative ale amplitudinilor şi pulsaţiilor oscilaţiilor exercită o influenţă raportul Cl^2/K; odată cu micşorarea valorii acestui raport se micşorează şi erorile.

4. Comparînd precizia de modelare pentru schema echivalentă în care s-au luat în considerare capacităţile serie în raport cu schema echivalentă în care acestea s-au neglijat, se constată că dacă pentru ultima schemă rezultau erori identice pentru toate amplitudinile A_{1n}, B_{1n}, A_{2n}, B_{2n}, respectiv pentru ambele pulsaţii Ω_n şi ω_n, în cazul primei scheme rezultă pentru fiecare din amplitudinile şi pulsaţiile menţionate erori diferite şi toate mai mici decît în cazul celei de a doua scheme. Diferenţele menţionate între erorile relative sînt mici pentru armonica fundamentală şi cresc monoton cu creşterea ordinului armonicii. Ele cresc de asemenea cu mărirea numărului de elemente al lanţului de cuadripoli.

5. Erorile corespunzătoare armonicii fundamentale, pentru $m = 5$, diferă puţin în cazul schemei echivalente fără capacităţi serie faţă de cazul schemei echivalente cu capacităţi serie. În consecinţă se poate trage concluzia că în cazul în care se urmăreşte ca prin modelare să se reproducă numai armonica fundamentală, s-ar putea renunţa la introducerea în model a capacităţilor serie. O asemenea măsură nu este însă admisibilă cînd interesează şi reproducerea altor armonici, care intervin în special la determinarea solicitărilor izolaţiei longitudinale a înfăşurărilor.

Institutul politehnic, Iaşi
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Gavrilaş N., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, p. 193.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVIII)**, *1—2*, p. 335.
3. Veverka A., Rozpravy Česk. akad. věd, Řada techn. věd, 1962, **72**, *1*.

SUR LA PRÉCISION DE SIMULATION DES PHÉNOMÈNES DE CHOC DANS LE TRANSFORMATEUR À DEUX ENROULEMENTS

(Résumé)

En utilisant le schéma équivalent adopté en [2] pour le transformateur à deux enroulements, soumis à l'action d'une onde de choc, on étudie la précision de simulation sur le modèle électromagnétique et on vérifie les conclusions obtenues en [1] pour un schéma équivalent simplifié (sans capacités en série).

À cet égard on compare les expressions des fréquences et des amplitudes des oscillations pour le cas du schéma équivalent ayant les paramètres uniformément repartisés (qui représent l'original) et pour le cas du schéma équivalent à paramètres localisés (qui représent le modèle) et on deduit les erreurs qui y interviennent par simulation pour 4 types de transformateurs. On constate que ces erreurs sont admissibles pour les premières harmoniques des oscillations et que la précision de simulation peut être assurée en utilisant un réseau supplémentaire de capacités ayant au moins 5 éléments.

Pour la simulation de la transmission des phénomènes de choc dans l'enroulement de basse tension, le réseau supplémentaire de capacités doit posséder plus de 5 éléments.

Explication des figures

Fig. 1. — Schéma équivalent du modèle.
Fig. 2. — Schéma de l'élément *s* de la chaîne de quadripôles.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 615.8 ; 621.317.774

ASPECTE NOI PRIVIND METODOLOGIA ŞI EXTINDEREA APLICAŢIILOR SEMNALELOR DREPTUNGHIULARE ÎN PRACTICA MEDICALĂ

DE

C. ONU, V. PRISĂCARU, LAURENŢIU TURIC, GH. CREŢEANU şi VLAD BEJAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

1. Introducere

Curenţii cu impulsuri au deschis un capitol nou şi important în electroterapia din ultimul deceniu. În excitările unor ţesuturi s-au folosit întreruperi ritmice sau aritmice, la început prin sistemul cheii Courtard, iar mai tîrziu, cînd s-au asigurat întreruperi automate, a început epoca terapiei cu impulsuri ; primul aparat cu impulsuri de joasă frecvenţă a fost realizat în 1942 de Duensing.

Forma impulsurilor utilizate diferă prin aspectul undei şi prin parametrii caracteristici. Se utilizează curenţi de formă dreptunghiulară, trapezoidală, triunghiulară, impulsuri cu front ce creşte liniar sau exponenţial, impulsuri obţinute prin redresarea unei singure alternanţe sau a două alternanţe etc.

Impulsurile dreptunghiulare se utilizează în electrodiagnostic şi pentru determinarea electrosomnului. Aparatul de electrosomn construit în 1961, de către un colectiv din cadrul catedrei de Utilizări electrice şi automatizări a Institutului politehnic din Iaşi (C. Onu, V. Prisăcaru, L. Turic, V. Bejan) este primul aparat românesc folosit pentru obţinerea somnului [1]. Generatorul debitează impulsuri dreptunghiulare cu frecvenţa cuprinsă între 1,2 ... 160 Hz, cu o durată a impulsului 0,2 ... 0,75 ms, cu posibilitatea reglării independente a duratei, frecvenţei şi amplitudinii impulsurilor. Pentru lărgirea indicaţiilor terapeutice s-a apreciat ca necesară mărirea duratei impulsului (t_i) la două canale, astfel : canalul 2 — f = = 160 Hz, $t_i = 1 \ldots 3$ ms ; canalul 3 — $f = 120$ Hz, $t_i = 2 \ldots 4$ ms.

Posibilitatea de a varia în limite largi parametrii aparatului extinde gama indicaţiilor medicale şi de aici a rezultat necesitatea cunoaşterii valorilor optime, pentru a se obţine reacţiile fiziologice dorite.

În lucrarea de faţă ne-am propus să verificăm aceste posibilităţi ale generatorului de impulsuri. Acest lucru ni s-a părut obligator şi pentru a îmbunătăţi metodologia actuală de tratament în unele afecţiuni, pe care le-am supus terapiei cu impulsuri dreptunghiulare, cum sînt spasmele vas-

culare şi unele tulburări trofice periferice. Interesul nostru se datoreşte faptului că anumite reacţii fiziologice pot fi obţinute, numai dacă parametrii îndeplinesc anumite valori. Astfel, pentru producerea electrosomnului, frecvenţa optimă a impulsurilor este apreciată la 22 Hz, iar durata lor la 0,3 ... 0,5 ms. Pentru electrostimularea inimii sînt necesare impulsuri pînă la 150 V şi durata de 2,5 ms.

Problema dozajului detaşează practica fizicală de empirism, cînd dozajul are drept unic criteriu sensibilitatea bolnavului. Metoda noastră de stabilire a parametrilor optimi constituie doar o etapă în evoluţia posibilităţilor ştiinţifice de cercetare; o dată cu dezvoltarea radioelectronicii devine posibil ca stimularea ţesuturilor să se execute automat prin biodirijarea exercitată de biocurenţii segmentului supus tratamentului.

2. Rezultatele cercetării

În experimentările efectuate am apelat la persoane practic sănătoase. Aproape în toate investigaţiile, electrodul indiferent s-a aplicat pe regiunea occipito-cervicală, iar electrodul activ pe zona sino-carotidiană.

Primul aspect pus în evidenţă a fost *lipsa de nocivitate* a curenţilor dreptunghiulari. Excitarea îndelungată (peste 30 min) a regiunii sino-carotidiene a determinat stări de excitaţie vagală. S-a înregistrat jenă precordială, nelinişte, greaţă, paloare a feţei, uscăciune a gurii, senzaţie de leşin etc.

Acţiunea excitomotoare s-a pus în evidenţă prin metoda clasică de a obţine contracţii prin curenţi faradici sau dreptunghiulari. Din acest punct de vedere aparatul nostru poate fi utilizat pentru electrodiagnostic. Frecvenţa maximă care permite relaxarea muşchiului după contracţie la acest aparat nu trebuie să depăşească 36 Hz la o durată mijlocie a impulsului.

Excitabilitatea ţesuturilor, după aplicarea unei şedinţe de 10 ... 15 min pe o regiune oarecare, s-a pus în evidenţă cu ajutorul cronaximetriei. Folosind în cursul şedinţei tensiunea de 40 V, durata impulsului 7 ms şi frecvenţa de 60 Hz, s-a constatat o scădere a rheobazei şi cronaxiei, scădere care se menţine şi după 2 ore.

Acţiunea vasomotoare s-a pus în evidenţă în special prin metoda pletismografică care, după cum rezultă din fig. 1 ... 3, ilustrează foarte fidel contribuţia fiecărui parametru în parte asupra reacţiei vasculare.

1. Variind frecvenţa între 2 şi 120 Hz, ceilalţi parametri fiind nemodificaţi, intensitatea reacţiei de vasoconstricţie apare proporţională cu frecvenţa (fig. 1 a, 1 b, 1 c).

2. Mărind durata impulsurilor la maximum (7 ms) reacţia de vasoconstricţie nu depăşeşte valoarea obţinută cu ajutorul celorlalţi parametri, în schimb durata de menţinere a vasoconstricţiei se prelungeşte, iar după circa 1,5 min apare o vasodilataţie compensatoare, fenomen care nu se observă cînd durata impulsului este sub 3 ms (fig. 2a, 2 b, 3).

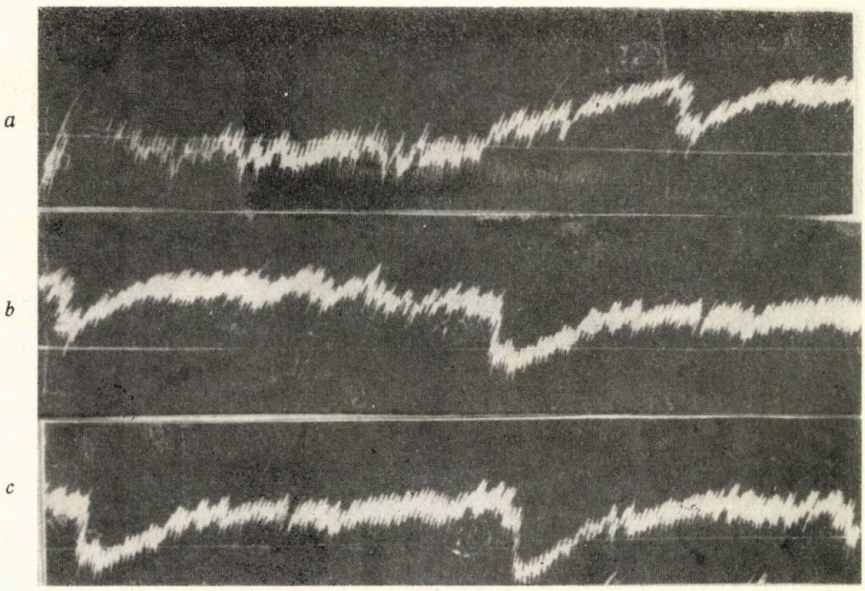


Fig. 1

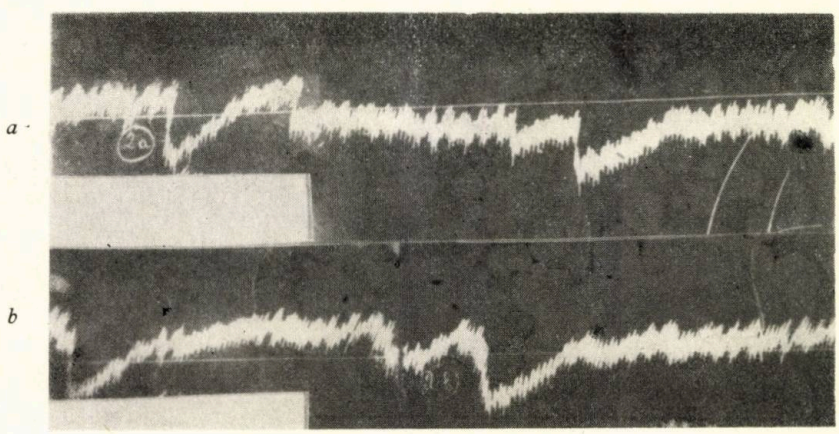


Fig. 2

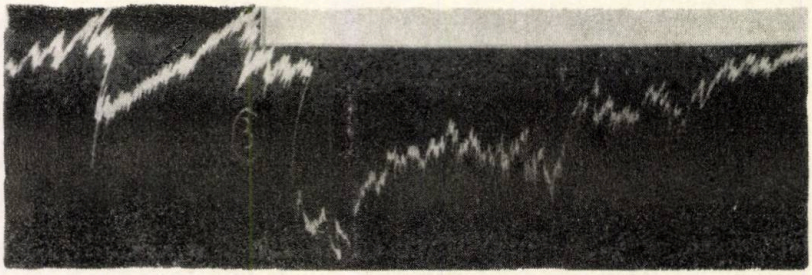
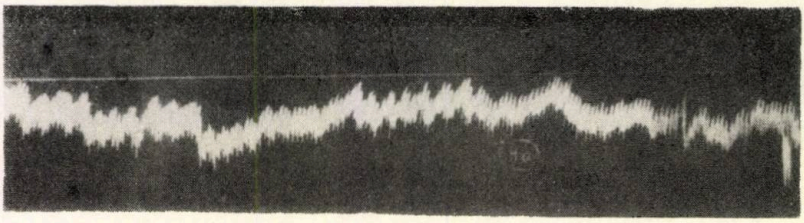


Fig. 3

a



b

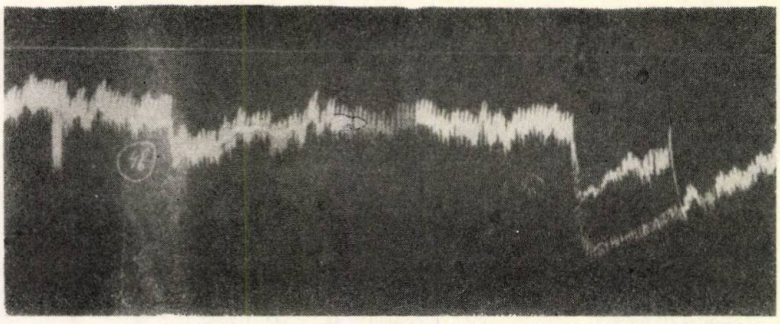


Fig. 4

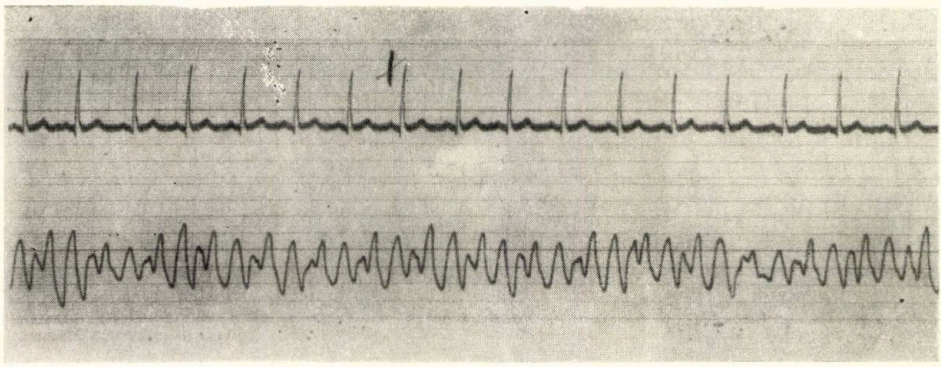


Fig. 5

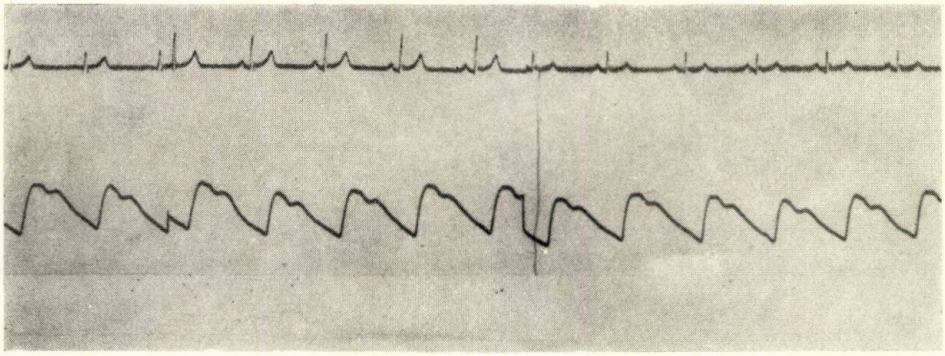
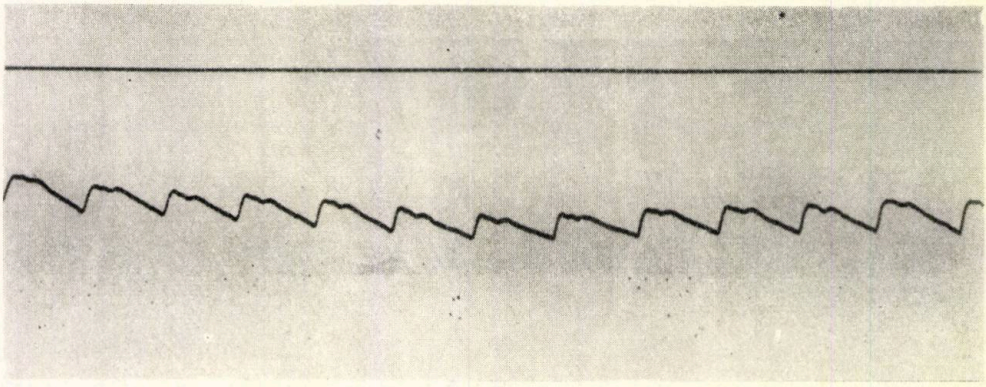
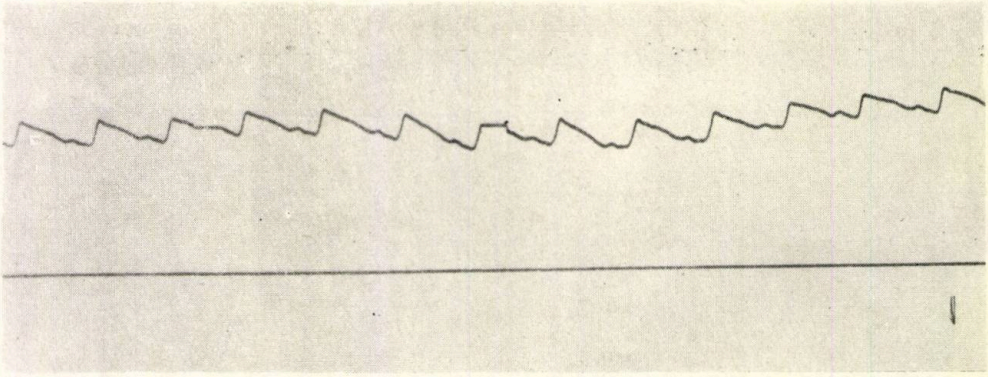


Fig. 6



a



b

Fig. 7

3. Variind tensiunea între 30 și 70 V, cu păstrarea neschimbată a frecvenței și duratei impulsului, pletismograma nu indică variații semnificative ci doar bruscheţea reflexului vasomotor (fig. 4a, 4b).

Observațiile furnizate de pletismografie necesită o aprofundare mai sistematică, căci în conformitate cu aceste observații apare logică scurtarea ședințelor de tratament (în prezent 15 min) și se pune în evidență rolul duratei impulsului în apariția reacției vasculare compensatorii.

Acțiunea revulsivă s-a explorat cu ajutorul termometrului cutanat — termocuplu. La frecvență joasă (40 Hz), la durata cea mai scurtă a impulsului (0,2 ms) și la o tensiune scăzută are loc o scădere minimă a temperaturii cutanate. Folosind parametri maximi după o scădere a temperaturii cutanate în primele 2 min urmează o creștere a temperaturii locale.

Oscilometria arterială s-a înregistrat la membrele inferioare cu oscilometrul Pachon, după ședințele de 10 min cu electrozi dispuși inguino-plantar. Frecvențele sub 80 Hz par cele mai avantajoase, deoarece numai în aceste situații se observă o ușoară creștere a amplitudinii oscilațiilor arteriale.

Tensiunea arterială scade puțin și inconstant atunci cînd frecvența este relativ ridicată, iar dacă numărul de impulsuri scade sub 10 Hz, tensiunea arterială crește și se menține crescută și după 2 ore.

Electrocardiograma prezintă modificări numai sub aspectul unei ușoare accelerări sau încetiniri a ritmului. După 1 ... 2 min de la întreruperea ședinței se constată o revenire la frecvența anterioară (fig. 5).

Pletismograma digitală, înscrisă cu ajutorul celulei fotoelectrice, se modifică morfologic sub acțiunea impulsurilor în sensul tendinței de apariție a unui platou prin diminuarea undei dicrote pe care se schițează o nouă undă (fig. 6). Mărind durata impulsului tendințele menționate devin mai accentuate (fig. 7).

3. Concluzii

a) Generatorul de impulsuri dreptunghiulare construit de autori pentru determinarea electrosomnului își poate extinde aplicabilitatea și în tratamentul unor afecțiuni vasculare și neurologice periferice. Nu se înregistrează acțiuni nocive dacă se respectă anumite valori fizice și anumite zone reflexogene.

b) Reglajul amplitudinii, duratei și frecvenței impulsurilor determină reacții fiziologice caracteristice, dar întreaga problemă a dozajului necesită un studiu mai larg atît în stările normale cît și în cele patologice.

c) În baza observațiilor efectuate rezultă că impulsurile de formă dreptunghiulară nu constituie numai o realizare din punct de vedere strict tehnic, ci au și o justificare clară experimentală pentru a fi utilizate în scop terapeutic, datorită acțiunii farmacodinamice proprii, diferențiată în raport cu acțiunea altor semnale nesinusoidale.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice și automatizări,
Laboratorul de electronică industrială
și
Policlinica „A", Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Onu C., Prisăcaru V., Turic L., Bejan V., *Contribuţii la realizarea unui apara electronic de tip electrosomn cu sincroscop*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, X (XIV), *3 — 4*, pp. 197—202.
2. Dinculescu Tr., Partheniu Al., *Metoda vasodilatatoare cu curenţi de medie frecvenţă*. St. şi cerc. de balneol. şi climat., Buc., 1962.
3. Bengulescu D., Neştianu V., *Excitabilitate şi excitanţi*. In vol. *Electronica în medicină*. Buc., 1964.
4. Gaier H., *Acţiunea galvanizării cu impulsuri asupra circulaţiei arteriale*. Caiet de documentare, I. B. F., Buc., 1962, *1 — 2*.
5. Гильяровский В. и сотр., *Электросон*. М., 1958.
6. Бабский Е., Ульянинский А., *Электрическое стимулирование сердца*. М., 1961

НОВЫЕ АСПЕКТЫ В МЕТОДОЛОГИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СИГНАЛОВ В МЕДИЦИНСКОЙ ПРАКТИКЕ

(Резюме)

Предлагаемый прямоугольно-импульсный генератор, построенный авторами для вызова электросна, может быть применим и в лечении сосудистых заболеваний, а также и в периферийной неврологии. При необходимых соответственных условиях пользования, построенный генератор не вызывает вредного действия.

Регулирование амплитуды, продолжительности и частоты импульсов вызывает характерные физиологические реакции, однако общая проблема дозировки требует более широкого изучения, как для патологических, так и для нормальных состояний исследуемого организма.

Отмечается также, что импульсы квадратной формы не представляют значения только с технической точки зрения, а оправдываются и экеперимантально при использовании их с терапевтическими целями, имея фармакодинамическое действие, отличное от действия других несинусоидальных сигналов.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 621.315.592

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE EXPERIMENTALE DES CIRCUITS IMPULSIONNELS À TRANSISTORS COMPLÉMENTAIRES

PAR
D. SANDU

1. Introduction

Dans les calculateurs électroniques et certains schémas d'automatisation on a besoin fréquemment d'impulsions de courant de grande intensité, ayant les flancs ascendants et descendants suffisamment abrupts et approximatif égaux. De telles impulsions sont nécessaires dans les mémoires à ferrites et à pellicules magnétiques, dans les régistres de déplacement et pour la commande parallèle d'un grand nombre de portes. Dans le cas des schémas à transistors fonctionnant en regime de saturation en général la durée de l'impulsion de sortie dépasse celle de l'impulsion d'entrée, compte tenu de l'accumulation de la charge en base. En même temps le flanc postérieur (descendant) correspondant au blocage du transistor est plus long, surtout là où la résistance de charge est shuntée par des capacités importantes.

Pour diminuer le temps de stockage et la durée du flanc postérieur dans les schémas classiques on utilise différentes méthodes afin d'éviter la saturation profonde; parmis ces méthodes la plus connue est la contreréaction nonlinéaire [1], [4], [5], [7], [11]. Mais cette méthode présente quelques désavantages à savoir: elle rend plus difficile le bascullement de schémas à régénération, diminue la puissance utile des amplificateurs à impulsions et augments la durée du flanc antérieur (ascendant). e

Une nouvelle méthode qui permet d'obtenir de bons flancs et de diminuer le temps de stockage est celle qui utilise des schémas à transistors complémentaires [1] ... [3], [8], [9].

Dans ce cas les transistors fonctionnent en régime de saturation profonde, ce qui présente certains avantages dans le cas des impulsions de grande intensité.

Dans cette Note nous étudierons par voie experimentale quelques schémas à transistors complémentaires et effectuérons la comparaison des résultats expérimentaux avec les formules et les considérations théoriques.

2. Fonctionnement des schémas

2. 1. Il y a principalement deux montages: montage émetteur commun ou étage inverseur (fig. 1 a) et montage collecteur commun (fig. 1 b). À l'aide de ces montages et du montage de Darlington on peut réaliser tous les circuits logiques et les amplificateurs d'impulsions. La polarité des signaux d'entrée du circuit inverseur de la fig. 1 a peut être soit positive, soit négative par rapport à l'état de repos.

a) Si $E_2 = 0$, $E_1 = E_c$, le circuit fonctionnera normallement avec signaux d'entrée positifs (fig. 2 a). Au repos $U_{in} = 0$, le transistor T_1 est déblo-

qué, T_2 bloqué, tandis que U_s sera approximatif égal à E_1; lorsque $U_{in} = E_1$, (étape active), T_1 sera bloqué, T_2 sera débloqué tandis que U_s devient égal à zéro.

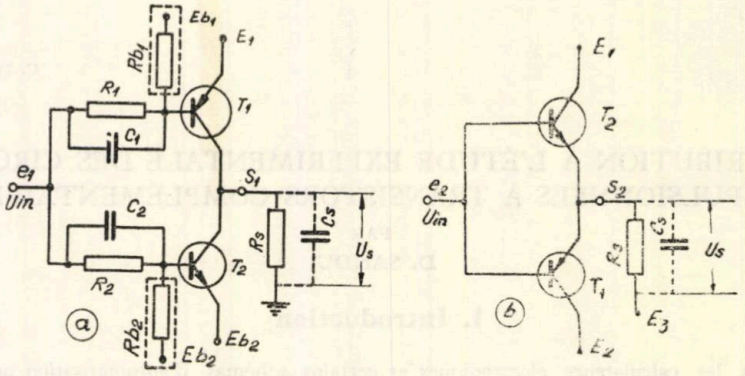


Fig. 1

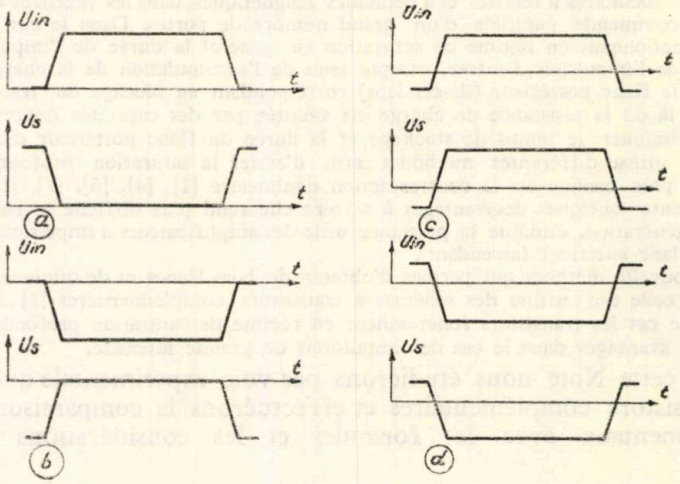


Fig. 2

b) Si $E_1 = 0$, $E_2 = -E_c$ le circuit fonctionnera normalement avec signaux d'entrée négatifs (fig. 2b). Au repos $U_{in} = 0$, le transistor T_1 est bloqué, T_2 débloqué et U_s est égal à $-E_c$; lorsque $U_{in} = E_2$ le transistor T_1 sera débloqué, T_2 sera bloqué et $U_s = 0$.

Mais, lorsque le potentiel de repos du point e_1 n'est pas nul ou bien lorsque les circuits en aval demandent pour E_1, E_2 d'autres polarités et valeurs que celles indiquées aux cas a), b), on utilise des tensions de polari-

sation supplémentaires E_{b1}, E_{b2} afin d'obtenir le régime correcte de fonctionnement et les niveaux désirés pour U_s.

Le circuit collecteur commun de la fig. 1 b peut aussi fonctionner avec des signaux d'entrée ayant les deux polarités possibles.

c) Si au repos le potentiel du point e_2 est négatif le transistor T_1 est conducteur, T_2 est bloqué et U_s est approximatif égal à U_{in}; lorsque U_{in} devient positif T_1 est bloqué, T_2 conduit et U_s est aussi approximatif égale à U_{in}. Par conséquent dans ce cas le schéma fonctionne avec des signaux d'entrée positifs (fig. 2 c). Évidemment pour un fonctionnement normal E_2, en valeur absolue, doit être plus grand que U_{in} au repos, tandis que E_1 doit être plus grand que U_{in} à l'étape active.

d) Si au repos le potentiel du point e_2 est positif T_1 est bloqué, T_2 conduit et $U_s \cong U_{in}$; lorsque U_{in} devient négatif, T_2 est bloqué, T_1 conduit et le potentiel de sortie suit approximativement les variations du potentiel d'entrée. Par conséquent das ce cas le schéma fonctionne avec des signaux d'entrée négatifs. Quant aux valeurs de E_1, E_2, reste valabile la remarque faite au cas c).

Dans le cas où le schéma en amont est de tel façon que soit le potentiel de repos, soit le potentiel de l'étape active du point e_2 est nul, le fonctionnement normal solicite que le potentiel E_3 soit différent de zéro.

2. 2. Pour le montage classique émetteur commun à un seul transistor PNP, la commutation directe et inverse sont décrites par les courbes de la fig. 3, où les temps de commutation directe t_d, de stockage t_s et de commutation inverse t_i sont calculés par la méthode de la charge [6], [10] ... [12], et ont les expressions suivantes :

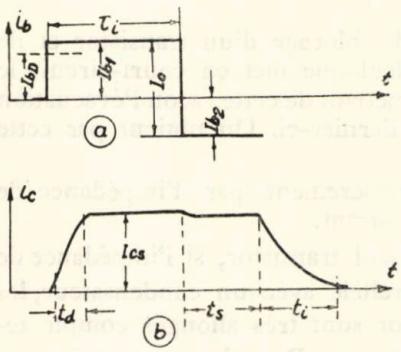


Fig. 3

$$(1) \qquad t_d = \tau_p \ln \frac{1}{1 - 0{,}9\, I_{bD}/I_{b1}},$$

$$(2) \qquad t_s = \tau_s \ln \frac{1}{1 - (I_{b1} - I_{bD})/I_0},$$

$$(3) \qquad t_i = \tau_p \ln \frac{1}{1 - 0{,}9\, I_{b1}/I_0},$$

où: τ_p — durée de vie des porteurs minoritaires en base, τ_s — constante de temps de stockage (pour la majorité des transistors on peut prendre $\tau_s \approx \tau_p$), I_{bD} — courant de base pour lequel commence la saturation, I_{b1} — courant qui commande effectivement la base, I_0 — saut de courant inverse en base.

De ces formules il en resulte que pour obtenir un bon flanc antérieur il est nécessaire d'appliquer un courant I_{b1} beaucoup plus grand que I_{bD},

c'est-à-dire que le transistor soit profondément saturé. Mais dans ce cas les temps t_s et t_i deviennent assez importants et pour les diminuer il faut appliquer un courant invers en base I_0 suffisamment grand. Le courant I_0 est obtenu à l'aide d'une tension positive, qui pendant la commutation directe (déblocage) introduit un retard très important entre le moment de l'application du saut négatif de tension en base et le moment de l'apparition du saut positif en collecteur.

Dans le montage à transistors complémentaires (fig. 1 a) le temps de commutation inverse t_i pratiquement n'intervient pas car le flanc postérieur de l'impulsion est déterminé par la commutation directe du transistor complémentaire ; donc le flanc antérieur est déterminé par la commutation directe du transistor tandis que le flanc postérieur est déterminé par la commutation directe de son complément. Le montage complémentaire doit diminuer aussi le temps de stockage t_s, car en mettant en (2) $I_0 = I_{b1} - I_{b2}$ on obtient

$$t_s = \tau_s \ln \frac{I_{b1} - I_{b2}}{I_{cs}/\beta - I_{b2}}. \tag{4}$$

On observe que t_s dépend du courant de saturation I_{cs} du transistor débloqué, à savoir t_s diminue au fur et à mesure que I_{cs} augmente. En effet dans le schéma de la fig. 1 a le courant I_{cs} du transistor débloqué, qui va se bloquer, augmente brusquement au moment du déblocage du transistor complémentaire, vu que ce dernier met en court-circuit la résistance de charge.

Le montage émetteur commun à transistors complémentaires présente trois avantages essentiels, à savoir :

a) Pendant le processus transitoire de blocage d'un transistor et de déblocage de l'autre, le transistor qui se débloque met en court-circuit le collecteur du transistor qui se bloque en permettant de cette façon l'évacuation rapide de la charge enmagasinnée dans ce dernier-ci. On obtient par cette voie une diminution des temps t_i et t_s.

b) Le courant de collecteur circule entièrement par l'impédance de charge d'où resulte un gain important en courant.

c) Pour les montages classiques à un seul transistor, si l'impédance de charge est formée par une résistance en parallèle avec un condensateur, les flancs déterminés par le blocage du transistor sont très allongés compte tenu de la décharge de la capacité par la résistance. Dans le montage à transistors complémentaires (fig. 1 a) au moment du blocage d'un transistor la capacité se décharge par son complément debloqué.

Le montage de la fig. 1 b, outre les propriétes spécifiques pour les schémas collecteur commun présente les mêmes avantages que le montage émetteur commun à transistors complémentaires.

3. Résultats expérimentaux

3. 1. *Générateur d'impulsions.* Pour l'étude des schémas à transistors complémentaires sont necessaires des impulsions positives et négatives à flancs courts et approximatif égaux. Les impulsions positives sont obtenues à l'aide d'un générateur de construction spéciale [13] que nous avons réalisé dans le laboratoire (fig. 4 a), dont la particularité est l'élimination de la charge accumulée dans la base de T_2, obtenant de cette façon des flancs postérieurs très

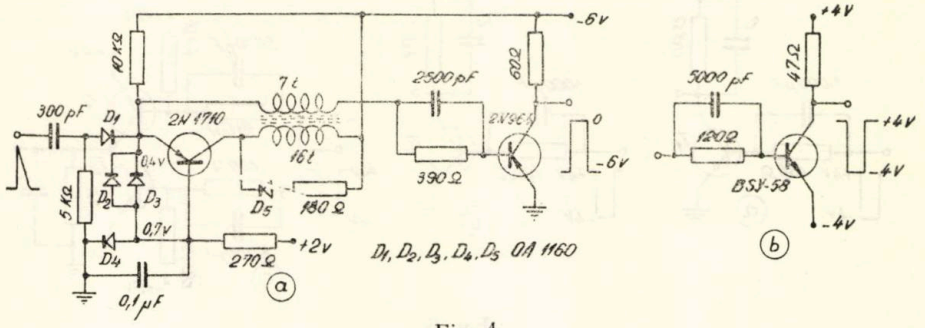


Fig. 4

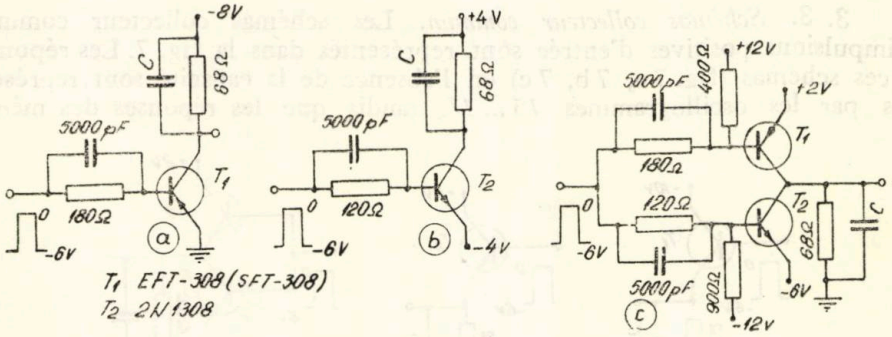


Fig. 5

courts. La durée de l'impulsion est déterminée par le temps de décharge de la capacité C_3 par les résistances R_3, r_{in}, conectées en paralléle (r_{in} — résistance équivalente d'entrée de T_2) ; l'oscillogramme *1* montre la forme de l'impulsion positive. Le transformateur est bobiné sur un noyau de ferrite douce ayant le diamètre extérieur de 16 mm.

Pour obtenir les impulsions négatives on ajoute encore un transistor (fig. 4 b) ; la forme de ces impulsions est indiquée dans l'oscillogramme *2*.

3. 2. *Schémas émetteur commun.* D'abord on a étudié les schémas à impulsions d'entrée positives (fig. 5). Les oscillogrammes *3*... *5* représentent les réponses des schémas données dans les fig. 5 a, 5 b, 5 c en l'absence

de la capacité, tandis que les oscillogrammes *6*... *8* représentent les réponses des mêmes schémas, en présence de la capacité C, couplée en parallèle avec la résistance de charge. Les schémas à impulsions négatives d'entrée sont représentés dans la fig. 6. Les réponses des schémas donnés dans les fig. 6 a, 6 b, 6 c, en l'absence de la capacité, sont représentées par les oscillogrammes *9*... *11*; les réponses des mêmes des schémas en présence de la capacité sont représentées par les oscillogarmmes *12*... *14*.

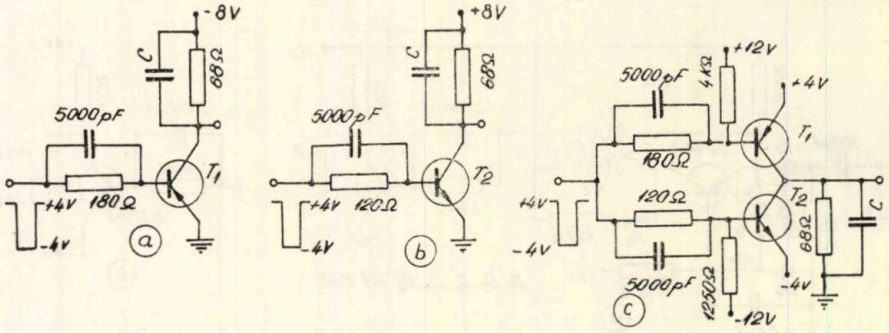


Fig. 6

3. 3. *Schémas collecteur commun.* Les schémas collecteur commun à impulsions positives d'entrée sont représentés dans la fig. 7. Les réponses de ces schémas (fig. 7 a, 7 b, 7 c) en l'absence de la capacité sont représentées par les oscillogrammes *15*... *17*, tandis que les réponses des mêmes

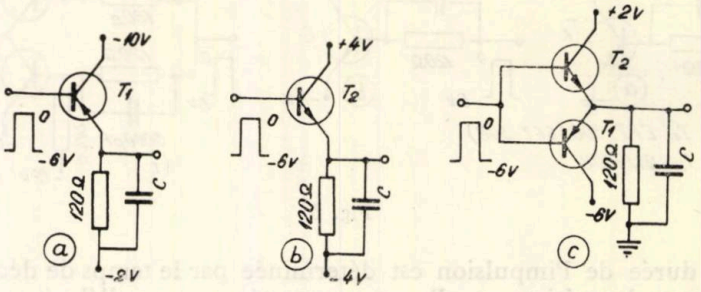


Fig. 7

schémas en présence de la capacité sont représentées par les oscillogrammes *18*... *20*. La fig. 8 indique les schémas collecteur commun à impulsions négatives d'entrée. Les réponses de ces schémas (fig. 8 a, 8 b, 8 c) en l'absence de la capacité sont représentées par les oscillogrammes *21*... *23* tandis que les réponses des mêmes schémas en présence de la capacité sont représentées par les oscillogrammes *24*... *26*.

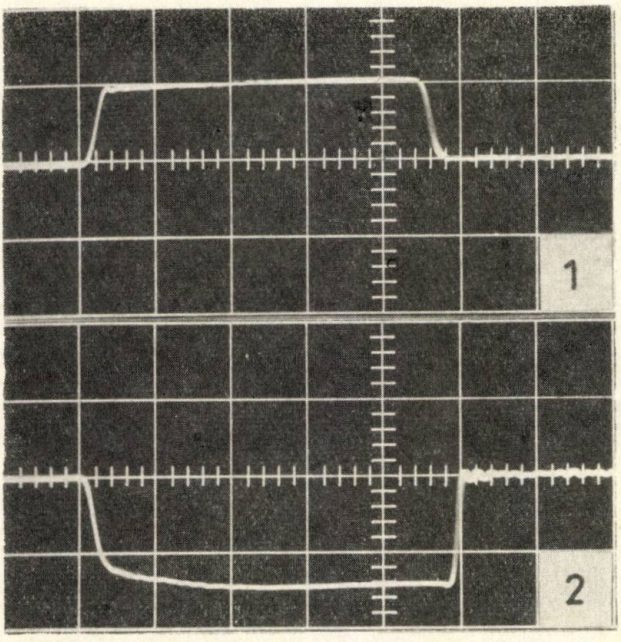


Planche I

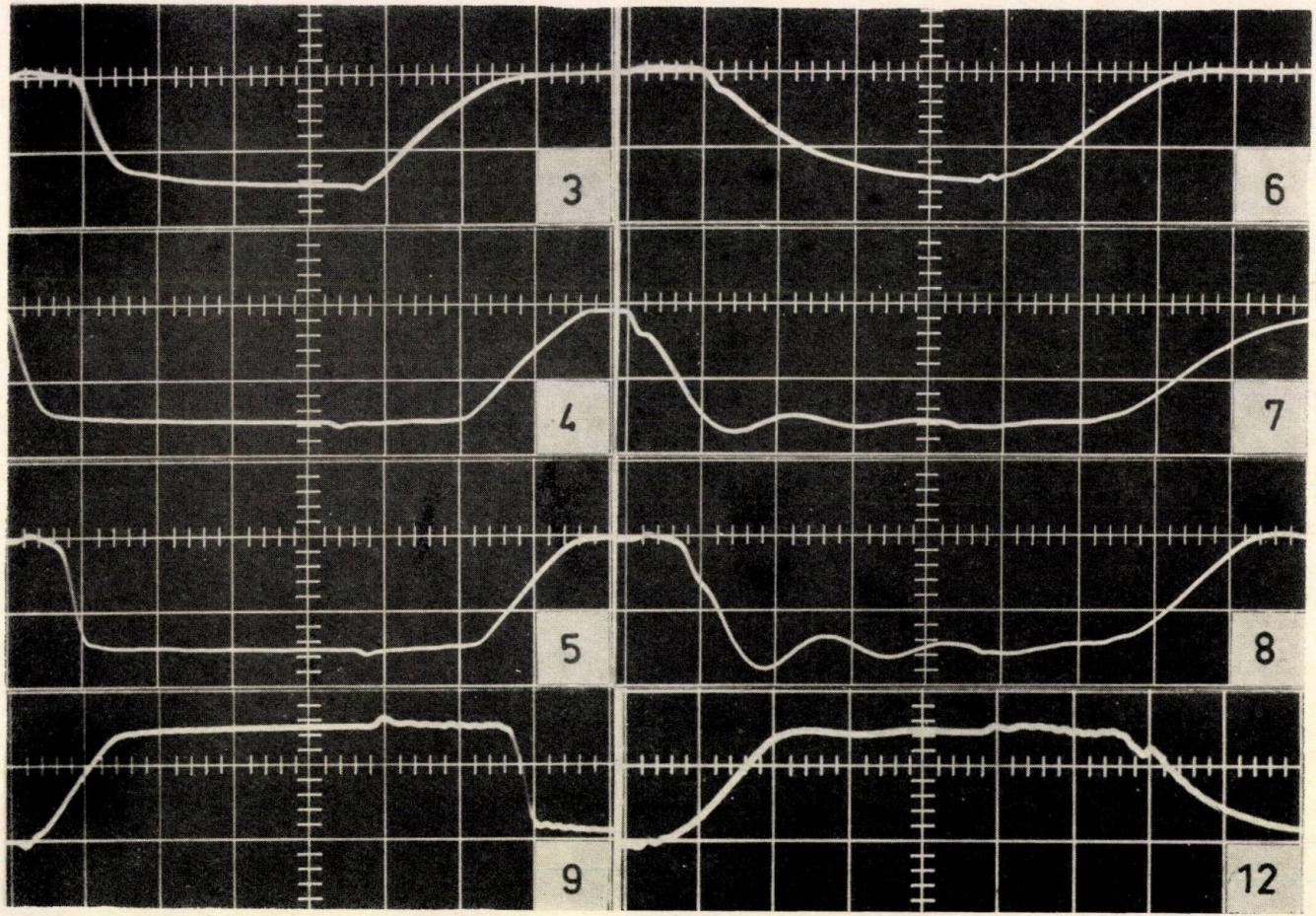


Planche II

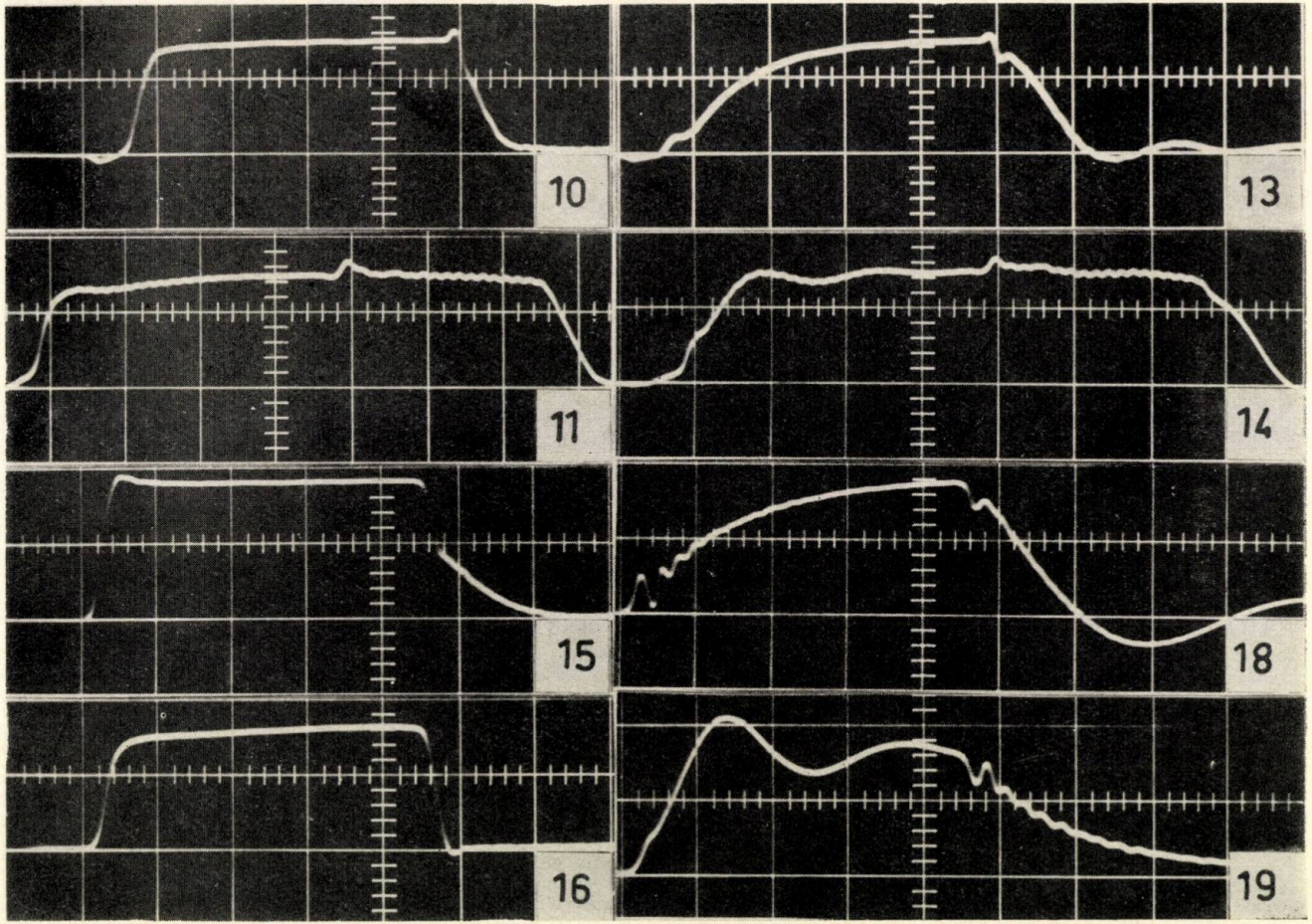


Planche III

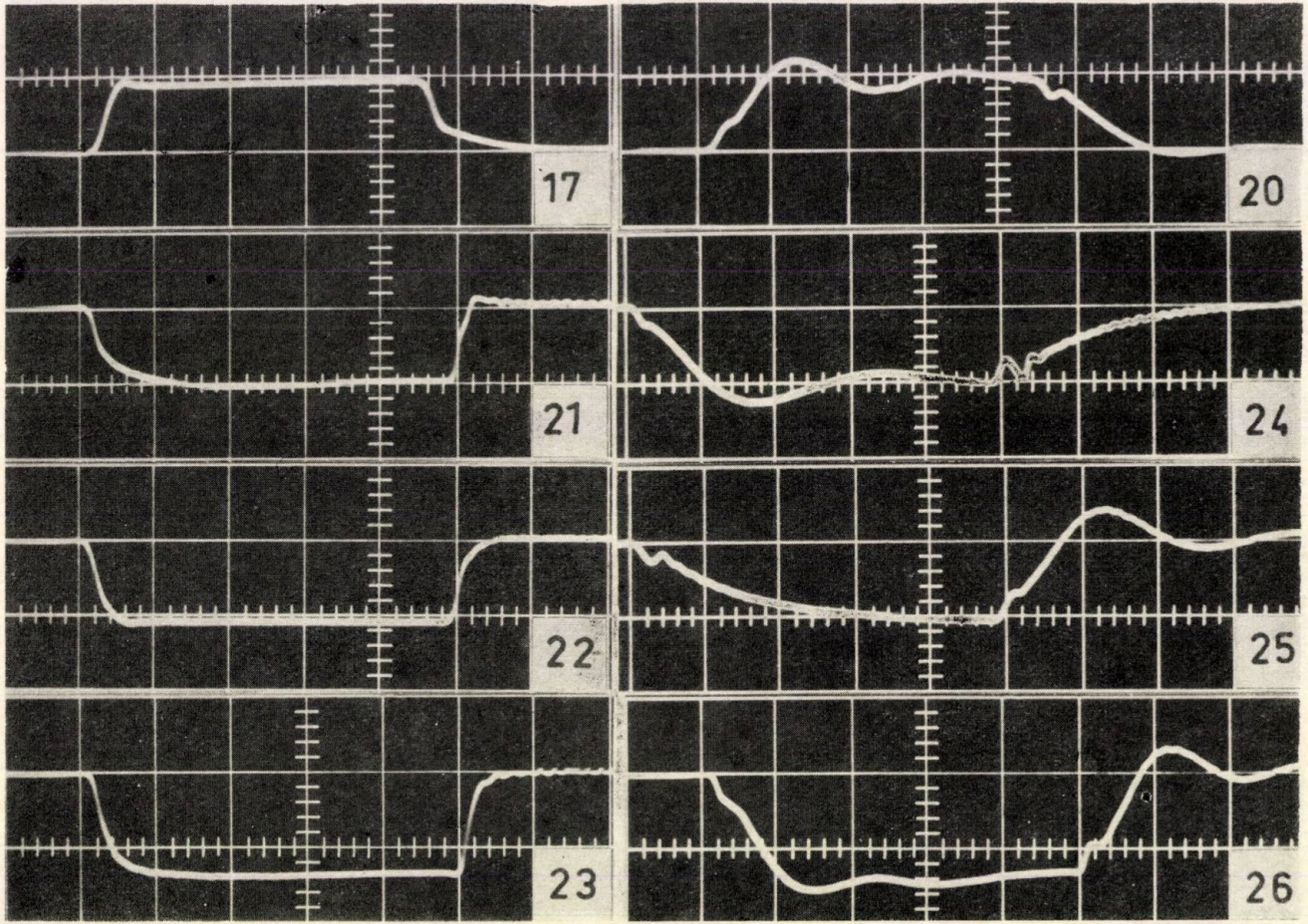


Planche IV

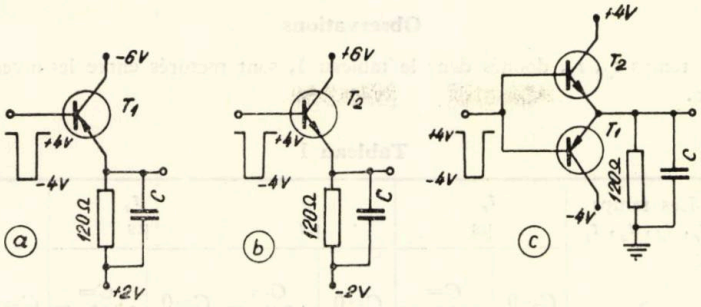


Fig. 8

4. Conclusions

a) Il faut préciser que les transistors EFT-308 (SFT-308) et 2N1308, bien qu'ils sont de types différents (PNP respectivement NPN) ils ne sont pas parfaitement complémentaires en ce qui concerne les parametres suivants: fréquence limite f_α, courant de collecteur, coefficient d'amplification β, les temps t_d, t_s, t_i ; le transistor 2N1308 présente des performances supérieures. Compte tenu de ce fait on constate certaines différences entre les réponses donées par les schémas à impulsions positives d'entrée par rapport aux réponses données par les mêmes schémas à impulsions négatives d'entrée. Par conséquent si les transistors ne sont pas parfaitement complémentaires il faut choisir une telle polarité qui donnera les meilleurs résultats.

b) Comme on peut aisément constater par l'examen des oscillogrammes *3*... *14* et du tableau 1, le schéma à transistors complémentaires émetteur commun donne des résultats supérieurs par rapport aux montages classiques à un seul transistor, tant pour la charge purement résistive, que pour le cas où la résistance est shuntée par la capacité *C*. Sûrement la diminution des temps de commutation est plus évidente dans le cas des schémas contenant la capacité. En même temps dans les montages complémentaires est amélioré le régime thermique des transistors, au sens que le courant développé en charge est fourni par les deux transistors.

c) Pour les schémas collecteur commun à charge purement résistive, le passage des montages classiques au montage complémentaire, comme on peut constater à l'aide des oscillogrammes *15*... *17*, *21*... *23* et du tableau 1, n'est pas accompagné par une diminution sensible des temps t_d, t_i, ce que l'on peut expliquer, compte tenu que les conditions exposées au point 2.1 c) satisfaites, les schémas fonctionnent en classe A.

Dans les cas où la résistance de charge est shuntée par la capacité, ont lieu des diminutions importantes des temps de commutation (v. les oscillogrammes *18*... *20*, *24*... *26* et le tableau 1). Donc les schémas collecteur commun à transistors complémentaires sont avantageux dans les cas où la résistance de charge est shuntée par des capacités importantes. Ce cas est très souvent rencontré dans les circuits impulsionnels.

Observations

a) Les temps t_d, t_i, donnés dans le tableau 1, sont mesurés entre les niveaux 0,1 et 0,9 de l'impulsion.

Tableau 1

Type du montage / Les temps t_r, t_d, t_s, t_i			t_r µs		t_d µs		t_s µs		t_i µs	
			$C=0$	$C=$ 1 000 pF	$C=0$	$C=$ 1 000 pF	$C=0$	$C=$ 1 000 pF	$C=0$	$C=$ 1 000 pF
Collecteur commun	Signaux positifs	Fig. 5a	0,1	0,1	0,11	0,24	0,012	0,012	0,16	0,21
		Fig. 5b	0,014	0,012	0,02	0,08	0,16	0,16	0,12	0,25
		Fig. 5c	0,05	0,06	0,024	0,062	0,17	0,17	0,1	0,12
	Signaux négatifs	Fig. 6a	0,014	0,015	0,08	0,13	0,16	0,16	0,024	0,26
		Fig. 6b	0,045	0,05	0,04	0,22	0,02	0,02	0,05	0,1
		Fig. 6c	0,05	0,06	0,038	0,08	0,26	0,26	0,08	0,12
Émetteur commun	Signaux positifs	Fig. 7a	0,005	0,005	0,028	0,27	0	0	0,12	0,15
		Fig. 7b	0	0	0,036	0,07	0	0	0,02	0,41
		Fig. 7c	0	0	0,028	0,07	0	0	0,084	0,11
	Signaux négatifs	Fig. 8a	0	0	0,09	0,11	0	0	0,028	0,31
		Fig. 8b	0,005	0,005	0,042	0,34	0	0	0,04	0,09
		Fig. 8c	0	0	0,05	0,075	0	0	0,03	0,07

b) Pour toutes les oscillogrammes l'échelle horisontale est de 0,1 µs/cm.

c) L'échelle verticale est de 5V/cm, à l'exception des oscillogrammes *15, 16, 18, 19* qui ont l'échelle de 2 V/cm.

d) Les mesures ont été effectuées à l'aide de H. F. Oscilloscope Type TR-4401, ORION-EMG, ayant la bande passante de 30 MHz.

Reçue le 25 III 1967

Université „ Al. I. Cuza", Jassy'
Laboratoire de Tubes électroniques

BIBLIOGRAPHIE

1. Hunter L., *Handbook of Semiconnductor Electronics*. Mc Graw-Hill, N. Y.—Toronto—London, 1962.
2. Millman H., Taub J., *Pulse and Digital Circuits*. Mc Graw Hill, N. Y.—Toronto—London, 1964.
3. Oehmichen J. P., *Les transistors complémentaires et les associations NPN-PNP*. L'Onde électrique, janvier, 1966.
4. Кононов Б. Н., *Применение нелинейной обратной связи для устранения насыщения полупроводниковых триодов*. Радиотехн. и электр., 1957, *10*.

5. Гуревич Б. Э., *О нелинейной обратной связи в транзисторном импульсном каскаде.* Сб. ст. *Полупроводниковые приборы и их применение.* Изд. Сов. Радио, M., 1965.
6. Drăgănescu M., *Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit.* Edit. Acad. R.P.R., Buc., 1962.
7. Sandu D., *Mémoire rapide à ferrites avec sélection par mot à deux noyaux par bit.* Thèses, Toulouse, 1963.
8. Hekimian N. C., *PNP–NPN Circuits: New Look at a Familiar Connexion.* Electronics, Nov., 1962.
9. Skilling J. K., *New Complementary Transistor Make Serie Schmitt Circuit Practical.* Electronics, Aug., 1962.
10. Sparkes J. J., Beaufoy R., *The Junction Transistor as a Charge Controlled Device.* Proc. IRE, 1957, 45.
11. Степаненко И. П., *Основы теории транзисторов и транзисторных схем.* ГЭИ, M., 1963.
12. Абдюханов M. A., *О расчете процессов в полупроводниковых триодах методом заряда.* Радиотехн. и электр., 1960, *3.*
13. Hamilton D. J., *A Transistor Pulse Generator for Digital Systems.* IRE Tr., EC vol. EC–7, sept. 1958.

CONTRIBUŢIE LA STUDIUL EXPERIMENTAL AL SCHEMELOR DE IMPULSURI CU TRANZISTORI COMPLEMENTARI

(Rezumat)

Se efectuează un studiu experimental al schemelor de impulsuri cu tranzistori complementari, pentru o sarcină pur rezistivă şi pentru cazul cînd sarcina este formată din rezistenţă şi capacitate conectate în paralel. Aceste scheme se folosesc în calculatoarele electronice şi unele sisteme discrete de automatizare, ele permiţînd obţinerea unor impulsuri de curent de mare intensitate cu duratele fronturilor anterior şi posterior foarte scurte şi aproximativ egale.

Pentru studiu s-au folosit tranzistorii EFT-308 (SFT-308) de tip PNP şi 2N1308 de tip NPN, avînd frecvenţele limită aproximativ egale. Impulsurile de atac pentru aceste scheme s-au obţinut de la un generator special [13], indicat în fig. 5.

După cum se poate constata din oscilogramele *3... 26* şi tabelul 1, montajele complementare furnizează la ieşire impulsuri cu parametrii mult superiori faţă de impulsurile furnizate de schemele clasice cu aceiaşi tranzistori. Imbunătăţirile sînt mai evidente în cazul cînd sarcina conţine şi capacitate, adică tocmai în cazurile cele mai frecvente ale circuitelor de impulsuri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 621.38(026)

DESCRIZIONE DI UN COMPILATORE SINTATTICO CON CARATTERISTICHE UNIVERSALI[1])

DI

I. DE LOTTO, A. GHIRARDI e R. MORPURGO

1. Introduzione

E' noto che un compilatore è un algoritmo per tradurre un programma, espresso in un linguaggio sorgente (Ls) in un programma espresso in un linguaggio oggetto (Lo).

La maggior parte dei compilatori esegue la traduzione da un linguaggio Ls particolare ad un particolare linguaggio Lo; nei compilatori universali (*General Purpose Translators*) la traduzione avviene invece da un linguaggio sorgente che può essere di volta in volta diverso, ad un linguaggio oggetto pure variabile [1]...[5], [8], [10].

In questo lavoro viene descritto un compilatore di caratteristiche universali per linguaggi ad operatori con precedenza.

L'intero processo di traduzione si svolge in tre fasi successive e distinte:

a) *Esame del linguaggio sorgente* per verificare la sua appartenenza alla famiglia dei linguaggi ad operatori con precedenza. Affinchè tale esame possa effettuarsi occorre fornire al compilatore l'insieme delle definizioni o regole che costituiscono la sintassi del linguaggio Ls (*tabella sintattica*). Qualora il linguaggio non risultasse del tipo ad operatori con precedenza, esso viene scartato ed il compilatore segnala errore.

b) *Analisi sintattica* del programma sorgente per verificare la sua appartenenza al linguaggio d'ingresso. In questa fase viene fornito al compilatore il particolare programma che si desidera compilare (*stringa d'ingresso*).

Qualora il programma non risultasse appartenente al linguaggio Ls, esso viene scartato, ed anche in questo caso il compilatore segnala errore. In caso contrario si ottiene la struttura sintattica della stringa d'ingresso sotto forma di albero (*albero sintattico*).

---

[1]) Lavoro svolto presso l'Istituto di Elettrotecnica ed Ellettronica del Politecnico di Milano e presso i laboratori C. I. S. E., Milano, con parziale contributo del C. N. R.

c) *Generazione del programma oggetto.* E' questa la fase di traduzione vera e propria della stringa d'ingresso in una stringa d'uscita (detta programma oggetto, o anche codice d'uscita). Affinchè la traduzione possa aver luogo, oltre all'albero sintattico si deve fornire al compilatore l'insieme di regole o definizioni che stabiliscono la corrispondenza tra le stringhe di Ls e di Lo (*tabella semantica*).

Le fasi a) e b) costituiscono quella parte del compilatore che è stata chiamata *Analizzatore* [6], [7] mentre la fase c) è il *Generatore.*

L'Analizzatore è basato su un algoritmo di analisi sintattica dovuto a R. Floyd [6].

2. Analisi sintattica

Come è stato detto nell'introduzione, per effettuare l'analisi sintattica di un particolare programma sorgente, il compilatore deve avere accesso alle *definizioni sintattiche* del corrispondente linguaggio. L'insieme di tali definizioni sintattiche (costituenti la *tabella sintattica* di Ls), sono espresse, in questo compilatore, nella forma normale di Backus.

In Appendice 1 è riportata la tabella sintattica corrispondente ad un particolare linguaggio a precedenza. Tale linguaggio (linguaggio L) è stato utilizzato come modello per la realizzazione del compilatore qui descritto.

Come esempio di definizione sintattica dalla Appendice 1 consideriamo:

$$(1) \qquad < \text{stringa } L > :: = < L > \mid < \text{stringa } L > A \ldots,$$

$$(2) \qquad < L > :: = A \mid B \mid C \mid D.$$

La (1) definisce (::=) la „stringa L" come „L", oppure (|) come „stringa L" seguita da „A" (oppure „B", „C", o „D"),

La (2) definisce „L" come „A", oppure „B", oppure „C", oppure „D". Si noti che nelle definizioni compaiono due tipi di simboli: i *simboli terminali* e quelli *non terminali*[2]).

I simboli terminali sono caratteri del linguaggio sorgente; i non terminali sono caratteri di un metalinguaggio, e costituiscono un mezzo per esprimere la sintassi del linguaggio sorgente[3]).

Le definizioni della tabella sintattica sono costituite da: un definendo (che è sempre un simbolo non terminale) seguito dal carattere speciale „::=",seguito da una o più stringhe di definizione (*alternative sintattiche*, separate dal simbolo speciale „|" [7].

Se per esempio il programma sorgente è costituito dalla stringa:

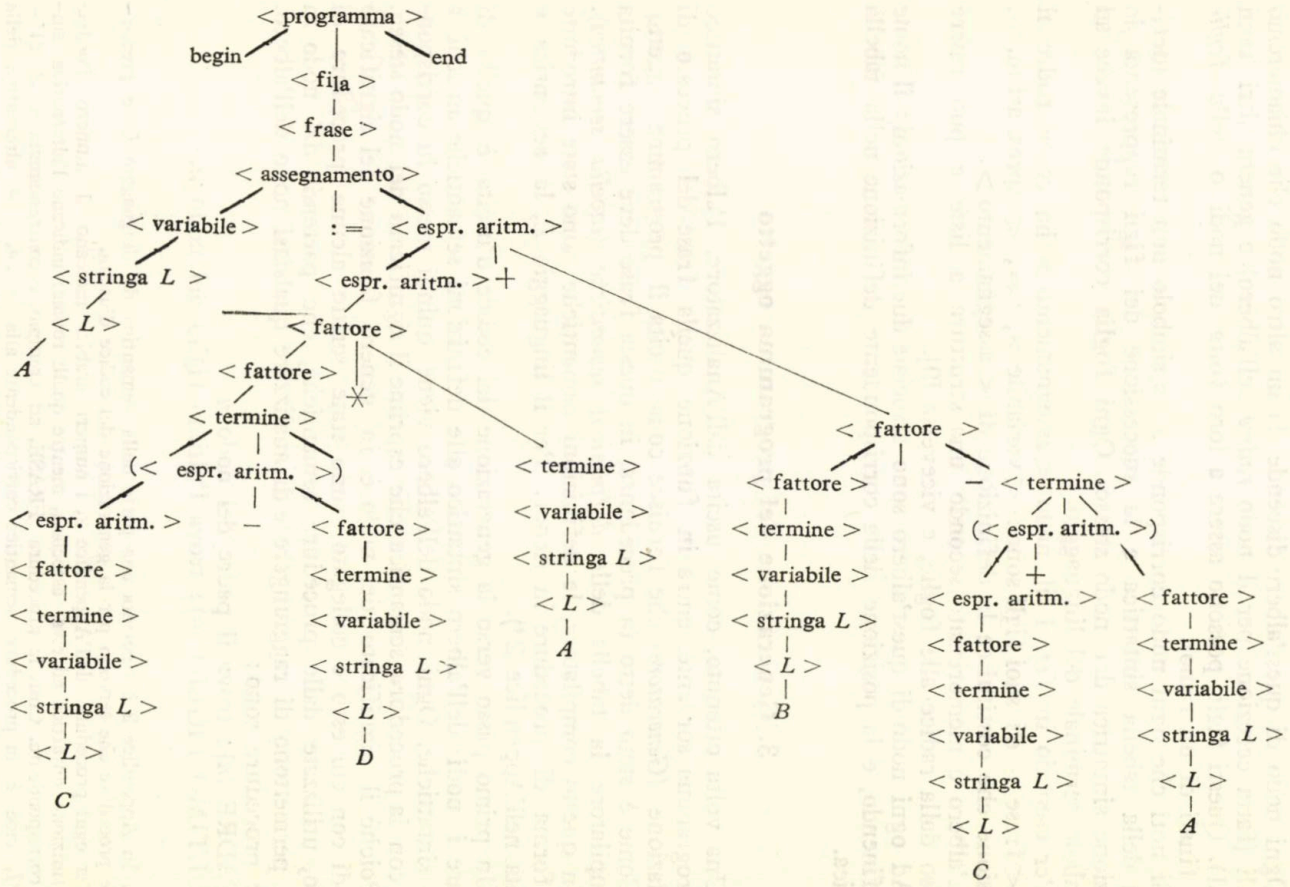
$$\text{begin } A := (C - D) \times A + B/(C + A) \text{ end},$$

l'Analizzatore fornisce come uscita l'albero sintattico di fig. 1.

---

[2]) I simboli terminali sono racchiusi tra i due caratteri speciali „ < " e „ > ".

[3]) Un programma espresso nel linguaggio sorgente è quindi una successione di simboli terminali (stringa).



begin $A := (C-D) * A + B/(C + A)$ end

Fig. 1

Ogni nodo di quest'albero discende da un altro nodo che chiameremo PADRE (fatta eccezione per il nodo *radice* dell'albero) e genera altri rami (FIGLI). Questi figli possono assere a loro volta dei nodi o delle *foglie* (punti finali di un ramo).

Si noti che ogni nodo corrisponde a un simbolo non terminale (definendo) della tabella sintattica e la successione dei figli rappresenta la definizione sintattica del nodo stesso. Ogni foglia corrisponde invece ad un simbolo terminale del linguaggio.

Per esempio in fig. 1 il nodo < assegnamento > ha come padre il nodo < frase > e i suoi figli sono: < variabile >, : =, < espres. aritm. >, successione che costituisce la definizione di < assegnamento >.

L'albero è memorizzato secondo una struttura a liste e può essere percorso dalla radice alle foglie, e viceversa [9].

Ad ogni nodo di quest'albero sono associate due informazioni: il nome del definendo, e la posizione della corrispondente definizione nella tabella sintattica.

3. Generazione del programma oggetto

Una volta ottenuto, come uscita dall'Analizzatore, l'albero sintattico del programma sorgente, entra in funzione quella frase del processo di compilazione (*Generatore*) che fornisce come uscita il programma oggetto.

Come è stato detto in precedenza, in questa frase deve essere fornita al compilatore la tabella delle *definizioni semantiche* (*tabella semantica*).

In questo compilatore, le definizioni semantiche sono state introdotte sotto forma di procedure in ALGOL. Per il linguaggio *L*, la semantica è riportata nell'Appendice 2 [4]).

Un primo passo verso la generazione del codice d'uscita è quello di collegare i nodi dell'albero sintattico alle definizioni semantiche anzichè a quelle sintattiche. Ogni nodo dell'albero viene quindi messo in corrispondenza con la procedura semantica che esprime il significato del nodo stesso.

Poichè il significato del nodo è in genere funzione del significato dei nodi con cui esso è collegato, sono state scritte alcune procedure di servizio, utilizzate dalle procedure semantiche, che partendo dal nodo in esame, permettono di raggiungere e di analizzare qualsiasi nodo dell'albero. Queste procedure sono:

PADRE (*n*): trova il padre del nodo *n*.

ULTIMO FIGLIO (*n*): trova l'ultimo figlio del nodo *n*.

---

[4]) In Appendice 2 è riportata una parte della semantica del linguaggio *L*, e precisamente le procedure che servono per la generazione del codice d'uscita.

Per ogni procedura dell'Appendice 2, i numeri arabici indicano il numero d'ordine della definizione sintattica ad essa associata, mentre quelli romani indicano l'alternativa sintattica corrispondente. Così, la procedura FRASE, ad esempio, è contrassegnata da *3—IV— — V— VI*, cioè è la procedura semantica corrispondente alla 4ª, 5ª, e 6ª alternativa della definizione sintattica di < frase > (che è la 3ª definizione dell'Appendice 1).

FIGLIO (i, n): trova l'iesimo figlio del nodo n.

TIPO (n): trova la definizione semantica corrispondente al nodo n.

Il generatore esamina l'albero sintattico e genera il codice d'uscita, secondo lo schema a blocchi di fig. 2.

L'esame dell'albero viene iniziato dalla radice e procede di nodo in nodo fino a rendere completo l'esame dell'albero stesso.

L'esame del nodo è estremamente semplice in quanto consiste nell'esame del puntatore F (nodo). Se il puntatore indica l'ultimo figlio (F (nodo) $= n$) allora sono noti tutti gli elementi necessari per applicare la semantica al nodo. In questo caso il programma, dopo aver applicato la procedura corrispondente e aver generato il codice di uscita [5]), riprende l'esame dal nodo padre.

Se il nodo è la radice, l'esame dell'albero è terminato.

Nel caso che il puntatore F (nodo) non indichi l'ultimo figlio, si passa all'esame del figlio successivo. Se esso è un simbolo terminale il programma in certi casi richiama la procedura semantica del nodo, per una prima applicazione della medesima [6]), per poi passare all'esame del figlio successivo.

Se il figlio non è un carattere terminale, si considera come nuovo nodo il figlio stesso.

Il programma di movimento sull'albero è rigido; esso è cioè indipendente dalla semantica di ogni nodo. L'ordine di generazione del codice risulta in conseguenza strettamente legato all'albero sintattico, cioè all'ordine con cui è stato fatto il riconoscimento della stringa d'ingresso. Questa caratteristica è di validità generale; vi sono però alcuni casi in cui l'ordine secondo cui viene generato il codice è diverso dall'ordine in cui viene effettuata l'analisi sintattica [5]. In questi casi, è opportuno che sia la semantica di ogni nodo a guidare i movimenti sull'albero: in tal modo, il programma di movimento sull'albero diventa flessibile, in quanto risulta funzione della semantica del linguaggio.

4. Conclusione

Il compilatore descritto nel presente lavoro, costituisce un primo tentativo nella realizzazione di un compilatore più completo e con caratteristiche universali.

Per quanto riguarda l'analizzatore, esso è già redatto nella versione definitiva: infatti, è in grado di eseguire l'analisi sintattica di un qualsiasi programma scritto in un linguaggio del tipo ad operatori con precedenza.

---

[5]) Il codice di uscita viene stampato per mezzo delle due procedure di servizio CODVAR e CODICE, che vengono quindi utilizzate da tutte le procedure dell'Appendice 2.

[6]) Si consideri ad esempio il nodo < frase if > (linguaggio L), a questo nodo sono associate le due procedure semantiche FRASEIF 1 e FRASEIF 2 (Appendice 2) che vengono applicate in tempi diversi: la prima, quando si trova il simbolo terminale „then", la seconda quando l'esame dei figli del nodo < frase if > è terminato.

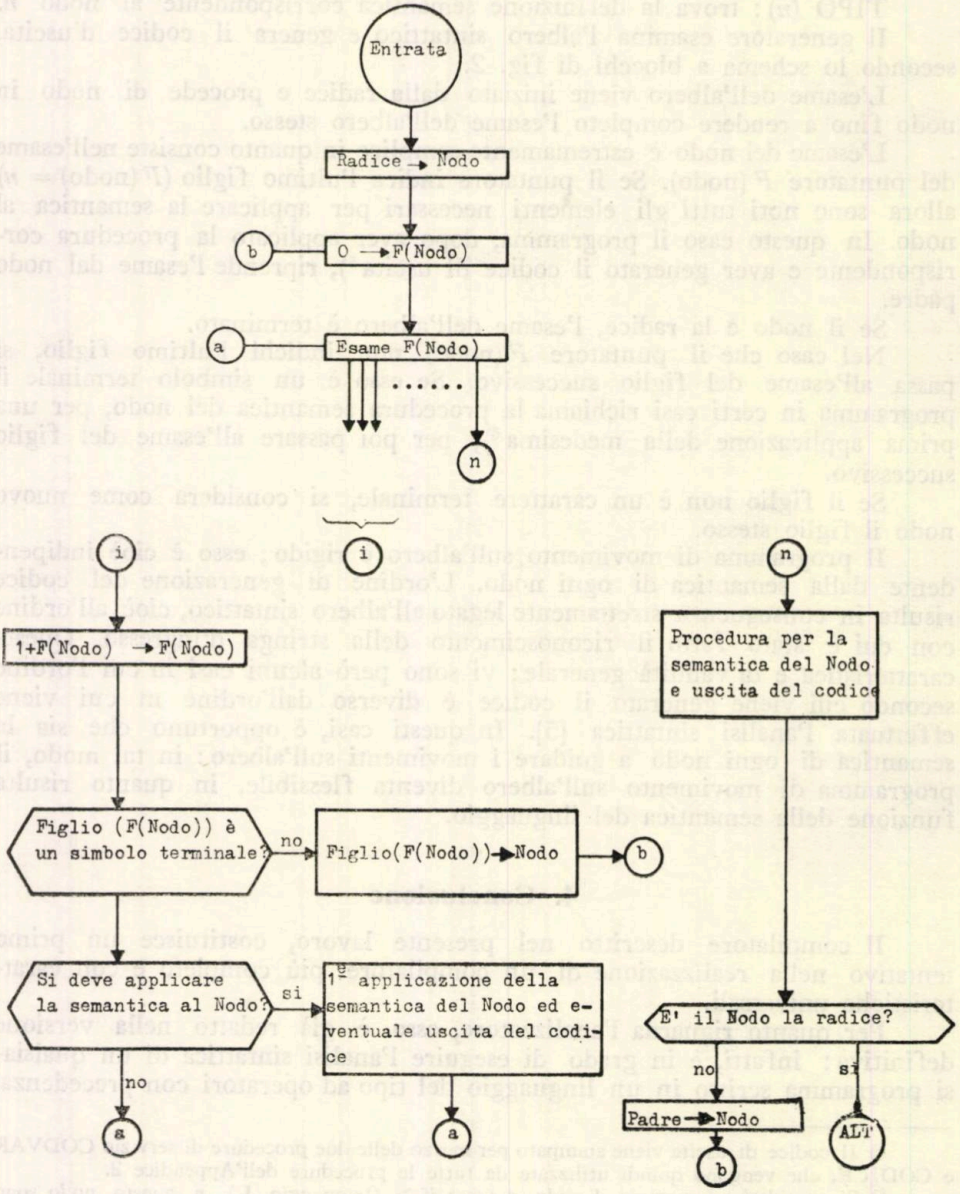

Entrata
Radice → Nodo
b
0 → F(Nodo)
a
Esame F(Nodo)
.....
n
i
i
1+F(Nodo) → F(Nodo)
Figlio (F(Nodo)) è un simbolo terminale?
no
Figlio(F(Nodo))→Nodo
b
Si deve applicare la semantica al Nodo?
si
1ª applicazione della semantica del Nodo ed eventuale uscita del codice
no
a
a
n
Procedura per la semantica del Nodo e uscita del codice
E' il Nodo la radice?
no
si
Padre→Nodo
ALT
b

Fig. 2

La seconda parte del compilatore (generatore) presenta invece alcune limitazioni che possiamo riassumere nei seguenti punti:

a) l'ordine di generazione del codice è rigido; il che esclude dalla compilazione tutti quei casi particolari in cui l'ordine di generazione del codice deve essere diverso dall'ordine con cui viene effettuata l'analisi sintattica;

b) il codice è fatto uscire mano a mano che viene generato e ciò, se da un lato costituisce un indubbio vantaggio per l'occupazione della memoria, è uno svantaggio per l'ottimizzazione. Infatti, non potendosi effettuare modifiche e confronti con porzioni di codice già ottenuti, ci si deve limitare ad una ottimizzazione sopratutto „locale" del codice d'uscita;

c) non sono introdotte regole generali di ottimizzazione del codice stesso. Infatti, l'ottimizzazione del codice d'uscita, come appare dalle procedure semantiche è stata fatta in relazione ad un linguaggio oggetto particolare: il MAP (linguaggio assemblatore del calcolatore IBM 7040). Ciò non toglie che questa ottimizzazione possa essere applicata a tutti i linguaggi del tipo MAP: questi per altro costituiscono sempre una famiglia troppo limitata per poter parlare di „universalità" del compilatore con riferimento alla ottimizzazione del linguaggio oggetto.

Se si escludono però i casi particolari del punto a) e ci si accontenta dell'ottenimento di un codice d'uscita sufficientemente ottimizzato, possiamo concludere che questo compilatore può eseguire la traduzione da un linguaggio a precedenza qualsiasi ad un linguaggio oggetto qualsiasi, purchè gli vengano forniti, oltre alla stringa d'ingresso:

1° la tabella sintattica del linguaggio sorgente;

2° la tabella delle procedure semantiche in cui le stringhe d'uscita siano espresse nel linguaggio in cui si vuole tradurre il programma sorgente.

Le procedure semantiche dell'Appendice 2 sono state scritte per la realizzazione di questo compilatore sul calcolatore IBM 7040, e, come detto,, il linguaggio oggetto scelto è stato il MAP.

Pervenuta il 11 XII 1966

C. N. R. e Facoltà di Ingegneria di Bologna
C. I. S. E. — Segrate, Milano
e
Istituto di Elettrotecnica ed Elettronica
del Politecnico di Milano,
Italia

BIBLIOGRAFIA

1 Irons E. T., *A syntax Directed Compiler for ALGOL 60.* Comm. ACM, 1961, **4**, *1*, p. 51
2 Warshall S., *A syntax Directed Generator.* Proceedings of the EJCC, 1961.
3 Feldman J. A., *A formal Semantics for Computer Languages and its Applications in a Compiler.* Comm. ACM, 1966, **9**, *1*.
4 Warshall S., Shapiro R. M., *A general Purpose Table Driven Compiler.* Proc. Spring Joint Computer Conf., 1964, p. 59.
5 Cheatham T. E. Jr., Sattley K., *Syntax Directed Compiling.* Proc. Spring Joint Computer Conf., 1964, p. 31.

6. Floyd R. W., *Syntactic Analysis and Operator Precedence*. 1963, J. ACM, *10*.
7. Luccio F., Morpurgo R., *Un Analizzatore Sintattico per Linguaggi a Precedenza di Operatori*. Proc. of the 67° AEI Conf., 1966.
8 Chomsky N., *On certain formal Properties of Grammars*. Information and Control, 1959, *2*.
9 Luccio F., Morpurgo R., *A Note on Tree Processings in Algol*. Calcolo, 1966, **3**, pp. 297–311.
10 Cheatham T. E. Jr., *The Theory and Construction of Compilers*. Computer Associates, Inc. CA–6606–0111, 1966.

Apendice 1

Linguaggio L (tabella sintattica)

1 – <programma> :: = begin <fila> end
2 – <fila> :: = <frase> | <fila> ; <frase>
3 – <frase> :: = <assegnamento> | <frase if> | <frase go> |
<stringa *L*> : <assegn.> | <stringa *L*> : <frase if> |
<stringa *L*> : <frase go>
4 – <assegnamento> :: = <variabile> : = <expressione aritmetica>
5 – <frase if> :: = if <espressione Booleana> then <assegnamento> |
if <espressione Booleana> then <frase go>
6 – <frase go> :: = go to <stringa *L*>
7 – <stringa *L*> :: = <*L*> | <stringa *L*> *A* | <stringa *L*> *B* |
<stringa *L*> *C* | <stringa *L*> *D*
8 – <espressione aritmetica> :: = <fattore> | <espressione aritmetica> +
<fattore> | <espressione aritmetica> –
<fattore>
9 – <espressione Booleana> :: = <espr. aritm.> > <espr. aritm.> |
<espr. aritm.> = <espr. aritm.> |
<espr. aritm.> < <espr. aritm.>
10 – <fattore> :: = <termine> | <fattore> × <termine> | <fattore> / <termine>
11 – <termine> :: = <variabile> | <stringa *N*> | (< espressione aritmetica >)
12 – <variabile> :: = <stringa *L*>
13 – <stringa *N*> :: = <*N*> | <stringa *N*> 0 | <stringa *N*> 1 | <stringa *N*> 2 |
<stringa *N*> 3 | <stringa *N*> 4 | <stringa *N*> 5 |
<stringa *N*> 6 | <stringa *N*> 7 | <stringa *N*> 8 |
<stringa *N*> 9
14 – <*L*> :: = *A* | *B* | *C* | *D* |
15 – <*N*> :: = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 .

Apendice 2

Tabella semantica

–1–

1° *procedure* PROGRAMMA ;
begin
CODICE („A“, TAG, „END“) ;
end PROGRAMMA ;

-3-IV-V-VI-

```
2° procedure FRASE ;
   begin TAG : = ETICHETTA (1, NODO) ;
   end   FRASE ;
```

-5-I-II-

```
3° procedure FRASE IF1 ;
   begin TOG : = TOG + 1 ; TOGG : = TOG ;
         CADVAR („A“ , TAG, „TMI B“ , TOGG) ;
   end   FRASE IF1 ;
```

-5'-I-II-

```
4° procedure FRASE IF2 ;
   begin CODICE („B“ , TOG, „TRA* + 1“) ;
   end   FRASE IF2 ;
```

-6-

```
5° procedure FRASEGO ;
   begin integer K ;
         K : = ETICHETTA (2, NODO) ;
         CODVAR („A“ , TAG, „TRA A“ , K) ;
   end FRASEGO ;
```

-4-

```
6° procedure ASSEGNAMENTO ;
   begin
      if FIGLIO (3, NODO) = CT then
         begin CODVAR („A“ , TAG, „CLA Q-“ , CT) ; go to AL
         end ;
      if FIGLIO (3, NODO)=NUMERO then CODVAR („A“ , TAG, „CLA=“ ,
         NUMERO) ;
   AL: CODVAR („A“ , TAG, „STO Q-“ , FIGLIO (1, NODO)) ;
   end ASSEGNAMENTO ;
```

-8-II-

```
7° procedure SOMMA ;
   begin
      if FIGLIO (3, NODO) = CT then
         begin CODVAR („A“ , TAG, „CLA Q-“ , CT) ; go to SA
         end
      if FIGLIO (3, NODO) = NUMERO then CODVAR („A“ , TAG, „CLA=“ ,
         NUMERO) ;
   SA : if (FIGLIO (1 NODO) ≠ CT ∧ (FIGLIO (1, NODO) ≠ NUMERO) then
         begin CODVAR („A“ , TAG, „ADD M-“ , SIN) ; Z : = 1 ; go to SAA
         end
      else Z : = 0 ;
      if FIGLIO (1, NODO) = CT then CODVAR („A“ , TAG, „ADD Q-“ , CT)
      else CODVAR („A“ , TAG, „ADD =“ , NUMERO) ;
   SAA :
      if NODO = ULTIMOFIGLIO (PADRE NODO)) then
         begin
```

```
            if UGUALE (TIPO PADRE (NODO)), 19) then
              CODICE („A", TAG, „LRS 35"),
            if Z = 1 then SIN : = SIN − 1 ; go to FINEL
        end ;
    if Z = 0 then SIN : = SIN + 1; CODVAR („A", TAG, „STO M−", SIN) ;
FINEL :
end SOMMA ;
```

-8-III-

```
8° procedure SOTTRAZIONE ;
  begin integer I ; I : = 0 ;
    if (FIGLIO (3, NODO) ≠ CT) ≙ (FIGLIO (3, NODO) ≠ NUMERO) then
      begin CODICE („A", TAG, „STO D") ; I : = 1 ;
      end ; Z : = 0 ;
    if FIGLIO (1, NODO) = CT then
      begin CODVAR („A", TAG, „CLA = −", CT) ; go to AA
      end
    if FIGLIO (1, NODO) = NUMERO then
      begin CODVAR („A", TAG, „CLA =", NUMERO) ; go to AA
      end
    else CODVAR („A", TAG, „CLA M−", SIN) ; Z : = 1 ;
AA : if I = 0 then
      begin
        if FIGLIO (3, NODO) = CT then CODVAR („A", TAG, „SUB Q−", CT
        else CODVAR („A", TAG, „SUB =", NUMERO)
      end
      else CODICE („A", TAG, „SUB D") ;
      if NODO = ULTIMO FIGLIO (PADRE (NODO)) then
      begin
        if UGUALE (TIPO (PADRE (NODO)), 19) then
          CODICE („A", TAG, „LRS 35") ;
        if Z = 1 then SIN : = SIN −1 ; go to FINE
      end ;
  if Z = 0 then SIN : = SIN + 1 ; CODVAR („A", TAG, „STO M−", SIN) ;
FINE :
end SOTTRAZIONE ;
```

-9-1-

```
9° procedure BOOLEANMAGG ;
  begin integer I ; I : = 0 ;
    if (FIGLIO (3, NODO) ≠ CT) ≙ (FIGLIO (3, NODO)
      ≠ NUMERO) then
      begin CODICE („A", TAG, „STO D") ; I = 1
      end ; Z : = 0 ;
    if FIGLIO (1, NODO) = CT then
      begin CODVAR („A", TAG, „CLA Q− ", CT) ; go to AA
      end
    if FIGLIO (1, NODO) = NUMERO then
      begin CODVAR („A", TAG, „CLA =", NUMERO) ; go to AA
      end
   else CODVAR („A", TAG, „CLA M−", SIN) ; Z : = 1 ;
   AA : if I = 0 then
      begin
```

```
        if FIGLIO (3, NODO) = CT then CODVAR („A", TAG, „SUB Q-", CT)
        else CODVAR („A", TAG, „SUB =", NUMERO)
    end
else CODICE („A", TAG, „SUB D");
end BOOLEANMAG;
```

-9-III-

```
10° procedure BOOLEANMIN;
    begin
     if FIGLIO (3, NODO) = CT then CODVAR („A", TAG, „CLA Q-" CT);
     if FIGLIO (3, NODO) = NUMERO then CODVAR („A", TAG, „CLA =",
        NUMERO);
     if FIGLIO (1, NODO) = CT then
        begin CODVAR („A", TAG, „SUB Q-", CT); go to FINELE
        end;
     if FIGLIO (1, NODO) = NUMERO then
        begin CODVAR („A", TAG, „SUB =", NUMERO); go to FINELE
        end
     else CODVAR („A", TAG, „SUB M-",- SIN); SIN:= SIN — 1;
     FINELE:
     end BOOLEANMIN;
```

-9-II-

```
11° procedure BOOLEANEG;
    begin
      BOOLEANMIN; CODICE („A", TAG, „TNZ ⋇ + 3");
      CODICE („A", TAG, „CLA=+1"); CODICE („A", TAG, „TRA⋇+2");
      CODICE („A", TAG, „CLA = — 1");
     end BOOLEANEG;
```

-10-II-

```
12° procedure MOLTIPLICAZIONE:
    begin
     if FIGLIO (3, NODO) = CT then
        begin CODVAR („A", TAG, „LDQ Q-", CT); go to AA
        end;
     if FIGLIO (3, NODO) = NUMERO then CODVAR („A", TAG, „LDQ =",
        NUMERO);
  AA: Z:= 0;
     if FIGLIO (1, NODO) = CT then
        begin CODVAR („A", TAG, „MPY Q-", CT); go to AAA
        end;
     if FIGLIO (1, NODO) = NUMERO then
        begin CODVAR („A", TAG, „MPY =", NUMERO); go to AAA
        end
     else CODVAR („A", TAG, „MPY M-", SIN); Z:= 1;
 AAA: if NODO = ULTIMO FIGLIO (PADRE (NODO)) then
          begin
            if UGUALE (TIPO (PADRE (NODO)), 19) then go to B;
              CODICE („A", TAG, „RLS 35");
        B: if Z = 1 then SIN:= SIN — 1; go to FINE
          end
          else
          if Z = 0 then SIN:= SIN + 1;
            CODVAR („A", TAG, „STO M-", SIN);
```

```
FINE :
end MOLTIPLICAZIONE ;
```

-10-III-

```
13° procedure DIVISIONE ;
    begin integer I ; I : = 0 ;
      if (FIGLIO (3, NODO) ≠ CT) ∧ (FIGLIO (3, NODO) ≠
         NUMERO) then
         begin CODICE („A", TAG, „STO D") ; I : = 1
         end ; Z : = 0 ;
      if FIGLIO (1, NODO) = CT then
         begin CODVAR („A", TAG, „CLA Q - ", CT) ; go to AA
         end ;
      if FIGLIO (1, NODO) = NUMERO then
         begin CODVAR („A", TAG, „CLA = ", NUMERO) ; go to AA
         end
      else CODVAR („A", TAG, „CLA M - ", SIN) ; Z : = 1 ;
    AA : if I = 0 then
         begin
           if FIGLIO (3, NODO)=CT then CODVAR („A", TAG, „DVP Q - ", CT)
           else CODVAR („A", TAG, „DVP = ", NUMERO)
         end
         else CODICE („A", TAG, „DVP D") ;
      if NODO = ULTIMOFIGLIO (PADRE (NODO)) then
         begin
           if Z = 1 then SIN : = SIN — 1 ;
           if UGUALE (TIPO (PADRE (NODO)), 19) then go to FINE ;
           CODICE („A", TAG, „LLS 35") ; go to FINE
         end ;
      if Z = 0 then SIN : = SIN + 1 ; CODVAR („A", TAG, „STQ M - ", SIN) ;
      FINE :
      end DIVISIONE.
```

DESCRIEREA UNUI COMPILATOR SINTACTIC CU CARACTERISTICI UNIVERSALE

(Rezumat)

Se descrie programa unui compilator pentru limbaje cu operatori cu precedență. Compilatorul efectuează traducerea din limbajul original în limbajul imagine după cum urmează: a) execută analiza sintactică a programei originale ; b) folosind regulile semanticii execută apoi traducerea propriu-zisă a programei originale în programa imagine. Întreaga programă este redată în ALGOL și este bazată pe utilizarea structurii folietate. Lucrarea se termină cu un apendice conținînd pentru exemplificare tabela sintactică a unui limbaj cu operatori cu precedență urmată de definiții semantice corespunzătoare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 621.316.721 ; 621.316.722

CONTRIBUŢII LA ÎMBUNĂTĂŢIREA CARACTERISTICILOR UNOR TIPURI DE STABILIZATOARE FEROREZONANTE

DE

EMIL SIMION şi ILIE POPESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Generalităţi

Stabilizatoarele ferorezonante sînt folosite pe scară largă datorită următoarelor avantaje : simplitate în fabricaţie, domeniu larg de puteri şi tensiuni de ieşire, siguranţă în exploatare, inerţie mică, preţ de cost redus.

Stabilizatoarele ferorezonante sînt în principiu construite în două variante : a) stabilizatoare folosind ferorezonanţa tensiunilor, b) stabilizatoare folosind ferorezonanţa curenţilor.

Stabilizatorul care foloseşte ferorezonanţa tensiunilor este reprezentat în fig. 1 a, iar caracteristica sa în fig. 1 b.

Se observă că stabilizarea începe de la o valoare a tensiunii de intrare U_a mult mai mică decît tensiunea stabilizată U_a' .

Stabilizatorul care foloseşte ferorezonanţa curenţilor este redat în fig. 2 a iar caracteristica sa în fig. 2 b. Tensiunea stabilizată este totdeauna mai mică decît tensiunea de stabilizat.

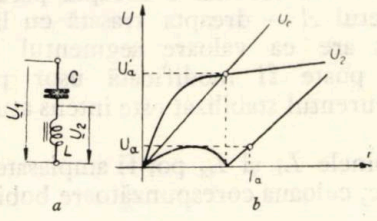


Fig. 1

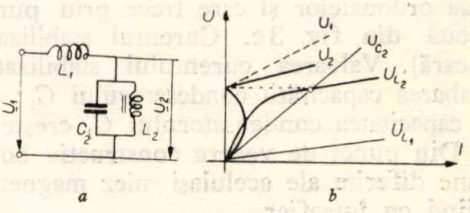


Fig. 2

La ambele tipuri de stabilizatoare se pot folosi bobine de compensaţie şi diverse tipuri constructive ale circuitului magnetic, care simplifică construcţia lor [1], [2], [5].

Unul din dezavantajele stabilizatoarelor ferorezonante îl constituie deformarea formei curbei tensiunii de ieşire, datorită saturaţiei miezului bobinei L_2 . Anume, în curba tensiunii de ieşire apar armonici impare.

În lucrarea de faţă se prezintă două scheme care urmăresc ameliorarea formei curbei tensiunii de ieşire. Una din schemele prezentate poate funcţiona simultan şi ca stabilizator de curent. De asemenea, în ambele scheme, bobina de compensaţie este înlocuită cu un condensator.

2. Realizarea schemelor de stabilizatoare

a) La stabilizatorul din fig. 1, pentru compensaţie se foloseşte condensatorul C_c, legat în serie cu bobina cu miez de fier L_2 (fig. 3 a). Tensiunea U_2, de la ieşire, este dată de relaţia $U_2 = U_{L2} - U_{C_c}$. Alegînd valoarea capacităţii condensatorului C_c astfel ca panta dreptei $U_{C_c} = I/C\omega$ să fie egală cu panta caracteristicii bobinei cu miez L_2, pe porţiunea saturată, se poate obţine o compensare totală astfel încît tensiunea la ieşire U_2 rămîne constantă. Condensatorul C_1 serveşte în acest caz ca reactanţă de balast.

Funcţionarea stabilizatorului se poate urmări grafic în fig. 3 c.

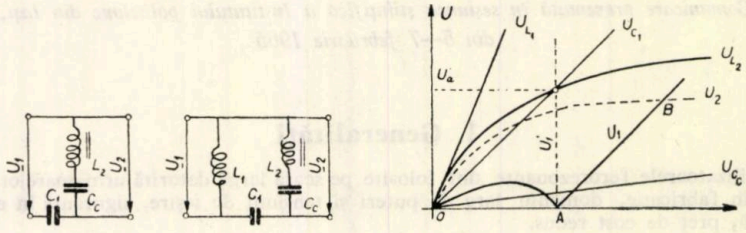


Fig. 3

Dacă la bornele de intrare se conectează bobina fără miez L_1, atunci schema prezentată în fig. 3 b poate funcţiona şi ca stabilizator de curent. Funcţionarea ca stabilizator de curent are loc atunci cînd panta dreptei U_{L1} este egală cu panta caracteristicii L_2, C_1. În acest caz porţiunea AB a caracteristicii L_2, C_1, compusă cu dreapta U_{L1}, are ca rezultat o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor şi care trece prin punctul A — dreapta trasată cu linie punctată din fig. 3 c. Curentul stabilizat are ca valoare segmentul OA (la scară). Valoarea curentului stabilizat poate fi modificată uşor prin schimbarea capacităţii condesatorului C_1; curentul stabilizat este intens atunci cînd capacitatea condensatorului C_1 creşte.

Din punct de vedere constructiv bobinele L_1 şi L_2 pot fi amplasate pe coloane diferite ale aceluiaşi miez magnetic, coloana corespunzătoare bobinei L_1 fiind cu întrefier.

b) La stabilizatorul care foloseşte ferorezonanţa curenţilor, compensarea tensiunii de ieşire se realizează cu ajutorul condensatorului C_c. Valoarea capacităţii sale se calculează astfel ca panta dreptei $U_{C_c} = I/C\omega$ să fie egală cu panta caracteristicii L_2, C_2. Pentru ameliorarea formei curbei tensiunii de ieşire U_2, în serie cu condensatorul C_2 se introduce o bobină fără miez L_3,

care formează un circuit L_3, C_2 acordat pe armonica a treia a tensiunii de ieşire. Schema completă a unui astfel de stabilizator este dată în fig. 4 a. Funcţionarea sa se poate urmări din caracteristicile reprezentate în fig. 4 b.

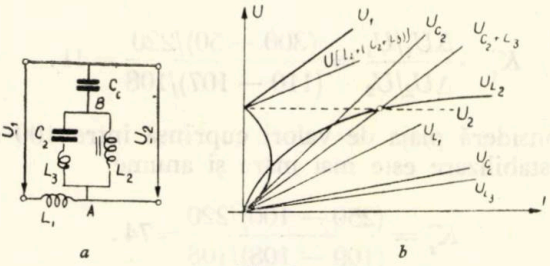


Fig. 4

Bobina L_1 joacă rol de impedanţă de balast. Din punct de vedere constructiv, bobinele L_1 şi L_3 pot fi amplasate pe acelaşi miez magnetic, ele fiind nesaturate.

3. Rezultate experimentale

Ca bobină L_2 s-a folosit un miez de fier E-16, asamblat fără întrefier, cu secţiunea de 9 cm², pe care au fost bobinate un număr de 600 spire. Caracteristica volt-amper a acestei bobine, trasată experimental, este redată în fig. 5.

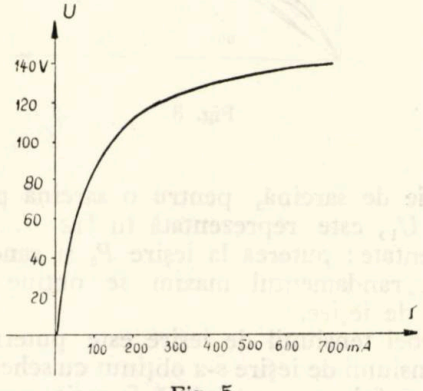


Fig. 5

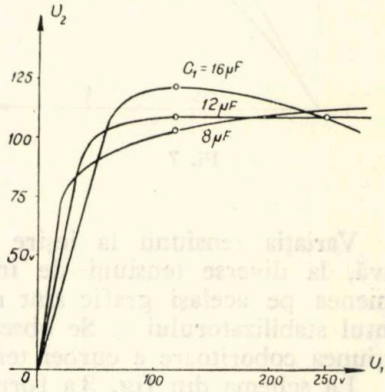


Fig. 6

Panta caracteristicii, pe porţiunea saturată, corespunde unui condensator cu capacitatea $C_c = 75\ \mu F$. Caracteristica la mers în gol a stabilizatorului ferorezonant din fig. 3 a este reprezentată în fig. 6, pentru diverse

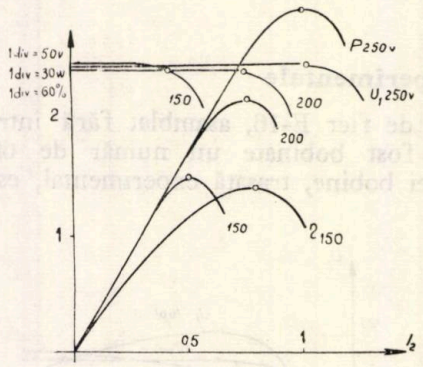
valori ale capacităţii condensatorului C_1. Se observă că cea mai bună stabilizare se obţine pentru $C_1 = 12$ μF. Stabilizarea începe de la tensiunea $U_1 = 50$ V şi continuă pînă la 300 V. Coeficientul de stabilizare pe această porţiune este

$$K'_s = \frac{\Delta U_1/U_1}{\Delta U_2/U_2} = \frac{(300 - 50)/220}{(110 - 107)/108} = 41.$$

Dacă se consideră plaja de valori cuprinsă între 100 şi 250 V, atunci coeficientul de stabilizare este mai mare şi anume

$$K''_s = \frac{(250 - 100)/220}{(109 - 108)/108} = 74.$$

Încercările în sarcină ale acestui tip de stabilizator dau însă rezultate mai bune pentru $C_2 = 16$ μF.



Fi. 7

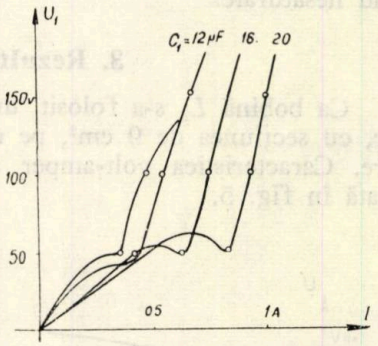


Fig. 8

Variaţia tensiunii la ieşire funcţie de sarcină, pentru o sarcină pur activă, la diverse tensiuni de intrare U_1, este reprezentată în fig. 7. De asemenea pe acelaşi grafic sînt reprezentate: puterea la ieşire P_2 şi randamentul stabilizatorului η. Se observă că randamentul maxim se obţine pe porţiunea coborîtoare a curbei tensiunii de ieşire.

La schema din fig. 3 a forma curbei tensiunii de ieşire este puternic deformată. Ameliorarea formei curbei tensiunii de ieşire s-a obţinut cu schema din fig. 3 b, bobina L_1 fiind calculată astfel ca montajul să funcţioneze şi ca stabilizator de curent, aşa cum se observă din caracteristicile din fig. 8.

La montajul din fig. 4 s-au folosit următoarele elemente: inductanţa L_2, aceeaşi ca mai înainte, capacitatea $C_c = 75$ μF, capacitatea $C_2 = 12$ μF, înductanţa $L_3 = 0{,}1$ H, inductanţa $L_1 = 0{,}5$ H.

Caracteristicile de încărcare sînt redate în fig. 9.

Forma curbei tensiunii de ieşire, atît la mersul în gol cît şi în plină sarcină, obţinute la oscilograf, sînt foarte apropiate de unda sinusoidală.

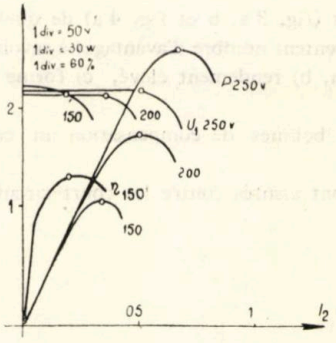


Fig. 9

4. Concluzii

1. Stabilizatoarele ferorezonante concepute prezintă următoarele avantaje: domeniu întins de tensiuni şi puteri de stabilizare, randament bun, forma curbei tensiunii de ieşire aproape sinusoidală.

2. Folosind în locul bobinelor de compensaţie un condensator, schema se simplifică sensibil. Deşi valoarea capacităţii condensatorului de compensaţie este ridicată (75 μF), se pot folosi condensatoare cu hîrtie metalizată care ocupă volum redus (0,2 μF/cm^3), întrucît tensiunea la bornele sale este joasă (sub 100 V) [6].

3. Schemele prezentate sînt asigurate împotriva scurtcircuitelor.

Institutul politehnic, Iaşi,
catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Petrov V. V., Piantkovski B. A., *Stabilizatoare de tensiune şi curent.* E. E. S., Buc., 1955, (trad. din l. rusă).
2. Goldreer U. G., *Stabilizatoare de tensiune.* E. E. S., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).
3. Neiman L. R., Kalantarov P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Vol. II, Ed. Tehn., Buc., 1955, (trad. din l. rusă).
4. Dumitrescu M., Andrei A., *Proiectarea stabilizatoarelor ferorezonante de tensiune alternativă.* Automatica şi Electronica, 1962, *1*, pp. 22–29.
5. Ziemens G., *Stabilizator de tip magnetic.* Electronică-Telecomunicaţii, 1962, 7, pp. 419–421.
6. Bretschneider R., *Condensatoate din duroplast de format redus.* Electronică-Telecomunicaţii, 1962, *3*, pp. 168—171.
7. Philippow E., *Der Oberwellengehalt der Ausgangsspannung des belasteten Ferroresonanzstabilisators ohne Kompensationswicklung.* Wiss. Ztschr. der Techn. Hochschule Ilmenau, 1963, **9**, *3*, S. 277–284.

CONTRIBUTIONS À L'AMÉLIORATION DES CARACTÉRISTIQUES DE QUELQUES TYPES DE STABILISATEURS FERRORÉSONANTS

(Résumé)

On présente les schémas (fig. 3 a, b et fig. 4 a) de quelques types nouveaux de stabilisateurs ferrorésonants qui présentent nombre d'avantages à savoir : a) domaine large de tensions et de puissances de stabilisation, b) rendement élevé, c) forme presque sinusoïdale de la tension de sortie.

En utilisant au lieu des bobines de compensation un condensateur le schéma devient sensiblement plus simple.

Les schémas proposés sont assurés contre les court-circuits.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 621.313.3; 621.313.001.4

EIN NEUES PRÜFUNGSVERFAHREN FÜR ASYNCHRONMOTOREN

VON

V. N. NEDELCU

1. Einleitung

Wie in [1], [2] ausgeführt ist eines der durch die Leerlaufversuche von Drehstromasynchronmotoren mit Schleifringankern verfolgten Ziele, die Bestimmung des Übersetzungsfaktors (k_{sr}) mittels dem der Windungszahlfaktor (n_{sr}) der betreffenden Motoren festgestellt wird.

Der Windungszahlfaktor ergibt sich aus der Beziehung:

$$n_{sr} = \frac{w_s f_{ws}}{w_r f_{wr}}, \tag{1}$$

worin: w_s, w_r — die Anzahl der, im Ständer und Läufer je Phase reihengeschalteten Windungen, f_{ws}, f_{wr} — die Wickelfaktoren für die Grundwellen darstellen.

Dieser Faktor kann ohne Näherung durch Messung der in den Wicklungen der Phasen des Ständers und des sich im Ruhestand befindlichen Läufers, durch den im Luftspalt der Maschine umlaufenden magnetischen Fluss, erregten E.M.S. (elektromotorischen Spannungen), bestimmt werden. Im allgemeinen können die E.M.S. an den Klemmen gemessen werden (jedoch nicht je Phase); der Übersetzungsfaktor kann in diesem Falle mit dem Windungszahlfaktor durch folgende Beziehung:

$$k_{sr} = c\, n_{sr} = \frac{\sum\limits_{M \neq N} E_{MN}}{\sum\limits_{m \neq n} E_{mn}} \tag{2}$$

korreliert werden, worin: c ein Koeffizient ist, der das Schaltbild der Ständer- und Läuferwicklungen berücksichtigt ($c = 1$ bei Stern/Stern- oder Dreieck/Dreieck-Schaltung; $c = \sqrt{3}$ bei Stern/Dreieck-Schaltung, $c = 1/\sqrt{3}$ bei Dreieck/Stern-Schaltung des Motors), E_{MN} — die an den Klemmen M, N

des Ständers ($M, N = A, B, C$), E_{mn} die an den Klemmen m, n des Läufers ($m, n = a, b, c$) gemessennen E.M.S.

Bei Belastung sind die in den Wicklungen erregten E.M.S. schwer messbar; deshalb führt man zur Bestimmung des Facktors n_{sr} den Leerlaufversuch bei offenem Anker- oder Ständerkreis durch.

2. Die gegenwärtig angewandten Verfahren

In [1] wird zur Bestimmung des Übersetzungsfaktors folgendes Verfahren angegeben:

a) An die Ständerklemmen, bei offenem Ankerkreis, wird die Nennspannung angelegt.

b) Dann musst man die Spannung an zwei Ständerklemmen (U_{MN}) und die E.M.S. an den entsprechenden Läuferklemmen (E_{mn}). Unter Berücksichtigung dieser gemessenen Grössen wird:

$$k'_{sr} = \frac{U}{E_{mn}} = c n_{sr}\left(1 + \frac{\tau_h}{2}\right) \tag{3}$$

bestimmt, worin τ_h der Heylandsche Streufaktor der Maschine und dessen Ausdruck:

$$\tau_h = \frac{I_0}{I_{ki} - I_0} \tag{4}$$

ist, I_0 — Leerlaufstrom bei Nennspannung, I_{ki} — ideeller Kurzschlusstrom bei Nennspannung:

$$I_{ki} = \frac{I_k}{\sin \varphi_k}, \tag{5}$$

I_k — Kurzschlusstrom bei Nennspannung, φ_k — Kurzschlussphasenverschiebung.

Bei diesem Verfahren treten folgende grundsätzliche Fehler in der Bestimmung des Windungszahlfaktors mittels des Koeffizienten k'_{sr}, bezw. des Koeffizienten τ_h auf:

a) Der durch den Leerlaufnennstrom, der wie bekannt $I_0 = (0{,}2 \ldots 0{,}6)\, I_n$ (I_n — Nennstrom des Motors) ist, bedingte Spannungsabfall im Ständerwiderstand, wird vernachlässigt.

b) Es wird der gleiche Sättigungsgrad der magnetischen Streukreise bei Leerlauf und bei Kurzschluss angenommen, der tatsächlich jedoch verschieden ist.

c) Der Spannungsabfall in dem Streublindwiderstand des Ständers ($\chi_{s\sigma}$) und der auf den Ständer reduzierte Spannungsabfall des Streublindwiderstandes des Läufers ($\chi'_{r\sigma}$), werden als gleich angenommen, trotzdem sie in Wirklichkeit verschieden sind.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Übersetzungsfaktors wird in [2] angeführt.

Wie in [1] werden der Koeffizient k'_{sr} durch Speisung des Ständers bei offenem Läuferkreis und der Koeffizient k''_{sr} durch Speisung des Läufers bei offenem Ständerkreis bestimmt:

$$k'_{sr} = \frac{\sum U_{MN}}{\sum E_{mn}}, \qquad k''_{sr} = \frac{\sum E_{MN}}{\sum U_{mn}}. \tag{6}$$

Als Übersetzungsfaktor betrachtet man das arithmetische oder das geometrische Mittel der zwei Koeffizienten:

$$k_{sr} = \frac{1}{2}(k'_{sr} + k''_{sr}) \cong \sqrt{k'_{sr}\, k''_{sr}}. \tag{7}$$

Wie im vorgehenden Falle ist das Verfahren mit grundsätzlichen Fehlern behaftet, da in den Ausdrücken der Koeffizienten k'_{sr}, k''_{sr} der Spannungsabfall in den Streublindwiderständen in absoluten Werten erscheint; die Fehler werden wohl durch den gemittelten Wert verringert, doch kann die Genauigkeit der Methode nicht festgestellt werden.

Aus den vorgehenden Ausführungen kann gefolgert werden, dass sowohl das erste als auch das zweite Verfahren nicht zufriedenstellen können.

3. Das vorgeschlagene Verfahren

Zwecks Beseitigung der Unzulänglichkeiten-der vorgenannten Verfahren, wird folgendes Verfahren vorgeschlagen:

a) Bei offenem Läuferkreis wird eine einzige Ständerphase (A) mit Strom gespeist, während die anderen Phasenklemmen des Ständers offen bleiben (Abb. 1).

b) Die E.M.S. werden an den Städerphasenklemmen E'_B, E'_C und an den Läuferklemmen E_{ac}, E_{ba}, E_{cb} gemessen.

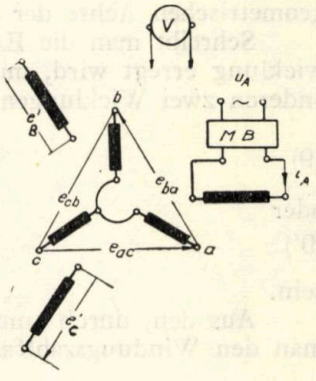


Abb. 1

Zur Bestimmung des Übersetzungsfaktors müssen die durch den magnetischen Fluss im Luftspalt der Maschine erregten Höchst-E.M.S. gemessen werden. Die Höchst-E.M.S. wird dann in einer Läuferphase erregt, wenn die geometrische Achse der entsprechenden Phase mit der geometrischen Achse der gespeisten Phase des Ständers übereinstimmt. Bei Asynchronmotoren sind die Läuferwicklungen sterngeschaltet und der Sternpunkt ist nicht zugänglich. In diesem Falle stellen die an den Schleifringen gemessenen E. M. S. die algebraische Summe der in zwei Phasen erregten E. M. S. dar, weil alle E.M.S. von dem gleichen Induktionsfluss erregt sind. Wird der Spannungsmesser an zwei willkürlich gewählte Klemmen angeschlossen (z. B. a, c) und der Läufer leicht verdreht, so kann festgestellt werden, dass

die E.M.S. eine Schwankung zwischen einem Höchstwert (E'_{ac}) und Null anzeigt. Der Höchstwert der E.M.S. E_{ac} (u.zw. E'_{ac}) entspricht der Stellung des Läufers in der der Induktionsfluss in den zwei Wicklungen den Höchstwert erreicht. Schreibt man mit E_r den Höchstwert der in der Wicklung einer Läuferphase erregten E.M.S., wenn die geometrische Achse der Läuferphase mit der Achse der gespeisten Wicklung übereinstimmt, so kann zwischen den E.M.S. E'_{ac} und E_r, auf Grund des Gegenflussatzes, die Beziehung

$$E'_{ac} = 2 E_r \cos \frac{\pi}{6} \tag{8}$$

oder

$$E_r = \frac{E'_{ac}}{\sqrt{3}} \tag{8'}$$

aufgestellt werden, weil E'_{ac} erregt wird, wenn die geometrischen Achsen der Phasen a, c gegenüber der Achse A um einen Winkel von $\pi/6$, bezw. $5\pi/6$ rad. el. verschoben sind. In diesem Falle stellen die E.M.S. E_{ba}, E_{cb} theoretisch die Hälfte der E.M.S. E'_{ac} dar, oder entsprechend dem Verhältnis der Nuten, weichen die beiden E.M.S. sehr wenig von einander ab, ihre Summe ist jedoch der E.M.S. E'_{ac} gleich. Dies erklärt sich dadurch, dass in der Läuferstellung in der die E.M.S. an den Klemmen a, c den Höchstwert erreichen, die in die dritte Phase (also b) erregten E.M.S. Null ist und die geometrische Achse dieser Wicklung um $\pi/2$ rad. el. gegenüber der geometrischen Achse der Phase A verschoben ist.

Schreibt man die E.M.S., die durch den Hauptfluss in der Induktionswicklung erregt wird, mit E_s, so werden die an den freien Klemmen der anderen zwei Wicklungen gemessenen E.M.S.:

$$E'_B = E'_C = E_s \cos \frac{2\pi}{3} \tag{9}$$

oder

$$E_s = E'_B + E'_C \tag{9'}$$

sein.

Aus den, durch unmittelbare Messungen erhaltenen E.M.S. E_s, E_r kann man den Windungszahlfaktor:

$$n_{sr} = \frac{E_s}{E_r} \tag{10}$$

bezw. den Übersetzungsfaktor bestimmen.

Aus obigem folgt, dass das vorgeschlagene Verfahren: a) von keinen grundsätzlichen Fehler behaftet ist; b) keine Spezialmessgeräte benötigt; c) keine Berechnung verlangt; d) keine komplizierten Schaltungen benötigt und e) von der Sättigung der magnetischen Kreise unabhängig ist.

4. Die Bestimmung des Streublindwiderstandes

Sowohl aus dem, der Theorie der Prüfung der Wechselstrommaschinen gewidmeten Fachschrifttum, als auch aus der Werk- oder Laborpraxis, ist keine zufriedenstellende Methode zur experimentellen Bestimmung des Streublindwiderstandes der Wicklungen elektrischer Maschinen bekannt.

Das vorgeschlagene Verfahren zur Bestimmung des Windungszahlfaktors gestattet in einfacher Weise und mit höchster Genauigkeit die Lösung auch dieses Problems.

Speist man die Ständerwicklung (A) über einen Messblock und stellt man: die Klemmspannung (U_A), den in der Wicklung fliessenden Strom (I_A) und die aufgenommene Wirkleistung (P_0'), die E.M.S. E_B', E_C' fest, so können die folgenden Grössen berechnet werden: der äquivalente Widerstand der A-Phase (R_0'), die Gesamtimpedanz (Z_0'), die Hauptfeldimpedanz (Z_{s0}'), den Leistungsfaktor $\cos\varphi_0$:

$$(11)\qquad R_0' = R_s + R_{s0}' = \frac{P_0'}{I_A^2} = Z_0' \cos\varphi_0, \qquad (12)\qquad Z_0' = \frac{U_A}{I_A} = \sqrt{R_0'^2 + X_0'^2},$$

$$(13)\qquad Z_{s0}' = \frac{E_s}{I_A} = \frac{E_B' + E_C'}{I_A}, \qquad (14)\qquad \cos\varphi_0 = \frac{P_0'}{U_A I_A},$$

worin R_s der Widerstand der Phase A, R_{s0}' der den Eisenverlusten äquivalente Widerstand, X_0' der Gesamtblindwiderstand der Wicklung:

$$(15)\qquad X_0' = X_{s\sigma} + X_{s0}',$$

ist, $X_{s\sigma}$ der Streublindwiderstand und X_{s0}' der Hauptblindwiderstand sind.

Der Widerstand R_s kann im Gleichstrom gemessen werden. Die Blindwiderstände X_0', X_{s0}' können mittels der Beziehungen:

$$(16)\qquad X_0' = Z_0' \sin\varphi_0 = \sqrt{Z_0'^2 - R_0'^2}, \qquad (17)\qquad X_{s0}' = \sqrt{Z_{s0}'^2 - R_{s0}'^2}$$

bestimmt werden, so dass der Streublindwiderstand X_s sich aus der Beziehung:

$$(18)\qquad X_s = X_0' - X_{s0}',$$

ergibt.

Für die grosse Mehrzahl der Maschinen können mit sehr guter Annäherung die vereinfachten Formeln (16), (17):

$$(16')\qquad Z_0' \cong X_0', \qquad (17')\qquad X_{s0}' \cong Z_{s0}',$$

verwendet werden.

Ist der Streublindwiderstand des Ständers bekannt, so kann auch der Streublindwiderstand des Läufers mittels der Kurzschlusslaufversuchsdaten oder bei Schleifringankermotoren durch einen direkten Versuch ermittelt werden.

Der wesentliche Vorteil des Verfahrens besteht, ausser seiner Einfachheit auch darin, dass es die Untersuchung einer der schwierigsten Fragen der gegenwärtigen Theorie der elektrischen Maschinen gestattet und zwar: des Einflusses der Sättigung auf den Streublindwiderstand, ein Problem das mit den heutigen Untersuchungsmethoden nicht in Angriff genommen werden kann.

Das Verfahren kann mit gleichem Erfolg auch im Falle der Kurzschlussläufermotoren, sowie im Falle der Synchronmaschinen angewendet werden. Ausserdem gestattet das Verfahren im Falle der Synchronmaschinen die Überprüfung des, mittels der nur bedingt zu rechtfertigenden Potierschen Konstruktion ermittelten Streublindwiderstandwertes, sowie die Ermittlung des Streublindwiderstandes der Erregerwicklung.

5. Schlussfolgerungen

1. Das vorgeschlagene Verfahren zur Bestimmung des Windungszahlfaktors und des Streublindwiderstandes bei Drehstromasynchronmaschinen durch Speisung einer einzigen Phase des Ständers und Messung der elektromotorischen Spannungen an den Klemmen der anderen Ständerphasen und des Läufers, ist frei von grundsätzlichen Fehlern.

2. Die Genauigkeit des Verfahrens wird durch die Genauigkeit der Messgeräte bestimmt.

3. Das Verfahren gestattet den Einfluss der Sättigung der magnetischen Streu- und Hauptkreise auf die Streublindwiderstände zu ermitteln.

4. Das Verfahren gestattet die experimentelle Bestimmung des Ständerstreublindwiderstandes auch in Kurzschlussläuferasynchronmotoren.

5. Das Verfahren gestattet die Bestimmung der Streublindwiderstände des Ständers und der Erregerwicklung in der Synchronmaschine.

Eingegangen am 19 I 1967

Technische Hochschule „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bukarest

LITERATURVERZEICHNIS

1. Nürnberg W., *Die Prüfung elektrischer Maschinen.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959, S. 80–81.
2. Жерве Г. К., *Промышленные испытания электрических машин.* ГЭИ, М.—Л., 1959, стр. 418—421.

O NOUĂ METODĂ DE ÎNCERCARE A MOTOARELOR ASINCRONE

(Rezumat)

Se expun principiile unei noi metode de încercare a motoarelor asincrone şi se dau amănunte asupra gradului de precizie şi anvergurii rezultatelor obţinute.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 62-50; 621.313.047.2

ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ СБОРКИ КОЛЛЕКТОРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Г. А. ГЕГЕШИДЗЕ

1. Коллекторные медные пластины и особенно миканитовые прокладки поступает на сборку со значительными отклонениями от ГОСТа, которые в конечном счете оказывают влияние на точность изготовления самых коллекторов. Для достижения точности сборки коллекторов, гарантирующей их нормальные эксплуатационные свойства, появляется необходимость в предварительной рассортировке миканитовых прокладок на группы, объединяющие экземпляры с одинаковыми интервалами отклонений. Возможность применения коллекторной меди повышенной точности позволяет отказаться от предварительной рассортировки медных коллекторных пластин.

Сборку коллекторов электрических машин можно осуществлять на автоматической линии (рис. 1), состоящей из счетно-калибровочного сортировального автомата АСК, автоматической линии изготовления коллекторных пластин АК, комплектующего устройства КУ и сборочного автомата СА.

Работа линии управляется вычислительным устройством (ВУ), вырабатывающим на каждом цикле сборки программу комплектации коллекторного узла на основе ин-

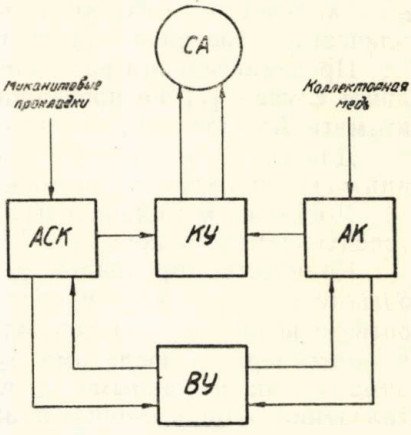


Рис. 1. — АСК — счетно-калибровочный сортировальный автомат, АК — автоматическая линия изготовления коллекторных пластин, ВУ — вычислительное устройство, КУ — комплектующее устройство, СА — сборочный автомат.

формации о составе и наличии комплектующих деталей, накапливаемых в автоматах АСК и АК в процессе их работы.

Сортировальный автомат (АСК) производит сортировку миканитовых прокладок, распределяя их по нескольким размерным контейнерам. Предельные значения соответствующих размерных групп x_{i-1}; x_i, $(i = 1, 2, ..., k)$, а также число контейнеров k выбираем на основе предварительного статистического исследования отклонений толщин пластин для партий, состоящих из достаточно большого количества миканитовых прокладок. Представим результаты рассортировки очередной партии миканитовых прокладок в виде статистического ряда по таблице 1.

Таблица 1

$x_0; x_1$	$x_1; x_2$	$x_2; x_3$	. . .	$x_{i-1}; x_i$	. . .	$x_{k-1}; x_k$
m_1	m_2	m_3	. . .	m_i	. . .	m_k
p_1	p_2	p_3	. . .	p_i	. . .	p_k

В этой таблице: x_{i-1}; x_i — предельные значения отклонений толщины миканитовых пластин, соответствующие i-ому разряду, $(i = 1, 2, ..., k)$, m_i — количество пластин в i-ом разряде, $p_i = m_i/N$, где N общее количество пластин в данной партии.

Предварительная рассортировка медных коллекторных пластин в нашем случае [1] не производится в виду включения в состав линии автомата АК для изготовления коллекторных пластин [2].

Для составления одного комплекта коллектора необходимо n миканитовых прокладок и столько же медных коллекторных пластин.

Доставим n миканитовых прокладок из k различных контейнеров в следующем порядке:

Количество прокладок y_1 доставляется из контейнера, которому соответствует разряд с предельными значениями x_0; x_1 (таблица 1); соответственно y_2 — из контейнера с пределами x_1; x_2 и т. д.; и y_k — из контейнера с пределами x_{k-1}; x_k. Длины всех разрядов примем одинаковыми и равными d, т. е. $(i = 1, 2, ..., k)$, а величину разброса отклонений толщин медных пластин равной $x_l^* - x_1^* = d^*$, где x_1^* — нижний предел отклонения, а x_l^* — верхний.

Обозначим через p вероятность попадания случайной величины (отклонения толщины комплекта, состоящего из n миканитовых прокладок, произвольно выбранных из контейнеров и n медных коллекторных пластин) в заданные пределы допуска $-\delta, \delta$.

Очевидно, это величина не должна быть меньше заданного значения p_0, определяемого производственными соображениями, $p \geqslant p_0$.

Тогда, извлекая n миканитовых пластин (в количествах y_1, y_2 ... ..., y_k соответственно из k размерных контейнеров) и n — неразбракованных медных пластин необходимо на выборку миканитовых пластин наложить следующие ограничения:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i \geqslant p_0 n(d+d^*) - nx_l^* - \delta, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i \leqslant nd + \delta - p_0 n(d+d^*) - nx_1^*. \end{cases}$$

Кроме того, на каждую выборку пластин накладывается ряд дополнительных ограничений. В частности, общие количества миканитовых и медных пластин, необходимые для составления одного комплекта, в отдельности должны быть равны точно n; количества пластин, извлекаемых из каждого контейнера, не могут превышать количества пластин, имеющихся в наличии в соответствующих размерных контейнерах. Порядок выборки пластин из размерных групп должен обеспечивать преимущественную выборку из центральных групп, и по мере необходимости следует обращаться к периферийным группам. Это удобно по следующим причинам: во-первых, чем центральнее размерная группа, тем большее количество пластин накапливается в ней, во-вторых пластины, доставляемые из центральных размерных групп обеспечивают более высокую точность изготовления узла.

Исходя из вышеизложенного, может быть сформулирована следующая задача линейного программирования:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} y_i = n, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i \geqslant p_0 n(d+d^*) - nx_l^* - \delta, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i \leqslant nd + \delta - p_0 n(d+d^*) - nx_1^*, \\ y_i \leqslant m_i, \quad y_i \geqslant 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{cases}$$

и

$$(3)\qquad L = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} y_i,$$

где L является линейной формой задачи, а p_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, подставляется из таблицы 1. Поставленная задача линейного программирования заключается в следующем: из всевозможных выборок микани-

товых пластин $\{y\}$ определить такую выборку $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$, которая удовлетворяет ограничениям (2) и одновременно (3) обращает в минимум.

На протяжении всех циклов сборки значения p_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, в (3) могут быть сохранены без изменения, тогда как значения m_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, меняются в результате периодических извлечений комплектов пластин для сборки и непрерывного поступления новых пластин из сортировального автомата (рис. 1).

Таким образом, алгоритм автоматической сборки коллектора можно сформулировать следующим образом:

1. Производить непрерывный автоматический счет миканитовых прокладок, поступающих в размерные контейнеры сортировального автомата и общего количества медных пластин.

2. Информацию по п. 1 (т. е. информацию относительно m_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$), и количества медных пластин вводить в вычислительное устройство (ВУ) при каждом составлении комплекта.

3. С помощью ВУ, по заданному алгоритму решить задачу линейного программирования (2), (3), определяя каждый раз оптимальную выборку миканитовых пластин из размерных контейнеров: $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$.

4. Выдавать команду о порядке извлечения пластин $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$ из соответствующих размерных контейнеров и об их поочередной подаче сборочному автомату, в частности:

а) извлечь медную пластину и миканитовую прокладку из размерного контейнера с наименьшим индексом и подать на сборку,

б) извлечь медную пластину и миканитовую прокладку с наибольшим индексом и подать на сборку,

в) повторять операции, указанные в а) и б), пока не будут извлечены все $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$ миканитовые и n медные коллекторные пластины.

5. На каждом очередном цикле сборки, подавать в ВУ новую информацию о наличии пластин по размерным контейнерам и производить решение задачи (2), (3) согласно новым исходным данным.

Приведенный алгоритм автоматической выборки пластин для составления комплектов коллекторных узлов обеспечивает непрерывность производственного цикла сборки коллектора с заданной точностью. Также достигается значительное снижение сложности и стоимости при одновременном повышении надежности автоматической линии сборки коллекторов.

Алгоритм разработан для конкретного примера автоматической сборки коллекторов электрических машин. Однако, он может найти применение и в других случаях автоматической сборки узлов, содержащих большое количество элементарных звеньев.

Поступила 1 VII 1967 г.

Тбилисский научно-исследовательский институт приборостроения и средств автоматизации, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гегешидзе Г. А., *К вопросу автоматизации процесса сборки коллекторов электрических машин.* Труды ТНИИСА, **VIII**, изд-во „Энергия", 1967 г.
2. — *Многопредметная, переналаживаемая автоматическая линия изготовления коллекторных пластин электрических машин.* Изд-во „Мецниереба", АН ГрузССР, Тбилиси, 1966 г.

ASUPRA AUTOMATIZĂRII PROCESULUI DE MONTAJ AL COLECTOARELOR MAŞINILOR ELECTRICE CU AJUTORUL MAŞINILOR CIFRICE DE CALCUL

(Rezumat)

Se prezintă unele soluţii pentru rezolvarea problemei automatizării procesului de montaj al colectoarelor maşinilor electrice cu ajutorul maşinilor cifrice (electronice) de calcul.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — АСК — automat de sortare, calibrare şi enumerare; АК — linie automată de fabricare a lamelor de colector; ВУ — dispozitiv de calcul; КУ — dispozitiv de completare; СА — automat de montaj.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 621.313.36; 621.3.013.62

ÜBER DIE ERSCHEINUNGSMÖGLICHKEIT DER SELBSTERREGUNG EINER DREHSTROM-STROMWENDERMASCHINE

VON

IOSIF BERGMAN

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 5–7 Februar 1965

1. Vorwort

Die Erscheinungsmöglichkeit der Selbsterregung bei Drehstrom—Stromwendermaschinen und dessen Verhinderung ist von mehreren Forschern untersucht worden [1] ... [4].

In [5] ... [9] wurden theoretisch die Drehzahl, bei der die Maschine sich selbsterregt, und die Frequenz der erscheinenden Ströme im selbsterregten Drehstromgenerator, bei dessen Leerlauf und bei dessen Belastung, mit der in reihe oder in parallel zum Primärkreis geschalteten Last, berechnet. Auch wurde Erfahrungsmässig das Verhalten der Maschine in diesen Zuständen erläutert.

Die selbsterregte Drehstrom-Stromwendermaschine kann als Generator von Spannungen veränderlicher Frequenz, die man zur Steuerung von Asynchronmotoren benützen soll, nötig sein [10].

In dieser Arbeit wird theoretisch die Selbsterregungsmöglichkeit der Drehstrom-Stromwendermaschine begründet und eine Rechenmethode für die Spannungen und Ströme der selbsterregten Maschine, vorgelegt.

2. Erscheinung der Selbsterregung einer Drehstrom-Stromwendermaschine

Die einfachste Drehstrom-Stromwendermaschine besitzt eine Dreiphasenwicklung am Ständer und eine Gleichstromwicklung am Läufer, auf dessen Stromwender drei Bürstenreihen auf je 360° el., sich befinden. Man kann also denken das der Läufer eine in dreieckgeschaltete Drehstromwicklung, dessen Ecken die Bürsten sind, trägt.

Die Maschine mit sechs Bürstenreihen je Polpaar, dessen drei Ständerphasen, an je zwei um 180° el. verschobenen Bürstenreihen, geschaltet sind, kann als sei sie von drei kurzgeschlossenen Einphasen-Reihenschlussmaschinen

gegründet, betrachtet werden. Diese Überlegung bleibt gültig auch wenn man die Anfänge der Ständerphasen an drei um je 120° el. verschobenen Bürstenreihen schaltet und mit den Enden den Nullpunkt bildet.

Man sagt das eine elektrische Maschine sich selbsterregt wenn in ihren Kreisen Ströme deren Stärke und Frequenz nur von ihren elektrischen Parametern un von der Drehzahl abhengen, flüssen.

Um die Selbsterregung einer Gleichstromnebenschluss- oder -hauptschluss-Maschine zu erziehlen, soll ihr Läufer, in einer gewissen Drehrichtung mit einer bestimmten Drehzahl angetrieben werden, ihr Eisen muss ein magnetisches Restfeld besitzen und ihr Bürstensatz soll aus der Polachse um einen beliebigen Winkell vorzugsweise um 90°, verschoben werden. Eine kurzgeschlossene Einphasenreihenschlussmaschine kann grundsätzlich mit einen leerlaufenden Gleichstromnebenschlussgenerator verglichen werden; also auch diese kann sich mit Gleichstrom selbsterregen.

Die drei zusammengefassten Einphasenreihenschlussmaschinen, aus welchen wir gedacht haben das die mit drei Bürstenreihen je Polpaar Drehstrommaschine gebildet ist, können sich nicht mit Gleichstrom selbsterregen weill dieser nicht sich schlüssen kann. Also eine Drehstromstromwendermaschine mit drei Bürstenreihen je Polpaar kann nur selbsterregte Dreiphasenströme bilden. Bei Unterbrechung einer Phase der Drehstrommaschine wird sie sich mit Gleichstrom selbsterregen [1].

Die Läuferstromwenderwicklung der Drehstrommaschine ist für eine kleine Spannung, um die Funkenbildung zu verhindern, gebaut. Dadurch müssen Ständer- und Läuferwicklung durch einen Zwischentransformator verbunden werden.

Wir denken uns also die Drehstromstromwendermaschine als von zwei Kreisen gebildet (Abb. 1). Der Primärkreis sei aus der Ständerwicklung der Maschine und der Primärwicklung des Transformators, und der Sekundärkreis aus der Läuferstromwenderwicklung der Maschine und die Sekundärwicklung des Transformators, gebildet. Alle Sekundärgrössen werden zum Primärkreis umgerechnet.

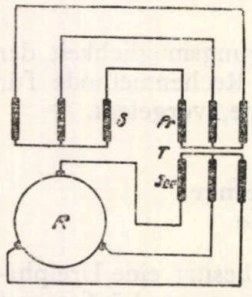


Abb. 1

Es wird der Raumdrehvektor des Stromes

$$\mathbf{i}_1 = \frac{2}{3}(i_a + \mathbf{a} i_b + \mathbf{a}^2 i_c), \tag{1}$$

welcher von den drei Phasenströmen bestimmt ist, eingeführt. Ebenso können die Raumdrehvektoren der E.M.K. und Flüsse für Ständer und Läufer bestimmt werden.

Zu Beginn vernachlässigen wir die Eisensättigung, also wir werden die Parameter der Maschine und des Transformators als konstant rechnen.

Die mit der Ständer- und Läuferwicklung verkettete resultierende Drehflüsse sind:

$$\varphi_1 = \frac{3}{2}\Lambda\,(w_1 k_{w1}\,\mathbf{i}_1 + w_2 k_{w2}\,\mathbf{i}_2'\,\varepsilon^{j\alpha}\,\varepsilon^{j\pi}), \tag{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{2}\Lambda\,(w_2 k_{w2} k_t\,\mathbf{i}_2' + w_1 k_{w1}\,\mathbf{i}_1\,\varepsilon^{-j\alpha}\,\varepsilon^{j\pi}). \tag{3}$$

Der Bürstenverdrehwinkel α wird positiv gerechnet falls der Bürstensatz, vom Leerlaufpunkt ($\alpha = 0$) in die Läuferdrehrichtung verschoben wird.

Die Verdrehung der Wicklungsackse des Läufers um 180° el. gegen der des Ständers, durch den Zwischentransformator, wird durch den Faktor $\varepsilon^{j\pi}$ berücksichtigt.

In den Stäben der sich im Drehflussdrehenden Läuferwicklung erscheinen E.M.K. der Bewegung un der Ruhe. Die E.M.K. der Ruhe sind von der Flusskomponente dessen Richtung mit der Bürstenackse übereinstimmt, und die E.M.K. der Bewegung sind von der Flusskomponente die Senkrecht zur Bürstenackse gerichtet ist, induziert [3].

Wir werden die Raumdrehvektoren der Flüsse φ_1 und φ_2 in dessen Komponenten $\varphi_{1\alpha}$ und $\varphi_{1\beta}$ bzw. $\varphi_{2\alpha}$ und $\varphi_{2\beta}$ zerlegen. Die Koordonatenacksen α, β sind fix und unter sich senkrecht; die Richtung der Abszissenackse α sei die der Phase A der Ständerwicklung. Also:

$$\varphi_1 = \varphi_{1\alpha} + \varphi_{1\beta} = \mathcal{R}e\,(\varphi_1) + j\,\mathcal{I}m\,(\varphi_1), \quad \varphi_2 = \varphi_{2\alpha} + \varphi_{2\beta} = \mathcal{R}e\,(\varphi_2) + j\,\mathcal{I}m\,(\varphi_2). \tag{4}$$

Achtend darauf das $\mathbf{i}_1 = -\,\mathbf{i}_2'$ kann man schreiben:

$$\begin{cases} \mathcal{R}e\,(\varphi_1) = \dfrac{3}{2}\Lambda\, w_1 k_{w1}\,\mathbf{i}_1\,(1 + K\cos\alpha), & \mathcal{I}m\,(\varphi_1) = \dfrac{3}{2}\Lambda\, w_1 k_{w1}\,\mathbf{i}_1\, K\sin\alpha, \\ \mathcal{R}e(\varphi_2) = -\dfrac{3}{2}\Lambda\, w_1 k_{w1}\,\mathbf{i}_1\,(K + \cos\alpha), & \mathcal{I}m\,(\varphi_2) = \dfrac{3}{2}\Lambda\, w_1 k_{w1}\,\mathbf{i}_1\sin\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

In der Ständerwicklung wird nur die E. M. K. der Ruhe induziert:

$$\mathbf{e}_{1\alpha} = -\,(w_1 k_{w1})\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}e\,(\varphi_1)}{\mathrm{d}t} = -\,L_1(1 + K\cos\alpha)\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_1}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Die E.M.K. der Ruhe die in der Läuferwicklung erscheint ist:

$$\mathbf{e}_{2\alpha}' = s w_2 k_{w2} K_t \frac{\mathrm{d}\mathcal{R}e\,(\varphi_2)}{\mathrm{d}t} = -sKL_1\,(K + \cos\alpha)\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_1}{\mathrm{d}t}, \tag{7}$$

den der Läufer sich mit der Geschwindigkeit $-s\omega$ gegen den mit ihm verketteten Fluss dreht.

Die E.M.K. der Bewegung hat volgenden Ausdruck:

$$\mathbf{e}_{2\beta}' = \Omega w_2 k_{w2} K_t\,\mathcal{I}m\,(\varphi_2) = \Omega\, KL_1\,\mathbf{i}_1\sin\alpha. \tag{8}$$

Die E.M.K. im Ständer und im Läufer sind:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{1\alpha} = -L_1(1 + K\cos\alpha)\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}, \tag{9}$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_{2\alpha} + \mathbf{e}'_{2\beta} = -sKL_1(K + \cos\alpha)\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + \Omega KL_1\,\mathbf{i}_1 \sin\alpha \tag{10}$$

Die Spannungsgleichungen beider Kreise sind:

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{1t} = (r_1 + r_{1t})\,\mathbf{i}_1 + (L_{1s} + L_{1t})\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}, \tag{11}$$

$$\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_{2t} = -K_t^2\left[(r_2 + r_{2t})\,\mathbf{i}_1 + (L_{2s} + L_{2t})\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}\right]. \tag{12}$$

Subtrahierend, unter Berücksichtigung von (9) und (10), erziehlt man:

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}[L_1(1 + K\cos\alpha) + sL_1K(K + \cos\alpha) + L_{1s} + L_{1t} + K_t^2(L_{2s} + L_{2t})] + \tag{13}$$
$$+ \mathbf{i}_1[r_1 + r_{1t} + K_t^2(r_2 + r_{2t}) - \Omega KL_1 \sin\alpha] = 0.$$

Das ist eine Differentialgleichung ersten Ordens, die man schreiben kann:

$$A\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + B\mathbf{i}_1 = 0, \tag{14}$$

dessen Lösung ist:

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{10}\,\varepsilon^{-\frac{B}{A}t}, \tag{15}$$

wo

$$A = L_1(1 + K\cos\alpha) + sL_1K(K + \cos\alpha) + L_{1s} + L_{1t} + K_t^2(L_{2s} + L_{2t}), \tag{16}$$

$$B = r_1 + r_{1t} + K_t^2(r_2 + r_{2t}) - \Omega KL_1 \sin\alpha \tag{17}$$

und $\mathbf{i}_{10}$ eine willkürliche Konstante ist.

Der Ausdruck des Stromes (15) hängt exponentiell von der Zeit ab und wenn $B/A < 0$, wäckst der Strom $\mathbf{i}_1$ ständig an.

Die Selbsterregungsbedingung, bei $A > 0$, ist $B < 0$, also:

$$\Omega KL_1 \sin\alpha \geqslant r_1 + r_{1t} + K_t^2(r_2 + r_{2t}). \tag{18}$$

Bei $K = 1$ im ungünstigsten Fall $-\alpha = 180°$, $A = L_{1s} + L_{1t} + K_t^2(L_{2s} + L_{2t}) > 0$. Bei $K > 1$ wird A positiv für $s > -1$. Da bei $K > 1$, $f > pn/120$ [5], wird immer $s > -1$.

Die Ungleichheit (18), stellt die Bedingung, das in der Maschine ein Drehstromsystem i_a, i_b, i_c erscheinen soll, dessen Grösse ständig anwäckst, dar.

Mit den Anwacksen der Ströme $\mathbf{i}_1$, wird durch die Eisensättigung die Hauptinduktivität des Ständers L_1, kleiner.

Der Generator wird stabil arbeiten bei jene Werte der Ströme i_a, i_b, i_c für welche die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\Omega K L_1 \sin\alpha = r_1 + r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t}). \tag{19}$$

Durch multiplizieren der Gleichung (19) mit i_1 wird ersichtlich das die E.M.K. der Bewegung, $\mathbf{e}'_{2\beta} = \Omega K L_1 \mathbf{i}_1 \sin\alpha$, grösser oder wenigstens gleich mit den wirksamen Spannungsabfall am Ersatzschema, $[r_1 + r_{1t} + K_t^2(r_2 + r_{2t})]\mathbf{i}_1$, sein muss, damit Selbsterregung erscheinen können soll.

Die E.M.K. der Bewegung $\mathbf{e}'_{2\beta}$ wäckst nicht liniar mit den Strom an. Falls Drehzahl n, Übersetzungsverhältnis K und Bürstenverdrehwinkel α, konstant bleiben, ist die Kurve $\mathbf{e}'_{2\beta} = f(\mathbf{i}_1)$ der Magnetisierungskurve proportional.

Die Gleichung

$$\Omega K L_1 \mathbf{i}_1 \sin\alpha = [r_1 + r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t})]\mathbf{i}_1, \tag{20}$$

ist also für den Nullpunkt ($\mathbf{i}_1 = 0$) und für den Schnittpunkt der Widerstandsgerade mit der Kurve der E. M. K. der Bewegung (Abb. 2), gültig.

Man erziehlt also einen gutt bestimmten Arbeitspunkt welcher den Strom $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{10}$ entspricht.

Für den stationären Betrieb, falls man behauptet das die Ströme und Spannungen sinusformig von der Zeit abhängen, kann man in der Gleichung (13) das Ableitungssymbol d/dt, durch jω, und den Raumdrehvektor des Stromes $\mathbf{i}_1$ durch sein Effektivwert ersätzen. Man erziehlt so:

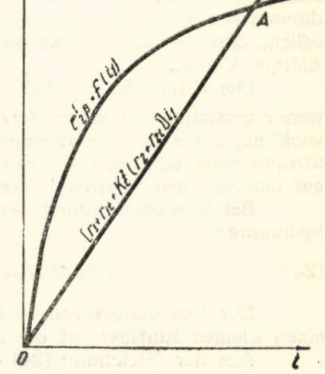


Abb. 2

$$\mathrm{j}\omega \underline{I}_1 [L_1 (1 + K\cos\alpha) + sL_1 K(K + \cos\alpha) + L_{1s} + L_{1t} + K_t^2 (L_{2s} + L_{2t})] +$$
$$+ \underline{I}_1 [r_1 + r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t}) - \Omega K L_1 \sin\alpha] = 0,$$

oder $\underline{Z}\underline{I}_1 = 0$.

Es ist klar das die Lösung $\underline{I}_1 = 0$ nicht interessiert so das für die stationäre Selbsterregungserscheinung es nötig ist das:

$$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega [L_1 (1 + K\cos\alpha) + sL_1 K(K + \cos\alpha) + L_{1s} + L_{1t} +$$
$$+ K_t^2 (L_{2s} + L_{2t})] + [r_1 + r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t}) - \Omega K L_1 \sin\alpha] = 0. \tag{21}$$

Diese Gleichung ist nur wenn zugleich dessen reeler und imaginärer Teill null sind gültig, also wenn:

$$r_1 + r_{1_t} + K_t^2 (r_2 + r_{2_t}) - \Omega K L_1 \sin \alpha = 0 \tag{22}$$

und

$$L_1 (1 + K \cos \alpha) + sKL_1 (K + \cos \alpha) + L_{1_s} + L_{1_t} + K_t^2 (L_{2_s} + L_{2_t}) = 0. \tag{23}$$

Aus der Gleichung (22) kann man den Ausdruck der Drehzahl bei der Selbsterregung erscheint erziehlen, während die Gleichung (23) die Frequenz der selbsterregten Ströme gibt [5].

3. Rechenmethode des Primärstromes und der Klemmenspannung der selbsterregten Maschine

a) *Bestimmung der Kurve* $L_1 = f(I_m)$

Um den Primärstrom und die Klemmenspannung der selbsterregten Maschine berechnen zu können muss dessen Kurve $L_1 = f(I_m)$ bekannt sein.

Der Wert der Hauptinduktivität des Ständers L_1 ist von der Eisensättigung der Maschine abhängig. Der Strom I_m ist eine fiktive Grösse, die so gewählt wurde das die Koordinaten der Kurve $L_1 = f(I_m)$ nur von den Magnetisierungszustand der Maschine abhängen sollen, also sie sollen unabhängig von Drehzahl n, Bürstenwinkel α und Übersetzungsverhältnis K sein.

Die Kurve $L_1 = f(I_m)$ kann, wenn man die Ständerwicklung der stillstehende Stromwendermaschine mit einer Netzfrequenten Dreiphasenspannungssystem speisst und die Läuferwicklung offen lässt erfahrungsmässig ermittelt werden. Es wird empfohlen die Bürsten vom Stromwender aufzuheben damit diese sich nicht anzünden. Ausserdem fälschen die Ströme aus den von den Bürsten kurzgeschlossenen Spullen die Resultate.

Bei Vernachlässigung des Spannungsabfalls in der Ständerwicklung ist die aufgedrückte Spannung:

$$U_{1m} \cong E_{1m} = 2\pi f w_1 k_{w1} \Phi = 2\pi f L_1 I_m = \omega L_1 I_m \,. \tag{24}$$

Der Spannungsabfall in der Ständerwicklung überschreitet nicht 5% und hat dadurch einen kleinen Einfluss auf die Resultate.

Aus der Gleichung (24) erziehlt man die Hauptinduktivität des Ständers

$$L_1 \cong \frac{U_{1m}}{\omega I_m}. \tag{25}$$

Mit dieser erfahrungsmässigen Methode kann man nicht die Kurve $L_1 = f(I_m)$ für Ströme I_m, die den Nennstrom überschreiten, erziehlen. Wie bekannt ist, finden grosse magnetische Sättigungen bei Strömen I_m die den Nennstrom weit überschreiten wo auch, bei Netzfrequenz, die Spannungen gefährlich werden, statt.

Die erfahrungsmässige Kurve wurde durch Algebrisierung der Charakteristik $U_m = f(I_m)$, mit der Methode von [12], durch der Funktion

$$I_m = 1{,}74 \text{ sh } 0{,}495 \times 10^{-2} \, U_m \tag{26}$$

ausgedrückt und dann wurde die Kurve $L_1 = f(I_m)$ mit der Formel (25) berechnet. Die Abb. 3 zeigt diese Kurve.

Die genaue Kurve $L_1 = f(I_m)$ kann rechnerisch beim Entwurf, oder aus den erfahrungsmässigen Daten der selbsterregten Maschine, erhalten werden.

b) *Der Wert des Primärstromes und der Klemmenspannung an Ständerwicklung*

Aus der Gleichung (22) kann man die Grösse der Hauptinduktivität des Ständers, für welche die Selbsterregungsbedingung erfüllt ist, erziehlen:

$$L_1 = \frac{30}{\pi p} \cdot \frac{r_1 + r_{1_t} + K_t^2 (r_2 + r_{2_t})}{n K_t K_m \sin \alpha}. \tag{27}$$

Der hier errechneten Hauptinduktivität L_1 entspricht ein aus Abb. 3 entzogener fiktiver Strom I_m.

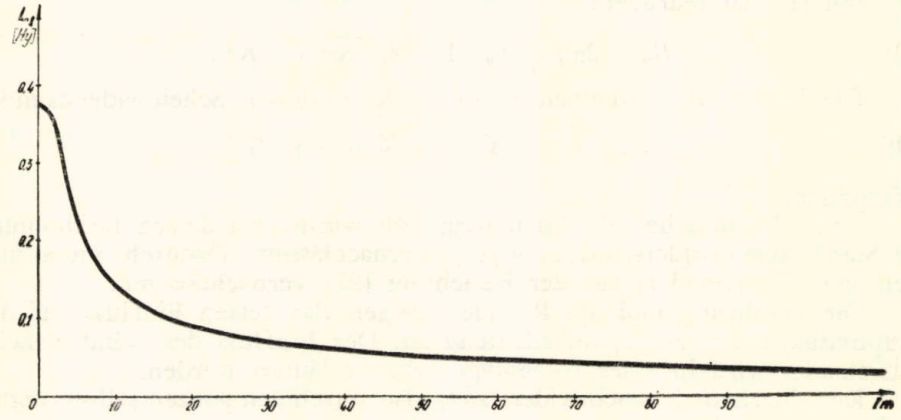


Abb. 3

Aus der Beziehung (27) sieht man das bei ansteigender Drehzahl n, die Hauptinduktivität L_1, kleiner, also der Strom I_m grösser wird.

Auch wird L_1 kleiner falls der Bürstenverdrehwinkel α von 0° bis 90° el. wäckst, oder von 180° bis 90° sinkt.

Die Hauptinduktivität L_1 erreicht bei $\alpha = 90°$ ihren Kleinstwert, also der Strom I_m seinen Höchstwert. Bei $\alpha = 0°$ und 180° ist $L_1 = \infty$, und die Selbsterregung wird unmöglich.

L_1 wird grösser und I_m kleiner beim Anwacksen des Transformatorübersetzungsverhältnisses K_t. Weil der Strom I_m nicht proportional mit der Vergrösserung der Haptinduktivität sinkt wird die E.M.K. E_{10} nicht proportional mit den Gesamtübersetzungsverhältnis K ansteigen.

Wir bemerken noch das wenn es eine Möglichkeit zur Änderung des Maschinenübersetzungsverhältnisses K_m vorhanden sei, mit dessen anwacksen wird L_1 sinken und der Strom I_m ansteigen.

Die Ströme und Spannungen vergrössern sich also falls die Steigerung der Frequenz durch anwacksen des Maschinenübersetzungsverhältnisses K_m erziehlt wird.

Ein stabiler, gutt bestimmter selbsterregter Strom, erscheint nur wenn die aus der Gleichung (27) erhaltene Hauptinduktivität sich, zwischen den Grenzwerten der Charakteristik $L_1 = f(I_m)$, und unter dessen Höchstwert, auf ihren geraden Teil, befindet. Die Stabilität erscheint da von das eine Steigerung des Stromes I_m zu Verkleinerung der Induktivität L_1, und eine Verminderung des Stromes zu dessen Vergrösserung, führt.

Im § 2 dieser Arbeit wurde bewiesen das ein stabiles selbsterregtes Arbeitsregime nur wenn die Maschine mit einer gewissen Eisensättigung also auf den Teil der Kurve $L_1 = f(I_m)$, für welchen L_1 sich mit der Stromsteigerung verkleinert arbeitet, erscheinen kann.

Die im Ständer vom Strom I_m erzeigte E.M.K. ist durch die Beziehung (61) von [10] ausgedrückt:

$$E_m = 2\pi f L_1 I_m \sqrt{1 + 2K\cos\alpha + K^2}\,. \tag{28}$$

Die E.M.K. E_m wird einen Strom, im Kreis dessen Scheinwiderstand ist:

$$\underline{Z}_0 = R + \mathrm{j}X + \mathrm{j}sx_1K(K + \varepsilon^{-\mathrm{j}\alpha}) \tag{29}$$

aufzwingen.

Zum Vereinfachen der Gleichung (28) wurde, bei dessen Bestimmung der Ständerscheinwiderstand $r_1 + \mathrm{j}x_{1s}$, vernachlässigt. Dadurch muss man auch den Widerstand r_1 aus der Beziehung (27) vernachlässigen.

Die Erfahrung und das Rechnen zeigen das dessen Einfluss auf den Hauptinduktivitätswert L_1 unbedeutend ist. Der Einfluss des Ständerscheinwiderstandes wird in einer folgenden Arbeit erläutert werden.

Der durch den Scheinwiderstand, also durch den ganzen selbsterregten Kreis flüssende Strom ist:

$$I_{10} = \frac{E_m}{Z_0} = \tag{30}$$

$$= \frac{L_1 I_m \sqrt{1 + 2K\cos\alpha + K^2}}{\sqrt{\frac{R^2}{4\pi^2 f^2} + L^2 + s^2 L_1^2 K^2 (1 + 2K\cos\alpha + K^2) + 2sL_1K\left[\frac{R}{2\pi f}\sin\alpha + L(K + \cos\alpha)\right]}}\,.$$

Aus dieser Gleichung ist erzichtlich das durch den Primärkreis der selbsterregten Maschine ein mit I_m proportionaler Strom I_{10} flüsst. Um die Einführung des fiktiven Stromes I_m zu vermeiden müsste man die Kurve $L_1 = f(I_{10})$ für jeden der Wertereihe n, K_t und α berechnen.

Die an einer Phase der Ständerwicklung der selbsterregten Maschine gemessene Klemmenspannung ist von folgender Beziehung gegeben:

$$U_{10} \cong E_{10} = 2\pi f L_1 I_{10}\,. \tag{31}$$

Aus den Gleichungen (30) und (31) kann die Kurve $L_1 = f(I_m)$, wenn das Änderungsgesetz des Stromes I_1 in Abhängung von einer Reihe von Parametern n, K und α bekannt ist, erziehlt werden.

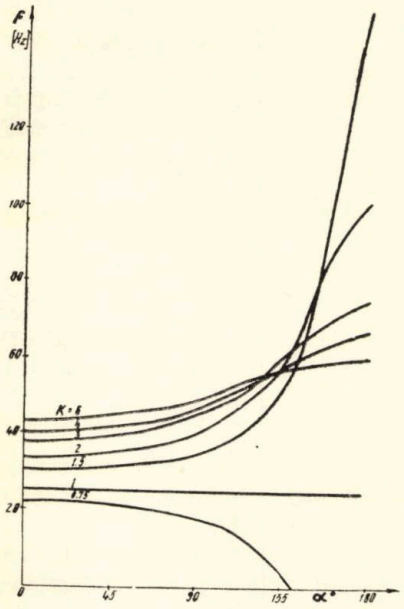


Abb. 4

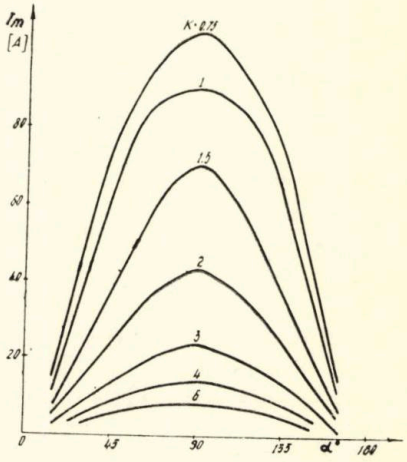


Abb. 5

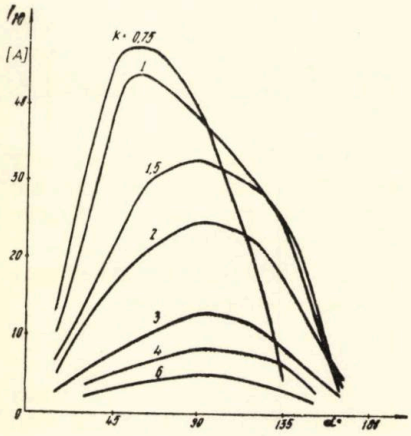


Abb. 6

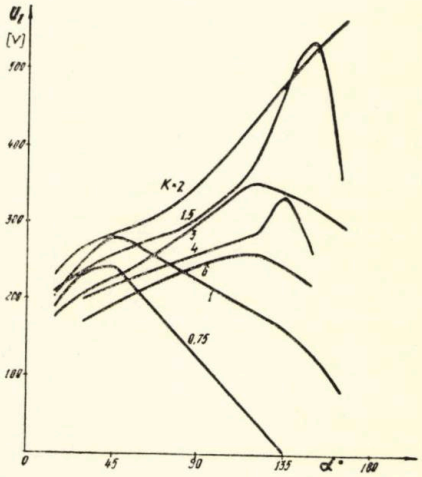


Abb. 7

Die hier ermittelten Werte des Primärstromes und der Klemmenspannung entsprechen den Leerlauf des selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators. Dadurch wurden sie durch I_{10} und U_{10} bezeichnet.

Die Unsymetrie der Gleichung (30) im Verhältnis zu $\alpha = 90°$ ist der Grund der Verschiedenheit der Werte von I_{10} und U_{10} für den Winkel α und $180° - \alpha$. L_1 und I_m haben dagegen die selben Werte für α und $180° - \alpha$.

Wir werden hier die Rechenergebnisse des Primärstromes und der Klemmenspannung für gewisse Zustände der Maschine, um die hier erlangten Darlegungen zu erläutern, vorstellen.

Dafür wurden die an einer Drehstrom-Stromwenderreihenschlussmaschine mit einfachem Bürstensatz von 1/1, 5/3, 1 kW; 1 750/1 500/800 t/m, bei 50 Hz und $2p = 4$, gemessene Parameter genützt. Der Zwischentransformator hat 6 kVA und ist mit regelbaren Anzapfungen an der Sekundärwicklung, welche das Gesamtübersetzungsverhältnis K zwischen 0,5 und 10 zu ändern erlauben, vorgesehen.

Die Wirkwiderstände sind: $r_1 = 1{,}5\ \Omega$, $r_2 = 0{,}15\ \Omega$, $r_{1t} = 0{,}4\ \Omega$, $r_{2t} = 0{,}018\ \Omega$ für $K = 1$. Die Maschinen- und Transformator-Streublindwiderstände bei 50 Hz sind: $x_{1s} = 2{,}7\ \Omega$, $x_{2s} = 0{,}18\ \Omega$, $x_{1t} = 0{,}25\ \Omega$, $x_{2t} = 0{,}01\ \Omega$; das Maschinenübersetzungsverhältnis ist $K_m = 0{,}135$. Die Drehzahl ($n = 1\,500$ t/m) wurde als konstant gerechnet.

Abb. 4 stellt die Frequenz der selbsterregten Ströme in Abhängigkeit vom Bürstenwinkel α, für 7 Werte des Übersetzungsverhältnisses K (= 0,75; 1; 1,5; 2; 3; 4,06; 6) dar. Die Frequenzen wurden mit der annäherenden Beziehung (60) aus [10] berechnet:

$$f = \frac{pn}{60} \cdot \frac{K(K + \cos\alpha)}{1 + 2K\cos\alpha + K^2}. \tag{32}$$

Bei $K = 0{,}75$ erziehlt man für $\alpha > 135°$ negative Frequenzwerte, welche keinen Sinn haben und dadurch nicht dargestellt wurden.

Die Abb. 5...7 stellen die Kurven $I_m = f(\alpha)$, $I_{10} = f(\alpha)$ und $U_{10} = f(\alpha)$ für die Übersetzungsverhältnisse dar.

Die aus der Betrachtung dieser Daten entzogenen wichstigten Bemerkungen sind:

Mit der Vergrösserung des Übersetzungsverhältnisses K sinken die Ströme I_{10} und die Spannungen U_{10} wacksen an. Bei $K > 2$ vergrössert sich die Spannung U_{10} nicht mehr zugleich mit den Übersetzungsverhältnis weill der Strom I_{10} sehr gesunken ist. Für $K > 6$, erziehlt man Selbsterregungsbedingungen nur für Bürstenwinkel α die nahe zu 90° sind.

Während die Kurven $I_m = f(\alpha)$ im Verhältnis zu $\alpha = 90°$ symetrisch sind, behalten die Kurven des wirklichen Stromes I_{10} und der Klemmenspannung U_{10} diese Symetrie nicht. Diese Tatsache wurde Erfahrungsmässig in [5] ermittelt.

Die Höchstwerte des Ständerstromes und der Klemmenspannung werden bei $K \leqslant 1$, für $\alpha < 90°$ erziehlt, was man durch die Form der Frequenzkurve erklären kann. Bei $K > 1$ finden diese Höchstwerte für $\alpha > 90°$ statt.

Wenn α und I_{10} unverändert bleiben, wäckst U_{10}, bei Vergrösserung von K, an.

Die fiktiven Ströme I_m sind cca. zwei Mahl grösser als die wirklichen I_{10}. Dadurch wurde das algebrisieren der Magnetisierungskurve der Maschine nötig.

In Abb. 3 sieht man nicht den geraden Teil der Kurve $L_1 = f(I_m)$ klar an, weill ein grosser Abschnitt ihres gesättigten Gebietes dargestellt wurde. Es wurde erfahrungsmässig bemerkt das bei $L_1 > 0{,}3$ H mehr keine stabile Selbsterregung erscheinen kann.

c) *Erfahrungsmässige Prüfung der rechnerisch ermittelten Primärstrome und Klemmenspannungen*

Die Abb. 8 stellt die Kurven der Klemmenspannung und des Primärstromes in Abhängigkeit vom Bürstenwinkel: $U_{10} = f(\alpha)$, $I_{10} = f(\alpha)$, bei konstanter Drehzahl, $n = 1\,500$ t/m, und konstantem Übersetzungsverhältnis, $K = 4{,}06$, dar. Mit voller Linie werden die mit den Gleichungen (27), (30) und (31) berechneten und mit punktierter Linie die Erfahrungsmässigen in den selben Bedingungen erziehlten Werte, dargestellt. Die Zeichnung enthält auch die Kurve $I_m = f(\alpha)$ für diesen Fall.

Zur Vergleichung wurden die gerechneten Werte für $K = 4{,}06$ gewählt, weil dass das kleinste Übersetzungsverhältnis ist, bei welchen man erfahrunsmässig die Kurven $I_{10} = f(\alpha)$ und $U_{10} = f(\alpha)$ für den ganzen Änderungsband des Bürstenwinkels α, erziehlen konnte.

Die Differenzen zwischen den berechneten und den erfahrungsmässigen Werten sind folgender Weise zu erklären:

a) In den Rechenformeln wurde nicht auf den vom Strom abhängigen veränderlichen Kontaktwiderstand zwischen Bürsten und Stromwender geachtet. Um diesen zu beachten musste man in den Formeln den Spannungsabfall auf den Bürstenpaar ΔU_{pe}, dessen Wert praktisch nicht vom Strom abhängt, einsetzen. In der hier vorgestellten Methode ist das grundsätzlich nicht möglich. Eine genauere Bestimmung des Stromes kann nur durch wiederholten Berechnen, erziehlt werden. Der Spannungsabfall am Bürsten-Stromwenderkontakt überschreitet oft, in unseren Fall, 20% der Phasensekundärspannung, was der wichtigste Grund des Methodenfehlers, wenn man den ausserordentlich kleinen Wert des Sekundärwirkwiderstandes in Betracht nimmt, ist.

Zum Rechnen wurde der Mittelwert des Sekundärwirkwiderstandes je Phase r_2 genützt. Bei kleinen Strömen ist der wirkliche Wert dieses Widerstandes grösser als der Mittlere, also werden die gemessenen Ströme I_{10} kleiner als die berechneten sein. Bei grossen Strömen sind die gemessenen Werte grösser als die berechneten.

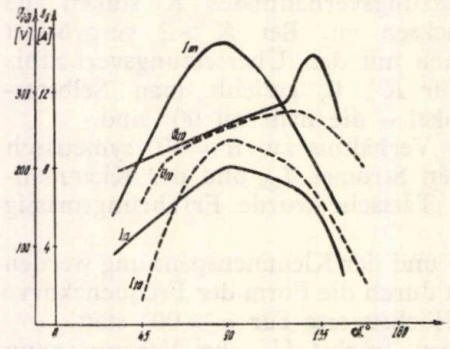


Abb. 8

Die von uns zum Studium genützte Maschine hat ein zu schwach bemessenes Bürsten-Stromwendersystem, so das die erfahrungsmässigen Daten bei grossen Bürstenstromdichtungen (bis cca. 20 A/cm²) erziehlt worden sind. Diese Maschine wurde im Laboratorium für elektrische Maschinen der Technischen Hochschule Jassy, von einen Kollektiv dessen der Verfasser dieser Arbeit zugehörte, entworfen und mit geringen materiellen Mitteln, gebaut.

b) Die Gleichungen des Ersatzschemas wurden unter Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes des Transformators, ermittelt. Aus Abb. 8 ist ersichtlich das die Differenz zwischen den berechneten und den erfahrungsmässigen Werten grösser bei $\alpha < 90°$ ist, wo durch den sinken der Frequenz der Magnetisierungsstrom des Transformators anwäckst. Aus denselben Grund werden erfahrungsmässig nicht die wichtigsten Steigerungen der Spannungen für einige Werte des Bürstenwinkels α, ersichtlich.

c) Die Maschinenstreublindwiderstände sinken bei Eisensättigungsverstärkung, ins besondere bei unserer mit halbgeschlossenen Nuten vorgesehener Maschine. Dadurch sind die gemessen Ströme grösser als die berechneten.

d) Die Vergrösserung der Streublindwiderstände des Transformators bei dessen Sättigung kann vernachlässigt werden.

e) Der Scheinwiderstand der Ständerwicklung wurde in den Formeln vernachlässigt.

f) Beim Studium von Drehstromreihenschlussmotoren werden Rechnemethoden die die Eisensättigung vernachlässigen, genützt [1], [3].

4. Schlussfolgerungen

1. Im ersten Teill dieser Arbeit wird theoretisch die Selbsterregungserscheinugsmöglichkeit der Drehstrom-Stromwendermaschine, mit Hilfe des Raumdrehvektorbegriffs, bewiesen.

2. Die rechnerische Ermittlungsmethode der Ströme und der Spannungen die im zweiten Teill dargestellt ist, erleichtert die theoretische Erforschung der Betriebseigenschaften des selbsterregten Drehstromstromwendergenerators.

3. Die rechnerisch erziehlten Werte des Primärstromes und der Klemmenspannung sind mit den erfahrungsmässigen gutt zusammengefallen. Das hier dargestellte theoretische Studium bestätigt die erfahrungsmässigen Daten die in [5] und [9] veröffentlicht wurden.

4. Eine bessere Bestimmung der berechneten Werte der Ströme und Spannungen ist durch betrachten des mit den Strom veränderlichen Charakters des Bürsten-Stromwender Kontaktwiderstandes und durch Benützung des Ersatzschemas welches nicht den Magnetisierungsstrom des Transformators vernachlässigt und in Abb. 3 von [10] gegeben ist, möglich.

5. Die Analyse der in dieser Arbeit veröffentlichen Daten zeigt das bei kleine Übersetzungsverhältnisse K, die Ströme und Spannungen unzulässig grosse Werte erreichen. Um diese Maschine als Spannungsgenerator veränderlicher Frequenz verwenden zu können muss gleichzeitig dessen Bürstenwinkel und Übersetzungsverhältnis verändert werden.

Bedeutung der wichstigten Formelzeichen

$\varepsilon = 2{,}718...$, $a = \varepsilon^{j120}$, $a^2 = \varepsilon^{j240}$, $\varepsilon^{j\pi} = -1$, $\varepsilon^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j \sin\alpha$, α—Bürstensatz-Verdrehwinkel, f—Frequenz, $j = \sqrt{-1}$, n—Drehzahl, p—Polpaarzahl, w_1, w_2—Windungszahlen je Phase der Ständer- und Läufer-Wicklung der Drehstrom-Stromwendermaschine, k_{w1}, k_{w2}—Wicklungsfaktoren für Ständer u. Läufer, w_{1t}, w_{2t}—Windungszahlen der Primär- u. Sekundär-Wicklungen des Zwischentransformators T, $K_t = w_{1t}/w_{2t}$—Übersetzungsverhältnis des Transformators, $K_m = w_2 k_{w2}/w_1 k_{w1}$— Übersetzungsverhältnis der Maschine, $K = K_m K_t$— sämtliches Übersetzungsverhältnis, i_a, i_b, i_c—Momentanwerte der Phasenströme, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$—Raumdrehvektor der Ströme des Primär- u. Sekundarkreises, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — Raumdrehvektoren der im Ständer u. Läufer erscheinenden E.M.K., $\mathbf{i}_2' = \mathbf{i}_2/K_t$, $\mathbf{e}_2' = K_t \mathbf{e}_2$ — auf die Primärseite umgerechneter Strom und E.M.K., I_m — fiktiver Ständerstrom, I_{10}—Leerlaufprimärstrom des selbsterregten Drehstromgenerators, L_{1s}, L_{1t}—Streuinduktivitäten je Phase der Ständerwicklung der Maschine und der

Primärwicklung des Transformators, L_{2s}, L_{2t} — Streuinduktivitäten je Phase der Läufer- und Sekundär-Wicklungen, $L'_{2s} = K_t^2 L_{2s}$, $L'_{2t} = K_t^2 L_{2t}$ — deren zum Primärkreis umgerechnete Werte, $L_1 = \frac{3}{2} \Lambda (w_1 k_{w1})^2$ — Hauptinduktivität der Ständerwicklung je Phase, $L = L_{1t} + K_t^2 (L_{2s} + L_{2t})$, x_{1s}, x_{1t}, x_{2s}, x_{2t}, x_1, X — die entsprechenden Blindwiderstände, r_1, r_{1t} — Winderstände je Phase der Ständerwicklung der Maschine und der Primärwicklung des Transformators, r_2 — Läuferwiderstand je Phase, $r'_2 = K_t^2 r_2$ — Läuferwiderstand zum Primärkreis umgerechnet, r_{2t}, $r'_{2t} = K_t^2 r_{2t}$ — gleichfalls für Transformatorsekundärwicklung, $R = r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t})$, Λ — totale magnetische Leitfähigkeit für den Hauptfluss des Generators, $\Omega = 2\pi pn/60$ — Winkelgeschwindigkeit des Läufers, U_{10} — Klemmenspannung des leerlaufenden selbsterregten Drehstromgenerators.

Tehnische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl der elektrischen Messen
und elektrischen Maschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Richter R., *Elektrische Maschinen.* Bd. V, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1950.
2. Kozicek J., ETZ, 1935, **51**, S. 1121.
3. Michael W., *Theorie der Wechselstrommaschinen in vektorieller Darstellung.* B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1937.
4. Rüdenberg R., *Transient Performance of Electric Power Systems.* Ed. I., Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., New-York, Toronto, London, 1950.
5. Corlăţeanu V., Bergman I., Şerban Gh., Leonte P., Ştirbu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VI (XI)**, *3—4*, pp. 207—220.
6. — St. şi cerc. şt., Fiz. şi şt. tehn., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1961, **XII**, *2*, pp. 249—265.
7. Bergman I., Corlăţeanu V., Şerban Gh., Leonte P., Ştirbu V., St. şi cerc. şt., Fiz. şi şt. tehn., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1961, **XII**, *2*, pp. 375—382.
8. Corlăţeanu V., Bergman I., Electrotehnica, 1962, *7*, pp. 250—256.
9. — Electrotehnica, 1962, *8*, pp. 294—303.
10. Bergman I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 261—274.
11. Kovacs K. P., Racz I., *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen.* Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1959.
12. Бессонов Л. А., *Нелинейные электрические цепи.* Изд. 2, Высшая школа, М., 1964.

CU PRIVIRE LA POSIBILITATEA APARIŢIEI AUTOEXCITĂRII LA O MAŞINĂ TRIFAZATĂ CU COLECTOR

(Rezumat)

Folosind noţiunea de vector spaţial rotitor, se demonstrează teoretic posibilitatea apariţiei autoexcitării la o maşină trifazată cu colector.

Se prezintă o metodă de calcul a curentului din circuitul primar şi a tensiunii la borne şi verificarea experimentală a acesteia. De asemenea se indică procedeele care permit precizarea valorilor calculate.

Se deduce concluzia că pentru limitarea curenţilor din maşina autoexcitată este necesar ca reglajul frecvenţei tensiunii sale de ieşire să se facă prin variaţia concomitentă a unghiului de decalaj al periilor şi a raportului de transformare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 621.3.014.8; 538.551.25

ASUPRA REZONANŢEI ÎN CIRCUITE CUPLATE

DE

HUGO ROSMAN,

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

I. Introducere

1. Studiul comportării unui circuit cuplat (CC) la rezonanţă este întreprins în literatura de specialitate, aproape în cvasiunanimitatea cazurilor, asimilînd CC unui dipol (D — fig. 1) care schimbă energie cu exteriorul numai pe la poarta $1,1'$ [1], [2]. Incluzînd în acest mod, mai mult sau mai puţin artificial, receptorul în structura (de tip cuadripol a) CC, studiul comportării circuitului la rezonanţă se rezumă în principal la determinarea frecvenţelor de rezonanţă precum şi la analizarea caracteristicilor de frecvenţă.

2. La o analiză mai amănunţită a problemei realizării rezonanţei într-un CC şi a studiului comportării circuitului considerat în regimurile de rezonanţă, se poate ajunge la concluzii de vădit interes teoretic şi practic, care pun în evidenţă unele limite ale punctului de

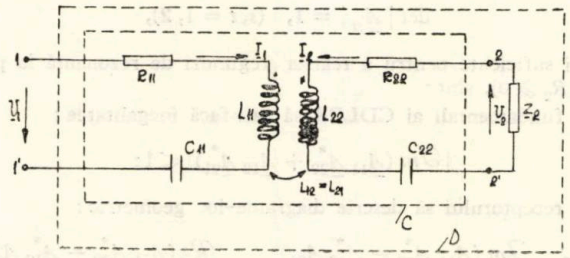


Fig. 1

vedere ce se rezumă la a studia CC asimilîndu-l unui dipol. Aceste limite pot fi depăşite utilizînd mijloace de investigaţie adecvate, bazate pe considerarea regimurilor de rezonanţă la porţile cuadripolului [3], [4] echivalent CC considerat. Ne limităm la a semnala cîteva aspecte, care sînt escamotate în cazul cînd se recurge la asimilarea CC unui dipol, prin includerea

sarcinii în structura CC. Anume, se poate pune, în primul rînd, problema dacă un CC de structură dată (exclusiv receptorul) şi invariabilă, reprezentat printr-un cuadripol diport, liniar, pasiv şi reciproc (CDLPR), este capabil de a realiza, la orice frecvenţă, rezonanţa la poarta de intrare atunci cînd se poate acţiona asupra parametrilor receptorului. În al doilea rînd apare firească problema adaptabilităţii, la o valoare dată a frecvenţei — la care este posibil de realizat rezonanţa la poarta de intrare a CC — a impedanţei receptorului (care să asigure efectiv realizarea acestui regim). Soluţionarea analitică a acestor probleme, susceptibilă de o verificare experimentală a rezultatelor obţinute, nu este posibilă în cazul în care CC studiat este asimilat unui dipol, incluzînd şi receptorul, Dimpotrivă, reprezentînd CC printr-un cuadripol (C — fig. 1) şi adaptînd rezultatele obţinute în cîteva lucrări precedente [3], [4], relative la studiul regimurilor de rezonanţă ale CDLPR, pentru cazul particular al CC considerat, soluţionarea acestor probleme devine imediat posibilă.

De altfel, reprezentarea CC considerat printr-un cuadripol pare mai naturală decît cea care recurge la un dipol, prin procedeul indicat, deoarece pune în evidenţă rolul funcţional al CC ca element de transfer a energiei electromagnetice, de la poarta de intrare, către cea de ieşire.

3. Scopul acestei Note este de a adăuga, la aspectele cunoscute, semnalate în literatura de specialitate, altele, inedite, relative la regimurile de rezonanţă într-un CC. Anume asimilînd CC studiat unui CDLPR, vom urmări, în principal, să determinăm condiţiile necesare şi suficiente de realizare a rezonanţei la poarta de intrare şi benzile de frecvenţă în care pot avea loc astfel de regimuri.

Rezultatele pe care le obţinem, valabile pentru CC reprezentat în fig. 1, constituit din două subreţele cuplate magnetic, pot fi adaptate cu uşurinţă pentru orice alt tip de CC în care cuplajul este electric, galvanic etc. Totodată concluziile la care ajungem, specifice unor CC electrice, se pot extinde fără dificultate şi pentru alte tipuri de CC (mecanice [5], electromecanice [6] ş. a.).

4. Într-o lucrare precedentă [3] am arătat că fiind dat un CDLPR de ecuaţii:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

cu

$$\det |\underline{A}_{st}| = 1, \quad (s, t = 1, 2), \tag{2}$$

condiţiile necesare şi suficiente pentru a realiza regimuri de rezonanţă la poarta de intrare, cu receptori pasivi ($R_2 \geqslant 0$), sînt:

a) parametrii fundamentali ai CDLPR să satisfacă inegalitatea:

$$|\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})| \leqslant 1; \tag{2}$$

b) impedanţa receptorului să descrie diagrama-loc geometric:

$$R_2^2 + X_2^2 + \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}^{*}\,\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{21}^{*})} R_2 + \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}^{*}\,\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{21}^{*})} X_2 + \tag{4}$$

$$+ \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{22}^{*})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{21}^{*})} = 0,$$

atunci cînd cuadripolul este alimentat în sens direct,

a') parametrii fundamentali ai CDLPR să satisfacă inegalitatea

$$|\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}^{*}\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*}|\leqslant 1; \tag{3'}$$

b') impedanța receptorului să descrie diagrama-loc geometric:

$$R_1^2+X_1^2+\frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}^{*}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}^{*}\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}^{*}\underline{A}_{22})}R_2+\frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*}-\underline{A}_{12}^{*}\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}^{*}\underline{A}_{22})}X_2+ \tag{4'}$$

$$+\frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}^{*}\underline{A}_{12})}{\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}^{*}\underline{A}_{22})}=0,$$

în cazul opus.

5. Ecuațiile CC reprezentat în fig. 1 sînt:

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\-\underline{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{Z}_{11}&\underline{Z}_{12}\\\underline{Z}_{21}&\underline{Z}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\\underline{I}_2\end{bmatrix}, \tag{5}$$

unde:

$$\underline{Z}_{ss}=R_{ss}+\mathrm{j}X_{ss},\quad \underline{Z}_{st}=\mathrm{j}X_{st},\quad X_{ss}=\omega L_{ss}-\frac{1}{\omega C_{ss}},\quad X_{st}=\omega L_{st}, \tag{6}$$

$$(s,t=1,2;\quad s\neq t).$$

Confruntînd ecuațiile (1) și (5) și ținînd seama de condiția de reciprocitate (2), rezultă pentru parametrii fundamentali ai CDLPR echivalent CC considerat, expresiile:

$$\underline{A}_{11}=-\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}},\quad \underline{A}_{12}=\frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}-\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{12}},\quad \underline{A}_{21}=-\frac{1}{\underline{Z}_{12}},\quad A_{22}=-\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}}, \tag{7}$$

prezentînd interes în cele ce urmează.

În Anexă sînt incluse o serie de expresii utile în studiul regimurilor de rezonanță ale unui CC și care vor fi folosite în paragrafele următoare.

II. Condiții necesare și suficiente de realizare a rezonanței la poarta de intrare

6. Formularea acestor condiții este posibilă dacă se particularizează în mod adecvat, pentru cazul unui CC de tipul studiat, rezultatele obținute în [3] (v. § 4 al acestei Note). Dacă se ține seama totodată de relațiile cuprinse în Anexă rezultă în definitiv că

Condițiile necesare și suficiente de realizare a rezonanței la poarta de intrare a unui CC, funcționînd în regim permanent sinusoidal și alimentînd un receptor pasiv sînt următoarele:

a) *parametrii CC să satisfacă inegalitatea*:

$$2|X_{11}|R_{22}\leqslant X_{12}^2, \tag{8}$$

b) *impedanța receptorului să descrie diagrama-loc geometric*:

$$(9)\quad R_2^2 + X_2^2 + 2R_{22}R_2 + \left(2X_{22} - \frac{X_{12}^2}{X_{11}}\right)X_2 + R_{22}^2 + X_{22}^2 - \frac{X_{22}}{X_{11}}X_{12}^2 = 0,$$

în cazul cînd CC este alimentat în sens direct,

a') *parametrii CC să satisfacă inegalitatea*:

$$(8')\quad 2\,|X_{22}|\,R_{11} \leqslant X_{12}^2,$$

b') *impedanța receptorului să descrie diagrama-loc geometric*

$$(9')\quad R_1^2 + X_1^2 + 2R_{11}R_1 + \left(2X_{11} - \frac{X_{12}^2}{X_{22}}\right)X_1 + R_{11}^2 + X_{11}^2 - \frac{X_{11}}{X_{22}}X_{12}^2 = 0,$$

în cazul în care CC este alimentat în sens invers.

7. Diagrama-loc geometric (9) reprezintă, la o frecvență constantă a semnalului aplicat la poarta de intrare, arcul de cerc situat în semiplanul $R_2 \geqslant 0$, avînd centrul în

$$(10)\quad R_{2_c(cc)} = -R_{22},\quad X_{2_c(cc)} = -X_{22} + \frac{X_{22}^2}{2X_{11}},$$

și raza

$$(11)\quad r_{2_c(cc)} = \frac{X_{12}^2}{2k_z\,|X_{11}|},$$

în timp ce diagrama-loc geometric (9') reprezintă, în aceleași condiții, arcul de cerc situat în semiplanul $R_1 \geqslant 0$, avînd centrul în

$$(10')\quad R_{1_c(cc)} = -R_{11},\quad X_{1_c(cc)} = -X_{11} + \frac{X_{12}^2}{X_{22}},$$

și raza

$$(11')\quad r_{1_c(cc)} = \frac{X_{12}^2}{2k_z\,|X_{22}|},$$

unde k_z reprezintă scara impedanțelor [7].

Este ușor de observat că:

a) centrul cercului (9) este totdeauna situat în semiplanul $R_2 \leqslant 0$ în timp ce centrul cercului (9') se află situat totdeauna în semiplanul $R_1 \leqslant 0$;

b) cercul (9) intersectează totdeauna axa $R_2 = 0$ dacă parametrii CC satisfac inegalitatea (8) și cercul (9') intersectează axa $R_1 = 0$ ori de cîte ori parametrii CC satisfac inegalitatea (8');

c) cercul (9) intersectează axa $X_2 = 0$ iar cercul (9') intersectează axa $X_1 = 0$ dacă parametrii CC verifică inegalitatea

$$(12)\quad |\,2X_{11}X_{22} - X_{12}^2\,| \leqslant X_{12}^2.$$

Dacă nu este satisfăcută această din urmă inegalitate, cercul (9) rezultă a fi situat în semiplanul $X_2 \geqslant 0$ dacă parametrii CC verifică, în plus, relația de semne:

$$(13)\quad \operatorname{sign}(2X_{11}X_{22} - X_{12}^2) = -\operatorname{sign} X_{11},$$

sau în semiplanul $X_2 \leqslant 0$ dacă parametrii CC verifică, în plus, relația

13′) $$\operatorname{sign}(2X_{11}X_{22} - X_{12}^2) = \operatorname{sign} X_{11}.$$

Rezultate asemănătoare se obțin în acest caz și cu referire la poziția cercului (9′) în raport cu axa $X_1 = 0$.

8. Examinînd ecuațiile (9) și (9′) rezultă că *parametrii receptorului care asigură realizarea rezonanței la poarta de intrare a unui CC sînt*: a) *independenți de rezistența* R_{11} *a subreței primare — în cazul alimentării sale în sens direct*; b) *independenți de rezistența* R_{22} *a subreței secundare, în situația opusă.*

9. In cazul în care parametrii CC satisfac relația:

(14) $$X_{11} = 0,$$

cu alte cuvinte pentru toate frecvențele la care este realizată în subrețeaua primară rezonanța, diagrama-loc geometric (9) degenerează în dreapta de ecuație:

(15) $$X_2 = -X_{22}.$$

În consecință, oricare ar fi regimul de funcționare al unui CC, alimentat în sens direct, care realizează rezonanța la poarta de intrare astfel încît subrețeaua sa primară să fie la rezonanță, în mod necesar receptorul trebuie să aibă o astfel de impedanță încît subrețeaua secundară (inclusiv receptorul) să fie la rezonanță. În acest mod se realizează simultan: a) rezonanța la poarta de intrare, b) rezonanța în subrețeaua primară, c) rezonanța în subrețeaua secundară și eventual d) rezonanța la poarta de ieșire. Acest aspect este parțial relatat și în literatura de specialitate, în care se tratează problema rezonanței în CC (de ex. [8]), fiind cunoscut sub denumirea de *rezonanță totală.*

La concluzii asemănătoare se ajunge în cazul CC alimentat în sens invers.

III. Benzile de frecvență de rezonanță

10. O condiție necesară de realizare a rezonanței la poarta de intrare a unui CC o constituie obligativitatea ca parametrii săi să satisfaca inegalitatea (8), în cazul alimentării sale în sens direct, sau inegalitatea (8′) în cazul opus (v. § 6). Or, pentru un CC de structură dată, aceste inegalități pot fi satisfăcute numai în interiorul și la extremitățile unor benzi de frecvență (BFR), ce urmează a fi delimitate în cele ce urmează.

11. Dacă se ține seama de relațiile (6), inegalitățile (8), (8′) pot fi scrise sub formele echivalente:

(16) $$2R_{22}\,|\,C_{11}L_{11}\omega^2 - 1\,| \leqslant C_{11}L_{12}^2\omega^3,$$

respectiv

(16′) $$2R_{11}\,|\,C_{22}L_{22}\omega^2 - 1\,| \leqslant C_{22}L_{12}^2\omega^3.$$

Inegalitatea (16) implică necesitatea satisfacerii simultane a inegalităților:

(17) $$\omega^3 + a\omega^2 - b \geqslant 0, \quad \omega^3 - a\omega^2 + b \geqslant 0,$$

unde

(18) $$a = \frac{2L_{11}R_{22}}{L_{12}^2} > 0, \quad b = \frac{2R_{22}}{C_{11}L_{12}^2} > 0.$$

Analog, inegalitatea (16′) conduce la necesitatea verificării simultane a inegalităţilor :

(17′) $$\omega^3 + a'\omega^2 - b \geqslant 0, \quad \omega^3 - a'\omega^2 + b' \geqslant 0,$$

unde

(18′) $$a' = \frac{2L_{22}R_{11}}{L_{12}^2} > 0, \quad b' = \frac{2R_{11}}{C_{11}L_{12}^2} > 0.$$

Pentru simplitate vom neglija, în cele ce urmează, efectul refulării curentului precum şi cel de proximitate şi nu vom ţine seama de prezenţa capacităţilor parazite.

12. Determinarea BFR, cu alte cuvinte stabilirea condiţiilor în care sînt satisfăcute simultan fie perechea de inegalităţi (17), fie perechea de inegalităţi (17′), se face simplu, recurgînd la un procedeu grafo-analitic. Anume, dacă se consideră primul caz (inegalităţile (17)), se reprezintă grafic funcţiile :

(19) $$F_{1(cc)}(\omega) = \omega^3 + a\omega^2 - b, \quad F_{2(cc)}(\omega) = \omega^3 - a\omega^2 + b,$$

şi se determină benzile de frecvenţă pentru care, simultan $F_{1(cc)}(\omega) \geqslant 0$, $F_{2(cc)}(\omega) \geqslant 0$. Evident, interesează comportarea funcţiilor $F_{1(cc)}(\omega)$, $F_{2(cc)}(\omega)$ numai pe semiaxa $\omega \geqslant 0$.

Se poate dovedi uşor că în acest domeniu $F_{1(cc)}(\omega)$ este strict crescătoare şi posedă o singură rădăcină reală ω_1. În acelaşi domeniu $F_{2(cc)}(\omega)$ admite un minim, pozitiv sau negativ, după cum :

(20) $$b \gtrless \frac{4a^3}{27}.$$

Într-adevăr, derivata funcţiei $F_{2(cc)}(\omega)$:

(21) $$\frac{dF_{2(cc)}(\omega)}{d\omega} = \omega(3\omega - 2a),$$

se anulează pentru pulsaţia (diferită de zero) :

(22) $$\omega_0 = \frac{2}{3}a$$

iar

$$\left.\frac{d^2F_{2(cc)}(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} = 2a > 0, \tag{23}$$

cu alte cuvinte pentru $\omega = \omega_0$ funcția $F_{2(cc)}(\omega)$ admite un minim. Valoarea acestui minim se obține substituind în expresia (19_2) $\omega = \omega_0$ dat de (22). Se obține

$$F_{2(cc)\,\min} = b - \frac{4a^3}{27}, \tag{24}$$

de unde rezultă (20).

În sfîrșit, funcția $F_{2(cc)}(\omega)$ admite pentru $\omega \geqslant 0$ un punct de inflexiune. Avînd în vedere că

$$\frac{d^2F_{2(cc)}(\omega)}{d\omega^2} = 6\omega - 2a, \tag{25}$$

rezultă că punctul de inflexiune se obține la pulsația:

$$\omega_{infl} = \frac{1}{2}\omega_0 = \frac{a}{3}, \tag{26}$$

unde s-a ținut seama de (22), valoarea funcției la această pulsație fiind:

$$F_{2(cc)}(\omega_{infl}) = b - \frac{a^3}{27}. \tag{27}$$

Pe semiaxa $\omega \geqslant 0$ polinomul $F_{2(cc)}(\omega)$ are fie două rădăcini reale ω_{21}, ω_{22}, $(\omega_{21} > \omega_{22})$, dacă $b < 4a^3/27$, fie nici una în caz contrar.

Graficele variației funcțiilor $F_{1(cc)}(\omega)$, $F_{2(cc)}(\omega)$ pe semiaxa $\omega \geqslant 0$ sînt reprezentate în fig. 2, unde M reprezintă punctul de minim, iar I — punctul de inflexiune al funcției $F_{1(cc)}(\omega)$.

Analizînd aceste grafice și ținînd seama de relațiile (18) rezultă că:

BFR ale unui CC alimentat în sens direct sînt delimitate:

a) *de domeniile:*

$$\omega_r \in \{[\omega_1, \omega_{21}] \cup [\omega_{22}, \infty]\} \tag{28}$$

în cazul în care parametrii CC satisfac inegalitatea:

$$\frac{C_{11}L_{11}^3R_{22}^2}{L_{12}^4} > \frac{27}{16}; \tag{29}$$

b) *de domeniul*

$$\omega_r \in [\omega_1, \infty] \tag{30}$$

atunci cînd parametrii CC satisfac inegalitatea:

(31) $$\frac{C_{11} L_{11}^3 R_{22}^2}{L_{12}^4} \leqslant \frac{27}{16}.$$

Observaţii. 1° Introducînd notaţii convenabile, condiţiile (29) şi (31) se pot scrie sub o formă mai compactă. Anume, numind cu

(32) $$\alpha_{2sc} = \frac{R_{22}}{2L_{22}}$$

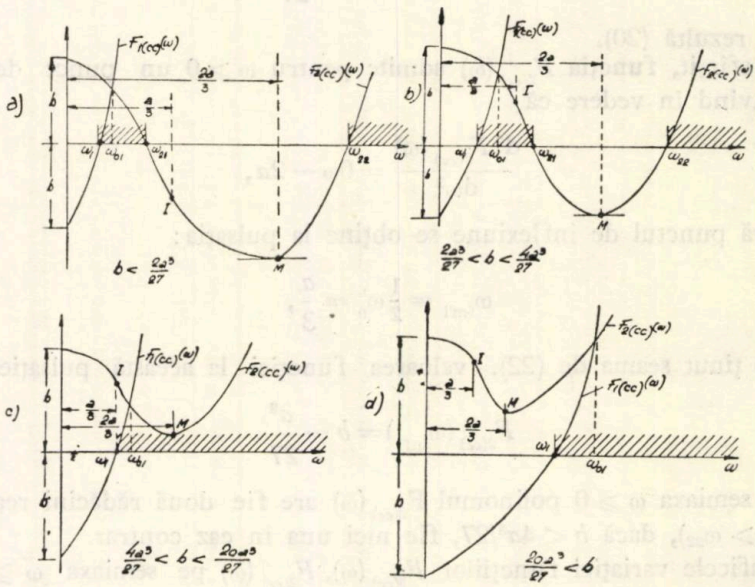


Fig. 2

constanta de antenuare a subreţelei secundare în scurtcircuit, cu

(33) $$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}$$

coeficientul de cuplaj (magnetic) între cele două subreţele, iar cu

(34) $$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_{11} C_{11}}}$$

pulsaţia de rezonanţă a subreţelei primare, inegalitatea (29) se poate scrie sub forma echivalentă:

(35) $$\frac{k^2 \omega_{01}}{\alpha_{2sc}} < \frac{8}{3\sqrt{3}} = 1{,}5396.$$

2° Analizînd condițiile necesare (16) de realizare a rezonanței la poarta de intrare a unui *CC* alimentat în sens direct, rezultă că *BFR sînt independente de rezistența* R_{11} *a subrețelei primare precum și de inductivitatea proprie* L_{22} *și capacitatea* C_{22} *a subrețelei secundare.*

3° La trasarea graficelor reprezentate în fig. 2 s-a ținut seama că:

$$F_{1(cc)}(\omega_{01}) = F_{2(cc)}(\omega_{01}) = \omega_{01}^3 > 0. \tag{36}$$

13. Supunînd funcțiile

$$F'_{1(cc)}(\omega) = \omega^3 + a'\omega^2 - b', \quad F'_{2(cc)}(\omega) = \omega^3 - a'\omega^2 + b' \tag{19'}$$

unui studiu similar, adică impunînd condiția ca simultan $F'_{1(cc)}(\omega) \geqslant 0$, $F'_{2(cc)}(\omega) \geqslant 0$ pe semiaxa $\omega \geqslant 0$, se ajunge, utilizînd procedee analoge celor întrebuințate în cazul cînd CC era alimentat în sens direct, la următoarele concluzii principale:

BFR ale unui CC alimentat în sens invers sînt delimitate:

a) *de domeniile*

$$\omega'_r \in \{[\omega'_1, \omega'_{21}] \cup [\omega'_{22}, \infty]\} \tag{28'}$$

în cazul în care parametrii CC satisfac inegalitatea:

$$\frac{C_{22} L_{22}^3 R_{11}^2}{L_{12}^4} > \frac{27}{16}; \tag{29'}$$

b) *de domeniul*

$$\omega'_r \in [\omega'_1, \infty) \tag{30'}$$

atunci cînd parametrii CC satisfac inegalitatea:

$$\frac{C_{22} L_{22}^3 R_{11}^2}{L_{12}^4} \leqslant \frac{27}{16}, \tag{31'}$$

unde: ω'_1 — rădăcina reală și pozitivă a polinomului $F'_{1(cc)}(\omega)$, iar $\omega'_{21}, \omega'_{22}$ — rădăcinile reale și pozitive ale polinomului $F'_{2(cc)}(\omega)$.

14. Determinarea pulsațiilor $\omega_1, \omega_{21}, \omega_{22}$, respectiv $\omega'_1, \omega'_{21}, \omega'_{22}$ este posibilă rezolvînd ecuațiile algebrice de gradul al treilea $F_{1(cc)}(\omega) = 0, F_{2(cc)}(\omega) = 0$, respectiv $F'_{1(cc)}(\omega) = 0, F'_{2(cc)}(\omega) = 0$ și luînd în considerație rădăcinile lor reale și pozitive. Expresiile acestor mărimi fiind în general complicate, renunțăm a le reproduce.

15. Un CC va fi denumit în cele ce urmează ca fiind *rezonant* (CCR) dacă la frecvența semnalului sinusoidal aplicat la poarta de intrare realizează rezonanța: a) la alimentarea în sens direct, b) la alimentarea în sens invers,

c) în ambele sensuri de alimentare. În primele două cazuri vom avea de-a face cu un CCR *unilateral* (CCRU), iar în al treilea caz cu un CCR *bilateral* (CCRB).

Evident, un CC care la frecvenţa semnalului aplicat la poarta de intrare nu este capabil să realizeze rezonanţa la această poartă, oricare ar fi sensul său de alimentare, se va denumi *nerezonant* (CCNR).

Aptitudinea unui CC de a fi de tipul CCRB se poate constata în modul următor. Fie $\mathfrak{R}$ BFR ale CCR considerat, alimentat în sens direct şi fie $\mathfrak{R}'$ BFR ale aceluiaşi CCR, alimentat în sens invers. Dacă $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}' = \varnothing$ atunci CCR este de tip unilateral şi evident, de tip bilateral în caz opus.

IV. Concluzii

Se stabilesc condiţiile necesare şi suficiente de realizare a rezonanţei, în regim permanent sinusoidal, la poarta de intrare a unui CC, de tipul indicat în fig. 1, punîndu-se în evidenţă faptul că:

a) pentru un CC de structură invariabilă rezonanţa nu poate fi realizată decît în anumite benzi de frecvenţă;

b) la o frecvenţă dată a semnalului aplicat la poarta de intrare şi în regimurile care realizează rezonanţa la această poartă, impedanţa receptorului descrie o anumită diagramă-loc geometric, în speţă un arc de cerc.

Anexă

Dacă se au în vedere relaţiile (3), (4), (3′), (4′) şi (7), se pot obţine următoarele expresii

(A. 1) $$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{22}+\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{21})=\frac{2\,X_{11}\,R_{22}}{X^{2}_{12}},$$

(A. 2) $$\mathcal{I}m(\underline{A}^{*}_{11}\,\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{21})=\frac{2\,X_{22}\,R_{11}}{X^{2}_{12}},$$

(A. 3) $$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{22}-\underline{A}^{*}_{12}\,\underline{A}_{21})=\frac{2\,X_{11}\,X_{22}-X^{2}_{12}}{X^{2}_{12}},$$

(A. 4) $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21})=\dfrac{X_{11}}{X^{2}_{12}}$, (A. 5) $\mathcal{I}m(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22})=\dfrac{(R^{2}_{22}+X^{2}_{22})\,X_{11}-X_{22}\,X^{2}_{12}}{X^{2}_{12}}$,

(A. 6) $\mathcal{I}m(\underline{A}^{*}_{11}\,\underline{A}_{12})=\dfrac{(R^{2}_{11}+X^{2}_{11})\,X_{22}-X_{11}\,X^{2}_{12}}{X^{2}_{12}}$, (A. 7) $\mathcal{I}m(\underline{A}^{*}_{21}\,\underline{A}_{22})=\dfrac{X_{22}}{X^{2}_{12}}$.

Institutul politehnic, Iaşi
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Асеев Б. П., *Колебательные цепи.* Связиздат, М., 1950, стр. 130.
2. Tănăsescu T., Bul. Inst. polit. Buc., 1942, **XIII**, *1—2*, p. 162.
3. Rosman H., Braier A., Saal C., Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, p. 233.
4. — Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, p. 247.
5. Теумин И. И., *Ультразвуковые колебательные системы.* Машгиз, М., 1959, стр. 37.
6. GehlhØj B., Acta Polyt. Scandin., 1957, **VIII**, *1*, 141 pp.
7. Antoniu I. S., *Chestiuni speciale de electrotehnică.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1956, p. 75.
8. Aseev B. P., *Bazele radiotehnicii.* E.E.S., Buc. 1952, p. 161, (trad. din l. rusă).

SUR LA RÉSONANCE DANS LES CIRCUITS COUPLÉS

(Résumé)

Les informations fournies par la littérature (par ex. [1], [2]) quant aux régimes de résonance à la porte d'entrée d'un circuit couplé (fig. 1), se limitent à préciser, en considérant le circuit y compris le récepteur comme un dipôle, les valeurs de la fréquence du signal appliqué à cette porte, pour lesquelles on réalise ces régimes.

En appliquant nombre de résultats obtenus dans quelques Notes antérieures [3], [4], concernant les régimes de résonance aux portes des quadripôles linéaires, diports, passifs et réciproques, on aboutit aux résultats suivants :

I. Les conditions nécessaires et suffisantes afin d'obtenir la résonance à la porte d'entrée d'un circuit couplé, en régime permanent sinusoïdal, avec une charge passive, sont les suivantes: a) les paramètres du circuit couplé doivent satisfaire à l'inégalité (8); b) l'impédance du récepteur doit décrire le diagramme-lieu géométrique (9).

II. On peut réaliser la résonance à la porte d'entrée d'un circuit couplé, ayant une structure invariable, seulement dans certaines bandes de fréquences. Ces bandes sont délimitées par les domaines (28) si les paramètres du circuit couplé satisfont à l'inégalité (29) et par le domaine (30) au cas contraire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 3—4, 1967

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 539.37

RATIONAL MECHANICS OF DEFORMATION AND FLOW (I)

BY

C. TRUESDELL

1. In the last international congresses, the most recent being the Canadian Congress of Applied Mechanics (Centennial Year 1967), I was invited to present a set of general conferences. On such an occasion the speaker is expected to show some uncommon brilliance, or at least in survey reduce the world's efforts to stumbligs toward his own success. I have chosen rather to leave my own work unmentioned. Two years ago at Mr. Reiner's symposium in Haifa I outlined in their diversity the subjects treated and the results gotten in the last decade; hoping that this invaluable award does not necessarily turn one into a Distinguished Senior Colleague who trayels about the world repeating a single lecture, I shall offer hear, following step by step my conference presented at the 4th International Congress on Rheology [1]...[3], a survey of another kind. Namely, I am selecting the two achievement that seem to me the most permanent in the theories of large deformation and flow — the most permanent because they hit closest to the mark and, at bottom, are the easiest to grasp and to retain. It is a pleasure to be allowed to present this paper starting from my report given at a meeting organized by Mr. Rivlin, whose splendid papers of 1948...1955, as well as providing the starting point for most of the later work, gave the field, the directness and concreteness necessary for real theory.

2. The two areas I shall outline in the present and in the next papers prepared for this *Bulletin* are: (i) Noll's theory of material; (ii) Coleman and Noll's theory of viscometric flows.

As modern work goes, these two theories are not greatly general. The concept of material is being broadened, and for good reason, by the work of Ericksen on anisotropic fluids, of Toupin on polar materials, of Rivlin on multipoles of stress and deformation. The range of physical effects included in rational theory has been spread to electromagnetism by Toupin, and even the thermodynamics of irreversible processes, heretofore blinded under a featherbed of linear and symmetric mud, begins to reflect the light of reason in the researches of Coleman, Noll, and Mizel. My subject I have prepared to expose hear is simpler. Every now and then something is done in a way that is final; problem and solution become one, so that soon nobody looks at the matter in any other way, and after a litttle it is taught to beginners as a matter of course. The subject of this paper is of this kind. To know these *results,* I think, is

necessary for any true student of mechanics; the *methods*, while not obviously carrying over to the more general areas just mentioned, serve as a specimen of how a problem in mechanics should be approached and solved.

3. On this occasion I may expected to offer a general defense of continuum mechanics, but I will not do so, for it is unneccessary. The spectacular progress in solving problems of deformation and flow of materials in the past 15 years has been made by work that turns its back on molecular structure and recognizes, as might have been obvious, that a gross problem wants a gross theory. If we are asked how a block of rubber or steel a foot cube will behave when loaded by a force of tons, it is plain counting angels on the points of pins to cry for molecules. No one need doubt that the angels and the molecules are there; by suitable instruments, they may be detected. Indeed, search of the structure of matter has brought man the highest progress imaginable in science: it has put within his hands the power not only to exterminate his race but also to poison the earth, the atmosphere, and aven the sea. Such progress is unconfutable. Yet each of us is anxious to discover truth in his own way. Those with humbler problems may use humbler means. When it is daily experience we seek to understand, a theory framed in the concepts of daily experience should do.

4. The following three concepts, direct idealizations from daily experience, are the primitive elements of mechanics:

a) *The concept of body, B.* A body is a three-dimensional smooth manifold, the elements of which are *particles* $X \in B$. Since we have no experience suggesting any particular geometry in bodies, it would be presumptuous to enforce one. Geometrical structure should be dictated by physics, not vice versa. That little experience there is common to all gross bodies in summed up in two simple statements: (i) every sufficiently smooth portion of a body is a body, and a measure, called *mass*, is defined oved the body; and (ii) a body is never accessible directly to observation, since we encounter it only at particular times and in particular places. These times and places form the space-time manifold of physical experience. The definition of „classical" is the postulate that this manifold is Euclidean and three-dimensional, which suggests the second primitive element:

b) *Euclidean space-time,* consisting of points x, endowed with the Euclidean metric structure, which is independent of the time t. In continuum mechanics, a body B may be mapped smoothly onto regions of Euclidean space (s. Fig. 1). The region occupied by the body is its *configuration.* Only in some configuration is a body ever liable to be observed. The *motion* of a body is the specification of the places taken by its particles as time goes on, or the time sequence of its configurations:

$$x = \chi(X, t),$$

where χ is a continuously differentiable homeomorphism.

c) The third element of mechanics is the concept of a *system of forces.* In continuum mechanics the most important forces are contact forces, expressing the reaction of material upon material in a given configuration of a body. The stress vector **s**, acting upon a boundary with outward normal **n**, is given by

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{n},$$

where **T** is the stress tensor (s. Fig. 2).

The task of mechanics is to connect with one another these three elements — body, motion, and force — in such a way as to yield good models for the behavior of physical materials. This task is divided in two.

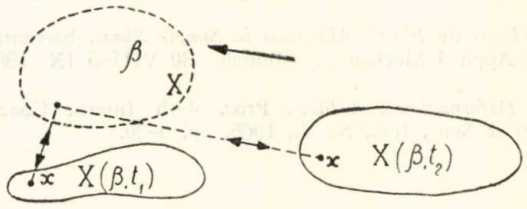


Fig. 1. — Mapping of a body B onto regions of Euclidean space.

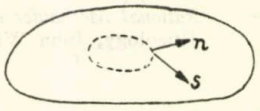


Fig. 2. — Contact forces expressing the reaction of material upon material in a given body configuration.

First, we postulate principles *common to all bodies,* namely the conservation laws for force and torque, or for linear momentum and moment of momentum. When the fields occuring are sufficiently smooth, these principles assume the well-known form of Cauchy's laws of motion:

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \varrho\mathbf{b} = \varrho\ddot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}},$$

where ϱ is the mass density, **b** is the body force, $\ddot{\mathbf{x}}$ is the acceleration, and superscript ^{T} denotes transposition. These principles are satisfied by all bodies, independently of their material properties.

Experience tells us, however, that bodies of different materials generally behave differently when subjected to the same external forces. Therefore, the internal forces must be different in the two cases, since if both body force **b** and stress tensor **T** are given, a unique value for the acceleration $\ddot{\mathbf{x}}$ follows from Cauchy's first law. Conversely, if **b** and $\ddot{\mathbf{x}}$ are given, Cauchy's first law gives us a unique value for div **T**, not for **T**. That is, the general principles of mechanics do not suffice to determine the forces acting within a body subjected to a given motion.

The second part of the task of mechanics is to represent the *variety* of materials. To this end we frame *constitutive equations,* which determine the stress from sufficient data of motion. Different forms of constitutive

equations are chosen in agreement with what we know to be true and what we believe to be reasonable for one or another real material.

The next Note to appear in this Bulletin will be devoted to a *General Theory of Constitutive Equations.*

Received the 14 I 1967

The John Hopkins University,
Baltimore, Maryland, USA

REFERENCES

1. Truesdell C., *Thermodynamique de la déformation.* Canadian Congress of Applied Mechanics, Centennial Year 1967. Scientific Program, Université Laval, Québec, Canada, p. 10.
2. — *Instabilities of Isotropic Perfectly Elastic Materials in Simple Shear.* Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich, 30 VIII–5 IX 1964, Program, p. 17.
3. — *Rational Mechanics of Deformation and Flow.* Proc. 4-th Intern. Congress on Rheology, John Wiley & Sons, Inc., N. Y., 1965, pp. 3–30.

PROBLEME ALE MECANICII DEFORMAŢIEI ŞI CURGERII (I)

(Rezumat)

Autorul expune în această Notă conceptele de *corp, spaţiu euclidian cu trei dimensiuni* şi *sistem de forţe,* încadrate în problematica actuală a mecanicii deformaţiei şi curgerii, ce va constitui subiectul următoarelor Note destinate acestui *Buletin.*

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Reprezentarea unui corp B în regiunile unui spaţiu euclidian.
Fig. 2. — Forţe de contact ce exprimă reacţia materialului asupra materialului într-o configuraţie dată de corpuri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 536.2; 517.948.32

A THEOREM CONCERNED WITH GENERALIZED HEAT TRANSFER PHENOMENA

BY

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI and L. E. KRIVOSHEIN

1. In one of the author's and B. R. Seth previous paper published in the same *Bulletin* as well as in the general lectures presented at the Eleventh International Congress of Applied Mechanics [1], [2] and during some other very recent sets of scientific manifestations organized both in our country and abroad, many scientists like M. Roy, actually president of IUTAM, L. I. Sedov, C. Truesdell a. o. underlined the necessity of creation of new mathematical and mechanical models in view to realize a profitable discussion in connection with the development of new important areas in gas, liquid, and solid state mechanics and in that of compound physical media of various structures, f. i. in the area of plasma physics, in the aerodynamics of highly rarefied gases, in the production technology and the applications of polymeric materials, in the problems of motion of all kinds of heterogeneous bodies, anisotropic polymer mixtures, suspensions, and cavitating fluids, in the problems of creep and plasticity, as well as of strength of metals and other materials in various conditions, notably under varying of high temperatures, in the mechanical problems when dealing with high internal pressures within a substance, in the problems of motion and equilibrium of soils and the theory of liquid and gas filtration in porous media, in studies concerned with the motion of solid and liquid deformable media with reference to electrical polarization and magnetic effect in the theory of motion of multicomponent systems with diffusion, radiation and phase transformation, in the theories pertaining to motion of bodies at very low temperatures when quantum mechanics effects become a factor in macroscopic theory, in the field of biological mechanics, especially to describe the blood circulation in living beings requiring introduction of fluid models with unusual rheologic properties.

In what follows, starting from the author's and his coworkers M. N. Oğuztöreli and L. E. Krivoshein basic results concerned with various generalized schemes of heat transfer phenomena, one gives the formulation of a generalized heat transfer problem, crystallized in a mixed integro-differential system of parabolic type with a delayed argument.

2. Let Ω be a domain in E^n, n-dimensional Euclidean space, bounded by a smooth surface $\partial\Omega$ satisfying the well known conditions of Liapunov. We denote the coordinates of a point x in E^n by $x_1, x_2, \ldots, x_n$, and time by t. The volume element at a point $x \in \Omega$ will be denoted by dV_x and the surface element at a point $x \in \partial\Omega$ by dS_x. Let t_0 be a fixed time instant

and h_i, $(i = 0, 1, ..., \nu)$, be certain given numbers such that $0 = h_0 < h_1 < ... < h_\nu$ $(< \infty)$. Let t_1 be a given number such that $t_0 < t_1 < \infty$, and define the intervals

$$I_0 = [t_0 - \alpha_\nu, t_0], \quad I_1 = [t_0, t_1], \quad I_2 = [t_0 - \alpha_\nu, t_1].$$

Let $C_k^{1,2}$, $(k = 0, 1, 2)$, be the Banach spaces of real valued functions $u(t,x)$, continuous differentiable in t and twice continuously differentiable in x for $(t,x) \in I_k \times \bar{\Omega}$, in which the norms are defined by

$$\| u \|_k^{(1,2)} = \sup_{I_k \times \bar{\Omega}} \left\{ |u|, \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \right| \right\}, \quad (k = 0, 1, 2),$$

where $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, the closure of Ω.

Further, we shall denote by C_k^0 the Banach space of all real valued functions $u(t,x)$ continuous on $I_k \times \bar{\Omega}$ with the norm

$$\| u \|_k^0 = \sup_{I_k \times \bar{\Omega}} |u|, \quad (k = 0, 1, 2).$$

It is well known that the convergence of a sequence $\{u^m(t,x)\}$, $(m = 1, 2, 3, ...)$, in $C_k^{1,2}$ (or in C_k^0) is equivalent to the uniform convergence of the sequences

$$\{u^m(t,x)\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u^m(t,x) \right\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} u^m(t,x) \right\}, \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} u^m(t,x) \right\}, \quad (i,j = 1, 2, ..., n),$$

(or of only $\{u^m(t,x)\}$) on $I_k \times \bar{\Omega}$, all partial derivatives on $\partial\Omega$ being one-sided.

We define the operators A and B from $C_1^{1,2}$ into C_2^0 by the equations

$$A(u)(t,x) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i(t,x)\, u(t - h_i, x) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau,x)\, u(\tau,x)\, d\tau$$

and

$$B(u)(t,x) = \Delta_x u(t,x) + P_x u(t,x) + \int_{\Omega} H(t,x,\eta)\, dV_\eta,$$

where $\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$, $P = \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\, \partial/\partial x_j$, $a_i(t,x)$, $(i = 0, 1, ..., \nu)$, and $b_j(t,x)$, $(j = 1, 2, ..., n)$, are given functions belonging to $C_1^{1,2}$; $K(t,\tau,x)$ is a given function continuously differentiable in t and τ, and twice continuously differentiable in x for $(t,\tau,x) \in I_1 \times I_1 \times \bar{\Omega}$; $H(t,x,y)$ is a given function continuously differentiable in t and twice continuously differentiable in x and y for $(t,x,y) \in I_1 \times \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$.

Let $f(t,x)$ be a given function belonging to $C_1^{1,2}$. Now we consider the following linear delayed integro-differential equation of parabolic type

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = (A+B)(u)(t,x) + f(t,x) \tag{1}$$

for $(t,x) \in I_1 \times \Omega$, subject to the initial condition

$$u(t,x) = \varphi(t,x) \text{ for } (t,x) \in I_0 \times \bar{\Omega}, \tag{2}$$

and the boundary condition

$$\lim_{x \to y} u(t,x) = \psi(t,y) \text{ for } y \in \partial\Omega, \ t \in I_1, \tag{3}$$

where $\varphi(t,x) \in C_0^{1,2}$ and $\psi(t,y)$ is a given function continuous on $I_1 \times \partial\Omega$. We extend the definitions of φ into $C_1^{1,2}$, whenever necessary, by $\varphi(t,x) = \varphi(t_0,x) = \varphi(t_0-0,x)$ for $(t,x) \in I_1 \times \bar{\Omega}$. We assume that $\psi(t_0,y) = \varphi(t_0,y)$ for $y \in \partial\Omega$.

We have established the following

Theorem. *The function $u(t,x)$, defined by*

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) \tag{4}$$

in which $u_1(t,x)$ is given by

$$u_1(t,x) = \begin{cases} \varphi(t,x) & \text{for } (t,x) \in I_0 \times \bar{\Omega}, \\ u^*(t,x) & \text{for } (t,x) \in I_1 \times \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

and $u_2(t,x)$ as below

$$u_2(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{for } (t,x) \in I_0 \times \bar{\Omega}, \\ \underset{\sim}{v}_0(t,x) & \text{for } (t,x) \in I_1 \times \bar{\Omega} \end{cases} \tag{6}$$

is a solution of problem (1) ... (3).

All algorithmic details as well as the necessary explanations of the notations used above are to be found in the authors paper in print in the *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée.*

3. By the same way we can demonstrate the existence of a solution to our problem associated with an equation of the form (2) in which the integral $\int_\Omega H(t,x,\eta)\, u(t,\eta)\, dV_\eta$ is replaced by $\int_\Omega H(t,x,\eta)\, S_\eta(u)(t,\eta)\, dV_\eta$, where $S_x = c_0(t,x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t,x)\, \partial/\partial x_j$, $c_j(t,x)$, $(j = 0, 1, ..., n)$, being given functions which belong to the space $C_1^{1,2}$.

We can even consider nonlinear equations more complicated in nature which, for example, the coefficients b_j of P_x mai depend on u (or $u(t-h_i, x)$, $(i = 1, 2, ..., \nu)$, and the coefficients a_i of A may depend on $u(t, x)$. In this case Pogorzelski's main results in [6] will be applicable to our problem.

Received the 28 X 1966

Polytechnic Institute of Jassy,
University of Alberta, Edmonton, Canada
and
Kirgizian Academy of Sciences,
Frunze, U.S.S.R.

REFERENCES

1. Mangeron D., Seth B. R., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3-4*, pp 311–322.
2. — Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-N. Y., 1966.
3. Roy M., Conferences presented at the Institute of Fluid Mechanics, Bucarest, June, 1967.
4. Mangeron D., Krivoshein L. E., Rev. Roum. Sci. Techn. s. Méc. appl., 1966, **11**, pp. 3-22.
5. Oguztöreli M. N., *Time-Lag Control Systems*. Academic Pres. N. Y., 1966.
6. Pogorzelski W., Ann. Polon. Math., 1959, **6**, pp. 15–40.

O TEOREMĂ RELATIVĂ LA FENOMENE GENERALIZATE DE TRANSFER DE CĂLDURĂ

(Rezumat)

Se stabileşte următoarea

Teoremă. *Fun ţia $u(t, x)$ definită de* (4), *in care $u_1(t, x)$ este dată de* (5), *iar $u_2(t, x)$ de* (6), *este o soluţie a problemei* (1) ... (3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 536.242; 532.5

HEAT TRANSFER BY LAMINAR FLOW IN AN ANNULUS OF POROUS WALLS WITH VARIABLE CIRCUMFERENTIAL HEAT FLUX

BY

M. N. CHANNABASAPPA

1. Introduction

The effect of porosity on heat transfer in an annulus whose walls are at constant temperatures has been discussed (for axial flow) by Inman [1]. Kapur and Malik [2] have studied the effect of porosity of walls on heat transfer in an annulus for the case of rotationary flow under constant wall temperatures. Sutherland and Kays [3] have studied the annulus problem for the axial flow case (laminar as well as turbulent) with variable circumferential heat flux and with impermeable walls.

We consider here the heat transfer problem for the steady state laminar flow, in the axial direction, of a homogeneous heat conducting fluid in an annulus with porous walls and with variable circumferential heat flux. The purpose is to obtain wall temperatures under given heat fluxes.

2. Formulation

In this investigation we shall use the cylindrical coordinates (r, θ, z) as shown in the Fig. 1. The axis of z lies along the axis of the annulus and is perpendicular to the plane of the paper. We shall denote the velocity components in the directions of r, θ, z increasing by u, v, w respectively. Heat fluxes are prescribed at the inner and outer walls of the annulus and they are functions of θ. We also assume that: (i) the velocity and temperature fields are fully developed, (ii) there is no heat input in the axial direction, (iii) the dissipation and wall conduction effects are negligible.

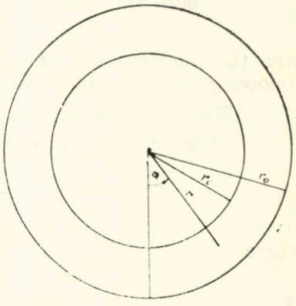


Fig. 1

Under the assumptions of the problem we have $v = 0$. The axial velocity w and the temperature T of the fluid are independent of z.

The porosities of the walls considered are such that the rate of injection at one wall is equal to the rate of suction at the other so that

$$r_0 u_0 = r_i u_i \text{ or } u_0 = \frac{r_i}{r_0} u_i = \sigma u_i, \tag{1}$$

where

$$\sigma = \frac{r_i}{r_0}.$$

The energy equation is

$$\varrho g c_p u \frac{\partial T}{\partial r} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right). \tag{2}$$

Equation (2) contains only the cross flow velocity which can be obtained from the equation of continuity [4]

$$\frac{\partial}{\partial r}(ur) = 0. \tag{3}$$

Hence from (3) we get $ur = \text{const.} = u_0 r_0$ or

$$u = \frac{u_0 r_0}{r}. \tag{4}$$

The boundary conditions to be satisfied by the temperature field are:
Set I: Heating from the inner wall, the outer one being adiabatic

$$r = r_i, \frac{\partial T}{\partial r} = -q_i(\theta); \quad r = r_0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \tag{5}$$

Set II: Heating from the outer wall, the inner one being adiabatic

$$r = r_i, \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad r = r_0, \frac{\partial T}{\partial r} = q_0(\theta). \tag{6}$$

In both the cases $q(\theta)$ is assumed to satisfy the condition $\int_0^{2\pi} q(\theta)\,d\theta = 0$. Heat transfer into the fluid is taken as positive and heat transfer out of the fluid is taken as negative, following the convention of Sutherland and Kays [3].

We shall now use the following non-dimensional quantities: $\bar{u} = u/u_0$, $\bar{r} = r/r_0$.

Then equation (2) becomes

$$\bar{u}\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{PR}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right), \tag{7}$$

where

$$P = \frac{\mu g c_p}{k}, \quad R = \frac{u_0 r_0}{\nu}. \tag{8}$$

Equation (4) becomes

$$\bar{u} = \frac{1}{\bar{r}}. \tag{9}$$

Using (9) in (7) we get

$$\bar{r}^2\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{r}^2} + \bar{r}(1 - PR)\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \tag{10}$$

The corresponding boundary conditions become
Set I:

$$\bar{r} = \sigma, \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = -r_0 q_i(\theta) = -p_i(\theta); \quad \bar{r} = 1, \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = 0. \tag{11}$$

Set II:

$$\bar{r} = \sigma, \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = 0; \quad \bar{r} = 1, \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = r_0 q_0(\theta) = p_0(\theta). \tag{12}$$

3. Solution

Following Sutherland and Kays [3] we shall obtain the solution in the form

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{r})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{13}$$

From (13) we get

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\bar{r})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{14}$$

where the prime denotes differentiation with respect to $\bar{r}$.
Using (14) in (11) and (12) we find that boundary conditions (11) are satisfied if

$$\begin{cases} \bar{r} = \sigma, f_n'(r) = -1, \\ \bar{r} = 1, f_n'(r) = 0, \end{cases} \tag{15 a}$$

and

$$\begin{cases} \pi a_{n_i} = \int_0^{2\pi} p_i(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \\ \pi b_{n_i} = \int_0^{2\pi} p_i(\theta) \sin n\theta \, d\theta; \end{cases} \tag{15 b}$$

the boundary conditions (12) are satisfied if

$$\begin{cases} \bar{r} = \sigma, f_n'(\bar{r}) = 0, \\ \bar{r} = 1, f_n'(\bar{r}) = 1, \end{cases} \tag{16 a}$$

and

$$\begin{cases} \pi a_{n_0} = \int_0^{2\pi} p_0(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \\ \pi b_{n_0} = \int_0^{2\pi} p_0(\theta) \sin n\theta \, d\theta. \end{cases} \tag{16 b}$$

Now, using (13) in (10) we obtain

$$\bar{r}^2 f_n''(\bar{r}) + \bar{r}(1 - PR) f_n'(\bar{r}) - n^2 f_n(\bar{r}) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{17}$$

Seeking the solution of (17) under (15 a) or (16 a) we get

$$f_n(\bar{r}) = A_l \bar{r}^{m_1} + B_l \bar{r}^{m_2}, \tag{18}$$

where $l = 1$ — for the first set of boundary conditions, $l = 2$ — for the second set of boundary conditions and

$$A_1 = \frac{1}{m_1(\sigma^{m_2-1} - \sigma^{m_1-1})}, \quad B_1 = \frac{1}{m_2(\sigma^{m_1-1} - \sigma^{m_2-1})}, \tag{19}$$

$$A_2 = A_1 \sigma^{m_2-1}, \quad B_2 = B_1 \sigma^{m_1-1}, \tag{20}$$

$$m_1 = \frac{PR + \sqrt{P^2R^2 + 4n^2}}{2}, \quad m_2 = \frac{PR - \sqrt{P^2R^2 + 4n^2}}{2}. \tag{21}$$

When $R = 0$, i. e. when the walls are non-porous, we get

$$f_n(\bar{r}) = c_l \bar{r}^n + D_l \bar{r}^{-n} \tag{22}$$

where $c_l = (A_l)_{R=0}$ and $D_l = (B_l)_{R=0}$, agreeing with Sutherland and Kays [3].

We shall now find the temperature functions at the walls. Four different cases arise:

(a) Outer wall temperature with inner wall heating:

$$f_{n_i}(1) = A_1 + B_1. \tag{23}$$

(b) Inner wall temperature with inner wall heating:

$$f_{n_i}(\sigma) = A_1 \sigma^{m_1} + B_1 \sigma^{m_2}. \tag{24}$$

(c) Outer wall temperature with outer wall heating:

$$f_{n_0}(1) = A_2 + B_2. \tag{25}$$

(d) Inner wall temperature with outer wall heating:

$$f_{n_0}(\sigma) = A_2 \sigma^{m_1} + B_2 \sigma^{m_2}. \tag{26}$$

If fluxes are applied on both the walls simultaneously, we can get the wall temperatures by superimposing the results obtained under second set of boundary condition on those obtained under the first set.

4. Calculation of Eigenfunctions

The eigenfunctions f_n at the walls are computed for $\sigma = 0.2$. As our main interest is to study the effect of suction or injection on heat transfer, P has been taken as a constant and put equal to unity. f_n are obtained for $R = -2, -1, 0, 1, 2$ and are given in Table 1.

5. Discussion

The wall temperature functions f_n found above can be used to obtain the wall temperatures under any given heat flux. For any given heat flux the wall temperatures are functions of f_n which vary with R, the porosity parameter. From Table 1, we observe the following relationships between f_n and R.

(i) The functions $f_{n_i}(1)$ and $f_{n_i}(\sigma)$ increase as suction increase and decrease as injection increases.

Table 1

Circumferential heat flux Temperature functions for the case $\sigma = 0.2$.

R	n	$f_{n_i}(1)$	$f_{n_i}(\sigma)$	$f_{n_0}(1)$	$f_{n_0}(\sigma)$
−2	1	0.01173	0.08887	2.44441	1.46690
	2	0.00123	0.06195	0.80953	0.15309
	3	0.00017	0.04805	0.46251	0.02167
	4	0.00003	0.03902	0.32010	0.00824
	5	0.00001	0.03279	0.24400	0.00056
−1	1	0.03401	0.14570	1.68038	0.8504
	2	0.00333	0.07826	0.64051	0.08365
	3	0.00045	0.05649	0.39362	0.01132
	4	0.00007	0.04414	0.28320	0.00172
	5	0.00002	0.01441	0.08798	0.00011
0	1	0.08334	0.21673	1.04367	0.41680
	2	0.00801	0.10036	0.50160	0.04006
	3	0.00107	0.06668	0.33342	0.00533
	4	0.00016	0.05000	0.25000	0.00079
	5	0.00003	0.04000	0.20000	0.00013
1	1	0.16999	0.33620	0.68090	0.17029
	2	0.01674	0.12830	0.39194	0.01671
	3	0.00226	0.07870	0.28242	0.00226
	4	0.00033	0.05662	0.22070	0.00034
	5	0.00006	0.05599	0.18220	0.00006
2	1	0.29349	0.48898	0.44447	0.05860
	2	0.03061	0.16195	0.31051	0.01053
	3	0.00434	0.09270	0.24082	0.00087
	4	0.00068	0.06404	0.19520	0.00014
	5	0.00011	0.05877	0.16400	0.00002

(ii) The functions $f_{n_0}(1)$ and $f_{n_0}(\sigma)$ decrease as suction increases and increase as injection increases.

(If $R > 0$ the case is one of suction and if $R < 0$ it is one of injection. $R = 0$ corresponds to the non-porous case).

Thus we see that the porosity of walls has a noticeable effect on heat transfer. For instance if $q(\theta) = \sin\theta$, then outer wall temperature T due to outer wall heating is given, for the case $r_0 = 1$, by $T = f_{1_0}(1)\sin\theta$.

For any given θ, the variation of T depends on the variation of $f_{1_0}(1)$. Table 2 gives $f_{1_0}(1)$ for different cases of porosity of walls.

It is to be inferred that suitable suction or injection can be employed for obtaining desired wall temperatures under any given heat flux.

Acknowledgement. The author wishes to record his grateful thanks to Dr. M. K. Jain for his kind guidance during this work.

Table 2

Values of $f_{1_0}(1)$ for different porosities

	Walls non-porous $R = 0$	Walls-porous			
		$R = 1$	$R = 2$	$R = -1$	$R = -2$
$f_{1_0}(1)$	1.04367	0.68090	0.44447	1.68038	2.44441

Nomenclature

a_n, b_n — Fourier Series Coefficients,
c_p — Specific heat at constant pressure,
f_n — Eigenfunction,
P — Prandtl number,
q — Heat flux,
r — Radial coordinate,
$\bar{r} = \frac{r}{r_0}$,
$\sigma = \frac{r_i}{r_0}$,
u — Radial velocity,
$\bar{u} = \frac{u}{u_0}$,
z — Axial coordinate,
θ — Angular coordinate,
μ — Coefficient of viscosity,
ν — Kinematic viscosity.

Subscripts

i — Inner wall.
0 — Outer wall.

Received the 15 V 1966

Indian Institute of Technology,
Hauz Khas, New Delhi,
India

REFERENCES

1. Inman R. M., *Heat Transfer by Laminar Flow in an Annulus with Porous Walls.* J. Aero. Sc., 1959, p. 532.
2. Kapur J. N., Malik S. C., *Laminar Flow in an Annulus of Porous Walls.* Proc. of the Sixth Congress Theor. and Appl. Mech., Indian Soc. Theor. a. Appl. Mechanics, 1960.
3. Sutherland W. A., Kays W. M., *Heat Transfer in an Annulus with Variable Circumferential Heat Flux.* Int. J. Heat Mass Transfer, 1964, 7, pp. 1187–1194.
4. Berman A. S., J. of Appl. Phys., 1953, 24.

TRANSMISIA CĂLDURII ÎNTR-O CURGERE LAMINARĂ ÎNTR-UN INEL CU PEREŢI POROŞI, CU FLUX TERMIC VARIABIL

(Rezumat)

Se studiază efectul sucţiunei sau injecţiei de căldură într-o curgere laminară într-un inel cu flux termic variabil. Se calculează funcţiile proprii asociate pentru diferite valori ale parametrului porozitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 531.011

UNE NOUVELLE RELATION POUR EXPRIMER LE PRINCIPE DE GAUSS

PAR

N. IRIMICIUC et M. STANCU

1. La solution d'uns des problèmes qui concernent une nouvelle manière de présenter la mécanique analytique, en considérant le solide rigide comme un élément constitutif des systèmes mécaniques [2] ... [4], a fourni aussi l'occasion de signaler nombre de déficiences des relations exprimant, sous la forme qu'on rencontre dans la littérature, les principes de la mécanique analytique.

Parmi ces déficiences on peut signaler les suivantes :

a) Les paramètres contenus dans les relations exprimant les principes, définies pour des systèmes mécaniques ayant des points matériels commes éléments constitutifs (paramètres de position, paramètres cinématiques, déplacements, etc.) ne correspondent pas aux systèmes de solides rigides.

b) Le calcul, selon les formules habituelles, des divers termes des relations exprimant les principes (le travail virtuel des forces actives, la contrainte, etc.) devient difficile pour les systèmes de solides rigides.

c) Les relations exprimant les principes sous la forme connue dans la littérature permettent à établir seulement les équations de mouvement qui correspondent au théorème de l'impulsion tandis que pour les systèmes de solides rigides on doit ajouter aux premières les équations qui correspondent au théorème du moment cinétique.

d) Les conclusions particulières des relations exprimant habituellement les principes de la mécanique analytique (l'interprétation de Hertz, etc.), sont dépourvues de sens physique pour les solides rigides.

Dans ce qui suit on établit une nouvelle relation exprimant le principe de Gauss, la forme correspondante aux systèmes de solides rigides, de l'autre principe différentiel de la mécanique analytique, le principe de travail virtuel, étant présentée dans [2].

2. On définit la contrainte du mouvement réel par rapport au mouvement libre d'un système mécanique formé d'un nombre de n solides rigides S_ν, de masses M^ν, par l'expression:

$$C_r = \frac{2}{dt^4} \sum_{\nu} \int_{M_\nu} [\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}_l(t+dt)]^2 dm, \tag{1}$$

où $\mathbf{r}(t+dt)$ et $\mathbf{r}_l(t+dt)$ sont les vecteurs de position d'un point B, arbitraire, du solide S_ν, par rapport à un pôle fixe à l'instant $t+dt$ dans le mouvemeut réel, respectivement dans le mouvement libre.

On observe qu'on peut écrire:

$$[\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}_l(t+dt)]^2 = [\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}_l(t+dt)] \cdot \{[\mathbf{r}_{G_\nu}(t+dt) - \mathbf{r}_{G_{\nu_l}}(t+dt)] - [\mathbf{r}'(t+dt) - \mathbf{r}'_l(t+dt)]\}, \tag{2}$$

$\mathbf{r}_{G_\nu}$ et $\mathbf{r}_{G_{\nu_l}}$ étant les vecteurs de position du centre de masse G_ν du solide S_ν par rapport au pôle fixe et $\mathbf{r}'(t+dt)$ et $\mathbf{r}'_l(t+dt)$ les vecteurs de position du point B par rapport au centre de masse G_ν, dans les deux mouvements, réel et libre.

En effectuant les développements:

$$\mathbf{r}(t+dt) = \mathbf{r}(t) + dt\,\dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{1}{2} dt^2 \ddot{\mathbf{r}}(t) + \ldots = \mathbf{r} + \mathbf{v}\,dt + \frac{1}{2}\mathbf{a}\,dt^2 + \ldots, \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_l(t+dt) = \mathbf{r}_l(t) + dt\,\dot{\mathbf{r}}_l(t) + \frac{1}{2} dt^2 \ddot{\mathbf{r}}_l(t) + \ldots = \mathbf{r}_l + \mathbf{v}_l dt + \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{F}}{dm} + \frac{d\mathbf{F}_{int}}{dm}\right) dt^2 + \ldots, \tag{4}$$

$$\mathbf{r}_{G_\nu}(t+dt) = \mathbf{r}_{G_\nu}(t) + dt\,\dot{\mathbf{r}}_{G_\nu}(t) + \frac{1}{2} dt^2 \ddot{\mathbf{r}}_{G_\nu}(t) + \ldots = \mathbf{r}_{G_\nu} + \mathbf{v}_{G_\nu} dt + \frac{1}{2}\mathbf{a}_{G_\nu} dt^2 + \ldots, \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_{G_{\nu_l}}(t+dt) = \mathbf{r}_{G_{\nu_l}}(t) + dt\,\dot{\mathbf{r}}_{G_{\nu_l}}(t) + \frac{1}{2} dt^2 \ddot{\mathbf{r}}_{G_{\nu_l}}(t) + \ldots = \mathbf{r}_{G_{\nu_l}} + \mathbf{v}_{G_{\nu_l}} dt + \frac{1}{2}\frac{\bar{\mathcal{F}}_\nu}{M_\nu} dt^2 + \ldots, \tag{6}$$

$$\mathbf{r}'(t+dt) = \mathbf{r}'(t) + dt\,\dot{\mathbf{r}}'(t) + \frac{1}{2} dt^2 \ddot{\mathbf{r}}'(t) + \ldots = \mathbf{r}' + (\bar{\omega}_\nu \times \mathbf{r}')\,dt + \frac{1}{2} dt^2 [\bar{\varepsilon}_\nu \times \mathbf{r}' + \bar{\omega}_\nu \times (\bar{\omega}_\nu \times \mathbf{r}')] + \ldots, \tag{7}$$

$$\mathbf{r}'_l(t+\mathrm{d}t) = \mathbf{r}'_l(t) + \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{r}}'_l(t) + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\ddot{\mathbf{r}}'_l(t) + \ldots = \mathbf{r}'_l + (\bar{\omega}_\nu \times \mathbf{r}'_l)\mathrm{d}t +$$

(8)
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\,[\bar{\varepsilon}_{\nu_l} \times \mathbf{r}'_l + \bar{\omega}_{\nu_l} \times (\bar{\omega}_{\nu_l} \times \mathbf{r}')] + \ldots,$$

et compte tenu qu'à l'instant t les deux mouvements ont les mêmes paramètres de position ($\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_l(t) = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{G_\nu}(t) = \mathbf{r}_{G_{\nu_l}}(t) = \mathbf{r}_{G_\nu}$, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_l(t) = \mathbf{r}'$) et les mêmes paramètres cinématiques du premier ordre ($\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_l(t) = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{r}}_{G_\nu}(t) = \dot{\mathbf{r}}_{G_{\nu_l}}(t) = \mathbf{v}_{G_\nu}$, $\bar{\omega}_\nu(t) = \bar{\omega}_{\nu_l}(t)$), on peut écrire:

$$C_r = \frac{1}{2}\sum_\nu \left[\left(\mathbf{a}_{G_\nu} - \frac{\bar{\mathcal{F}}_\nu}{M_\nu}\right)\int_{M_\nu}(\mathrm{d}m\,\mathbf{a} - \mathrm{d}\mathbf{F} - \mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{int}}) +\right.$$

(9)
$$\left. + (\bar{\varepsilon}_\nu - \bar{\varepsilon}_{\nu_l})\int_{M_\nu}\mathbf{r}' \times (\mathrm{d}m\,\mathbf{a} - \mathrm{d}\mathbf{F} - \mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{int}})\right].$$

On peut justifier aisément les égalités:

(10)
$$\int_{M_\nu}(\mathrm{d}m\,\mathbf{a} - \mathrm{d}\mathbf{F} - \mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{int}}) = M_\nu \mathbf{a}_{G_\nu} - \bar{\mathcal{F}}_\nu,$$

(11)
$$\int_{M_\nu}\mathbf{r}' \times (\mathrm{d}m\,\mathbf{a} - \mathrm{d}\mathbf{F} - \mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{int}}) = \dot{\mathbf{K}}_{G_{\nu_r}} - \bar{\mathfrak{M}}_{G_\nu},$$

et:

$$\dot{\mathbf{K}}_{G_{\nu_r}} - \bar{\mathfrak{M}}_{G_\nu} = \dot{\mathbf{K}}_{G_{\nu_r}} - \dot{\mathbf{K}}_{G_{r_l}} = \left\{\mathcal{J}_{G_\nu}\bar{\varepsilon}_\nu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\omega_\nu\int_{M_\nu}(\mathbf{r}'\,\mathbf{u}_\nu)\,\mathbf{r}'\,\mathrm{d}m\right]\right\} +$$

(12)
$$+ \left\{\mathcal{J}_{G_\nu}\bar{\varepsilon}_{\nu_l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\omega_{\nu_l}\int_{M_\nu}(\mathbf{r}'_l\,\mathbf{u}_{\nu_l})\,\mathbf{r}'_l\,\mathrm{d}m\right]\right\},$$

$\mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_{\nu_l}$ étant le vecteur unitaire de la vitesse angulaire à l'instant t, le même dans les deux mouvements, où encore:

(13)
$$\dot{\mathbf{K}}_{G_{\nu_r}} - \bar{\mathfrak{M}}_{G_\nu} = \mathcal{J}_{G_\nu}(\bar{\varepsilon}_\nu - \bar{\varepsilon}_{\nu_l}).$$

Les relations (10), (11) et (13) conduisent à l'expression suivante de la contrainte:

$$C_r = \frac{1}{2}\sum_{\nu}\left[\frac{1}{M_\nu}(M_\nu \mathbf{a}_{G_\nu} - \overline{\mathcal{F}}_\nu)^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_{G_\nu}}(\dot{\overline{\mathbf{K}}}_{G_{\nu_r}} - \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu})^2\right]. \tag{14}$$

Pour un mouvement varié du système mécanique, compatible aux liaisons, il correspondra une contraintre C_v par rapport au mouvement réel, dont l'expression sera:

$$C_v = \frac{2}{dt^4}\sum_{\nu}\int_{M_\nu}[\mathbf{r}_v(t+dt) - \mathbf{r}_l(t+dt)]^2 = \tag{15}$$

$$= \frac{2}{dt^4}\sum_{\nu}\int_{M_\nu}[\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}_l(t+dt) + \delta\mathbf{r}]^2\,dm = C_r + \frac{2}{dt^4}\sum_{\nu}\int_{M_\nu}\delta\mathbf{r}^2\,dm,$$

d'où, en introduisant la notation:

$$C^2 = \frac{2}{dt^4}\sum_{\nu}\int_{M_\nu}\delta\mathbf{r}^2\,dm, \tag{16}$$

on obtiendra la relation exprimant le bien connu principe de Gauss:

$$C_v = C_r + C^2 > C_r. \tag{17}$$

Si le système mécanique est constitué par un seule solide, dont la masse présente une symétrie de révolution ($\mathcal{J}'_{11} = \mathcal{J}'_{22}$), soumis aux liaisons scléronomes ($\partial L_R = 0$) et les forces actives qui le sollicitent forment un système équivalent à zéro, ($\overline{\mathcal{F}} = 0$, $\overline{\mathcal{M}}_G = 0$), alors l'expression de l'énergie cinétique, constante:

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 + E_r^0 = E^0, \tag{18}$$

conduit aux conclusions:

$$|\mathbf{v}_G| = v_G^0 = |\dot{s}_G|, \tag{19}$$

et

$$\ddot{s}_G = 0. \tag{20}$$

Dans ce cas la contrainte C_r aura la forme:

$$C_r = \frac{1}{2}k_G M v_G^{0^4} \tag{21}$$

et la condition de minimum pour C_r implique la condition de minimum pour la courbure k_G de la trajectoire du centre de masse du solide, ce qui permet de donner la suivante forme à l'interprétation de Hertz:

Le mouvement d'un solide rigide, ayant une symétrie matérielle de révolution et soumis à des liaisons scléronomes avec des frottements négligeables, résulte, en absence de toute force active, d'un mouvement à la Poinsot autour de son centre de masse, associé à une translation avec le centre de masse se déplaçant sur une trajectoire dont la courbure sera minima dans les conditions imposées par les liaisons.

Reçue le 10 VII 1967

Institut Polytechnique de Jassy
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Vâlcovici V., Bălan Şt., Voinea R., *Mecanica teoretică*. Ed. tehn., Buc., 1963.
2. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome*. Bul. Inst. polit. Iaşi, **X(XIV)** *3-4*, pp. 255-262.
3. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides. I. Liaisons géométriques*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 389-397.
4. — *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides. II. Liaisons cinématiques*. Bul. Inst. polit. Iaşi, (sous presse).
5. Platrier C., *Mécanique rationnelle*. Ed. Dunod, Paris, 1954.
6. Suslov G. K., *Mecanica raţională*, Ed. tehn., Buc., 1950, (traduit du russe).
7. Wittaker E. T., *Analytical Dynamics*. Cambridge, 1937.

O NOUĂ RELAŢIE EXPRIMÎND PRINCIPIUL LUI GAUSS

(Rezumat)

Se stabileşte o nouă expresie pentru constrîngerea mişcării reale faţă de mişcarea liberă a unui sistem mecanic format din solide rigide. Această expresie, dată de relaţia (14), conţine ca un caz particular expresia cunoscută din literatura de specialitate, stabilită pentru sisteme mecanice constituite din puncte materiale. Se dă, de asemenea, o nouă formulare interpretării lui Hertz (principiul celei mai drepte traiectorii).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

C. D. 531.132

UNE PROPRIÉTÉ DU CHAMPS DES ACCÉLÉRATIONS RÉDUITES D'ORDRE m DANS LE MOUVEMENT PLAN

PAR

N. TSARVENKOV

1. Dans une suite d'articles D. Mangeron [1]...[3] a défini la notion d'accélération réduite d'ordre m et du type I par la relation

$$\mathbf{a}_{Mr}^{(m)} = \frac{\mathbf{a}_M^{(m)}}{A_m},$$

$\mathbf{a}_M^{(m)}$ étant l'accélération d'ordre m d'un point M du plan mobile, donnée par l'égalité

$$\mathbf{a}_M^{(m)} = \overline{P_m M}\sqrt{A_m^2 + B_m^2},$$

où les coefficients A_m et B_m sont définis par les formules de recurrence

$$A_m = \dot{A}_{m-1} + \dot{\theta}B_{m-1}, \quad A_1 = \omega^2 = \dot{\theta}^2, \quad A_0 = 0;$$

$$B_m = \dot{B}_{m-1} - \dot{\theta}A_{m-1}, \quad B_1 = \varepsilon = \ddot{\theta}, \quad B_0 = \omega\,\dot{\theta}$$

et P_m — le centre instantanné des accélérations d'ordre m. D. Mangeron a étudié les propriétés du champs des accélérations réduites et a démontré, en particulier, que le lieu géométrique des extrémités des vecteurs des accélérations réduites d'ordre m des points d'une droite (D_0), appartenant au plan mobile, est une droite $(D_0^*) = (D_1)$, perpendiculaire à (D_0) et encore que le lieu géométrique des extrémités des vecteurs des accélérations réduites des points de la circonférence de diamètre $d = H_{i+1}H_i$, H_i étant le point d'intersection des droites (D_{i-1}) et $(D_{i-1}^*) = (D_i)$, obtenues par récurrence sur (D_0) au moyen du théorème précédent, est la circonférence de diamètre $d^* = H_i H_{i+1}$.

Enfin l'ensemble des circonférences

$$\mathcal{C} = \{C; (d = H_i H_{i+1}), (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

forme un faisceau à deux paramètres (toutes les circonférences ont un point commun).

2. En continuant l'étude de Mangeron nous allons démontrer les résultats ci-dessous.

Théorème 1. *Le rapport des diamètres de deux circonférences consécutives du faisceau est la constante*

$$\frac{H_i H_{i+1}}{H_{i-1} H_i} = \operatorname{tg} \delta_m = \frac{B_m}{A_m},$$

où δ_m est l'angle élémentaire déterminé par le vecteur d'accélération d'ordre m d'un point M du plan mobile et le rayon vecteur de M par rapport au centre instantanné des accélérations d'ordre $m - P_m$.

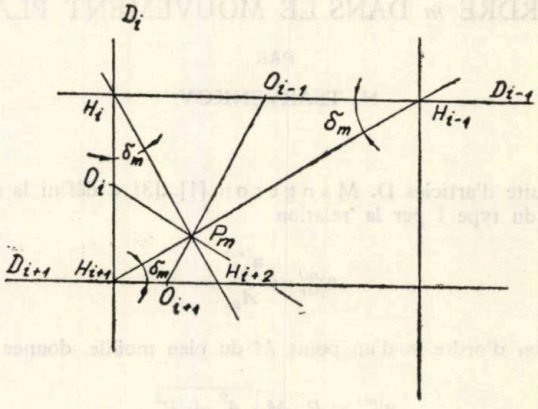


Fig. 1

La démonstration s'obtient sans peine d'après la fig. 1. En effet (D_{i-1}) et (D_{i+1}) étant parallèles, les angles entre (D_{i+1}) et $H_{i-1} P_m$ et entre D_{i-1} et $H_{i-1} P_m$ étant égaux, il s'en suit que la droite $H_{i-1} H_{i+1}$ est incidente avec P_m. D'autre part $H_i H_{i+1}$ et $H_{i-1} H_i$ sont les diamètres de deux circonférences consécutives de $\mathcal{C}$ et l'angle défini par $P_m H_{i-1}$ et $H_{i-1} H_i$ est δ_m, $H_{i-1} H_i$ étant l'accélération réduite du point H_{i-1}.

Théorème 2. *Les centres des circonférences du faisceau sont situés sur la spirale logarithmique S*

$$\varrho = a^{\varphi}$$

de centre P_m et de base

$$a = \left(\frac{A_m}{B_m}\right)^{\frac{2}{\pi}} = \operatorname{ctg}^{\frac{2}{\pi}} \delta_m .$$

Démonstration. Le pôle coïncidant avec P_m, les centres de deux circonférences consécutives de $\mathcal{C}$, de diamètre $H_{i-1} H_i$ et $H_i H_{i+1}$, sont $O_{i-1}(\varrho_{i-1}, \varphi + \pi/2)$, $O_i(\varrho_i, \varphi)$.

D'autre part

$$\varrho_i = a^{\varphi} = \frac{H_i H_{i+1}}{2} \text{ et } \varrho_{i-1} = a^{\varphi+\frac{\pi}{2}} = \frac{H_{i-1} H_i}{2},$$

les triangles $H_i O_i P_m$ et $H_{i-1} O_{i-1} P_m$ étant isoscels (fig. 1). Le rapport ϱ_{i-1}/ϱ_i donne

$$\frac{\varrho_{i-1}}{\varrho_i} = \frac{H_{i-1} H_i}{H_i H_{i+1}} = a^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_m} = \frac{A_m}{B_m}.$$

Il s'en suit donc

$$a = \left(\frac{A_m}{B_m}\right)^{\frac{2}{\pi}} = \operatorname{ctg}^{\frac{2}{\pi}} \delta_m.$$

Théorème 3. *Le lieu géométrique des extrémités des vecteurs de l'accélération réduite d'ordre m des points de la spirale logarithmique* $\varrho = a^{\varphi}$ *de pôle* P_m *et de base* $a = (A_m/B_m)^{\frac{2}{\pi}}$ *est la spirale* $\varrho = a^{\varphi}$ *elle même.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 2. La fig. 1 donne

$$\frac{P_m H_{i-1}}{P_m H_i} = \frac{\varrho_{i-1}}{\varrho_i} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_m} = a^{\frac{\pi}{2}},$$

d'où

$$a = \operatorname{ctg}^{\frac{2}{\pi}} \varrho_m = \left(\frac{A_m}{B_m}\right)^{\frac{2}{\pi}}.$$

Le théorème 3 donne lieu aux corollaires suivants, qui sont tout-à-fait évidents.

Corollaire 1. *L'extrémité de l'accélération réduite du point* $M(\varrho, \varphi) \in S$ *est le point* $M'(\varrho \operatorname{tg} \delta_m, \varphi + \pi/2) \in S$; *on a*

$$\mathbf{a}^{(m)}_{Mr} \cdot \mathbf{a}^{(m)}_{M'r} = 0.$$

Corollaire 2. *La vitesse réduite du type II d'un point M du plan mobile, retournée à* $\pi/2$, *est égale au rayon-vecteur de M, par rapport au centre instantanné de rotation.*

Remarque. L'accélération réduite du type II est définie par la relation

$$\mathbf{a}^{(m)}_{Mr''} = \frac{\mathbf{a}^{(m)}_{M}}{B_m}$$

et en particulier la vitesse réduite du type II, puisque $B = \dot{\theta}$ est

$$\mathbf{v}_{M_r} = \frac{\mathbf{v}_M}{B_0} = \frac{\mathbf{v}_M}{\dot{\theta}} = \frac{\dot{\theta} \times \overline{P_0M}}{\dot{\theta}} = \mathbf{n} \times \overline{P_0M}.$$

Nous donnons un théorème et un corollaire sans y joindre les démonstrations, celles-ci étant du type classique de la géométrie euclidienne.

Théorème 4. *Si la droite initiale* (D_0) *est transformée en* (D'_0), *la spirale S est soumise à une rotation d'angle* α *autour de son foyer* P_m.

Corollaire 3. *Si la droite* D_i *est soumise à une translation, telle que la transformée* D'_i *soit confondue avec* D_{i+4k} $(k$—*entier positif*), *la spirale est soumise à une rotation autour de son foyer* P_m *à l'angle* $\alpha = 2k\pi$.

Reçue le 5 VIII 1965

Institut de Mécanique et d'Electrotechnique, Sofia, Bulgarie

BIBLIOGRAPHIE

1. Манжерон Д. И., *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* ДАН СССР, 1955, **102**, 5, стр. 897—898.
2. — *О приведенных ускорениях любого порядка и некоторых их экстремальных свойствах.* ДАН СССР, 1957, **112**, *1*, стр. 27—28.
3. Манжерон Д., Дрэган К., *Исследование механизмов методом приведенных ускорений.* Тр. Всесоюзного совещ. по осн. пробл. ТММ, *Анализ и синтез механизмов.* Машгиз, М., 1960.

O PROPRIETATE A CÎMPULUI DE ACCELERAŢII REDUSE DE ORDIN m ÎN MIŞCAREA PLANĂ

(Rezumat)

Se stabilesc, în baza rezultatelor obţinute de D. Mangeron [1]...[3], un număr de teoreme relative la cîmpul de acceleraţii reduse de ordin m în mişcarea plană.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 621—231

MANGERON'S ANY ORDER REDUCED ACCELERATIONS METHOD AND APPLICATIONS FOR DETERMINING THE SECOND ACCELERATION IN A PLANE LINCAGE MECHANISM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM (II)

BY

KOCHO YAMAUCHI and KIYOSHI OGAWA

1. D. Mangeron's any order reduced accelerations method, both punctual and tangential, based on a set of theorems like: (I) *Theorem relative to the distribution of spacial accelerations of the first or second kind and of any order*; (II) *Theorem relative to generalized crosses*; *Isogonality theorem* and their plane particularizations [1], [2], was consequently used by various authors [3]...[6].

In what follows the authors, starting from their previous Note published in the same *Bulletin* [7], consider, in view of the future comparative analysis of various methods[1]), T. P. Goodman's indirect method for determining accelerations in complex mechanisms [9] and Carter's method for determining the second accelerations [10].

2. Consider the problem of determination of the second acceleration of the middle and driven links [7] in the case where ω_b, α_b and β_b of the driving link are given. Let the driving link be denoted by the subscript i and the stationary link by j and let subscripts k and l denote any two links of the mechanism in the case where its motion is constrained. Then the angle θ_{kl} between a line fixed in the link k and a line fixed in the link l is a function of the angle θ_{ij} between a line fixed in the driving link and a line fixed in the stationary link. Therefore the angular velocity ω_{kl} is a function of the angular velocity ω_{ij}, and $d\theta_{kl}/d\theta_{ij}$ is a purely geometrical property of the mechanism. If an arbitrary value ω_{ij}^0 is assigned to ω_{ij}, and ω_{kl}^0 is the corresponding value of ω_{kl}, we have

[1]) The advantages in the Mechanisms research work of an another D. Mangeron's method, called „Mangeron-Drăgan matrix-tensor method", was evidentiated in a very recent P. A. Lebedev's book [8].

$$(1)\qquad \omega_{kl} = \frac{d\theta_{kl}}{d\theta_{ij}}\omega_{ij}\,, \qquad (2)\quad \frac{\omega^0_{kl}}{\omega^0_{ij}} = \frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}}\,,$$

$$(3)\qquad \alpha_{kl} = \frac{d^2\theta_{kl}}{d\theta^2_{ij}}\omega^2_{ij} + \frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}}\alpha_{ij}\,, \qquad \alpha_{kl} = \gamma^2\alpha^0_{kl} + (\alpha_{ij} - \gamma^2\alpha^0_{ij})\frac{\omega^0_{kl}}{\omega^0_{ij}}\,,$$

where $\gamma = \omega_{ij}/\omega^0_{ij} = \omega_{kl}/\omega^0_{kl}$. If we assume $\gamma = 1$ and $\alpha^0_{ij} = 0$, then

$$(4)\qquad \alpha_{kl} = \alpha^0_{kl} + \alpha_{ij}\frac{\omega^0_{kl}}{\omega^0_{ij}}\,.$$

Applying Eq. (4) to Fig. 4 [7], we have $\alpha_d = \alpha^0_d + \alpha_b\,\omega_d/\omega_b$. If this last equation is multiplied by $\overline{DE}$, then

$$(5)\qquad \alpha_{EDt} = \alpha_{EDt0} + \Delta\alpha_{EDt} = \alpha_{EDt0} + \vec{XA}\,.\,\alpha_b\,.$$

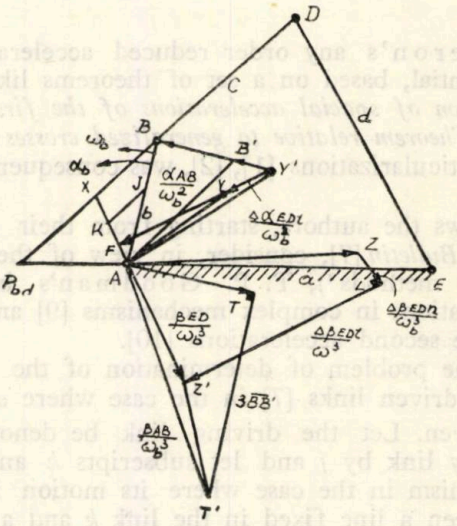


Fig. 1.—Method for determining second accelerations in the case where the driving link has ω_b, α_b, and β_b equals zero.

The authors already reported a method for correcting accelerations in the previous paper [12]. Namely, let us take a point $\mathcal{J}$ on AB so as to be $\overline{AB}:\overline{A\mathcal{J}} = \omega_b^2:\alpha_b$ and denote by K the intersection of AX with the straight line passing through $\mathcal{J}$ and parallel to BX in Fig. 1. Let us take a point B' on the straight line passing throug B and perpendicular to AB so as

to be $\overline{BB'} = \overline{Aj}$, on either the right or left side depending on the sign of α_{AB}, and take Y' on YF, which passes through Y and is normal to AX, so as to be $\overline{YY'} = \overline{AK}$. Then from Eq. (5) $\alpha_{EDt} = \overrightarrow{YF}.\omega_b^2 + \overrightarrow{Y'Y}.\omega_b^2 = \overrightarrow{Y'F}.\omega_b^2$. Thus the vector triangle of accelerations is obtained as $\Delta\, AY'B'$ [2]). Furthermore, we may obtain the equation of second acceleration by differentiating Eq. (3) with regard to time t, and than transform this equation for the sake of the convenient graphical method. That is

$$\beta_{kl}\frac{d^3\theta_{kl}}{dt^3} = \frac{d\alpha_{kl}}{dt} = \frac{d^3\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^3}\omega_{ij}^3 + 3\frac{d^2\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^2}\omega_{ij}\alpha_{ij} + \frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}}\beta_{ij}, \tag{6}$$

or

$$\beta_{kl} - \frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}}\beta_{ij} - 3\frac{d^2\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^2}\omega_{ij}\alpha_{ij} = \frac{d^3\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^3}\omega_{ij}^3,$$

where $\omega_{ij} \neq 0$. $d^3\theta_{kl}/d\theta_{ij}^3$ is also a purely geometrical property of the mechanism, depending on its position but not on its velocity, acceleration and second acceleration. If an arbitrary value β_{ij}^0 is assigned to β_{ij} and β_{kl}^0 the corresponding value of β_{kl}, respectively, we have

$$\beta_{kl}^0 - \frac{\omega_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}\beta_{ij}^0 - 3\frac{d^2\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^2}\omega_{ij}^0\alpha_{ij}^0 = \frac{d^3\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^3}(\omega_{ij}^0)^3,$$

where $\omega_{ij}^0 \neq 0$.

Equalizing the last two equations, we obtain

$$\beta_{kl} - \gamma^3\beta_{kl}^0 - 3\frac{d^3\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^3}\omega_{ij}\alpha_{ij} = \frac{\omega_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}(\beta_{ij} - \gamma^3\beta_{ij}^0) - 3\frac{d^2\theta_{kl}}{d\theta_{ij}^2}\omega_{ij}^0\alpha_{ij}^0\gamma^3. \tag{7}$$

Using Eqs. (7) and (3), we obtain

$$\beta_{kl} - \gamma^3\beta_{kl}^0 - 3\left(\frac{\alpha_{ij}}{\omega_{ij}}\alpha_{kl} - \gamma^3\frac{\alpha_{ij}^0\alpha_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}\right) = \frac{\omega_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}\left\{\beta_{ij} - \gamma^3\beta_{ij}^0 - 3\left[\frac{\alpha_{ij}^2}{\omega_{ij}} - \gamma^3\frac{(\alpha_{ij}^0)^2}{\omega_{ij}^0}\right]\right\}.$$

Assuming ω_{ij}^0 is constant, $\alpha_{ij}^0 = 0$, $\beta_{ij}^0 = 0$, and $\gamma = \omega_{ij}/\omega_{ij}^0 = 1$, we have

$$\beta_{kl} - \beta_{kl}^0 = \frac{\omega_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}\beta_{ij} + 3\frac{\alpha_{ij}}{\omega_{ij}}\left(\alpha_{kl} - \frac{\omega_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}\alpha_{ij}\right). \tag{8}$$

---

[2]) Various geometrical constructions of any order accelerations fields related with complex plane mechanisms are to be find in D. Mangeron's and C. Drăgan papers published since 1955 in this *Bulletin* [11].

In the case where α_{ij} is constant and β_{ij} is equal to zero, the first term on the right-hand side of Eq. (8) vanishes, that is

$$\beta_{kl} - \beta_{kl}^0 = 3\frac{\alpha_{ij}}{\omega_{ij}}\left(\alpha_{kl} - \frac{\omega_{kl}^0}{\omega_{ij}^0}\alpha_{ij}\right). \tag{9}$$

Applying concretely Eq. (9) to Fig. 4 [7], we have

$$\beta_d - \beta_d^0 = 3\frac{\alpha_b}{\omega_b}\left(\alpha_d - \frac{\omega_d}{\omega_b}\alpha_b\right). \tag{10}$$

If Eq. (10) is multiplied by $\overline{DE}$, then we have

$$\Delta\beta_{EDt} = (\beta_d - \beta_d^0).\overline{DE} = 3\frac{\alpha_b}{\omega_b}\left(\alpha_{EDt} - \frac{\alpha_b}{\omega_b}v_{ED}\right). \tag{11}$$

The normal second acceleration is expressed with Eq. $\beta_n = 3\alpha_t v/\varrho$, and its increment, $\Delta\beta_n$, is as follows: $\Delta\beta_n = 3\Delta\alpha_t v/\varrho$. Applying the last one to Fig. 4 [7], we have

$$\Delta\beta_{EDn} = 3\Delta\alpha_{EDt}\frac{v_{ED}}{\overline{DE}} = 3\,\overline{Y'Y}.\overline{AX}.\omega_b^3. \tag{12}$$

In fig. 1, let $\overrightarrow{AX}.\omega_b$, $\overrightarrow{YA}.\omega_b^2$ and $\overrightarrow{AZ}.\omega_b^3$ assign the velocity, acceleration, and second acceleration, respectively, of the driven link in the case where the driving link rotates uniformly at a constant angular velocity ω_b. Those values in the case where the driving link has ω_b and α_b, β_b equals zero can be obtained by means of correcting (using Eq. (11) for $\Delta\beta_{EDt}$ and Eq. (12) for $\Delta\beta_{EDn}$) the values in the case where ω_b is constant.

When a point L is taken on the straight line passing through Z and parallel to DE so as to be $\overline{ZL} = \Delta\beta_{EDn}/\omega_b^3$ in Eq. (12) in the same sense as the vector of $\Delta\alpha_{EDt}$ is rotated by 90° counterclockwise, and then a point Z is taken on the straight line passing through L and perpendicular to DE (on the left side of L when $\Delta\beta_{EDt}$ is positive) so as to be $\overline{LZ'} = \Delta\beta_{EDt}/\omega_b^3$ in Eq. (11), the second acceleration of the driven link in the case where ω_b and α_b are given and β_b equals zero is shown as follows: $\beta_{ED} = \overrightarrow{AZ'}.\omega_b^3$. In the case where the driving link has a constant angular acceleration, the second acceleration of B relative to A is $\beta_{AB} = \overrightarrow{AT}.\omega_b^3 + \overrightarrow{TT'}.\omega_b^3 = \overrightarrow{AT'}.\omega_b^3$ and the second acceleration of B relative to D is naturally obtained and expressed as follows: $\beta_{DB} = \overrightarrow{Z'T'}.\omega_b^3$.

3. W. J. Carter reported calculation formulas for the angular accelerations and second angular accelerations in the cranklever mechanism [10]. According to his method, different formulas must be applied depending on whether the rotopole for crank and lever is outside the fixed centers or between them. In the case where the rotopole P_{bd} is outside the fixed centers, as shown in Fig. 2, the following equations have been given [3]:

$$\omega_d = \omega_b \frac{e}{f}, \quad \alpha_d = \omega_b^2 \left[\frac{e}{f} - \left(\frac{e}{f}\right)^2 \right] \cot\psi + \frac{e}{f}\alpha_b ,$$

$$\beta_d = \omega_b^3 \left[\frac{e}{f} - 3\left(\frac{e}{f}\right)^2 + 2\left(\frac{e}{f}\right)^3 \right] \cot^2\psi - \omega_b^2 \left[\frac{e}{f} - \left(\frac{e}{f}\right)^2 \right] \frac{d\psi}{dt} \operatorname{cosec}^2\psi +$$

$$+ 3\,\omega_b \alpha_b \left[\frac{e}{f} - \left(\frac{e}{f}\right)^2 \right] \cot\psi + \frac{e}{f}\beta_b ,$$

where e and f are the distances from the centers of the driving link and the driven link, respectively, to P_{bd}, and ψ is an angle which the collineation axis P_{ac}, P_{bd} and the middle link enclose. It appears that the second accelerations can be simply obtained according to Carter's method, but the angle ψ must be measured in practice. The construction by the relative velocity method must be carried out so as to obtain $d\psi/dt = \pm\omega_k \pm \omega_c$ as shown in Fig. 2. In consequence, it will give rise to errors due to construction and calculation. In particular, the smaller the angle ψ is, the larger becomes the influence of measuring error of ψ upon the term of $\cot^2\psi$. We must, moreover, adopt the sign of ψ as positive when it is measured from the middle link to the collineation axis in the case of the counterclockwise rotation of the driving link. Some of the lines in the drawing frequently get out of the paper. He showed only the angular accelerations and second angular accelerations, but not the magnitudes and

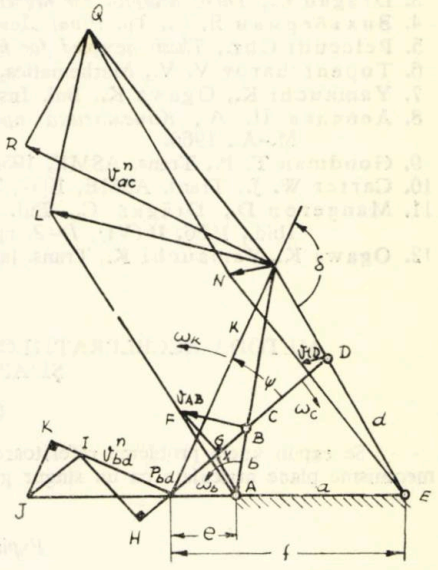


Fig. 2. — Carter's method (rotopole P_{bd} is outside the fixed centers).

[3]) One obtains easily the similar ones in the case where P_{bd} is between the fixed centers.

senses of second accelerations. And β_d is only the second time derivative of Eq. $\omega_d = \omega_b(e/f)$ or of Eq. $\omega_d = -\omega_b(e/f)$ corresponding to the case when rotopole P_{bd} is between the fixed centers, so β_d can not be obtained in the special case where the above mentioned Eqs. are not valid.

Various simplifications are to be realized by following step by step the Mangeron's any order reduced accelerations method, crystallized in [1], [2] and continued taking into account technical applications in D. Mangeron and C Drăgan set of articles published in the same Bulletin beginning 1955 [11].

Received the 26 XI 1965

Faculty of Engineering, Miyazaki University
and
Tokyo Institute of Technology, Japan

REFERENCES

1 Mangeron D., *Machine Dynamics and Machine Design in the Light of some New Results concerning Plane and Spacial Mechanisms.* Proc. Ninth Congress Theor. Appl. Mech. Kanpur, India, 1964, pp. 333–345.
2. – ДАН СССР, 1955, **102**, *4*, стр. 705–706; Ibid., 1955, **102**, *35*, стр. 897–898.
3. Drăgan C., *Thesis accepted for higher degree.* Univ. „Al. I. Cuza", Jassy, 1961.
4. Зильберман Я. С., Тр. Р/на/ Дону Ин-та ИЖТ, 1961, *19*, стр. 11–91.
5. Pelecudi Chr., *Thesis accepted for higher degree.* Polyt. Inst. Bucarest, 1965.
6. Topentcharov V. V., Mathematica, Cluj, 1965, **7** (**30**), pp. 163–190.
7. Yamauchi K., Ogawa K., Bul. Inst. polit, Iaşi, 1965, **XI** (**VX**), *3–4*, pp. 335–340.
8. Лебедев П. А, *Кинематика пространственных механизмов.* Машиностроение, М.-Л., 1966.
9. Goodman T. P., Trans. ASME, 1958, **80**, *8*, pp. 1676–1685.
10. Carter W. J., Trans. ASME, 1957, **79**, *6*, pp. 1305–1312.
11. Mangeron D., Drăgan C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I** (**V**), *1–2*, pp. 229–248; Ibid., 1956, **II** (**VI**), *1–2*, pp. 295–304.
12. Ogawa K., Yamauchi K., Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1962, **28**, *196*, pp. 1700–1707.

METODA ACCELERAŢIILOR REDUSE DE ORDIN OARECARE ŞI APLICAŢII (II)

(Rezumat)

Se expun unele probleme referitoare la distribuţia acceleraţiilor de ordinul al doilea în mecanisme plane articulate cu un singur grad de libertate.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. – Metodă pentru determinarea acceleraţiilor de ordinul al doilea în cazul cînd organul motor are ω_b şi α_b; β_b este egal cu zero.

Fig. 2. – Metoda lui Carter (polul instantaneu P_{bd} se află în afara centrelor fixe).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 621.82

CONTRIBUTIONS CONCERNANT LES MÉTHODES NOUVELLES D'ESSAI POUR LES ROULEMENTS

II. MÉTHODE D'ESSAI DES ROULEMENTS SOUS CHARGE PROGRESSIVE LIMITÉE ET RÉPÉTÉE

III. MÉTHODE D'ESSAI DES ROULEMENTS AVEC INTERRUPTION DE L'ESSAI APRÈS LA DESTRUCTION D'UN NOMBRE LIMITÉ DE ROULEMENTS DU LOT

PAR

N. G. POPINCEANU et M. D. GAFIŢEANU

Comunication présentée à la Conférence de Mécanique, Bucarest, 27—30 septembre 1965

1. Introduction

Dans une Note antérieure, insérée dans le même *Bulletin* [1], où l'on a donné la bibliographie concernant le problème étudié dans ce qui suit, nous avons présenté la méthode d'essai des roulements sous charge progressive et continue.

Dans cette Note nous exposons, tout en conservant les notations utilisées, la méthode d'essai sous charge progressive limitée et répétée et celle avec interruption de l'essai après la destruction d'un nombre limité de roulements du lot.

2. Méthode d'essai sous charge progressive limitée et répétée

3.1. Charge équivalente

La construction des machines d'essai, dans le cas des essais économiques, nécessite l'essai simultané de quatre roulements. Ces essais ne permettent pas l'accroissement continu et illimitée de la charge parce que les roulements ne présentent pas tous, à la fois, des signes de fatigue; en même temps, pour quelques roulements essayés se produit une augmentation d'une certaine valeur de la charge, qui correspond à la destruction des roulements remplacés.

Pour éviter cet inconvénient on propose l'essai des roulements sur des machines d'essai avec un programme de variation de la charge, basé sur le diagramme en dents de scie représenté dans la fig. 1.

Avec les notations de la fig. 1, M représente (en rotations) la durée d'un cycle d'essai;

$$M = \frac{P_{i\max}}{\alpha} \text{ et } P_{i\max} = \frac{C_0}{c} \tag{1}$$

et la durabilité effective du roulement (en rotations) est:

$$L_{0i} = M(i + 1 - k_1 + k_2). \tag{2}$$

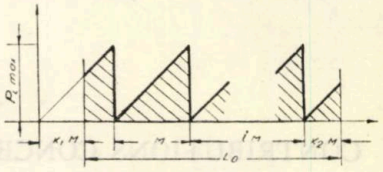


Fig. 1. — Variation de la charge selon la méthode d'essai sous charge progres ive limitée et répétée.

Compte tenu de l'équation (8) [1, § 2.1] on peut calculer

$$P_{0i} = \frac{\alpha}{(p_k + 1)^{1/p_k}} L_{0i} \frac{i + 1 - k_1{}^{p_k+1} + k_2{}^{p_k+1}}{(i + 1 - k_1 + k_2)^{(p_k+1)/p_k}}. \tag{3}$$

Utilisant les équations (10) et (13) [1] il en résulte:

$$L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \cdot \frac{L_{0i}{}^{p(p_k+1)/p_k}}{(p_k + 1)^{p/p_k}} \cdot \frac{(i + 1 - k_1{}^{p_k+1} + k_2{}^{p_k+1})^{p/p_k}}{(i + 1 - k_1 + k_2)^{p(p_k+1)/p_k}} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \frac{M^{p(p_k+1)/p_k}}{(p_k + 1)^{p/p_k}} (i + 1 - k_1{}^{p_k+1} + k_2{}^{p_k+1})^{p/p_k}. \tag{4}$$

Le taux de charge dynamique de base d'un lot essayé, suivant cette méthode, peut être calculé à l'aide de la relation:

$$C = P_{00,9} L_{00,9}^{1/p_k}, \tag{5}$$

où $P_{00,9}$ est la charge équivalente correspondante à la durabilité $L_{00,9}$ (v. (3)).

1.2. Durée des essais

On peut déduire (v. (4)) les relations:

$$\sum_1^n L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \frac{1}{(p_k + 1)^{p/p_k}} M^{p(p_k+1)/p_k} \sum_1^n (i + 1 - k_1{}^{p_k+1} + k_2{}^{p_k+1})^{p/p_k}, \tag{6}$$

$$\sum_1^n (i + 1 - k_1{}^{p_k+1} + k_2{}^{p_k+1}) \cong \sum_1^n (i + 1 - k_1 + k_2), \tag{7}$$

$$\sum_1^n L_i = \left(\frac{\alpha}{P}\right)^p \frac{1}{(p_k + 1)^{p/p_k}} M^p \sum_1^n L_{0i}^{p/p_k}. \tag{8}$$

Dans ces conditions le rapport entre la durée totale des essais sous charge progressive limitée et répétée et la durée totale est donné par

$$\frac{\sum_1^n L_{0i}}{\sum_1^n L_i} = R_0 = \frac{p_k + 1}{\left(\log \frac{1}{0{,}9}\right)^{(p_k - p)/pe}} \cdot \frac{C_{pk}^{-p} P^p}{P_{0\max}^{p_k}} \cdot \frac{\sum_1^n \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^{p_k/pe}}{\sum_1^n \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^{1/e}} = \tag{9}$$

$$= \frac{p_k + 1}{\left(\log \frac{1}{0{,}9}\right)^{(p_k - p)/pe}} \cdot \frac{C^{p_k - p} P^p C^{p_k}}{C_0^{p_k}} \cdot \frac{\sum_1^n \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^{p_k/pe}}{\sum_1^n \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^{1/e}} \cdot$$

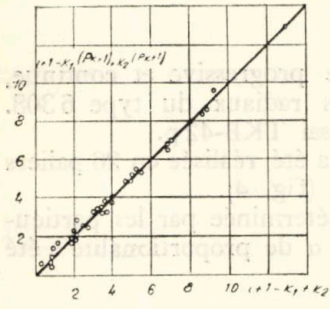


Fig. 2. — Corrélation entre $i + 1 - k_1^{p_k+1} + k_2^{p_k+1}$ et $i + 1 - k_1 + k_2^{\pi}$ pour un lot de roulements essayés, du type 6 308.

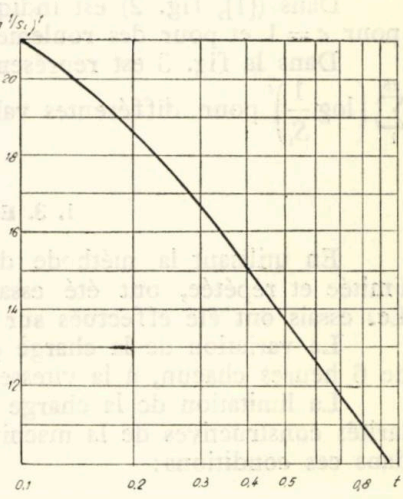


Fig. 3. — Valeur de l'expression $\sum_1^{25} \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^t$ calculée pour différentes valeurs de t.

En remplaçant p et p_k par les valeurs connues, et compte tenu de la fig. 4, pour $n = 25$ on obtient :

a) contact ponctuel :

$$R_0 = \frac{5{,}80\, P^{3{,}43} C^{0{,}4} c^{3{,}83}}{C_0^{3{,}83}}; \tag{10}$$

b) contact linéaire:

$$R_0 = \frac{6{,}72\, P^4 C^{1/2} c^{4,5}}{C_0^{4,5}}. \tag{11}$$

Mais par rapport à l'équation (8) la durée des essais ne dépend pas de la valeur du coefficient α:

$$\sum_1^n L_{0i} = \left(\frac{P}{\alpha}\right)^{p_k} (p_k + 1)\ \frac{1}{M^{p_k}} \sum_1^n L_i^{p_k/p} \tag{12}$$

et donc:

$$\sum_1^n L_{0i} = \left(\frac{P}{P_{\max}}\right)^{p_k} (p_k + 1) \sum_1^n L_i^{p_k/p}. \tag{13}$$

Dans ([1], fig. 2) est indiquée la variation de R_0 en fonction de P/C_0 pour $c = 1$ et pour des roulements du type 6308.

Dans la fig. 3 est représentée la variation de la valeur de l'expresion $\sum_1^{25} \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^t$ pour différentes valeurs de l'exposant t.

1. 3. Essais expérimentaux

En utilisant la méthode d'essai sous charge progressive et continue, limitée et répétée, ont été essayés 36 roulements radiaux du type 6 308. Les essais ont été effectués sur une machine d'essai TKB-42 p.

La variation de la charge de 0 à 1 615 kgf a été réalisée en 26 paliers de 6 heures chacun, à la vitesse de 2 600 rot/min (fig. 4).

La limitation de la charge maximum a été déterminée par les particularités constructives de la machine; le coefficient α de proportionalité a été dans ces conditions:

$$\alpha = \frac{P_{i\max}}{M} = \frac{1\,615.10^6}{26.6.60.2\,600} = 66{,}5 \text{ kgf}/10^6 \text{ rot.}$$

La durée d'un cycle d'essai a été

$$M = 26.6.60.2\,600 = 24{,}3.10^6 \text{ rotations.}$$

Pour comparaison, dans les mêmes conditions d'essai mais sous une charge constante de 875 kgf, ont été essayés des lots de roulements du même type (48 roulements). Les résultats comparatifs des essais sont présentés dans la fig. 5.

À la suite des essais on a abouti à la conclusion que la meilleure coïncidence entre les résultats des essais sous charge progressive limitée et

répétée et ceux des essais sous charge constante (v. équations (4) et (5)) est atteinte pour la valeur $p_k = 4$ (fig. 6).

Il est à remarquer que dans le cas des essais effectués, pour l'exposant p_k on a trouvé une valeur approchée de celle trouvée par Senigalliesi pour les roulements à billes.

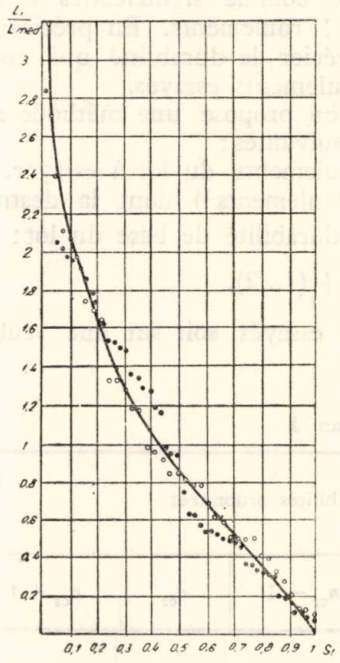


Fig. 5. — Résultats des essais effectués sur des roulements du type 6 308; o — charge progressive limitée et répétée, • — charge constante, —— — distribution théorique pour $e = 1{,}3$.

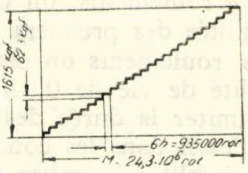


Fig. 4. — Variation de la charge progressive limitée et répétée en paliers de 6 heures (en moyenne $\alpha = 66{,}5$ kgf/10^6 rot).

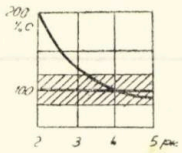


Fig. 6. — Taux de charge dynamique de base (en %) pour l'essai sous charge progressive limitée et répétée par rapport au taux de l'essai sous charge constante, pour différentes valeurs de p_k.

Toutefois on a observé que les détériorations des roulements sont identiques aux celles constatées aux essais sous charge constante.

3. Méthode d'essai avec interruption de l'essai après la destruction d'un nombre limité de roulements du lot essayé

La durée totale des essais pour un lot de roulements est determinée, dans sa plus grande partie, par les roulements qui ont des durabilités au dessus de la moyenne. Les essais effectués montrent, par exemple, que pour

les essais de 25 roulements sous charge constante sont nécessaires, en moyenne, 15 000 heures, donc 3 750 heures/machine; dans ces conditions on peut aussi constater que seulement 5 roulements (20 %) ayant les plus grandes durabilités du lot, ont eu une durée de 6 000 heures (1 500 heures/machine), donc 40 % de la durée totale des essais.

Pour trouver la durabilité et le taux de charge dynamique de base d'un lot de n roulements, on considère comme significatifs la destruction et les durabilités des premiers $n/10 + 1$ roulements. En précisant la durabilité de ces roulements on peut apprécier la durabilité qui correspond à une probabilité de vie de $0{,}9n$ des roulements essayés.

Pour limiter la durée des essais on propose une méthode avec interruption de l'essai dans les conditions suivantes:

1° On établit le nombre n de roulements du lot à essayer.

2° On établit le nombre n_{cr} de roulements[1]) dont la destruction est significative dans l'appréciation de la durabilité de base du lot:

$$n_{cr} = 0{,}1n + (1...2). \tag{14}$$

3° Les roulements peuvent être essayés soit sur une seule machine d'essai soit sur plusieures machines.

Tableau 1

Ordre correspondant au remplacement du roulement	Durabilités ordonnées							
	1	2	3 ...	$n_{cr}-1$	n_{cr}	$n_{cr}+1$	...	n
1	L_{11}							
2	L_{12}	L_{22}						
3	L_{13}	L_{23}	L_{33}					
⋮	⋮	⋮	⋮					
$n_{cr}-1$	$L_{1,n_{cr}-1}$	$L_{2,n_{cr}-1}$	$L_{3,n_{cr}-1}$ ...	$L_{n_{cr}-1,n_{cr}-1}$				
n_{cr}	$L_{1,n_{cr}}$	$L_{2,n_{cr}}$	$L_{3,n_{cr}}$ ...	$L_{n_{cr}-1,n_{cr}}$	$L_{n_{cr},n_{cr}}$			
$n_{cr}+1$	$L_{1,n_{cr}+1}$	$L_{2,n_{cr}+1}$	$L_{3,n_{cr}+1}$ ...	$L_{n_{cr}-1,n_{cr}+1}$	$L_{n_{cr},n_{cr}+1}$	$L_{n_{cr}+1,n_{cr}+1}$		
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	$L_{1,n}$	$L_{2,n}$	$L_{3,n}$ ...	$L_{n_{cr}-1,n}$	$L_{n_{cr},n}$	$L_{n_{cr}+1,n}$	...	$L_{n,n}$

[1]) On peut ajouter un ou deux roulments pour améliorer la précision dans l'appréciation de la curbe durabilité–probabilité de vie dans la zone critique.

4° Après chaque remplacement d'un roulement essayé, les durabilités des roulements remplacés sont ordonnées selon un ordre progressif.

5° Pour chaque ordre on peut trouver les premiers n_{cr} roulements qui ont la durabilité moindre ou égale à la celle du roulement qui occupe la place n_{cr} dans l'ordre respectif.

6° En passant d'un ordre à un autre les durabilités mesurées peuvent avoir de différentes places dans la ligne ordonnée.

7° Après la destruction et le remplacement des premiers n_{cr} roulements, avec les ordres respectifs, on peut trouver les cas suivants:

a) Le roulement $n_{cr} + 1$ manifeste une tendance à fonctionner pendant une durée plus longue que celle du roulement qui occupe la place n_{cr} dans l'ordre antérieur. Le roulement est remplacé, sans attendre sa destruction, immédiatement après avoir atteint la durabilité du roulement qui occupe la place n_{cr} dans l'ordre précedent.

b) Le roulement $n_{cr} + 1$ a une durabilité moindre que celle du roulement qui occupe la place n_{cr} dans l'ordre antérieur. Le roulement est remplacé immédiatement après sa destruction.

8° Chaque fois, après chaque roulement remplacé, les roulements essayés sont ordonnés pour trouver ainsi la durabilité qui occupe en ordre (croissant) la place n_{cr}.

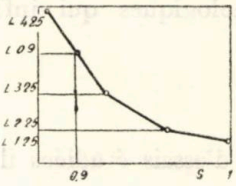


Fig. 7. — Appréciation de la durabilite $L_{0,9}$ pour $n = 25$ et $n_{cr} = 4$.

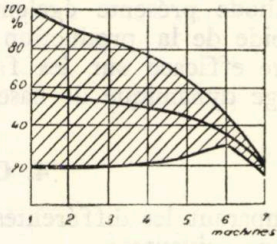


Fig. 8. — Durée moyenne de temps (en %) pour l'essai sous charge constante avec interruption, par rapport à la durée moyenne pour l'essai class.que sous charge constante ($n = 30$, $n_{cr} = 5$, $e = 1{,}1$).

9° Le dernier ordre doit être effectué après le remplacement du dernier roulement du lot. De ce dernier ordre on peut trouver les moindres n_{cr} durabilités des roulements du lot.

Ces durabilités, tracées sur la diagramme probabilité-durabilité, permettent à determiner la durabilité $L_{0,9}$ qui corréspond à une probabilité de vie

$S = 0{,}9\, L_{0,9}$ (fig. 7). Le taux de charge dynamique de base, en utilisant une rélation déjà connue, est:

$$C = PL_{0,9}^{1/p}.$$

Les avantages de cette méthode sont évidentes et d'autant plus importantes que le nombre de roulements essayés simultanément est plus grand.

Dans la fig. 8 sont données en % de moyenne par rapport aux essais classiques, les durées nécessaires pour l'essai d'un lot de 30 roulements, pour $n_{cr} = 5$ et une dispersion déterminée par $e = 1{,}1$ (sur chaque machine sont essayés simultanément quatre roulements).

On peut donc voir qu'on peut réaliser par cette voie une économie de temps de 40% à 80% d'où il en résulte une assez importante économie d'énergie.

L'économie de temps est d'autant plus grande que n_{cr} est plus petit, dans les limites recommandées. On a pu constater que si l'essai d'un lot de 48 roulements du type 6308 a duré sur une machine 7530 heures, l'essai du même lot, dans les conditions imposées par cette méthode, a duré pour $n_{cr} = 6$ seulement 3204 heures, d'où il en résulte une économie de temps de 66,5%; pour $n_{cr} = 10$, l'économie de temps aurait atteint seulement 54,5%.

On peut appliquer la même méthode d'essai aux essais sous charge progressive et continue et aussi aux essais sous charge progressive limitée et répétée, en réduissant sensiblement la durée des essais.

La méthode présente également des avantages en ce qui concerne le contrôle rapide de la production des roulements, permettant à actionner d'une manière efficace sur les facteurs technologiques qui influencent le taux de charge dynamique de base.

4. Conclusions

En comparant les différentes méthodes d'essais étudiées il en résulte les conclusions suivantes:

a) Les essais classiques des roulements sous charge constante et continue nécessitent une durée de temps appreciable et une grande quantité d'énergie; elles ne correspondent pas donc au processus technologique vu qu'elles ne permettent pas d'actionner assez rapidement sur les facteurs technologiques qui influencent le taux de charge dynamique de base pour l'amélioration de la production.

b) Les essais des roulements sous charge progressive et continue présentent des avantages en ce qui concerne la durée des essais seulement dans des conditions bien précisées ([1], fig. 2); la durée de ces essais par rapport à celle des essais classiques est d'autant plus petite que la charge des essais classiques devient plus petite, c'est-à-dire d'autant plus petite que le rapport $R_{a,b,c}$ [1] est plus petit; toutefois les essais sous charge progressive et continue sont effectués sur des machines qui peuvent essayer

un seul roulement, tandis que les essais classiques sont effectués sur des machines qui peuvent essayer quatre roulements simultanément. La dispersion des résultats des essais d'un lot de roulements sous charge constante est plus grande que celle des résultats des essais du même lot mais sous charge progressive et continue. La charge maximum des essais sous charge progressive et continue est limitée par le rapport C_0/c aussi que par la capacité portante des éléments de la machine d'essai.

c) Les essais des roulements sous charge progressive limitée et répétée présentent des avantages incontestables en ce qui concerne la durée de temps et la dépense d'énergie par rapport aux essais sous charge constante où progressive et continue, effectués dans les conditions specifiées dans ([1], fig. 2). En utilisant cette méthode on peut employer les machines classiques d'essai qui permettent à essayer simultanément quatre roulements.

d) Les avantages économiques et technologiques sont encore plus évidents lorsqu'on utilise la méthode avec interruption de l'essai après la destruction d'un nombre limité de roulements.

L'économie de temps réalisée par rapport aux essais classiques sous charge constante peut atteindre 20% à 80%.

Institut Polytechnique de Jassy,
Laboratoire des éléments de machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Popinceanu N. G., Gafiţeanu M. D., *Contributions concernant les méthodes nouvelles d'essai des roulements* (I). Bul. Inst. polit., Iaşi, 1967, **XIII (XVIII)**, *1—2*, pp. 443—454.

CONTRIBUŢII LA NOI METODE DE ÎNCERCARE A RULMENŢILOR

II. Metodă de încercare a rulmenţilor sub sarcină progresivă limitată şi repetată

III. Metodă de încercare a rulmenţilor cu întrerupere după distrugerea unui număr limitat de rulmenţi

(Rezumat)

În această Notă se expune metoda de încercare a rulmenţilor sub sarcină progresivă limitată şi repetată şi metoda de încercare a rulmenţilor cu întrerupere după distrugerea unui număr limitat de rulmenţi.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia sarcinii după metoda de încercare sub sarcină progresivă limitată şi repetată.

Fig. 2. — Corelaţia dintre $i + 1 - k_1^p k^{+1} + k_2^p k^{+1}$ şi $i + 1 - k_1 + k_2$ pentru un lot de rulmenţi încercaţi, tip 6 308.

Fig. 3. — Valoarea expresiei $\sum_1^{25} \left(\log \frac{1}{S_i}\right)^t$ calculată pentru diferite valori ale lui t.

Fig. 4. — Variația sarcinii progresive limitate și repetate în trepte de 6 ore (în medie $\alpha = 66{,}5$ kgf/10^6 rot).

Fig. 5. — Rezultatele încercărilor efectuate cu rulmenți 6 308: o — sarcină progresivă limitată și repetată, • — sarcină constantă, —— — distribuție teoretică pentru $e = 1{,}3$.

Fig. 6. — Capacitatea dinamică de bază (în %) pentru încercarea sub sarcină progresivă limitată și repetată în raport cu capacitatea obținută la încercarea sub sarcină constantă pentru diferite valori ale lui p_k.

Fig. 7. — Aprecierea durabilității $L_{0,9}$ pentru $n = 25$ și $n_{cr} = 4$.

Fig. 8. — Durata medie de timp (în %) pentru încercarea sub sarcină constantă cu intrerupere, în raport cu durata medie de timp pentru încercarea clasică sub sarcină constantă ($n = 30$, $n_{cr} = 5$, $e = 1{,}1$).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 621—2

SUR LA RÉSISTANCE AU DÉPLACEMENT DES ROUES MENÉES DANS LE CAS D'UN MOUVEMENT DE ROULEMENT AVEC PATINAGE ET GLISSEMENT

PAR

CRISTIAN LINDE, VICTOR BAUŞIC et N. IRIMICIUC

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 5—7 Février 1965

1. Considérations introductives

Dans la construction des appareils de levage et de manutention on utilise souvent des roues menées en contact linéaire avec le rail et pour lesquelles, dans les points de contact roue-rail, apparaissent des mouvements de roulement avec patinage et glissement. C'est, par exemple, le cas des grues à plaque tournante équipées de roues cylindriques roulant sur la surface plane, horizontale, du rail (fig. 1) ou bien le cas des convoyeurs en circuit fermé ou des monorails dont les chariots ont des roues coniques qui roulent sur la surface plane, inclinée, d'un profil laminé (fig. 2). Dans les cas cités ci-dessus et aussi bien dans des cas similaires les forces de frottement créées par les mouvements de roulement avec patinage et glissement ont pour effet l'apparition d'une résistance au déplacement supplémentaire.

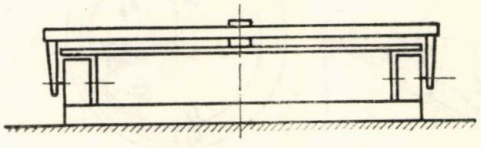


Fig. 1

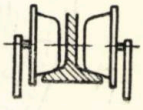


Fig. 2

Les indications trouvées dans la littérature consultée, quant à l'évaluation de cette résistance supplémentaire, sont soit dépourvues de justification, soit fondées sur des déductions d'une rigueur insuffisante. Dans le cas des grues à plaque tournante (fig. 1) on récommande [1], [2], sans d'autres explications, des augmentations de la valeur usuelle du coefficient de résistance au déplacement des roues de 40% pour les roues aux paliers à glissement et de 150% pour les roues aux paliers à roulement. Dans le cas des convoyeurs à circuit fermé (fig. 2) on propose [3] une formule pour le calcul du coefficient de résistance au déplacement en tenant compte des pertes supplémentaires dues à la forme conique des roues mais on ne justifie pas cette formule. Enfin, dans le cas des monorails avec une même construction des

roues des chariots (fig. 2) on fournit [4], [5] des déductions, pour l'établissement de la résistance au déplacement, due à la même cause, mais d'une rigueur insuffisante. Par conséquent, l'inexistance d'une base théorique rigoureuse empêche la compréhension des phénomènes et peut facilement introduire des erreurs lors de l'utilisation des indications et des formules citées.

Dans ce qui suit on établit d'une manière rigoureuse, pour une roue menée en contact linéaire avec le rail, une fomule générale pour le calcul de la résistance au déplacement causée par les mouvements de roulement avec patinage et glissement qui apparaissent dans les points de contact roue-rail. Dans ce but on considère le cas général d'un rail circulaire à surface de roulement conique et d'une roue conique à axe de rotation incliné. Le cas considéré inclue comme cas particuliers ceux représentés dans les fig. 1 et 2.

2. Caractère du mouvement dans les points de contact roue-rail (fig. 3)

On considère un rail circulaire dont la surface de roulement appartient à une surface conique d'axe *I-I* et de sommet O_I et aussi une roue dont

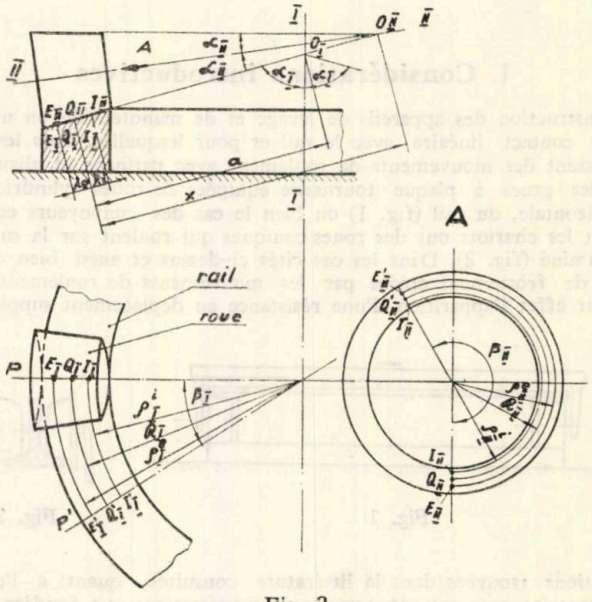


Fig. 3

la surface de roulement appartient à une surface conique, tangente à la surface de roulement du rail, d'axe *II-II* et de sommet O_{II}.

On admet que le roulement pur a lieu dans un point de la ligne de contact roue-rail auquel correspondent les points Q_I sur le rail et Q_{II} sur

la roue. Sur le segment intérieur de la ligne de contact (le segment situé entre le point de roulement pur et l'axe *I-I*) on considère un point arbitraire auquel correspondent les points I_I sur le rail et I_{II} sur la roue. Sur le segment extérieur de la ligne de contact (le segment situé vis-à-vis du point de roulement pur, du côté qui ne contient pas l'axe *I-I*) on considère aussi un point arbitraire auquel correspondent les points E_I sur le rail et E_{II} sur la roue. Lorsque la roue passe de la position P à la position P', les points considérés sur le rail et sur la roue passeront aux positions Q'_I, I'_I et E'_I, respectivement Q'_{II}, I'_{II} et E'_{II}.

Les rayons des points $Q_I(Q'_I)$, $I_I(I'_I)$ et $E_I(E'_I)$, par rapport à l'axe *I-I*, sont:

$$\Re_I = a \sin \alpha_I, \quad \varrho_I^i = (a - \lambda_i) \sin \alpha_I, \quad \varrho_I^e = (a + \lambda_e) \sin \alpha_I,$$

et les rayons des points $Q_{II}(Q'_{II})$, $I_{II}(I'_{II})$ et $E_{II}(E'_{II})$ par rapport à l'axe *II-II* sont:

$$\Re_{II} = x \sin \alpha_{II}, \quad \varrho_{II}^i = (x - \lambda_i) \sin \alpha_{II}, \quad \varrho_{II}^e = (x + \lambda_e) \sin \alpha_{II},$$

où: a — la distance du point de roulement pur au sommet O_I de la surface conique du rail, x — la distance du même point au sommet O_{II} de la surface conique de la roue, λ_i et λ_e — les distances entre le point de roulement pur et les points arbitraires considérés sur les segments intérieur et extérieur de la ligne de contact roue-rail, α_I et α_{II} — les demi-angles au sommet des surfaces coniques du rail et de la roue.

Lorsque la roue passe de la position P à la position P', les déplacements des points considérés sur la surface du rail sont:

$$\widehat{Q_I Q'_I} = \beta_I \Re_I = \beta_I a \sin \alpha_I, \quad \widehat{I_I I'_I} = \beta_I \varrho_I^i = \beta_I (a - \lambda_i) \sin \alpha_I,$$

$$\widehat{E_I E'_I} = \beta_I \varrho_I^e = \beta_I (a + \lambda_e) \sin \alpha_I,$$

et les déplacements des points correspondants situés sur la surface de la roue sont:

$$\widehat{Q_{II} Q'_{II}} = \beta_{II} \Re_{II} = \beta_{II} x \sin \alpha_{II}, \quad \widehat{I_{II} I'_{II}} = \beta_{II} \varrho_{II}^i = \beta_{II} (x - \lambda_i) \sin \alpha_{II},$$

$$\widehat{E_{II} E'_{II}} = \beta_{II} \varrho_{II}^e = \beta_{II} (x + \lambda_e) \sin \alpha_{II},$$

où: β_I — l'angle de rotation de l'axe de la roue et β_{II} — l'angle de rotation de la roue autour de son axe.

Les points qui correspondent au lieu de roulement pur ont des déplacements égaux, c'est-à-dire $\widehat{Q_I Q'_I} = \widehat{Q_{II} Q'_{II}}$, d'où, en considérant les rélations précédentes, on obtient:

$$\beta_{II} = \beta_I \frac{a \sin \alpha_I}{x \sin \alpha_{II}}.$$

La différence entre la distance parcourue par le point de la roue situé sur le segment intérieur de la ligne de contact roue-rail et la distance parcourue par le point correspondant situé sur le rail est $(\Delta s)_i = \widehat{I_{II} I'_{II}} - \widehat{I_I I'_I}$, ou, en considérant les rélations précédentes,

$$(1) \qquad (\Delta s)_i = \beta_I \lambda_i \left(1 - \frac{a}{x}\right) \sin \alpha_I.$$

La différence entre la distance parcourue par le point de la roue situé sur le segment extérieur de la ligne de contact roue-rail et la distance parcourue par le point correspondant situé sur le rail est $(\Delta s)_e = \widehat{E_{II} E'_{II}} - \widehat{E_I E'_I}$, ou, en considérant les rélations précédentes,

$$(2) \qquad (\Delta s)_e = -\beta_I \lambda_e \left(1 - \frac{a}{x}\right) \sin \alpha_I.$$

Le caractère du mouvement dans les points de contact roue-rail est déterminé par le signe des grandeurs $(\Delta s)_i$ et $(\Delta s)_e$ (v. les formules (1) et (2)) à savoir: a) dans les points pour lesquels $(\Delta s)_i > 0$ ou $(\Delta s)_e > 0$ (la distance parcourue par le point situé sur la roue est plus grande que celle

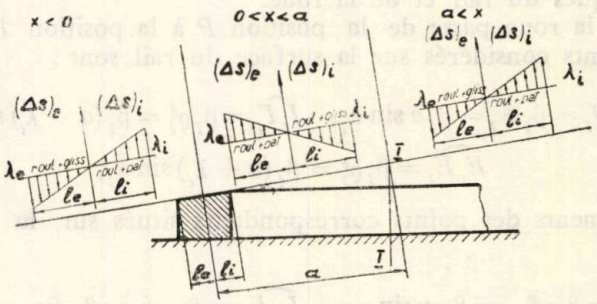


Fig. 4

parcourue par le point correspondant situé sur le rail) ont lieu des mouvements de roulement avec patinage; b) dans les points pour lesquels $(\Delta s)_i < 0$ ou $(\Delta s)_e < 0$ (la distance parcourue par le point situé sur la roue est moindre que celle parcourue par le point correspondant situé sur le rail) ont lieu des mouvements de roulement avec glissement.

Le tableau 1 et les diagrammes représentées dans la fig. 4 indiquent le changement du caractère du mouvement dans les points des segments

intérieur et extérieur de la ligne de contact roue-rail d'après la position du sommet de la surface conique de la roue, en admettant l'hypothèse que le roulement pur a lieu toujours dans un point de la ligne de contact roue-rail.

Tableau 1

x	$x<0$	$0<x<a$	$x=a$	$x>a$
$(\Delta s)_i$	$(\Delta s)_i>0$ roul. + patin.	$(\Delta s)_i<0$ roul. + gliss.	$(\Delta s)_i=0$ roulement	$(\Delta s)_i>0$ roul. + patin.
$(\Delta s)_e$	$(\Delta s)_e<0$ roul. + gliss.	$(\Delta s)_e>0$ roul. + patin.	$(\Delta s)_i=0$ roulement	$(\Delta s)_e<0$ roul. + gliss.

3. Position du point de roulement pur

La roue se comporte comme un corps rigide à point fixe (l'intersection O de l'axe *I-I* du rail et de l'axe *II-II* de la roue) (fig. 5). On considère un système de référence triorthogonale $Oxyz$, solidarisé à la roue,

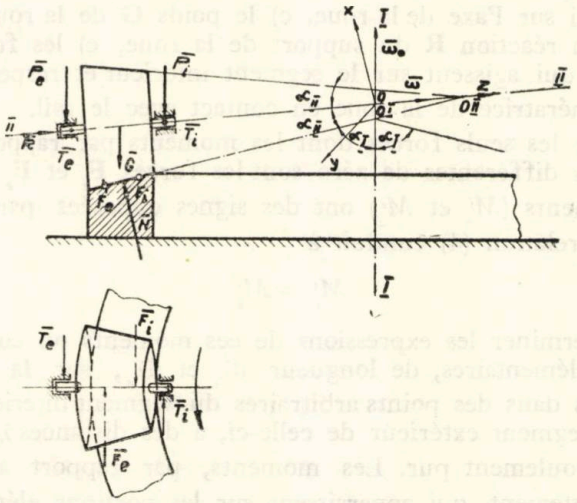


Fig. 5

dont l'origine coïncide avec le point O et ayant l'axe Oz orientée d'après l'axe de la roue. La projection sur l'axe Oz de la relation vectorielle qui exprime le théorème du moment cinétique est :

(3) $$\mathcal{J}_{zz}\dot{\omega}_z + (\mathcal{J}_{yy} - \mathcal{J}_{xx})\,\omega_x\,\omega_y = M_z,$$

où : $\mathcal{J}_{xx}$, $\mathcal{J}_{yy}$ et $\mathcal{J}_{zz}$ — les moments principaux d'inertie par rapport aux axes du système de référence, ω_x, ω_y et ω_z — les projections de la vitesse angulaire absolue de la roue sur les axes du système de référence, M_z — le moment résultant, par rapport à l'axe Oz, qui agit sur la roue.

La vitesse angulaire absolue de la roue est $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{II}$, ou $\bar{\omega}_0$ et $\bar{\omega}_{II}$ sont les vitesses angulaires, invariables, de l'axe *II-II* autour de l'axe *I-I* et respectivement de la roue autour de l'axe *II-II*.

Compte tenu d'une part que $\omega_z = \omega_0 \cos(\alpha_I + \alpha_{II}) + \omega_{II}$, et, par conséquent, $\dot{\omega}_z = 0$, et d'autre part, vu la symétrie de la roue, $\mathcal{J}_{xx} = \mathcal{J}_{yy}$, la relation (3) devient

(4) $$M_z = 0.$$

Si, de toutes les forces de frottement qui accompagnent le déplacement de la roue, on ne considère que celles qui apparaissent sur la génératrice de la roue en contact avec le rail, comme effet de l'existence des mouvements de roulement avec patinage et glissement, alors pour exprimer le moment M_z il faut considerer: a) les forces $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}_e$ qui représentent la charge appliquée sur l'axe de la roue, b) les forces de traction $\mathbf{T}_i$ et $\mathbf{T}_e$ appliquées aussi sur l'axe de la roue, c) le poids $\mathbf{G}$ de la roue, d) la réaction $\mathbf{N}$ du rail et la réaction $\mathbf{R}$ du support de la roue, e) les forces de frottement $\mathbf{F}_i$ et $\mathbf{F}_e$ qui agissent sur le segment intérieur et respectivement extérieur de la génératrice de la roue en contact avec le rail.

Parce que les seuls forces dont les moments par rapport à l'axe Oz ont des valeurs différentes de zéro sont les forces $\mathbf{F}_i$ et $\mathbf{F}_e$ et compte tenu que leurs moments (M_z^i et M_z^e) ont des signes opposées par raport à l'axe considérée, la relation (4) conduit à

(5) $$M_z^i = M_z^e.$$

Pour déterminer les expressions de ces moments on considère (fig. 6) des portions élémentaires, de longueur $\mathrm{d}\lambda_i$ et $\mathrm{d}\lambda_e$, sur la génératrice de la roue, situées dans des points arbitraires du segment intérieur de la génératrice et du segment extérieur de celle-ci, à des distances λ_i respectivement λ_e du lieu de roulement pur. Les moments, par rapport à l'axe Oz, des forces de frottement qui apparaissent sur les portions élémentaires considérées, sont:

$$\mathrm{d}M_z^i = \mathrm{d}F_i\,\varrho_{II}^i = \mu p\,[r_{II} + (l_i - \lambda_i)\sin\alpha_{II}]\,\mathrm{d}\lambda_i,$$

$$\mathrm{d}M_z^e = \mathrm{d}F_e\,\varrho_{II}^e = \mu p\,[r_{II} + (l_i + \lambda_e)\sin\alpha_{II}]\,\mathrm{d}\lambda_e,$$

où, outre les notations indiquées sur la fig. 6, μ représente le coefficient de frottement roue-rail et p la pression linéaire sur la génératrice de la roue.

Par conséquent l'expression (5) devient

$$\int_0^{l_i} \mu p \left[r_{II} + (l_i - \lambda_i) \sin \alpha_{II}\right] d\lambda_i = \int_0^{l_e} \mu p \left[r_{II} + (l_i + \lambda_e) \sin \alpha_{II}\right] d\lambda_e ,$$

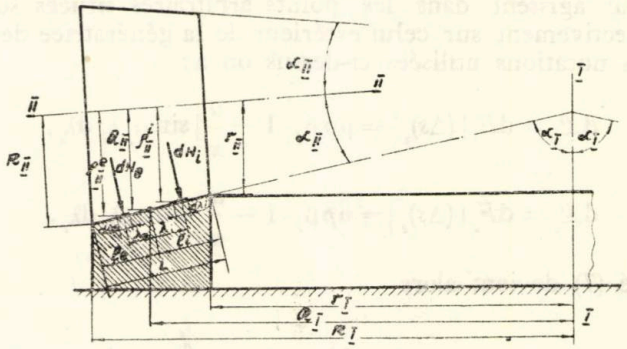


Fig. 6

d'ou, en considérant $\mu = \text{const.}$ et $p = \text{const.}$, effectuant l'intégration et en substituant $l_e = L - l_i$ et $\sin \alpha_{II} = (R_{II} - r_{II})/L$ on obtient

$$\frac{R_{II} - r_{II}}{L} l_i^2 + 2 r_{II} l_i - \frac{R_{II} + r_{II}}{2} L = 0 .$$

La solution positive de cette équation:

$$l_i = \left(\sqrt{\frac{R_{II}^2 + r_{II}^2}{2}} - r_{II}\right) \frac{L}{R_{II} - r_{II}} \tag{6}$$

fournit la position du point où a lieu le roulement pur entre la roue et le rail.

4. Résistance au déplacement de la roue

La valeur de la résistance au déplacement due aux frottements de patinage et de glissement qui apparaissent sur la génératrice de la roue en contact avec le rail peut être déterminée en égalant le travail mécanique de cette résistance et le travail mécanique correspondant des forces de frottement mentionnées. En considérant le déplacement de la roue entre les positions P et P' (fig. 2) et en admettant que la résistance au déplacement

est appliquée sur la roue dans le point de roulement pur, l'égalité mentionnée a la forme

$$W \cdot \widehat{Q_i Q_i'} = \int_0^{l_i} \mathrm{d}\mathcal{L}_i + \int_0^{l_e} \mathrm{d}\mathcal{L}_e, \tag{7}$$

où $\mathrm{d}\mathcal{L}_i$ et $\mathrm{d}\mathcal{L}_e$ sont les travails mécaniques élémentaires des forces de frottement qui agissent dans les points arbitraires situées sur le segment intérieur respectivement sur celui extérieur de la génératrice de la roue.

Avec les notations utilisées ci-dessus on a:

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_i = \mathrm{d}F_i \left| (\Delta s)_i \right| = \mu p \beta_I \left| 1 - \frac{a}{x} \right| \sin \alpha_I \lambda_i \, \mathrm{d}\lambda_i,$$

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_e = \mathrm{d}F_e \left| (\Delta s)_e \right| = \mu p \beta_I \left| 1 - \frac{a}{x} \right| \sin \alpha_I \lambda_e \, \mathrm{d}\lambda_e.$$

L'égalité (7) devient alors

$$W \beta_I \mathcal{R}_I = \mu p \beta_I \left| 1 - \frac{a}{x} \right| \left(\int_0^{l_i} \lambda_i \, \mathrm{d}\lambda_i + \int_0^{l_e} \lambda_e \, \mathrm{d}\lambda_e \right) \sin \alpha_I,$$

d'où, après integration et compte tenu que $\mathcal{R}_I = a \sin \alpha_I$, on obtient l'expression cherchée de la résistance au déplacement

$$W = \mu p \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right| \frac{l_i^2 + l_e^2}{2}. \tag{8}$$

La formule obtenue peut être aisément particularisée, à savoir:

a) Dans le cas du rail circulaire et des roues coniques ayant le sommet sur l'axe de la surface conique du rail on obtient le résultat connu, $W = 0$.

b) Dans le cas du rail circulaire et des roues cylindriques ($R_{II} = r_{II} = R$) la relation (6) donne $l_i = 0$. En appliquant le théorème d'Hospital on obtient $l_i = l_e = L/2$. La résistance au déplacement, compte tenu que $x = \infty$, est

$$W = \mu p \frac{1}{a} \left(\frac{L}{2} \right)^2.$$

c) Dans le cas du rail rectiligne ($a = \infty$) et des roues coniques la résistance au déplacement est

$$W = \mu p \frac{1}{x} \cdot \frac{l_i^2 + l_e^2}{2}.$$

d) Dans le cas du rail rectiligne et des roues cylindriques ($a = x = \infty$) on obtient le résultat connu, $W = 0$.

5. Conclusions

a) Pour certaines formes des surfaces de roulement utilisées dans la construction des roues et des rails, dans les points de contact roue-rail ont lieu des mouvements de roulement avec patinage et glissement qui provoquent l'apparition d'une résistance supplémentaire au déplacement.

b) Les indications trouvées dans la littérature consultée, quant à l'évaluation de cette résistance au déplacement, sont soit dépourvues de justification, soit établies à l'aide des déductions d'une rigueur insuffisante.

c) Dans cette Note on établit, d'une manière rigoureuse, une formule pour le calcul de la résistance au déplacement, mentionnée (v. formule (8)). Lors de la déduction de cette formule on a négligé tous les frottements qui accompagnent le déplacement de la roue à l'exception de ceux qui apparaissent sur la génératrice de la roue en contact avec le rail, dûs au mouvement de roulement avec patinage et glissement.

d) La formule établie est particularisée pour différentes formes des surfaces de roulement fréquemment utilisées dans la construction des roues et des rails.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Eléments de Machines,
Chaire de Résistance des Matériaux,
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. * * * *Расчеты крановых механизмов и деталей подъемно-транспортных машин.* Изд. II, Машгиз, М., 1959.
2. * * * *Справочник по кранам.* Т. 2, Машгиз, М.—Л., 1962.
3. Дьячков В. К., *Подвесные конвейеры.* Изд. II, Машгиз, М., 1961.
4. Петренко О. С., *Подвесной внутризаводской транспорт.* Изд. II, Машгиз, М., 1953.
5. Руденко Н. Ф., *Грузоподъемные машины.* Машгиз, М., 1957.

ASUPRA CALCULULUI REZISTENŢEI LA DEPLASARE A ROŢILOR DE RULARE CONDUSE ÎN CAZUL UNEI MIŞCĂRI DE ROSTOGOLIRE CU PATINARE ŞI ALUNECARE

(Rezumat)

Pentru anumite forme ale suprafeţelor de lucru folosite în construcţia roţilor de rulare şi a şinelor respective, în punctele de contact roată-şină se produc mişcări de rostogolire cu

patinare şi alunecare, ceea ce determină apariţia unei rezistenţe suplimentare la deplasare. Constatîndu-se că recomandările, existente în literatura consultată, pentru evaluarea acestei rezistenţe, sînt fie lipsite de o fundamentare teoretică, fie însoţite de deducţii insuficient de riguroase, autorii au dedus în mod riguros o formulă pentru calculul rezistenţei la deplasare, menţionate (formula (8)). În deducţia formulei s-au neglijat toate frecările ce însoţesc deplasarea roţii cu excepţia celor ce apar pe generatoarea roţii în contact cu şina, ca rezultat al mişcărilor de rostogolire cu patinare şi alunecare. Formula stabilită este particularizată pentru diferite forme ale suprafeţelor de lucru folosite uzual în construcţia roţilor şi şinelor respective.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. K. 621.1

DIE ABHÄNGIGKEIT DES HÖCHSTDRUCKS UND DRUCKANSTIEGS VON DER VERBRENNUNGSGESCHWINDIGKEIT IN OTTOMOTOREN

VON

DAVID PERETZ und FROIM MARCUS

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 23—30 September 1967

1. Einfluss der Lage im Kreisprozess und der Werte des Höchstdrucks und Höchstdrucksanstiegs auf den Betrieb der Verbrennungsmotoren mit Funkenzündung

Für die teoretische und praktische Erforschung der Verbrennungsmotoren mit Hilfe der ausgerechneten oder aus Versuchen gewonnenen p–v — Diagramme ist es von besonderer Wichtigkeit, die Lage sowie die Werte zweier Parameter zu kennen u.z. den des Höchstdrucks und den des Höchstdruckanstiegs.

Der Zeitpunkt, bei welchem der Höchstdruck erreicht wird, zeigt das Ende der Hauptverbrennungsphase an und folglich auch das Ende der Flammenfortpflanzung [1]. Vom thermodynamischen Standpunkt aus gesehen (der Leistung und der Sparsamkeit) sowie von dem der Flammenfortpflanzung (der Turbulenz) ist es geboten, dass diese Hauptphase symmetrisch gegenüber dem oberen Totpunkt liegt, so dass der Spitzendruck bei 10° ... 15°KW nach dem o. T. erreicht wird und dadurch auch der Bestwert der Vorzündung bestimmt wird. Es muss gleichfalls betont werden, dass, trotzdem bis jetzt kein Zusammenhang zwischen dem Höchstdruckzeitpunkt und dem Klopfen festgestellt werden konnte [2], es doch so eine Beziehung geben muss, weil die klopfende Verbrennung nicht nur durch die Druck- und Temperaturwerte bestimmt wird, sondern auch von der Dauer der chemischen Prozesse, die im unverbrannten Restteil der Zylinderladung stattfinden.

Durch die Änderung des Kompressionsverhältnisses verändert sich der Ablauf der Verbrennungshauptphase und dadurch auch der Druckstand und insbesonders der Höchstdruckwert. Das Zunehmen des Höchstdrucks bringt grössere indizierte Mitteldruck- und Wirkungsgradwerte, aber diese Steigerung ist heute einerseits durch die Klopferscheinungen und andererseits durch die mechanischen Beanspruchungen des Kurbelstangentriebes, der Reibung und des Zylinderverschleisses. Aus diesen Gründen werden die Höchstdruke auf Werte bis 50 ata begrenzt.

In Zusammenhang mit den Klopferscheinungen unterstreichen wir, dass im allgemeinen die Oxydationsprozesse, die der Selbstzündung vorausgehen, mit um so grösserer Intensität verlaufen, je höher der Druck und die Temperatur des Ladungsrestes sind. Die Änderung des Höchstdrucks bedingt die Veränderung des Zündverzugs des Endgases, so dass die Möglich-

keit besteht das Klopfen zu vermeiden und den Verbrennungsvorgang nach Wunsch zu leiten.

Der augenblickliche und der mittlere Druckanstieg sind von besonderer Wichtigkeit, weil dieselben die Intensität des Verbrennungsablaufes durch die freiwerdende Wärmemenge und auch den Einfluss der Bauart wiederspiegeln. Der Druckanstieg ermöglicht gleichfalls die Schätzung der Stossbelastungen, die auf die verschiedenen Motorteile wirken.

Je grösser die Verbrennungsgeschwindigkeit ist desto kürzer wird die Hauptphase und desto grösser die werte $(\Delta p/\Delta\alpha)_m$ sowie $(dp/d\alpha)_{max}$, was sich durch einen harten, klingenden und lauten Motorgang bemerkbar macht.

Entsprechend der Literaturhinweisungen [3] sind die Grenzwerte des mittleren Druckanstiegs $(\Delta p/\Delta\alpha)_m$ bei einer normalen Verbrennung 0,5 ... 1,3 at/°KW und die des Höchstdruckanstiegs 0,8 ... 2,0 at/°KW.

Von besonderer theoretischer und praktischer Bedeutung ist auch die Beziehung zwischen dem Höchstdruckanstieg und der Detonation, die entweder in Form einer Gleichung der Klopfneigung des Kraftstoffes oder als Funktion vom Zündverzug ausgedrückt werden kann. Zu grosse Werte für $(\Delta p/\Delta\alpha)_m$ bzw. für $(dp/d\alpha)_{max}$ bringen eine so starke Verkürzung der Endgasinduktionsperiode, dass der Ladungsrest selbstzündet und seine Simultanverbrennung stattfindet. Die Versuche mit Flugzeugmotoren haben gezeigt [4], dass es unmöglich ist, in ihnen eine ganze Reihe verschiedener Kraftstoffe zu gebrauchen, weil der Druckanstieg die Grenzwerte überschreitet.

2. Rechenmethoden für die Ermittlung des Druckverlaufs während der Verbrennung

Die Druck- und Temperaturänderung während der Verbrennung, als Funkion der Zeit oder des Drehwinkels der Kurbelwelle kann nicht durch die thermischen Rechenmethoden, die nur den Anfangs- und Endzustand in Betracht ziehen, ermittelt werden. Der auf diese Weise mit Hilfe einiger statistisch bestimmter Koeffizienten ausgerechnete Kreisprozess wird dann willkürlich abgerundet, damit der so gefundene Höchstdruckwert sich mehr dem aus den Indikatordiagramm gewonnenen nähert. Alss Beispiel für solche Rechenmethoden zitieren wir diejenigen, die von I. V. Grienevetzky ausgearbeitet und von N. R. Brilling, B. S. Stetschkin und E. K. Masing ergänzt wurden. Eine wertvolle Entwicklung dieser Methode, die auf zahlreiche Versuchsergebnisse fusst, ist in den Arbeiten [5] und [6] zu finden. Auch ist die Methode in Betracht zu ziehen, die als Hauptparameter für die Berechnung den mittleren Druckanstieg vorschlägt [7].

Die Gruppe der formellen Rechenmethoden, wie z. B. die Formell-geometrische [8], beschreibt die wirklichen Erscheinungen während der Verbrennung mit Hilfe geometrischer Darstellungen, welche die gesamten komplexen Wirkungen der thermodynamischen Zustandsänderungen, des Wärmeaustausches u. A. wiedergeben. Sicherlich geben auch diese Methoden keine Möglichkeit, eine Analyse der Auswirkungen verschiedener Einflussgrössen auf den Brennprozess durchzuführen.

Ein wirklicher Fortschritt konnte durch die Ausarbeitung der Rechenmethoden, die auf die Dynamik der Wärmeentwicklung und ihre Korrelation mit den thermodynamischen- und den Wärmedurchgangsgleichungen beruhen, erzielt werden. Gleichzeitig berücksichtigt man die Bau- und Betriebscharakteristiken des Verbrennungsmotors. So ist es möglich, eine grosse Zahl der Einflussgrössen in Betracht zu ziehen.

Die grundlegende Gleichung ist

$$Q(\alpha) = xH_i \Delta G_c \,, \tag{1}$$

worin: H_i — der untere Heizwert des Kraftstoffes und ΔG_c — die je Arbeitspiel verfügbare Menge an Kraftstoff sind.

Die Gleichung (1) zeigt, dass die bis zu einer bestimmten Zeit (oder Drehwinkel der Kurbelwelle) freigewordene Wärmemenge mit dem verbrannten Anteil des Kraftstoffes proportional ist.

Durch das Differenzieren der Gleichung (1) erhält man

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{dx}{d\alpha} H_i \Delta G_c, \tag{2}$$

in welcher

$$\frac{dx}{d\alpha} = w_\alpha \tag{3}$$

die Brenngeschwindigkeit ist.

Wird der erste Hauptsatz angewendet, erhält man

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{dU + dL}{d\alpha} + \frac{dQ_p}{d\alpha} \tag{4}$$

und folglich

$$w_a H_i \Delta G_c = \frac{dU + dL}{d\alpha} + \frac{dQ_p}{d\alpha}. \tag{5}$$

Das Glied $dQ_p/d\alpha$ stellt die Wärmeverluste als Funktion der Zeit oder °KW dar.

Aus den vorausgegangenen Darlegungen ist ersichtlich, dass man die Brenngeschwindigkeit w_α oder die Durchbrennfunktion $x = \varphi(\alpha)$ kennen muss.

Die Brenngeschwindigkeit kann man mit empirischen Formeln oder Gleichungen, die sich auf die kinetische Analyse des Verbrennungsvorgangs stützen, ausrechnen. Wichtig sind die Arbeiten K. Neumans (1934), der die Verbrennung als eine zeitabhängige Funktion der Wärmeentwicklung betrachtet [9], entweder als geradlinige Zeitfunktion oder als eine parabelförmige mit dem Maximum zur Halbzeit der Verbrennung. In einer späteren Arbeit [10] zieht er die Schlussfolgerung, dass dieses Maximum entweder zu Beginn der Verbrennung oder auch später eintreten kann. Wir zitieren auch die Arbeit von J. Régnault [11], in welcher der Durchbrennverlauf geradlinig für die Werte $x = 0{,}2 \ldots 0{,}8$ angenommen wird.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Brenngesetz I. I. Wiebes [12] ... [14], welches sich auf die Theorie der Kettenreaktionen stützt und heute in den elektronischen Rechenmaschinen verwendet wird. Wiebes Durchbrennfunktion ist

$$x = 1 - e^{-C\left(\frac{\alpha - \alpha_s}{\alpha_y - \alpha_s}\right)^{m+1}}, \tag{6}$$

in welcher: $C = 6{,}908$ — eine Konstante, m — kinetischer Exponent, $\alpha - \alpha_s$ — Drehwinkel der Kurbelwelle während der Verbrennungsdauer bis zur betreffenden Zeit bei einer Vorzündung α_s, $\alpha_y - \alpha_s$ — gesammte Brenndauer in °KW, sind.

Ist das Brenngesetz bekannt, wird die Rechnung schrittweise durchgeführt und der Durchbrennverlauf berechnet. Zum Beispiel für ein Intervall i gilt

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i, \tag{7}$$

wobei $i = 0, 1, 2, \ldots$ ist und den entsprechenden Zeitschritt darstellt. Diese Zeitschritte müssen klein sein (2 ... 2,5°KW) um eine genügende Genauigkeit zu erreichen. So berechnet man den Druckverlauf $p = \varphi(\alpha)$ und aus diesem den Höchstdruck und den Höchstdruckanstieg sowie die Drehwinkel der Kurbelwelle, die diesen Grössen entsprechen.

Um eine mühselige Berechnung des gesamten Druckverlaufs während der Verbrennung zum Zwecke der Ermittlung der oben erwähnten Grössen zu vermeiden, schlagen wir eine direkte Rechenmethode vor, die auch die Möglickeit bietet, die Auswirkung der wichtigsten Einflussgrössen zu erkennen.

3. Die Berechnung des Höchstdrucks und des mittleren Druckanstiegs

Die Gleichung (4) kann man auch in folgender Weise schreiben

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{dQ_u}{d\alpha} + \frac{dQ_p}{d\alpha}, \tag{8}$$

in welcher Q_u die Wärmemenge bedeutet, die für die Änderung der inneren Energie und die Ausführung der äusserer Arbeit verbraucht wird. Diese Wärmemenge kann man mit Hilfe des Wärmenutzkoeffizienten ξ für die Verbrennungsdauer ausdrücken $Q_u(\alpha)/Q(\alpha) = \xi$ und folglich

$$Q(\alpha) = \frac{Q_u(\alpha)}{\xi}. \tag{9}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $Q(\alpha)$ in der Gleichung (1) ein, so wird

$$Q_u(\alpha) = \xi x H_i \Delta G_c. \tag{10}$$

Das Differenzieren der Gleichung (10) ergibt

$$dQ_u = \xi H_i \Delta G_c \, dx. \tag{11}$$

Wenn man mit Q_y, wie folgt notiert

$$Q_y = \xi H_i \Delta G_c, \tag{12}$$

in welcher Q_y die bei der gesamten Brenndauer nützliche freigewordene Wärmemenge darstellt, dann kann man die Gleichung (11) in folgender Form ausdrücken:

$$dQ_u = Q_y \, dx. \tag{13}$$

Das bedeutet, dass die nützliche Wärmemenge proportional mit dem bis zu einer bestimmten Zeit verbrannten Anteil des Kraftstoffes ist.

Weil

$$dQ_u = dU + dL, \tag{14}$$

erhält man entsprechend den Gleichungen (13) und (14)

$$dQ_u = Q_y\,dx = dU + dL. \tag{15}$$

Nimmt man an, dass die Zylinderladung ein ideales Gas ist, dann kann man die Gleichung (15) für je ein Kg Gas folgender Weise ausdrücken, $dQ_u = C_v\,dT + p dv$. Aber $C_v = R/(k-1)$ und $dT = (p dv + v dp)/R$ so dass

$$\frac{dp}{dv} + k\frac{p}{v} = \frac{(k-1)\,dq_u}{v dv}.$$

Wird für dq_u der Wert aus Gleichung (13) eingesetzt, dann ist

$$\frac{dp}{dv} = (k-1)\frac{q_y}{v}\cdot\frac{dx}{dv} - k\frac{p}{v}. \tag{16}$$

Schreiben wir diese Druckänderung in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Kurbelwelle aus. Zwischen den Zylindervolumen und den KW besteht die bekannte Beziehung

$$v = f(\alpha) = \frac{v_a}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{2}\sigma\right) \tag{17}$$

in welcher: v_a — das spezifische Volumen des eingesaugten Gases, ε — das Kompressionsverhältnis sind und

$$\sigma \cong 1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin^2\alpha. \tag{18}$$

Die Funktion σ findet man in den Tabellen in Abhängigkeit von $\lambda = r/l$, (r — Kurbelradius, l — Kurbenstangenlänge), und den KW α.

Weil $v = f(\alpha)$, $dv = f'(\alpha)\,d\alpha$, wird die Gleichung (16)

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{(k-1)\,q_y}{f(\alpha)}\cdot\frac{dx}{d\alpha} - kp\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{(k-1)q_y}{f(\alpha)}w_{\alpha-\alpha_s} - kp\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}, \tag{19}$$

in welcher $dx/d\alpha$ die Verbrennungsgeschwindigkeit ist, die mit $w_{\alpha-\alpha_s}$ bezeichnet wurde und α_s die Vorzündung in °KW bedeutet.

Mit $C = (k-1)\,q_y$ wird die Gleichung (19)

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{1}{f(\alpha)}[Cw_{\alpha-\alpha_s} - kpf'(\alpha)], \quad f'(\alpha) \neq 0. \tag{19'}$$

Mit der Bedingung $dp/d\alpha = 0$, welche dem werte des Höchstdrucks entspricht, erhält man

(20) $$Cw_{\alpha_z-\alpha_s} - kp_{\max} f'(\alpha_z) = 0,$$

weil C, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ verschieden von 0 und ∞ sind.

Folglich ist

(21) $$p_{\max} = C_1 \frac{w_{\alpha_z-\alpha_s}}{f'(\alpha_z)},$$

wo

(22) $$C_1 = \frac{(k-1)q_y}{k} = \frac{C}{k}, \quad C_1 \neq 0 \text{ und } \infty .$$

Nehmen wir an, dass in unmittelbarer Nähe des KW α_z, bei welchem $p = p_{\max}$ ist, der Druck ungefähr beständig und gleich $p_{\max}$ bleibt. In diesem Falle wird für einen kleinen Interwall $\Delta\alpha$ (z.B. 0,5°KW) im Indikatordiagramm die Druchveränderung durch einen mit der Abszisse paralell verlaufenden Geradensegment dargestellt und die betreffenden Ableitungen sind gleich Null.

Aus der Gleichung (21) ergibt sich durch Differenzieren nach α und gleich Null setzen

$$w'_{\alpha_z-\alpha_s} f'(\alpha_z) - w_{\alpha_z-\alpha_s} f''(\alpha_z) = 0.$$

Durch Integration erhält man

(23) $$w_{\alpha_z-\alpha_s} = C_2 f'(\alpha_z),$$

in welcher C_2 die Integrationskonstante ist und

(24) $$f'(\alpha_z) = \frac{v_a}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon-1}{2}\sin\alpha_z\left(1 + \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha_z}}\right)\right]$$

oder

(24') $$f'(\alpha) \cong \frac{v_a}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon-1}{2}\left(\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right)\right].$$

Die Gleichung (23) kann man in den Berechnungen unter der Bedingung anwenden, dass $f'(\alpha_z)$ verschieden von 0 und ∞ ist.

Durch die Integration der Gleichung (19), die eine lineare ungleichartige Differenzialgleichung erster Ordnung ist, mit dem integrierenden Faktor

$$e^{k\int\frac{f(\alpha)d\alpha}{f'(\alpha)}} = [f(\alpha)]^k,$$

erhalten wir die allgemeine Lösung

$$p = \frac{(k-1)q_y}{[f(\alpha)]^k}\left(\int_{\alpha_s}^{\alpha-\alpha_s}\{[f(\alpha)]^{k-1} w_{\alpha-\alpha_s}\}\,\mathrm{d}\alpha + C_3\right), \tag{25}$$

mit C_3 als Integrationskonstante, welche durch die Anfangsbedingungen bestimmt wird. So ist der Druck im Augenblick der Zündung mit demjenigen am Schluss der Verdichtung gleich und die Verbrennungsgeschwindigkeit ist gleich null ($x = 0$). Folglich sind die Anfangsbedingungen $\alpha = \alpha_s$, $p = p_c$, $w_{\alpha_s} = 0$.

Wenn wir die Anfangsbedingungen in Betracht ziehen, dann wird die Gleichung (25):

$$p = \frac{C}{[f(\alpha)]^k}\left(\int_{\alpha_s}^{\alpha-\alpha_s}\{[f(\alpha)^{k-1} w_{\alpha-\alpha_s}\}\,\mathrm{d}\alpha + p_c[f(\alpha_s)]^k\right). \tag{26}$$

Ersetzen wir $w_{\alpha-\alpha_s}$ nach (23) in der Gleichung (26), so erhalten wir

$$p_{\max} = \frac{C}{[f(\alpha_z)]^k}\left(\int_{\alpha_s}^{\alpha_z-\alpha_s}\{[f(\alpha_z)]^{k-1} C_2 f'(\alpha_z)\}\,\mathrm{d}\alpha + p_c[f(\alpha_s)]^k\right), \tag{27}$$

oder

$$p_{\max} = C_1 C_2 + \frac{p_c[f(\alpha_s)]^k}{[f(\alpha_z)]^k}, \tag{28}$$

in welcher α_z der KW ist, der dem Höchstdruck entspricht.

Die Konstante C_1 wird nach Gleichung (22) berechnet. Um den Wert der Konstante C_2 auszurechnen, kann man die Methode der endlichen Differenzen in folgender Weise anwenden:

Man teilt den Verbrennungsprozess in genügend kleine KW-Intervalle (2 ... 2,5°KW) und berechnet die Verhältnisse $\Delta w/\Delta f'(\alpha)$ aus den entsprechenden Anfangs- und Endwerten des betreffenden Intervalls. Im Abstand in welchen $p = p_{\max}$ gilt, schreiben wir: a) für den Beginn des Intervalls $w_1 = C_2 f'(\alpha_1)$; b) für das Ende des Intervalls $w_2 = C_2 f'(\alpha_2)$ und $w_1 - w_2 = C_2[f'(\alpha_1) - f'(\alpha_2)]$ oder

$$C_2 = \frac{\Delta w}{\Delta f'(\alpha)}.$$

Wird die Veränderung des Verhältnisses $|\Delta w/\Delta f'(\alpha)|$ als Funktion vom KW graphisch dargestellt, so können wir eine Kurve wie im Abb. 1 erhalten, woraus ersichtlich ist, dass für $p = p_{\max}$ auch C_2 den Höchstwert erreicht.

Die Spitzendruckwerte hängen von den drei Gliedern der Gleichung (28) ab.

C_1 entspricht der Gleichung (22) und ist nur von der Nutzwärmemenge abhängig, die bis zum Ende der Verbrennung frei wird (s. Gl. (12)), unter der Voraussetzung dass der adiabatische Exponent konstant oder wenig veränderlich ist. Mit dem Zunehmen der Wärmemenge q_y bzw. der verfügbaren Kraftstoffmenge oder desWärmenutzkoeffizienten ξ,wächst auch C_1, was sich auch auf den Höchstdruck auswirkt.

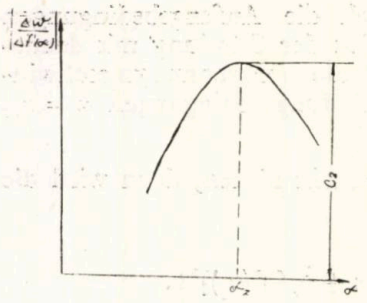


Abb. 1

Hinsichtlich des Gliedes C_2, das durch Gleichung (23) ausgedrückt wird $C_2 = w_{\alpha_z-\alpha_s}/f'(\alpha_z)$, kann man feststellen, dass dieses sich direkt proportional mit der Brengeschwindigkeit im Moment α_z verändert. Die Differenzierung des Gasvolums nach dem KW, $dv/d\alpha = f'(\alpha_z)$, ergibt den Faktor der die Bau- und Betriebseinflüsse auf den Höchstdruck des betreffenden Verbrennungsmotors (v_a, ε, λ, α) kennzeichnet.

Nimmt man an, dass sich im betreffenden Motor bei einem normalen Verbrennungsablauf $f'(\alpha_z)$ wenig verändert, dann wächst der Höchstdruck gleichzeitig mit der Verbrennungsgeschwindigkeit im betreffenden Augenblick.

Folglich bezeichnet C_2 eben die grundlegende Eigenschaft im Moment der Erreichung des Höchstdrucks: die durch die Verbrennung des Kraftstoffs verursachte Druckveränderung wird durch die von der Kolbenbewegung hervorgerufene Volumveränderung ausgeglichen.

Das letzte Glied in der Gleichung (28) führt die Anfangsbedingungen die den Verbrennungsbeginn kennzeichnen, ein, also den Kompressionsenddruck und den Wert der Vorzündung.

Nach dem Berechnen des Höchstdrucks kann der mittlere Druckanstieg ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der bekannten Gleichung.

$$w_{pm} = \left(\frac{\Delta p}{\Delta \alpha}\right)_m = \frac{p_{\max} - p_c}{\alpha_z - \alpha_s}$$

bestimmt werden.

4. Die Berechnung des Höchstdruckanstiegs

Der Höchstdruckanstieg wird unter der Bedingung $d^2p/d\alpha^2 = 0$ erreicht. Die Differenzierung der Gleichung (19′) ergibt.

$$(30)\quad \frac{d^2p}{d\alpha^2} = \frac{Cw'_{\alpha-\alpha_s}}{f(\alpha)} - \frac{Cw_{\alpha-\alpha_s} f'(\alpha)}{[f(\alpha)]^2} - kp\,\frac{f''(\alpha)f(\alpha) - [f'(\alpha)]^2}{[f(\alpha)]^2} - k\,\frac{dp}{d\alpha}\,\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)},$$

und wenn wir $dp/d\alpha$ in dieser Gleichung durch den entsprechenden Ausdruk aus (19′) ersetzen, wird die Gleichung (30)

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2} = \frac{Cw'_{\alpha-\alpha_s}}{f(\alpha)} - \frac{Cw_{\alpha-\alpha_s}f'(\alpha)}{[f(\alpha)]^2} - kp\frac{f''(\alpha)f(\alpha) - [f'(\alpha)]^2}{[f(\alpha)]^2} - \tag{31}$$
$$- \frac{Ckw_{\alpha-\alpha_s}f'(\alpha)}{[f(\alpha)]^2} + k^2p\left[\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]^2.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, ziehen wir in Betracht, dass der Wendepunkt sich in der Nähe des o. T. befindet und folglich, dass der höchste Druckanstieg bei grösster Verbrennungsgeschwindigkeit erreicht wird.

Auf Grund dieser Voraussetzung ($w'_{\alpha-\alpha_s} = 0$) wird die Gleichung (31):

$$p\{k[f'(\alpha)]^2 - kf''(\alpha)f(\alpha) + k^2[f'(\alpha)]^2\} = Cw_{\alpha-\alpha_s}f'(\alpha) + Ckf'(\alpha)w_{\alpha-\alpha_s}$$

und der Druck im Wendepunkt t:

$$p_t = \frac{(1+k)Cw_{\alpha_t-\alpha_s}f'(\alpha_t)}{k\{(1+k)[f'(\alpha_t)]^2 - f''(\alpha_t)f(\alpha_t)\}}. \tag{32}$$

Wenn man diese Formel für p_t in der Gleichung (19′) einsetzt, erhalten wir:

$$\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_{max} = \frac{Cw_{\alpha_t-\alpha_s}}{f(\alpha_t) - (1+k)\dfrac{[f'(\alpha_t)]^2}{f''(\alpha_t)}}. \tag{33}$$

In Gleichung (33) ist die Konstante $C=(k-1)q_v$ und $f''(\alpha_t)$ kann mit der Gleichung (34) berechnet werden:

$$f''(\alpha_t) \cong \frac{v_a}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon-1}{2}(\cos\alpha + \lambda\cos 2\alpha). \tag{34}$$

Folglicht stützt sich die Gleichung (33) auf die Voraussetzung, dass der entscheidende Faktor in der Berechnungsformel des Höchstdruckanstiegs die grösste Verbrennungsgeschwindigkeit ist. Das heisst, dass $(dp/d\alpha)_{max}$ entscheidend von den kinetischen Kenngrössen abhängt. Der Einfluss der Betrieb- und Baucharakteristiken wird durch die Anwesenheit der Funktionen $f(\alpha_t)$, $f'(\alpha_t)$ und $f''(\alpha_t)$ ausgedrückt.

In den abgeleiteten Beziehungen wurde der adiabatische Exponent $k = C_p/C_v$ als konstante betrachtet. In Wirklichkeit aber wird, gleichzeitig mit der Temperaturerhöhung und der Veränderung der chemischen Zusammensetzung der Ladung, k kleiner. Nichtsdestoweniger sind, wie in [14]

bewiesen wurde, im Falle der Berechnung des adiabatischen Exponenten für eine mittlere Temperatur und chemische Zusammensetzung des Brennprozesses, die Druckwerte, die mit diesem mittleren konstanten Exponenten berechnet wurden, genügend genau.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Wärmetechnik,
Lehrstuhl für Mathematik I

LITERATURVERZEICHNIS

1. Grünwald B., Bul. Inst. polit. Bucureşti, 1963, **XXV**, *4*, pp. 81—105.
2. Shelley C., SAE Preprints, s. a. Nr. *647 B.*
3. Aramă C. u. a., *Motoare cu ardere internă.* Edit. Tehn., Buc., 1966.
4. Войнов А. Н., *Процессы сгорания.* Изд. Машиностроение, М., 1965.
5. Gaiginschi E., *Motoare cu ardere internă.* E.S.D.P., Buc., 1960.
6. Gaiginschi E. u. a., *Îndreptar pentru calculul termic al motoarelor cu ardere internă cu piston.* E.S.D.P., Buc., 1960.
7. Grünwald B. u. a., Met. Constr. Maş., 1961, *7*, pp. 574—581.
8. Стечкин Б. С. u. a., *Индикаторная диаграмма тепловыделения и рабочий цикл быстроходного поршневого двигателя.* Изд. АН СССР, М., 1960.
9. Neumann K., Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, 1934, **V**, *4*, S. 173—180.
10. — Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, 1936, **VII**, *2*, S. 57—65.
11. Régnault J., Rev. Inst. franc. pétrole, 1962, **XVII**, *5*, pp. 744—760.
12. Вибе И. И., Сб. ст. по горной электротехнике, 1953, **XX**.
13. — Порш. двиг. внутр. сг. Изд. АН СССР, М., 1956.
14. — *Новое о рабочем цикле двигателей.* Машгиз, М., 1962,

DEPENDENŢA PRESIUNII MAXIME ŞI VITEZEI DE CREŞTERE A PRESIUNII DE LEGEA DE ARDERE ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

(Rezumat)

Cunoscîndu-se importanţa deosebită a poziţiilor pe ciclu şi valorilor a doi parametri— presiunea maximă şi viteza maximă de creştere a presiunii — în funcţionarea motoarelor cu aprindere prin scînteie se expune o posibilitate directă de calcul a acestora, prin care se poate evita calculul laborios al întregii curbe de ardere.

Relaţiile obţinute, în ipoteza că legea de ardere este cunoscută, permit o interpretare armonioasă şi unitară a influenţei diferiţilor factori asupra valorilor acestor parametri caracteristici.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 532.5

SUR UNE MÉTHODE DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE DE L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE EN RÉGIME INSTATIONNAIRE À TROIS DIMENSIONS

PAR

R. AŠKOVIĆ

1. 1. Dans l'écoulement laminaire d'un fluide à propriétés physiques ϱ et μ constantes [1]) les équations de la couche limite tridimensionnelle en régime instationnaire peuvent s'écrire après application du principe de prévalence [1], sous la forme bien connue

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} - u \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{\partial u}{\partial n}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (e_2 u)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v)}{\partial n} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{1}{e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial z} (u^2 - u_e^2) - u \frac{\partial w}{\partial s} - v \frac{\partial w}{\partial n}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\nu}{\mathfrak{P}} \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{\nu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right] - u \frac{\partial T}{\partial s} - w \frac{\partial T}{\partial z} - v \frac{\partial T}{\partial n}, \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = \left\{ - \frac{\partial u_e}{\partial t} - u_e \frac{\partial u_e}{\partial s}, \frac{1}{e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial z} u_e^2, 0 \right\}. \tag{1.5}$$

1. 2. Le système (s, z, n) de coordonnées curvilignes utilisé est basé sur les lignes de courant pariétales de l'écoulement à potentiel et ne dépend pas de t, (cf. [2]), e_1 (mesure de la distance de lignes équipotentielles à la paroi), e_2 (mesure de la distance de lignes de courant pariétales de l'écoulement à potentiel) et $e_3 = 1$ sont les coefficients métriques de ce:

[1]) condition satisfaite en bonne approximation dans un écoulement dont les vitesses ne dépassent pas 50 m/s tandis que les différences de température dans le fluide restent en-dessous de 50°K environ.

système ; $\mathcal{P} = c_p \mu/\lambda$, est le nombre de Prandtl qui sera supposé, par la suite, égal à l'unité. Par convention expresse (cf. par exemple [3]), toutes les intégrations du système (1.1)...(1.5) seront exécutées le long des lignes-coordonnées.

2. 1. En supposant que pour $t \ll 1$ (premiers instants du mouvement) tous les termes convectifs du système ont des valeurs très faibles par rapport aux autres termes (ce qui est, par exemple, le cas pour $u_\infty = At^\alpha U_\infty$, avec $\alpha \geqslant 0$, A et U_∞ constantes), nous pouvons définir un procédé d'approximations successives pour la solution du système des équations (1.1)...(1.5).

2. 1. 1. Soit u_0, v_0, w_0, T_0 une première approximation qui décrit les premiers instants du mouvement, u_1, v_1, w_1, T_1 une deuxième approximation tenant compte de l'influence des termes convectifs,..., u_i, v_i, w_i, T_i des approximations ultérieures telles que les deuxièmes membres du système contiennent seulement des termes d'itérations précédentes ou déjà connus.

2. 1. 2. On peut alors décomposer le système des équations (1.1)...(1.5) en une succession de systèmes et de conditions aux limites :

$$(2.1.1)\qquad \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad (2.1.2)\qquad \frac{\partial (e_2 u_0)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v_0)}{\partial n} = 0,$$

avec $u_0 = v_0 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$ ainsi que pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et $u_0 \to u_e(s, z, t)$ pour $n \to \infty$;

$$(2.1.3)\qquad \frac{\partial w_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (u_0^2 - u_e^2),$$

avec $w_0 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$ ainsi que pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$, $w_0 \to 0$ pour $n \to \infty$;

$$(2.1.4)\qquad \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\nu}{\mathcal{P}} \frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = \frac{\nu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial n} \right)^2 \right],$$

avec $T_0 = T_p$ ou $\partial T_0 / \partial n = 0$ pour $n = 0$, $T \to T_\infty$ pour $n \to \infty$.

Ce système (2. 1) pour u_0, v_0, w_0, T_0 sera suivi par

$$(2.2.1)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial n},$$

$$(2.2.2)\qquad \frac{\partial (e_2 u_1)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v_1)}{\partial n} = 0,$$

avec $u_1 = v_1 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$, pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et pour $n \to \infty$;

$$(2.2.3)\qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} = -(u_0 + u_1) \frac{\partial w_0}{\partial s} - (v_0 + v_1) \frac{\partial w_0}{\partial n},$$

avec $w_1 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$, pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et pour $n \to \infty$;

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\nu}{\mathfrak{P}} \frac{\partial^2 T_1}{\partial n^2} = \frac{\nu}{\mathfrak{P}} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial n} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial n} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_0}{\partial n} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial n} \right] -$$

$$(2.2.4) \qquad - (u_0 + u_1) \frac{\partial T_0}{\partial s} - (w_0 + w_1) \frac{\partial T_0}{\partial z} - (v_0 + v_1) \frac{\partial T_0}{\partial n},$$

avec $T_1 = 0$, ou $\partial T_1 / \partial n = 0$ pour $n = 0$, $T_1 \to 0$ pour $n \to \infty$. On peut continuer ainsi pour u_i, v_i, w_i, T_i, $(i = 2, 3, 4, \ldots)$.

2. 2. Toutes ces équations ont un caractère général; elles sont valables pour $u_0 (s, z; t)$ quelconques avec la seule restriction $u_e (s, z; 0) = 0$ et pour n'importe quelles valeurs constantes de $\mathfrak{P}$ et de T_p. Néanmoins, la convergence des séries $u = \Sigma u_i$, $v = \Sigma v_i$, $w = \Sigma w_i$ et $T = \Sigma T_i$ ne peut raisonnablement être attendue que sous l'hypothèse de faibles valeurs des termes convectifs au début du mouvement cf. § **2. 1.**

2. 2. 1. Nous limiterons, par la suite, nos considérations au cas déjà cité $u_\infty = A t^\alpha U_\infty$, pour lequel le système (s, z, n) coïncide avec celui de W. D. Hayes [4].

Les lignes de courant pariétales de l'écoulement à potentiel sont alors indépendantes de t, l'écoulement extérieur prend, en plus, la forme $u_e = A t^\alpha U_e (s, z)$, où U_e est la solution de l'écoulement à potentiel correspondant au cas stationnaire.

2. 2. 2. Pour simplifier l'écriture, nous choisirons ici $\alpha = 1$ (cas d'une accélération constante suivant une trajectoire rectiligne d'un corps initialement au repos, ce qui permet de plus de poser $A = 1$) et $\mathfrak{P} = 1$.

Les solutions proposées n'ont, cependant, qu'à être peu modifiées (cf. [2] pour le problème dynamique avec $\alpha \geqslant 0$) pour s'adapter aux cas où α et $\mathfrak{P}$ diffèrent (légèrement) de l'unité.

3. 1. Dans le cas considéré, de propriétés physiques ϱ et μ constantes, la partie „dynamique" du système du § **1. 1.** (équations (1. 1), (1. 2), (1. 3) et (1. 5)) ainsi que des systèmes correspondants (2. 1) et (2. 2) d'approximation successive, est indépendante de l'équation de l'énergie (1. 4). Cette partie dynamique admet, pour toute approximation u_i, v_i, w_i, une solution exacte qui a été établie en [2].

3. 2. Résumons ici les résultats concernant la première approximation u_0, v_0, w_0, les approximations ultérieures pouvant être traitées de la même façon:

3. 2. 1. Le système des équations (2. 1. 1) et (2. 1. 2) avec ses conditions aux limites prend pour $u_e (s, z, t) = t U_e (s, z)$, la forme

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} = U_e (s, z), \qquad \frac{\partial (e_2 u_0)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v_0)}{\partial n} = 0,$$

avec $u_0 = v_0 = 0$, pour $t = 0$, $n \geqslant 0$ et $n = 0$, $t \geqslant 0$ et $u_0 \to t U_e (s, z)$ pour $n \to \infty$, dont les solutions peuvent s'écrire

(3.1) $u_0 = t\,U_e(s,z)\,\xi_0'(\eta)$, (3.2) $v_0 = -2t\sqrt{\nu t}\left(\frac{1}{e_2}\cdot\frac{\partial e_2}{\partial s}\,U_e + \frac{\partial U_e}{\partial s}\right)\xi_0(\eta)$,

où $\xi_0(\eta)$ est une fonction universelle de la variable affine $\eta = n/2\sqrt{\nu t}$ qui satisfait à l'équation

$$\xi_0''' + 2\eta\xi_0'' - 4\xi_0' = -4, \tag{3.3}$$

avec les conditions aux limites $\xi_0(0) = \xi_0'(0) = 0$, $\xi_0'(\infty) = 1$.

La solution de (3.3) peut s'obtenir analytiquement; elle est donnée par

$$\xi_0(\eta) = \left(\frac{2}{3}\eta^3 + \eta\right)\operatorname{Erf}\eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}(\eta^2+1)\,e^{-\eta^2} - \frac{2}{3}\eta^3 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}. \tag{3.4}$$

3. 2. 2. L'équation (2. 1. 3) devient alors

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} = t^2\frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial e_1}{\partial z}\,U_e^2(s,z)\,(\xi_0'^2 - 1).$$

Sa solution peut être donnée sous la forme

$$w_0 = t^3\frac{1}{e_1}\cdot\frac{\partial e_1}{\partial z}\,U_e^2(s,z)\,\zeta_0(\eta), \tag{3.5}$$

où la fonction universelle $\zeta_0(\eta)$ est la solution de l'équation

$$\zeta_0'' + 2\eta\zeta_0' - 12\zeta_0 = 4(1 - \xi_0'^2), \tag{3.6}$$

avec les conditions aux limites $\zeta_0(0) = \zeta_0(\infty) = 0$.

La solution de (3.6) peut se donner, également, sous la forme analytique; on trouve:

$$\begin{aligned}\zeta_0(\eta) = {} & C_1\left(1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6\right) + C_2\left[\frac{1}{384}\left(1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \right.\right.\\ & \left.\left. + \frac{8}{15}\eta^6\right)\operatorname{Erf}\eta + \frac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta\right)e^{-\eta^2}\right] + \\ & + X(\eta)\operatorname{Erf}^2\eta + Y(\eta)\operatorname{Erf}\eta + S(\eta),\end{aligned} \tag{3.7}$$

où

$$C_1 = \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3},\quad C_2 = 896 - \frac{1024}{3\pi},\quad X(\eta) = -\frac{8}{9}\eta^6 - \frac{8}{3}\eta^4 - 2\eta^2,$$

$$Y(\eta) = -\left(\frac{16}{9}\eta^5 + \frac{40}{9}\eta^3 + \frac{8}{3}\eta\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2} - 8\eta^4 - 14\eta^2 - \frac{7}{3},$$

$$S(\eta) = -(1 + 2\eta^2 + \eta^4)\frac{8}{9\pi}e^{-2\eta^2} - (5\eta + 4\eta^3)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}.$$

4. 1. L'introduction des expressions (3.1) et (3.5) dans l'équation (2.1.4) donne (compte-tenu de $\mathfrak{P} = 1$) à cette dernière la forme

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = t \frac{U_e^2(s, z)}{4 c_p} \left[\xi_0''^2(\eta) + t^4 \frac{U_e^2(s, z)}{e_1^2} \left(\frac{\partial e_1}{\partial z} \right)^2 \zeta_0'^2(\eta) \right]. \tag{4.1}$$

(4.1) se simplifie encore lorsqu'on tient compte de ce que la première approximation u_0, v_0, w_0, T_0 suppose (§ **2. 1**) si $t \ll 1$; à savoir, on peut négliger le terme avec t^4 dans les crochets du deuxième membre.

Nous traiterons donc l'équation réduite

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = t \frac{U_e^2(s, z)}{4 c_p} \xi_0''^2(\eta) \tag{4.2}$$

avec les conditions aux limites $T_0 = T_p$ ou $\partial T_0 / \partial n = 0$ pour $n = 0$, $T_0 \to T_\infty$ pour $n \to \infty$.

4. 1. 1. Nous établissons d'abord la solution de l'équation homogène

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = 0, \tag{4.2.1}$$

avec les conditions $T_0 = T_p$ pour $n = 0$, $T_0 \to T_\infty$ pour $n \to \infty$. En posant $T - T_\infty = (T_p - T_\infty)\, \theta_0(\eta)$ nous trouvons pour la fonction universelle $\theta_0(\eta)$ l'équation

$$\theta_0'' + 2\eta \theta_0' = 0, \tag{4.3.1}$$

avec les conditions $\theta_0(0) = 1$, $\theta_0(\infty) = 0$.

La solution générale de (4.3.1) est donnée par

$$\theta_0(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-\gamma^2} d\gamma + C_2. \tag{4.4.1}$$

Pour satisfaire les conditions aux limites, on doit poser $C_1 = -\dfrac{2}{\Gamma(1/2)}$, $C_2 = 1$, d'où

$$\theta_0(\eta) = 1 - \operatorname{Erf} \eta. \tag{4.5.1}$$

4. 1. 2. La solution de l'équation inhomogène

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = t \frac{U_e^2(s, z)}{4 c_p} \xi_0''^2(\eta) \tag{4.2.2}$$

sera établie pour le jeu complémentaire de conditions aux limites : $\partial T_0 / \partial n = 0$ pour $n = 0$, $T_0 \to T_\infty$ pour $n \to \infty$. Ces conditions (paroi „athermane") définissent le „problème du thermomètre".

4.1.2.1. Nous posons

$$T_0 = T_\infty \chi_{01}(\eta) + t^2 \frac{U_e^2(s, z)}{4 c_p} \chi_{02}(\eta)$$

avec deux fonctions universelles $\chi_{01}(\eta)$ et $\chi_{02}(\eta)$. En les introduisant dans (4.2.2) nous trouvons, par comparaison des termes d'égale puissance en t, deux équations. Celle de $\chi_{01}(\eta)$ est encore l'équation (4.3.1), mais avec les conditions aux limites $\chi'_{01}(0) = 0$, $\chi_{01}(\infty) = 1$. La solution générale (4.4.1) se spécifie alors et devient

$$\chi_{01}(\eta) \equiv 1. \tag{4.6.1}$$

4.1.2.2. L'équation de $\chi_{02}(\eta)$ est

$$\chi''_{02} + 2\eta\chi'_{02} - 8\chi_{02} = -4\xi_0''^2, \tag{4.3.2}$$

ou bien, après introduction de la forme (3.4) de ξ_0:

$$\chi''_{02} + 2\eta\chi'_{02} - 8\chi_{02} = M_1(\eta)\,\mathrm{Erf}^2\eta + M_2(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + M_3(\eta), \tag{4.3.3}$$

avec

$$M_1(\eta) = -64\eta^2, \quad M_2(\eta) = -\frac{128}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 128\eta^2,$$

$$M_3(\eta) = -\frac{64}{\pi}e^{-2\eta^2} + \frac{128}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - 64\eta^2,$$

et avec les conditions aux limites $\chi'_{02}(0) = 0$, $\chi_{02}(\infty) \to 0$.

On peut obtenir une intégrale particulière de cette équation en lui donnant la forme

$$\chi_{02}(\eta) = P(\eta)\,\mathrm{Erf}^2\eta + Q(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + R(\eta), \tag{4.4.2}$$

dont les fonctions-coefficients doivent satisfaire (comparaison des termes d'égale puissance de Erf η) aux équations

$$P'' + 2\eta P' - 8P = M_1, \tag{4.7.1}$$

$$Q'' + 2\eta Q' - 8Q = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}P' e^{-\eta^2} + M_2, \tag{4.7.2}$$

$$R'' + 2\eta R' - 8R = -\frac{8}{\pi}Pe^{-2\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}Q' e^{-\eta^2} + M_3. \tag{4.7.3}$$

Les solutions du système (4.7) ne peuvent plus contenir Erf η étant donné leur définition comme coefficients de puissances de Erf η. On trouve alors

$$P(\eta) = K_1 + 4 + (4K_1 + 16)\,\eta^2 + \frac{4}{3}K_1\,\eta^4,$$

où K_1 est une constante quelconque. Compte tenu de cette forme de $P(\eta)$ l'équation (4.7.2) prend la forme

$$Q'' + 2\eta Q' - 8Q = \left[\left(-\frac{64}{\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{384}{\sqrt{\pi}}\right)\eta - \frac{128}{3\sqrt{\pi}}K_1\,\eta^3\right]e^{-\eta^2} + 128\,\eta^2,$$

avec la solution

$$Q(\eta) = \left[\left(\frac{20}{3\sqrt{\pi}}K_1 + \frac{32}{\sqrt{\pi}}\right)\eta + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}K_1\,\eta^3\right]e^{-\eta^2} - 32\eta^2 - 8,$$

dans laquelle K_1 est la même constante que dans la solution de $P(\eta)$ mais autrement sans restriction de son choix.

(4.7.3) devient, avec ces expressions pour P et Q

$$R'' + 2\eta R' - 8R = \left[-\frac{104}{3\pi}K_1 - \frac{224}{\pi} + \left(-\frac{32}{3\pi}K_1 + \frac{128}{\pi}\right)\eta^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{32}{3\pi}K_1\eta^4\right]e^{-2\eta^2} + \frac{384}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,e^{-\eta^2} - 64\,\eta^2,$$

équation qui n'a de solution que pour $K_1 = -6$. Avec cette valeur de K_1 portée dans P et Q on a enfin

$$P(\eta) = -2 - 8\eta^2 - 8\eta^4, \quad Q(\eta) = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}(\eta + 2\eta^3)\,e^{-\eta^2} - 32\eta^2 - 8,$$

$$R(\eta) = -\frac{8}{\pi}\eta^2 e^{-2\eta^2} - \frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 16\eta^2 + 4,$$

ce qui définit complètement $\chi_{02}(\eta)$.

Combinée avec deux intégrales, indépendantes de l'équation homogène

$$\chi''_{02} + 2\eta\chi'_{02} - 8\chi_{02} = 0,$$

on a comme solution générale de (4.3.2)

$$\chi_{02}(\eta) = C_1\left(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\right) + C_2\left[\frac{1}{32}\left(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\right)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) - \right.$$

(4.8)

$$\left. - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2}\eta + \eta^3\right)e^{-\eta^2}\right] + P(\eta)\,\mathrm{Erf}^2\eta + Q(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + R(\eta),$$

dont les constantes C_1 et C_2 se déterminent à partir des conditions $\chi'_{02}(0) = \chi_{02}(\infty) = 0$, à savoir $C_1 = 6$, $C_2 = -288$.

4.1.2.3. On obtient de cette forme comme température pariétale T_f du cas athermane („température de frottement“)

$$T_f = T_0(0) = T_\infty + t^2 \frac{U_e^2}{4 c_p} \chi_{02}(0) = T_\infty + t^2 \frac{U_e^2}{4 c_p}, \tag{4.9}$$

puisque $\chi_{01} \equiv 1$ et $\chi_{02}(0) = 1$ (valeur de (4.8) pour $\eta = 0$).

4.2. La combinaison de la solution $T_0 - T_\infty$ de l'équation inhomogène (4.2.2) avec un multiple de la solution $T_0 - T_\infty$ de l'équation homogène (4.2.1) satisfait déjà à la condition à l'infini.

$$T_0 - T_\infty = C \theta_0(\eta) + t^2 \frac{U_e^2}{4 c_p} \chi_{02}(\eta)$$

est donc la solution la plus générale qui doit encore satisfaire à $T_0(0) = T_p$.

4.2.1. Cette condition pariétale de la température donne alors

$$T_p - T_\infty = C\theta_0(0) + t^2 \frac{U_e^2}{4 c_p} \chi_{02}(0) = C + t^2 \frac{U_e^2}{4 c_p} = C + T_f - T_\infty,$$

(cette dernière forme étant obtenue à l'aide de l'équation (4.9)), d'où

$$C = (T_p - T_\infty) - (T_f - T_\infty)$$

et

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \left(1 - \frac{\Delta}{4}\right) \theta_0(\eta) + \frac{\Delta}{4} \chi_{02}(\eta) \tag{4.10}$$

avec $\Delta = t^2 U_e^2(s, z)/[c_p (T_p - T_\infty)]$ comme paramètre.

4.2.2. On voit de (4.10) que le cas athermane correspond à $\Delta = 4$. Pour $T_p < T_\infty$, Δ est toujours négatif, d'où

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial n}\right)_{n=0} = -(T_p - T_\infty)\left(1 - \frac{\Delta}{4}\right) \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{\nu t}} > 0,$$

pour toutes les valeurs de $t > 0$. On a, comme c'est physiquement évident, toujours un flux de chaleur du fluide vers la paroi de l'obstacle. Pour $T_p > T_\infty$, on a $(\partial T_0/\partial n)_{n=0} < 0$ pour $\Delta < 4$ et, par conséquént, flux de chaleur de la paroi vers le fluide. Pour $\Delta \geqslant 4$, le signe de $(\partial T_0/\partial n)_{n=0}$ change et la chaleur passe du fluide vers la paroi.

La fig. 1 montre la variation de la fonction $(T - T_\infty)/(T_p - T_\infty)$ avec $\eta = n/2\sqrt{\nu t}$ pour différentes valeurs du paramètre Δ.

Le tableau 1 donne quelques valeurs numériques des fonctions universelles $\theta_0(\eta)$ et $\chi_{02}(\eta)$ qui sont aussi représentées sur la fig. 2.

Tableau 1

η	$\theta_0(\eta)$	$\chi_{02}(\eta)$	η	$\theta_0(\eta)$	$\chi_{02}(\eta)$
0,1	0,887537	0,949109	1,0	0,157299	0,076443
0,25	0,723674	0,763874	1,50	0,033895	0,008394
0,50	0,479950	0,425435	2,0	0,004678	0,000445
0,75	0,288844	0,193540			

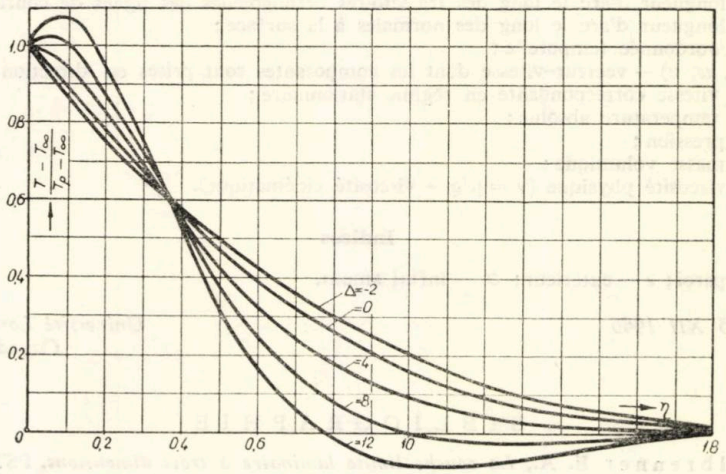


Fig. 1. — Variation de la température avec Δ.

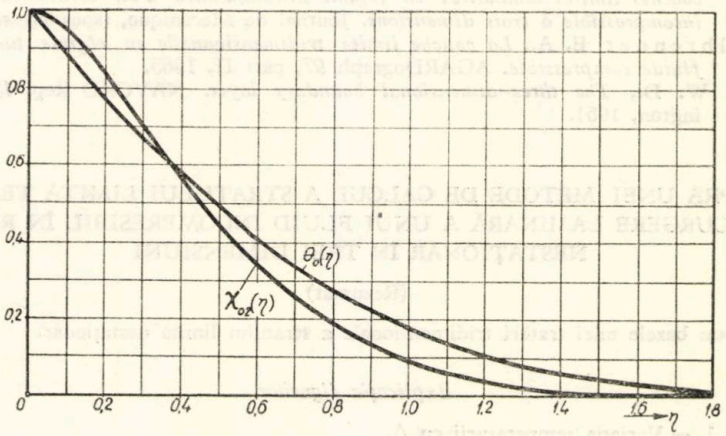


Fig. 2. — Représentation des fonctions universelles $\theta_0(\eta)$ et $\chi_{02}(\eta)$.

REMERCIEMENTS

L'auteur desire remercier très sincèrement le professeur Dr. E. A. Eichelbrenner qui, lors de fructueuses discussions, a contribué en grande mesure à lui fournir de nombreuses et utiles suggestions. Il lui est gré aussi pour le zèle inestimable qu'il a apporté au moment de la rédaction de son article.

Notations

s — longueur d'arc le long des lignes de courant extérieures ;
z — longueur d'arc le long des trajectoires orthogonales des lignes de courant ;
n — longueur d'arc le long des normales à la surface ;
t — coordonnée temporelle ;
$V(u, w, v)$ — vecteur-vitesse dont les composantes sont prises en direction de s, z, n ;
U — vitesse correspondante en régime stationnaire ;
T — température absolue ;
p — pression ;
ϱ — masse volumique ;
μ — viscosité physique ($\nu = \mu/\varrho$ — viscosité cinématique).

Indices

p — paroi ; e — extérieur ; ∞ — infini amont.

Reçue le 25 XII 1966

Université Laval, Québec, Canada

BIBLIOGRAPHIE

1. Eichelbrenner E. A., *La couche limite laminaire à trois dimensions.* PST du Ministère de l'Air, NT *85*, Paris, 1959.
2. Aškovic R., Eichelbrenner E. A., *Sur une méthode approchée de traiter les couches limites laminaires en régime instationnaire d'un écoulement en fluide incompressible à trois dimensions.* Journal de Mécanique, (sous presse).
3. Eichelbrenner E. A., *La couche limite tridimensionnelle en régime turbulent d'un fluide compressible.* AGARDograph *97*, part II, 1965.
4. Hayes W. D., *The three-dimensional boundary layer.* NAVORD Rep. *1313*, Washington, 1951.

ASUPRA UNEI METODE DE CALCUL A STRATULUI LIMITĂ TERMIC DE SCURGERE LAMINARĂ A UNUI FLUID INCOMPRESIBIL ÎN REGIM NESTAȚIONAR ÎN TREI DIMENSIUNI

(Rezumat)

Se pun bazele unei tratări tridimensionale a stratului limită nestaționar.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Variația temperaturii cu Δ.
Fig. 2. — Reprezentarea funcțiilor universale $\theta_0(\eta)$ și $\chi_{02}(\eta)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 621.64

ASUPRA CALCULULUI HIDRAULIC AL CONDUCTELOR DIN MATERIAL PLASTIC

DE

C. CIOBANU, ELISABETA BILIUŢĂ şi ILIE RUSU

1. Introducere

Relaţiile folosite pentru determinarea mărimilor hidraulice λ, j, v şi Q, se referă mai ales la tuburile din PE şi PVC, care dispun de cea mai lungă durată de verificare a comportării lor în transportul lichidelor. Starea de rugozitate a pereţilor tuburilor din aceste materiale, este considerată unanim ca făcînd parte din categoria pereţilor netezi.

a) *Coeficientul de rezistenţă liniară* (λ), pentru astfel de pereţi, indiferent de materialul din care sînt confecţionate tuburile, se determină folosindu-se formulele următoare:

(1) $\lambda = 0{,}3164\ \mathcal{R}e^{-0{,}25}$ (Blasius), pentru domeniul $3.10^3 < \mathcal{R}e < 10^5$,

(2) $\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221\mathcal{R}e^{-0{,}237}$ (Nikuradse), pentru domeniul $\mathcal{R}e > 10^5$,

(3) $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\frac{2{,}51}{\mathcal{R}e\sqrt{\lambda}}$$ (Kármán), pentru domeniul $\mathcal{R}e > 3.10^3$,

(4) $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}8\log \mathcal{R}e/7$$ (Colebrook), pentru domeniul $\mathcal{R}e > 5.10^5$,

a căror concordanţă se pune în evidenţă mai ales în domeniul $4.10^4 < \mathcal{R}e < 4.10^5$.

Pentru tuburile din PE şi PVC, se folosesc formule de tipul $\lambda = a\,\mathcal{R}e^n$, stabilite pe cale experimentală, cum sînt cele de mai jos:

(5) $\lambda = 0{,}246\ \mathcal{R}e^{-0{,}22}$ pentru domeniul $10^4 < \mathcal{R}e < 2.10^5$,

(6) $\lambda = 0{,}287\ \mathcal{R}e^{-0{,}226}$ pentru acelaşi domeniu,

(7) $\lambda = 0{,}332\ \mathcal{R}e^{-0{,}25}$ drept o valoare maximă,

(8) $\lambda = 0{,}267\ \mathcal{R}e^{-0{,}226}$,

(9) $\lambda = 0{,}180\ \mathcal{R}e^{-0{,}20}$ pentru domeniul $4.10^4 < \mathcal{R}e < 10^6$.

b) *Panta hidraulică (j)* este determinată cu ajutorul formulelor stabilite experimental, de tipul:

$$1\,000\,j = AQ^n/D^m.$$

Dintre acestea, practic sînt folosite următoarele:

(10) $1\,000\,j = 0{,}27\,Q^{1{,}78}\,D^{-4{,}78}$, pentru $2° < t[°C] < 20°$,

(11) $1\,000\,j = 0{,}25\,Q^{1{,}774}\,D^{-4{,}77}$ pentru PVC dur şi lichide cu $960 < \gamma < 1\,050$ şi $0{,}005 < \nu < 0{,}02$ m²/s,

(12) $$1\,000\,j = 0{,}772\,Q^{1{,}75}\,D^{-4{,}75},$$

(13) $$1\,000\,j = a v^{1{,}75}\,D^{1{,}25},$$ în care $0{,}54 < a < 0{,}92$.

c) *Viteza*, pentru domeniul $8.10^4 < \mathcal{R}e < 5.10^5$, se determină cu formula:

(14) $$v = k_1\,D^{2/3}\,j^{5/9}$$

în care:

$$K_1 = 13{,}5 \log\left(\frac{\varrho}{\eta}\right)^{1/9} \quad [\mathrm{m}^{1/3}\,\mathrm{s}^{-1}],$$

unde: ϱ — densitatea specifică iar η — coeficient de vîscozitate dinamică.

d) *Debitul* se poate calcula cu formula:

(15) $$Q = K_2\,D^{8/5}\,j^{5/9},$$

în care:

$$K_2 = 10{,}641\left(\frac{\varrho}{\eta}\right)^{1/9}.$$

În tabelul 1 se aduc preciziuni asupra valorilor lui K_1 şi K_2, în funcţie de temperatură.

Tabelul 1

t (°C)	10°	15°	20°	40°
K_1	61,017	61,921	62,819	65,859
K_2	47,922	48,632	49,338	51,724

În afara formulelor citate, în calculele hidraulice ale tuburilor din PE şi PVC, se folosesc şi grafice [1], [6], [8].

2. Comportarea din punct de vedere hidraulic a tuburilor din PVC de fabricaţie indigenă [1])

Pe baza celor 420 date experimentale determinate, s-a stabilit relaţia:

(16) $$\lambda = 0{,}272\,\mathcal{R}e^{-0{,}236},$$

valabilă pentru tuburi din PVC, tip *M* şi *G*, în domeniul $10^4 < \mathcal{R}e < 2.10^5$, reprezentată în graficul din fig. 1, prin curba *6*. Pe baza acestei formule s-a trasat şi graficul din fig. 2, care poate fi folosit la calculul hidraulic al tuburilor din PVC de aceeaşi fabricaţie.

[1]) Tuburi de categoria *M* şi *G*, din PVC, produse de Fabrica de mase plastice, Iaşi.

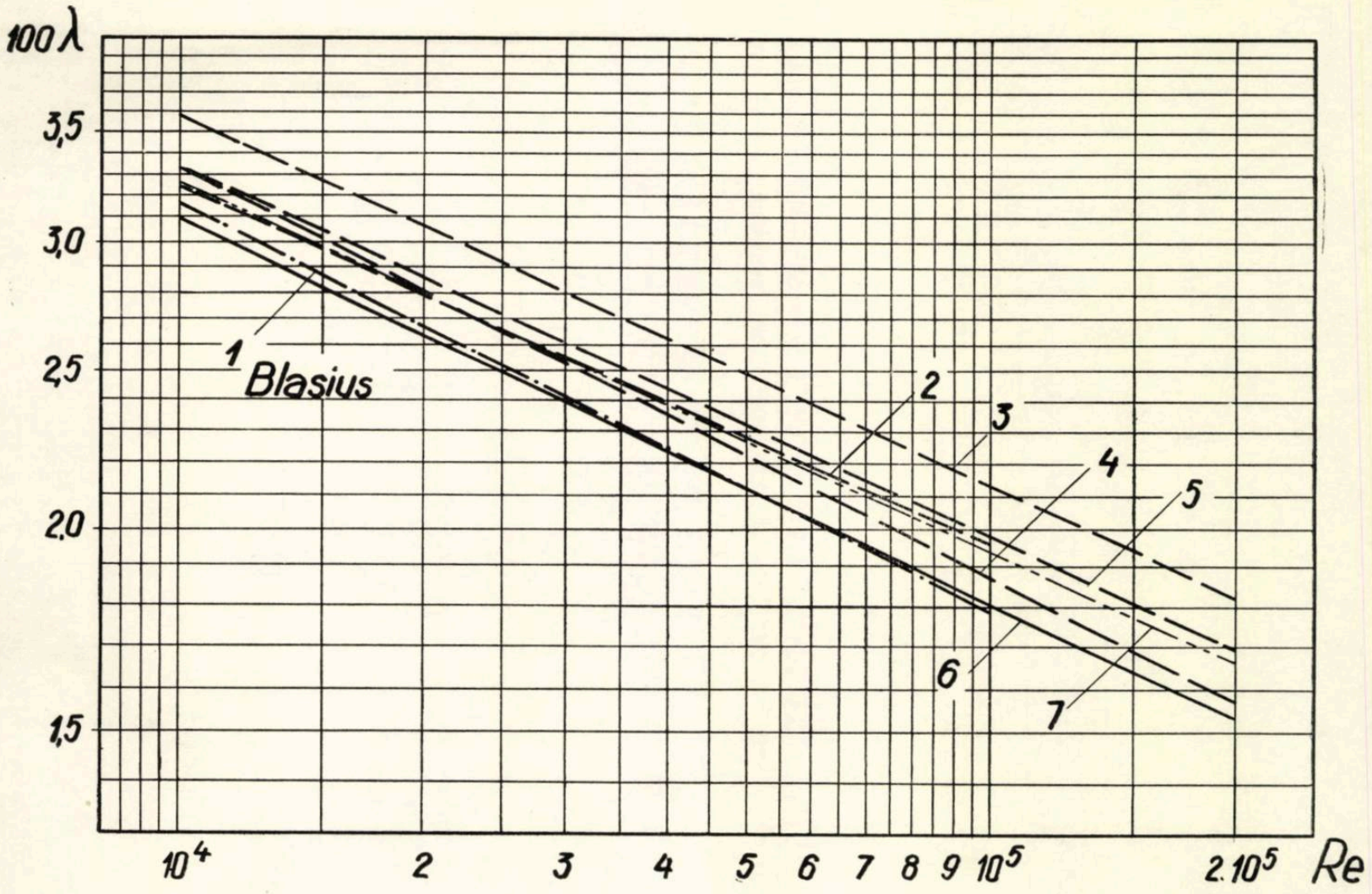

100λ
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1
Blasius
2
3
4
5
6
7
10⁴
2
3
4
5
6
7
8
9
10⁵
2.10⁵
Re

Fig. 1

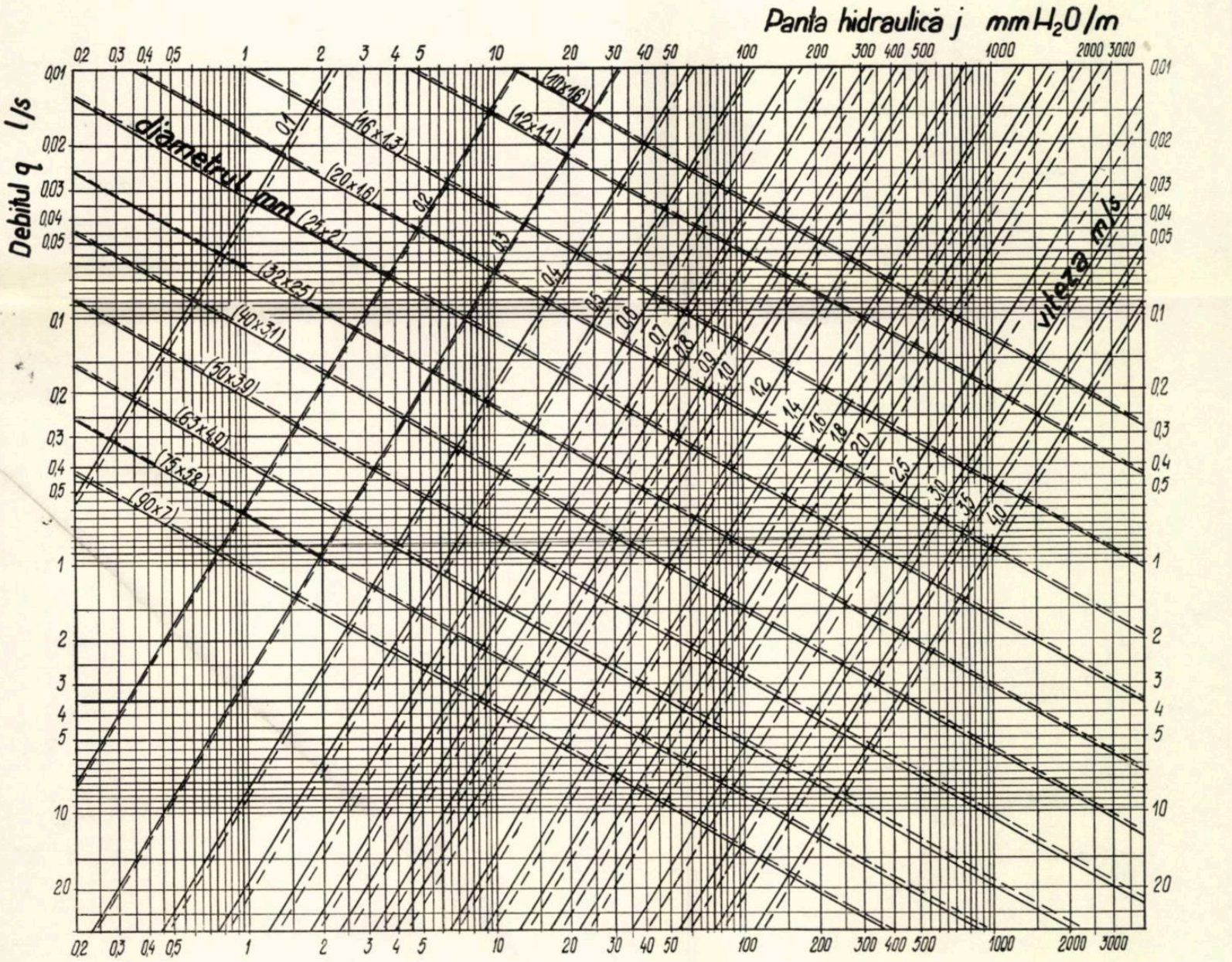
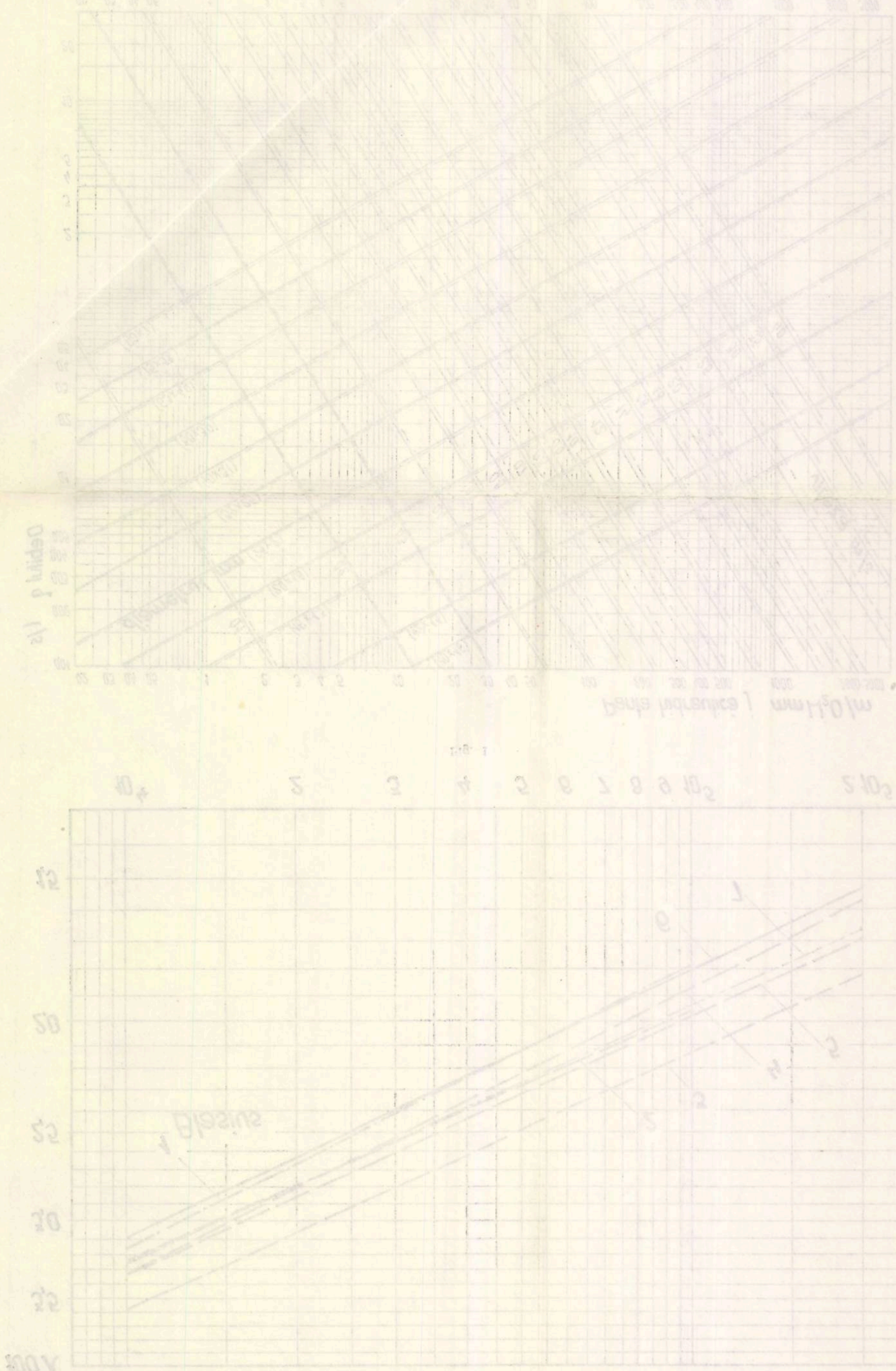

Panta hidraulică j mm H₂O/m
Debitul q l/s
diametrul mm
(10x16)
(12x11)
(16x13)
(20x16)
(25x2)
(32x25)
(40x31)
(50x39)
(63x49)
(75x58)
(90x7)
viteza m/s

Fig. 2



3. Privire critică asupra formulelor de calcul ale lui λ

Cu excepţia curbei corespunzătoare formulei (16), celelalte curbe se situează deasupra celei a lui Blasius (fig. 1, curba *1*). Ştiind că majoritatea formulelor sînt deduse pe baza măsurătorilor efectuate asupra tuburilor, şi nu a conductelor, diversitatea lor apare ca nejustificată; aceasta cu atît mai mult, dacă se are în vedere că s-a admis că pereţii sînt netezi. Cauza trebuie căutată în ignorarea influenţei anumitor factori, cum ar fi:

a) *Neuniformitatea diametrului* în lungul aceluiaşi tub, precum şi de la şarjă la şarjă. O abatere de numai 3% a diametrului duce la o variaţie a pierderii de sarcină de 15%.

b) *Influenţa variaţiei de temperatură*, ca urmare a valorii ridicate a coeficientului de dilatare liniară (cu mult superioară celui pentru oţel).

c) *Metoda de fabricaţie*, care se face simţită — de altfel foarte rar —, prin mărimea rugozităţii datorită orientării fibrei.

Menţionăm că rugozitatea pereţilor tuburilor din PE şi PVC, pe baza a numeroase determinări, este cuprinsă între 0,0015 şi 0,0070 mm [4]. Rugozitatea tuburilor de fabricaţie indigenă se încadrează în limitele celor de fabricaţie străină.

d) *Influenţa metodei, aparaturii şi deci a preciziei*, folosite în măsurători.

La toate acestea se mai adaugă şi faptul că, în cazul *conductelor*, mărimea pierderilor de sarcină, produse de rosturile de îmbinare a tuburilor, se apreciază la 15% din pierderea de sarcină liniară totală. O rigoare excesivă în alegerea uneia din formulele citate, pare a fi fără sens. În acest spirit propunem formula:

$$\lambda = 0{,}256\,\mathcal{R}e^{-0{,}224}, \tag{17}$$

reprezentată în graficul din fig. 1, prin curba *7*. Este o *curbă medie*, determinată prin metoda celor mai mici pătrate, pe un grafic dublu-logaritmic, în ideea de a atribui ponderi egale diferitelor puncte de pe celelalte curbe. Considerăm că formula propusă posedă avantajul unei aplicabilităţi generale, ştiind că sensul abaterilor fiecărei formule din grafic depinde de existenţa şi simultaneitatea influenţei factorilor menţionaţi, sau şi a altora. Pe graficul din fig. 2 liniile punctate sînt trasate luîndu-se în considerare formula (17).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de hidraulică şi maşini hidraulice

BIBLIOGRAFIE

1. Datei Cl., L'acqua, Roma, 1958, **XXXVI**, *2*, pp. 39–43.
2. Севелев Ф. А., Каган Д. Ф., Лобачев П. В., Водосн. и санит. техн., 1959, *1*, стр. 11–16.
3. Степанов Л. Н., Гидр. и мелиор., 1959, *1*, стр. 31–32.
4. Gruner H., Stadt- und Gebäudetech., 1961, *10*, pp. 23–26.
5. Рувин М. Я., Водосн. и санит. техн., 1962, *9*, стр. 1–5.

6. Каган Д. Ф., *Трубопроводы из твердого поливинилхлорида*. Изд. Химия, М., 1964, стр. 198 – 208.
7. Ghiduş D., Ivanoff M., Bălan N., *Materiale plastice în instalaţii*. Ed. tehn., Buc., 1964, p. 163.
8. Frega G. A., L'acqua, 1965, **XLIII**, *2*, pp. 42–46.

SUR LE CALCUL HYDRAULIQUE DES TUYAUX PLASTIQUES

(Résumé)

On présente les résultats expérimentaux concernant le comportement hydraulique des tuyaux de fabrication indigène. Ces résultats sont concretisés dans la formule (7). Pour dimensioner les condu.t s, on peut utiliser le graphique de la fig. 2.

À la suite d'un examen critique, les Auteurs proposent pour λ la formule (8), qui présente l'avantage d'une applicabilité générale. Sur le graphique de la fig. 2, les courbes tracées par lignes interrompues corespondent à la formule (17).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 631.3

ÎNCERCAREA LA UZURĂ A UNOR CUPLURI DIN FONTĂ MALEABILĂ PERLITICĂ ŞI OŢEL CARBON DE CALITATE, ÎN CONDIŢII USCATE (I)

DE

I. M. CRUDU, V. GH. NECULĂIASA, M. AVRAM, C. BRĂTESCU, R. MORAID şi GH. ŞTEFĂNESCU

Comunicare prezentată la Conferinţa de turnătorie organizată de Ministerul Construcţiei de Maşini şi de Consiliul Naţional al Inginerilor şi Tehnicienilor, din 12—13 mai 1967, Bucureşti

1. Consideraţiuni generale

Intensificarea procesului de mecanizare şi automatizare a muncii în agricultură, construcţii, minerit, foraj etc. are ca urmare creşterea continuă a numărului şi tipurilor de maşini şi utilaje din aceste domenii.

Condiţiile de funcţionare a acestor maşini sînt foarte variate, ţinînd seama de regimul de încărcare a organelor de lucru (ce variază în limite largi), de influenţa mediului de lucru (caracterizat prin umiditate, variaţii de temperatură, compoziţie chimică) de contactul cu materialele dure cu acţiune puternic abrazivă, de dificultăţile de întreţinere şi reglaj etc.

Durabilitatea maşinilor ce funcţionează în asemenea condiţii de lucru este determinată în primul rînd de rezistenţa la uzură a sculelor de lucru precum şi a celorlalte organe, mai mult sau mai puţin protejate, ale maşinilor.

Se ştie că rezistenţa la uzură depinde de proprietăţile straturilor superficiale ale metalelor în contact.

Cercetările noi arată că straturile superficiale ale pieselor în contact sînt caracterizate printr-o anumită microgeometrie, duritate, structură şi distribuţie a tensiunilor remanente.

După unii autori [1] un strat superficial este considerat ca fiind constituit din patru zone, de diverse grosimi, care separă materialul de bază de mediul exterior. În procesul de frecare, ca urmare a fenomenelor de natură mecanică, chimică şi termofizică ce iau naştere, mărimile ce caracterizează stratul superficial se modifică la început pînă ce se atinge un regim de echilibru. Acest regim este determinat de un anumit ritm şi o anumită intensitate de distrugere a straturilor superficiale, corespunzător unui anumit tip de uzură [2].

Pentru a se asigura o durabilitate maximă, la alegerea materialelor pentru diverse organe supuse uzurii, trebuie ţinut seama de parametrii cinematici şi dinamici (determinaţi de acţiunea mecanică exterioară), de proprietăţile fizico-mecanice ale mediului de lucru şi de rezistenţa la uzură a materialului din care este confecţionat organul respectiv.

De multe ori, în practică, se pune problema înlocuirii unui cuplu de materiale în contact, cu altul, din motive economice, constructive, sau de simplificare a tehnologiei de fabricaţie.

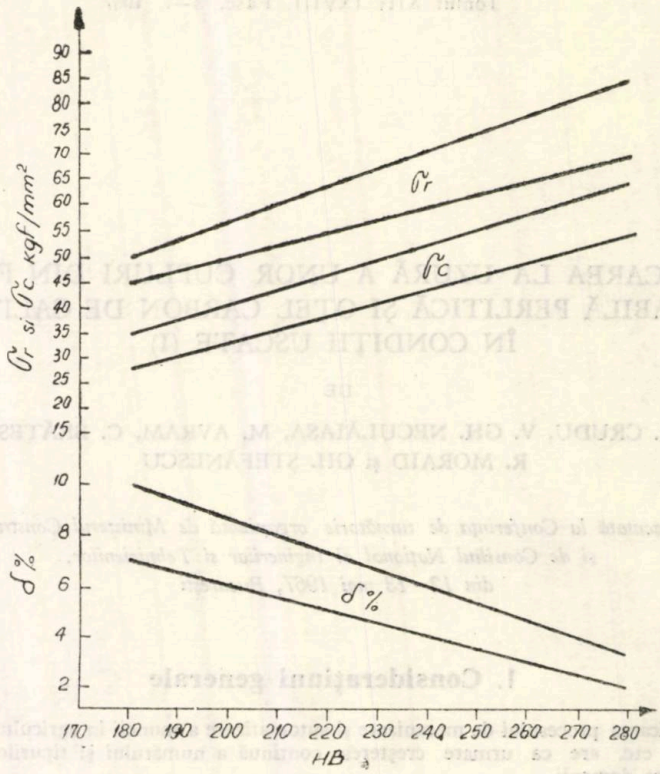


Fig. 1

Tabe

Proprietăți*)	Fmp STAS 569-64	Fc STAS 568-60	Fmn STAS 569-64	Fma STAS 569-64
σ_r (kgf/mm²)	45...70	10...40	30...37	35...42
σ_c (kgf/mm²)	28...55	—	19...21	23...26
δ (%)	7...2	—	6...12	3...4
a_K (kgm/cm²)	4...1,5	—	6...10	—
HB (kgf/mm²)	150...285	153...269	150...160	200...240
E (kgf/mm²)	18 000...20 000	7 000...14 000	15 000...17 000	14 000...16 000

*) caracteristicile care nu figurează în standardele menționate s-au luat din literatura de

Din parcurgerea literaturii ultimilor ani se constată tendința tot mai accentuată a înlocuirii oțelurilor turnate sau laminate și forjate cu piese din fontă. Acest lucru a devenit posibil în urma obținerii unor fonte cu caracteristici superioare, așa cum sînt fontele nodulare și fontele maleabile perlitice (fig. 1).

La aceste fonte se consideră că nu numai rezistența la rupere și limita de curgere, dar și rezistența la oboseală, coroziune, temperaturi înalte, șoc termic și uzură sînt de același ordin de mărime cu cele ale oțelurilor carbon sau ale unor oțeluri slab aliate. Aceste caracteristici conferă pieselor respective proprietăți fundamentale remarcabile. Pentru ilustrarea celor de mai sus vom reproduce din [3] (tabelul 1) caracteristicile principale ale unor aliaje de utilizare curentă.

În lucrarea de față se prezintă prima parte a rezultatelor cercetărilor privind: a) comportarea la uzură a unor cupluri din fontă maleabilă perlitică, cu duritatea $HB = 200...230$, față de cele din OLC 45 normalizat, în vederea aprecierii folosirii acestei fonte la confecționarea unor organe ușor încărcate, b) comportarea la uzură a unor cupluri din fontă maleabilă perlitică călită la durități $HB = 320...360$; $450...500$, în comparație cu cele din OLC 45 și OLC 15, tratate la aceleași durități, în scopul cunoașterii posibilităților de folosire a acestei fonte la turnarea roților de lanț.

La mașinile agricole procesul de uzură al dinților roților este influențat și de prezența particolelor abrazive ce se interpun fie între dinții roții și rola lanțului, fie între role și bucșa lanțului, ducînd la blocarea acestora. În aceste condiții, în timpul angrenării rola va putea fi animată de o mișcare de rostogolire cu alunecare, respectiv rostogolire cu patinare pe flancul dinților.

În continuare ne-am propus să cercetăm influența ungerii și a abrazivelor asupra acelorași materiale, la sarcini constante și la șoc, precum și comportarea lor ca materiale antifricțiune.

ul 1

Fgn STAS 6 071-59	OT STAS 600-61	OLC 45 STAS 880-60	T 35 M 14 STAS 1 773-63	Bz Al STAS 198-49	Bz $\frac{Zn}{Sn}$ STAS 197-60
40...60	45...55	60...70	55...60	30...40	15...20
30...42	23...28	34...36	30...35	25...40	12...18
10...0	22...16	16...20	12...14	10...20	2...10
3...1,5	—	6...8	3...5	—	—
156...267	120...160	170...200	150...170	60...110	55...85
14 000...18 000	20 000...21 000	—	—	—	—

pecialitate.

2. Metodica încercărilor

Faţă de complexitatea fenomenelor şi proceselor ce apar în straturile superficiale ale pieselor în contact, stabilirea unei metodice de cercetare, care să furnizeze date aplicabile într-un număr cît mai mare de cazuri, prezintă dificultăţi deosebit de mari.

Totuşi dacă se ţine seama că în straturile superficiale se manifestă cu preponderenţă un anumit fenomen sau proces de natură mecanică, chimică sau termofizică, care caracterizează un anumit tip de uzură, atunci se poate considera că o cale de cercetare sistematică este cea menţionată în [2], pe care unul dintre autorii acestei lucrări a semnalat-o într-un articol publicat anterior [9] şi care constă din verificarea în condiţii de laborator a comportării cuplurilor de material, la tipul de uzură observat în practică, în funcţie de factorii principali (încărcare, viteză, lubrefiant etc.).

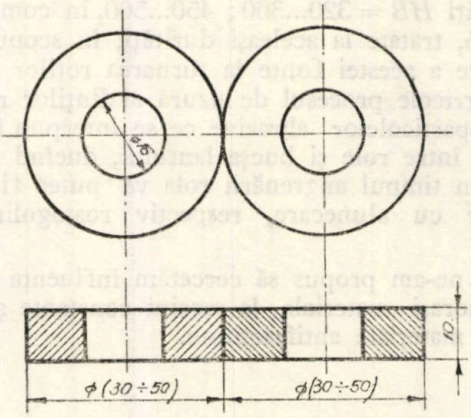


Fig. 2

În cele ce urmează se prezintă rezultatele încercărilor la uzură a cuplurilor menţionate mai sus, în condiţii uscate, la rostogolire pură şi la rostogolire cu alunecare 10%, 15% şi 20% pentru încărcările de 150; 175 şi 200 kgf/cm.

Uzura s-a determinat pentru un drum de frecare de 1000 m pentru fiecare pereche de epruvete. Acest drum de frecare s-a stabilit după o serie de încercări preliminare, în timpul cărora s-a observat că fenomenele şi procesele din straturile superficiale s-au stabilizat. Menţionăm că metoda determinării uzurii după 1000 m drum de frecare este folosită şi de alţi cercetători [10].

Încercările la uzură s-au efectuat pe o maşină de construcţie MI, cu o turaţie de 220 rot/min, folosindu-se epruvete cilindrice (fig. 2).

Epruvetele din fontă au fost turnate în condiţiile fabricaţiei de serie (duplex cubilou—cuptor rotativ) şi apoi tratate termic.

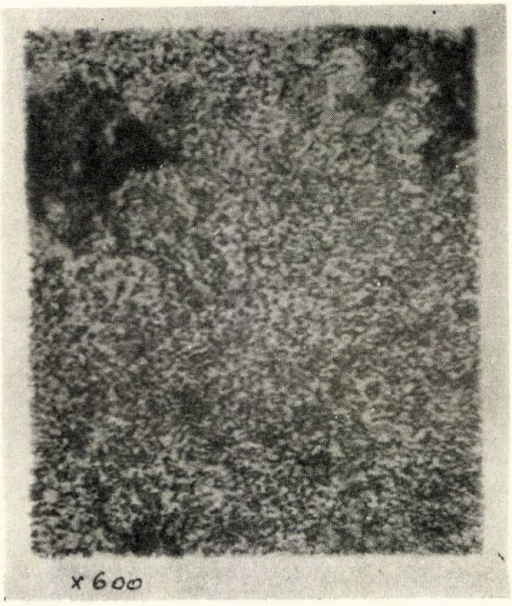
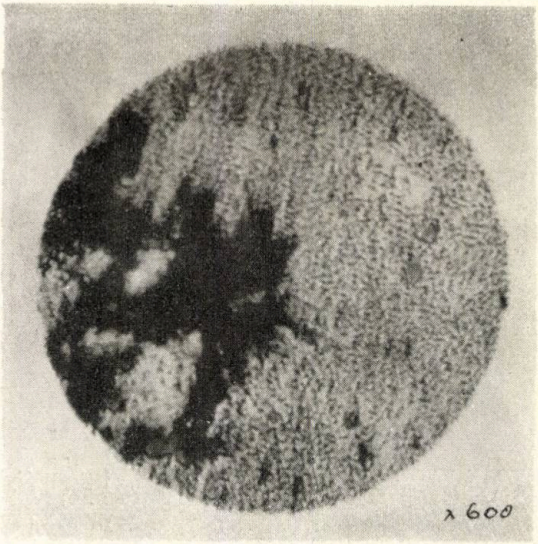


Fig. 3

a



b

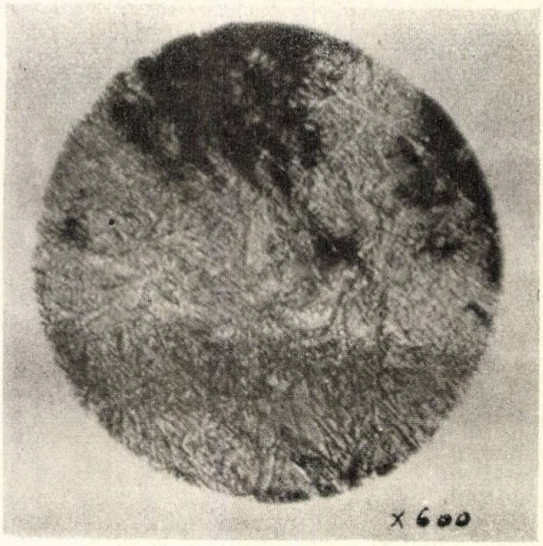


Fig. 4

Compoziţia lor chimică a fost: C = 2,55%; Si = 1,09%; Mn = 0,4%; S = 0,09%; P = 0,11%.

Tratamentul termic a constat din maleabilizare pentru realizarea fontei feritice, urmată de tratamentele corespunzătoare durităţii urmărite.

După prelucrarea mecanică şi tratament, înainte de a fi supuse încercărilor, epruvetele au fost lustruite cu şmirghel, cu viteză periferică redusă, pentru a nu se influenţa structura stratului superficial. În funcţie de duritatea urmărită s-au realizat trei grupe de epruvete:

a 1 — Fontă maleabilă perlitică cu duritatea $HB = 200...230$, avînd rezistenţa $\sigma_r = 56$ kgf/mm², alungirea $\delta = 7\%$, structura cristalină fiind compusă din perlită globulară şi grafit de recoacere (fig. 3). Aceste proprietăţi s-au obţinut prin aplicarea unui tratament de normalizare, de la 850°C, timp de 1 oră, urmat de o recoacere de globulizare la 620°C, timp 4 ore.

b 1 — Fontă maleabilă perlitică cu duritatea $HB = 320...360$ şi structura alcătuită din grafit de recoacere şi sorbită (fig. 4a), obţinută prin călire în ulei, de la 820°C, timp de 1 oră, şi revenire la 320°C, timp de 45 min.

c 1 — Fontă maleabilă perlitică cu duritatea $HB = 450...500$ şi structura compusă din grafit de recoacere şi martensită de revenire (fig. 4 b), obţinută prin călire în condiţiile de mai sus, revenirea făcîndu-se la 200...250°C.

Epruvetele din oţel au fost tratate în vederea obţinerii unor durităţi analoge, şi anume:

a 2 — OLC 45 în stare normalizată cu duritatea de circa $HB = 200$, rezistenţa la rupere fiind $\sigma_r = 68...70$ kgf/mm².

c 2 — OLC 45 călit şi revenit la $HB = 450...500$.

d 2 — OLC 15 cementat, călit şi revenit la $HRc = 57...64$.

Din Fmp (fontă maleabilă perlitică) cu $HB = 200...230$ şi OLC 45 în stare normalizată s-au realizat trei cupluri pentru rostogolire pură şi patru cupluri pentru rostogolire cu alunecare, iar din epruvetele călite s-au realizat şase cupluri pentru rostogolire cu alunecare.

Încercările de rostogolire pură s-au efectuat prin antrenarea uneia din probe, de către rola pereche care era motoare. Deoarece valoarea coeficientului de frecare a fost foarte mică (sub 0,03), se poate considera că eforturile tangenţiale ce iau naştere la contactul rolelor sînt foarte mici şi că influenţa lor asupra distribuţiei eforturilor hertziene este neglijabilă. De altfel în literatură sînt menţionate cercetări privind influenţa forţelor tangenţiale asupra distribuţiei de eforturi hertziene [11]...[13] însă numai în cazul cînd coeficientul de frecare are valori mai mari (peste 0,1).

În ceea ce priveşte încercările la rostogolire cu alunecare, acestea s-au efectuat prin folosirea de probe cu diametre diferite, acţionate individual. Ca urmare a diferenţei de viteze periferice ($V_2 < V_1$), s-au realizat grade de alunecare de 10; 15 şi 20%.

Uzura s-a determinat prin cîntărirea probelor pe o balanţă analitică cu o precizie de 0,001 gf. Greutatea materialului desprins s-a reprezentat grafic,

în funcţie de presiunea de contact (în cazul rostogolirii pure) şi în funcţie de alunecare (în cazul rostogolirii cu alunecare), pentru diverse presiuni. În fig. 5...14 s-a reprezentat cu linie continuă variaţia uzurii pentru epruvetele din oţel, iar cu linie întreruptă uzura celor din fontă.

Pe ordonată s-a înscris valoarea uzurii (în g), iar pe abscisă gradul de alunecare, pentru determinarea fiecărui punct efectuîndu-se minimum cîte trei determinări. În vecinătatea originii (în interiorul semicercului) nu s-au efectuat determinări pentru uzură.

3. Rezultate experimentale

Din epruvetele tratate la durităţi de ordinul $HB = 200...230$ s-au constituit următoarele cupluri care s-au încercat la rostogolire pură pe 1000 m drum de frecare, la presiunile de 150; 175 şi 200 kgf/cm:

a) *1-1'* — OLC 45 pe OLC 45, (a 2/a 2), b) *2-2'* — Fmp pe Fmp, (a 1/a 1), c) *3-3'* — OLC 45 pe Fmp, (a 2/a1).

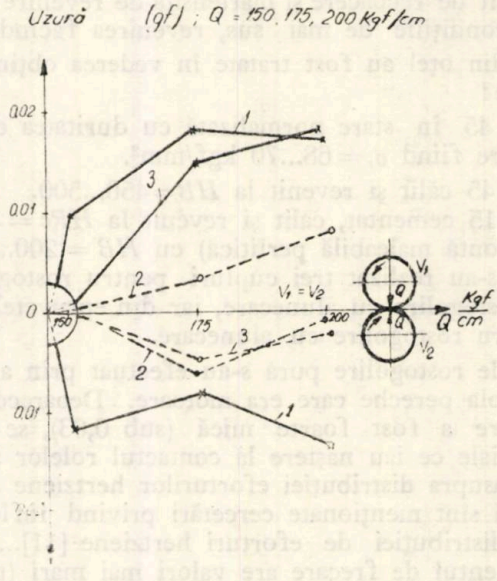


Fig. 5

Rezultatele sînt consemnate în fig. 5, din care se constată că cuplurile *2-2'* prezintă o uzură net inferioară cuplului *1-1'*. De altfel, Fmp a prezentat uzuri mai mici decît oţelul şi în cazul cuplului *3-3'*.

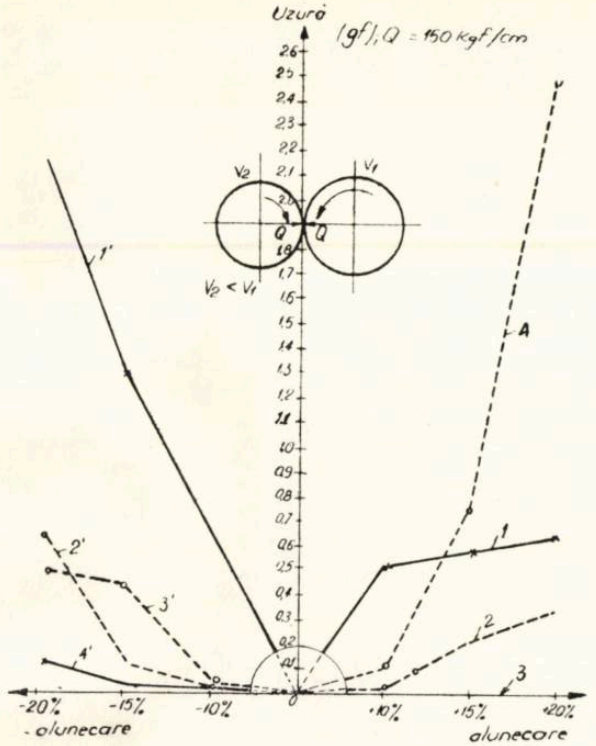


Fig. 6

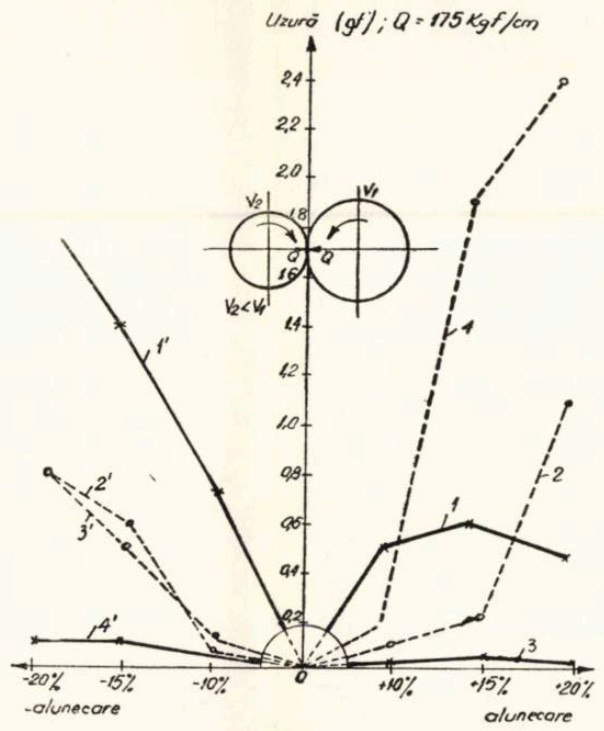


Fig. 7

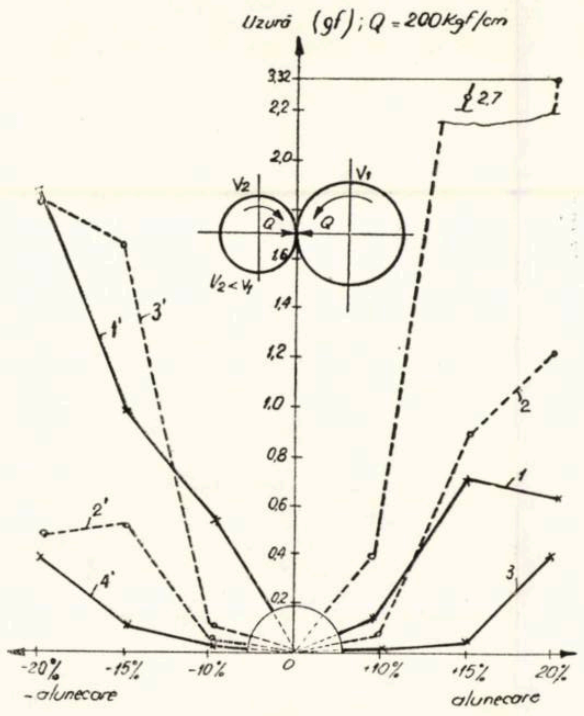


Fig. 8

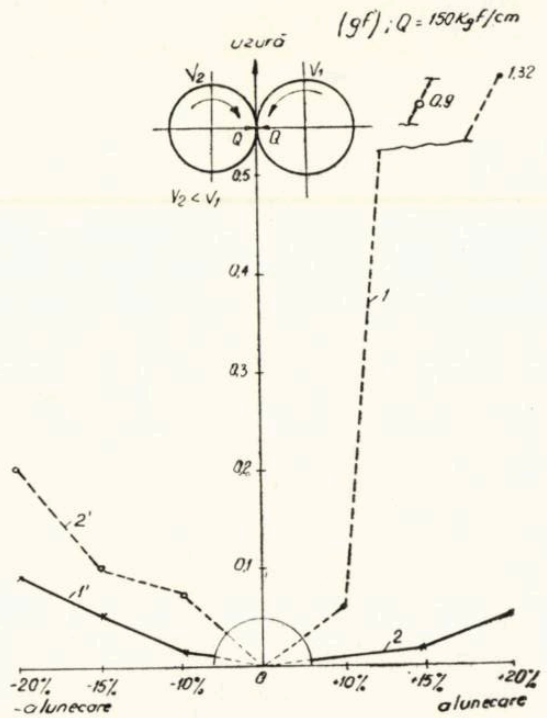


Fig. 9

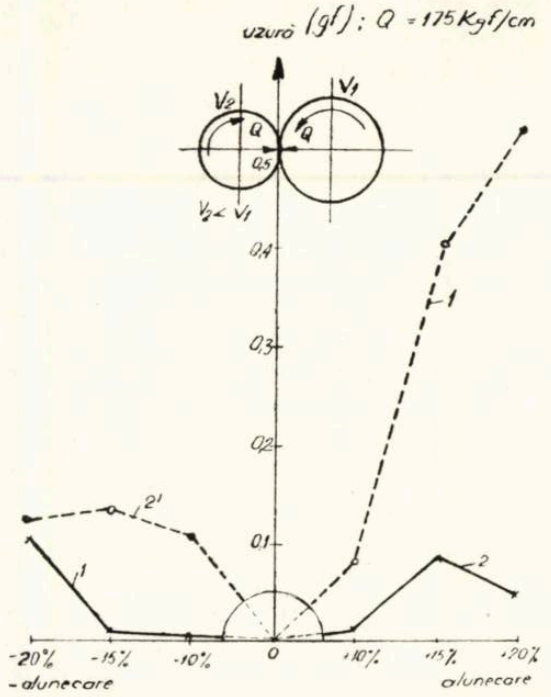


Fig. 10

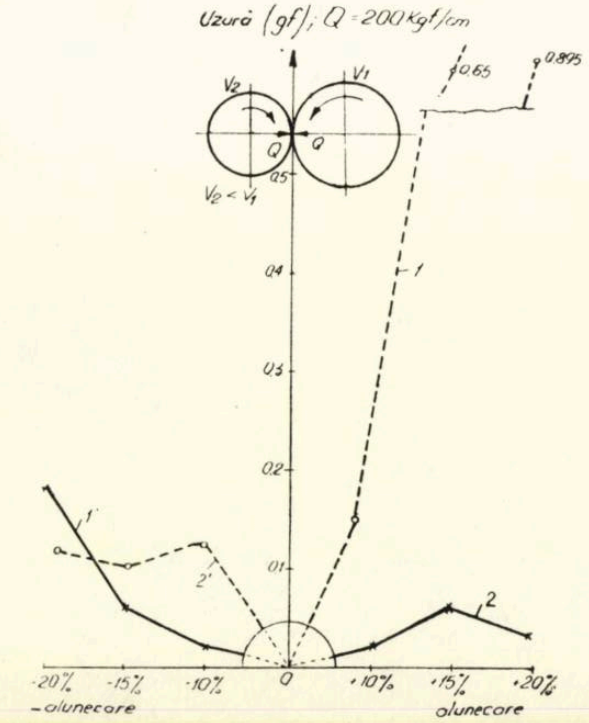


Fig. 11

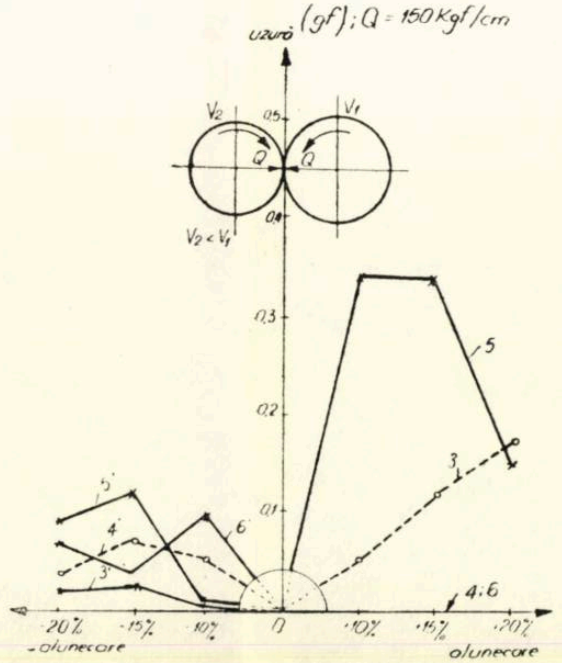


Fig. 12

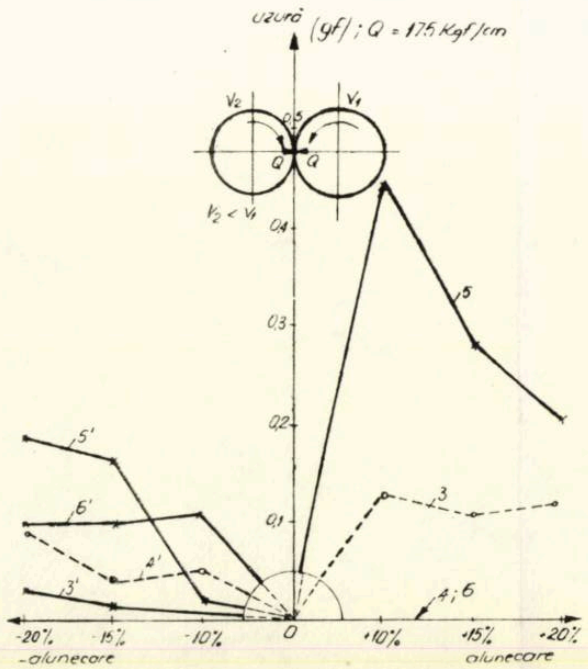


Fig. 13

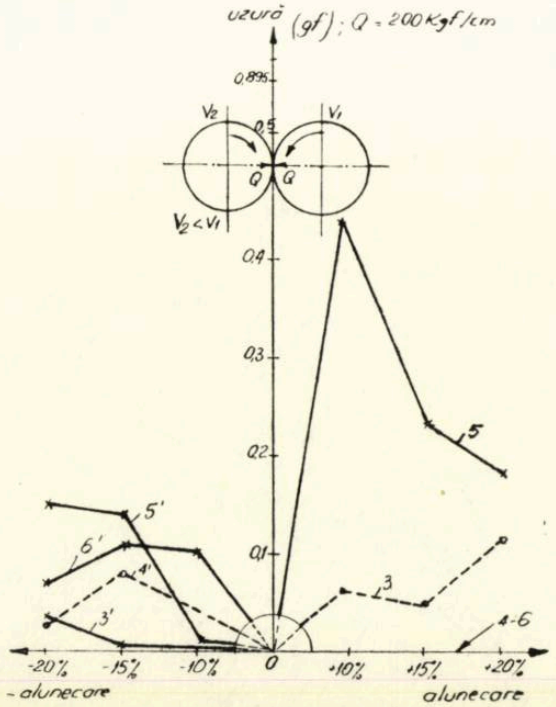


Fig. 14

În condiţiile de rostogolire cu alunecare s-au constituit următoarele cupluri, care s-au încercat în aceleaşi condiţii de presiune şi drum de frecare, gradul de alunecare fiind de 10; 15; 20%: d) *1-1'* — OLC 45 pe OLC 45, (a 2/a 2), e) *2-2'* — Fmp pe Fmp, (a 1/a1), f) *3-3'* — OLC 45 pe Fmp, (a 2/a 1), g) *4-4'* — Fmp pe OLC 45, (a 1/a 2).

Rezultatele sînt redate în fig. 6 pentru presiunea de 150 kgf/cm, în fig. 7 pentru presiunea de 175 kgf/cm şi în fig. 8 pentru presiunea de 200 kgf/cm.

Din examinarea diagramelor din fig. 6, 7, 8 rezultă următoarele observaţii:

a) La $Q = 150$ kgf/cm uzura cuplului *2-2'* este mai redusă, pentru toate gradele de alunecare, decît la cuplul *1-1'* (fig. 6).

b) La $Q = 175$ kgf/cm uzura cuplului *2-2'* este mai mare decît cea a cuplului *1-1'* numai la alunecări peste 15% şi numai pentru epruvetele ce alunecă.

c) În cazul cînd $Q = 200$ kgf/cm se pot face aceleaşi constatări însă la alunecări peste 10% (fig. 8).

d) Cuplurile *3-3'* prezintă o creştere continuă a uzurii pe măsură ce creşte încărcarea şi gradul de alunecare; uzura fontei (deci a rolei cu viteze periferice mai mici) este în toate cazurile mai mare decît cea a epruvetei alunecătoare din oţel. Comparînd însă uzura probei din fontă din acest cuplu (*3'*) cu cea a probei *1'* din OLC 45, se constată că la încărcările de 150 şi 175 kgf/cm, uzura fontei este sensibil mai mică decît cea a oţelului, iar la 200 kgf/cm uzura pare să fie de acelaşi ordin de mărime (mai mică la alunecarea 10%, mai mare la alunecarea 15% şi egală la alunecarea 20%).

e) În ceea ce priveşte cuplul *4-4'* se constată că uzura fontei este mult mai mare decît cea a oţelului, crescînd cu încărcarea şi gradul de alunecare, în timp ce uzura probei de oţel creşte foarte puţin.

Din cele de mai sus rezultă că la o duritate de ordinul $HB = 200...230$, la încărcări pînă la 200 kgf/cm şi alunecări pînă la 20%, cuplul *2-2'* a dat rezultatele cele mai bune. Cuplul oţel/fontă prezintă o uzură mai redusă în comparaţie cu cuplul oţel/oţel, dar nu şi în raport cu cuplul fontă/oţel. În consecinţă cuplul *2-2'* poate fi recomandat pentru roţi dinţate supuse la solicitări reduse. Totodată se constată că Fmp are şi unele proprietăţi antifricţiune, deoarece epruvetele cu viteză periferică mai mică s-au uzat mai puţin.

În grupa a doua de probe s-au efectuat încercări pentru determinarea uzurii la epruvete călite, la durităţi ridicate. Condiţiile de lucru au fost cele arătate anterior.

La rostogolire pură nu s-au constatat uzuri sesizabile la nici unul din cuplurile de fontă sau oţel, încercate pentru 1000 m drum de frecare.

La rostogolire cu alunecare s-au încercat şase cupluri, la constituirea cărora s-a urmărit realizarea unor condiţii de contact cît mai apropiate de cele reale pentru transmisiile cu lanţ, în sensul că rola lanţului poate patina

sau aluneca pe flancul dintelui, cu grade — de alunecare sau patinare — diferite. Rezultatele sînt redate în fig. 9...11, pentru cuplurile cu duritate HB=320...360, cu încărcările de respectiv 150...175 şi 200 kgf/cm. Cuplurile încercate sînt următoarele: h) *1-1'* — Fmp pe OLC 45, HB=320...360, (b 1/b 2), i) *2-2'* — OLC 45 pe Fmp, HB = 320...360, (b 2/b 1).

În fig. 12...14 s-au redat rezultatele obţinute la cuplurile cu durităţi HB = 450...500 pentru epruvete din Fmp şi OLC 45 şi HRc = 57...64 pentru cele din OLC 15, la aceeaşi încărcare. S-au constituit următoarele cupluri: j) *3-3'* — Fmp pe OLC 15, HB=450...500, HRc=57...64, (c 1/d 2), k) *4-4'* — OLC 15 pe Fmp, HRc = 57...64, HB = 450...500, (d 2/c 1), l) *5-5'* — OLC 45 pe OLC 15, HB = 450...500, HRc=57...64, (c 2/d 2), m) *6-6'* — OLC 15 pe OLC 45, HRc=57...64, HB = 450...500, (d 2/c 2).

În fig. 9...11 se observă că în cuplurile *1-1'* şi *2-2'*, la duritatea HB = 320...360, uzura fontei este în toate cazurile mai mare decît la oţel, avînd valori acceptabile pînă la o alunecare de 10% pentru toate presiunile de contact.

Din diagramele prezentate în fig. 12...14 se observă că la perechea de cupluri *3-3'* şi *5-5'*, în toate cazurile, indiferent de încărcare şi gradul de alunecare, uzura fontei cu duritatea HB = 450...500 este inferioară celei a oţelului OLC 45 tratat la aceeaşi duritate. Remarcăm de asemenea că uzura epruvetei din OLC 15 este mai redusă în cazul cuplurilor din fontă decît în cazul celor din OLC 45.

La cuplurile *4-4'* şi *6-6'* se constată, de asemenea, că uzura fontei este mai redusă decît aceea a oţelului (cu excepţia probei cu Q = 150 kgf/cm şi patinare 15%, fig. 12). La aceste probe epruvetele din OLC 15 nu s-au uzat în nici unul din cupluri.

În ce priveşte scăderea uzurii la probele din oţel (OLC 45, curbele *5* şi *6*), cît şi a celor din fontă (curba *4'*), acest aspect poate fi explicat [2] ca fiind în legătură cu trecerea de la un tip de uzură la altul. La aceeaşi încărcare, cu creşterea vitezei de alunecare fenomenele de natură termică tind să înlocuiască pe cele de natură mecanică. În aceste condiţii intensitatea procesului de distrugere a stratului superficial (deci uzura acestuia) scade.

Este posibil ca în acest caz să avem de-a face cu trecerea din tipul de uzură de prindere de ordinul I în uzură termică, care se caracterizează printr-o intensitate de distrugere mai mică şi deci valori mai reduse pentru uzură.

Considerînd în ansamblu toate cuplurile tratate, se constată că pe măsură ce duritatea creşte, uzura fontei scade (probele *1-3*). Se remarcă de asemenea că pentru toate probele care lucrează în cuplu cu fonta ca suport de alunecare (V_2), uzura absolută este foarte redusă.

Din observaţiile de mai sus rezultă că în condiţiile de lucru fără ungere, fonta maleabilă perlitică se poate folosi ca material pentru roţile de lanţ precum şi la alte piese supuse la uzură, ce lucrează în condiţii analoge.

Aceste concluzii confirmă rezultatele obţinute la experimentările efectuate la bancul de probă şi în campania agricolă, pe roţi de lanţ, pinioane şi alte piese de uzură turnate din această fontă şi tratată în masă sau superficial la durităţile analizate.

4. Concluzii

Încercările experimentale efectuate în condiţii de laborator arată că în cazul cuplurilor netratate, o bună comportare la uzură o are cuplul OLC 45/Fmp, fapt ce permite folosirea Fmp ca material antifricţiune. Pentru aceasta este însă necesară efectuarea unor cercetări comparative cu alte materiale antifricţiune, în vederea stabilirii dinamicii procesului de uzură în funcţie de parametrii de lucru şi proprietăţile fizico-chimice ale mediului.

În ce priveşte cuplurile tratate, cercetările au arătat că în condiţiile de frecare uscată, pentru încărcări de 150; 175 şi 200 kgf/cm, cuplurile ce se pot forma cu OLC 15 (cu duritatea $HRc = 57...64$) şi Fmp (cu duritatea $HB = 450...500$) au uzura cea mai redusă.

Pentru obţinerea unor concluzii mai generale, cercetările se vor continua în condiţii de ungere şi în prezenţa abrazivelor.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanică agricolă
şi
Uzinele „Semănătoarea", Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Caubet J. J., *Théorie et pratique industrielle du frottement.* Paris, Dunod, 1964.
2. Kosteţki B. I., Preis G. A., Eliseev V. D., *Încercarea metalelor la uzură (metode şi maşini).* I. D. T., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).
3. Avram M., Brătescu C., Morait R., Ştefănescu Gh., *Utilizarea fontei maleabile perlitice în construcţia de maşini agricole.* I. D. T., Buc., 1966.
4. — *Contribuţii la studiul fontei maleabile perlitice.* Metalurgia, 1966, *4.*
5. *** *Malleable Iron Castings.* Malleable Founder's Society, Cleveland, Ohio, 1960.
6. Joseph C. F., *Pearlitic malleable Iron.* The British Foundryman, 1960, *2.*
7. Toropanov A. P., *Fonta maleabilă perlitică de antifricţiune cu conţinut sporit de siliciu.* Fişe SE, Ind. Constr. Maşini, **IX.**
8. Fauquembergue I., *La fonderie dans l'industrie automobile.* Fonderie, 1958, *153.*
9. Crudu I. M., *Maşină pentru cercetarea uzurii punctiforme adaptată şi la studiul frecării şi uzurii la rulmenţi axiali.* Constr. de Maşini, 1963, *7.*
10. Тененбаум М. М., *Износостойкость конструкционных материалов и деталей машин.* Машиностроение, М., 1966.
11. Lipson Ch., Colwell L. V., *Handbook of Mechanical Wear.* University of Michigan, 1961.
12. Johnson K. L., *Recent Development in the Theory of elastic Stresses: Their signifience in the Study of Surface Break Down.* Proc. of the Conf. on Lubrication and Weard, London, 1st — 3rd Oct., 1957.
13. Hamilton G. M., Goodman L. E., *The Stress Field Created by a Circular Sliding Contact.* J. Appl. Mech., Series **E,** June, 1966.

ESSAI D'USURE À QUELQUES COUPLES DE FONTE MALÉABLE PERLITIQUE ET D'ACIERS CARBON NON LUBRIFIÉS (I)

(Résumé)

On présente les résultats des essais à l'usure de quelques couples de fonte maléable perlitique (Fmp) et d'acier (OLC 15, OLC 45, STAS 880-60), traités à différentes durités.

Les essais sont effectuées sans lubrification dans les conditions de roulement ou roulement avec glisement 10; 15 et 20%, à une charge de 150; 175; 200 kgf/cm.

Les couples Fmp — Fmp, (dureté $HB = 200...230$) et les couples Fmp—OLC 15, (dureté $HB = 450...500$ pour FMP et $HRc = 57...64$ pour l'acier OLC 15) ont présenté la meilleure résistance à l'usure.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 621.7.01

DETERMINAREA COEFICIENŢILOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE LA BURGHIEREA OŢELURILOR ROMÎNEŞTI, STAS 600-65

DE

GH. CAŞLER, AL. RENER şi D. ZETU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

Lucrarea de faţă se integrează în cadrul tematicii generale a catedrei de maşini-unelte şi scule privind determinarea parametrilor din dinamica aşchierii în procesele de burghiere, folosind burghiele româneşti fabricate la Fabrica de scule, Rîşnov (F. S. R.).

În cadrul acestei lucrări se efectuează determinarea coeficienţilor C_P, C_M şi a exponenţilor x_P, y_P, x_M, y_M din relaţiile forţei axiale:

$$P = C_P d^{x_P} s^{y_P} \quad [\text{kgf}] \tag{1}$$

şi a momentului de torsiune:

$$M_t = C_M d^{x_M} s^{y_M} \quad [\text{kgfcm}], \tag{2}$$

în procesele de burghiere a următoarelor oţeluri cuprinse în STAS 600-65: OT 40-1, OT 45-1, OT 50-1, OT 55-1, OT 60-1, OT 40-2, OT 45-2, OT 50-2, OT 55-2, OT 60-2.

Datele experimentale s-au obţinut folosindu-se un dinamometru tip Paramonov modificat, proiectat şi executat în laboratorul catedrei, instalat pe o maşină de găurit cu coloană tip A2 („Înfrăţirea", Oradea), care a permis să se lucreze cu patru avansuri şi anume: $s_1 = 0{,}08$ mm/rot, $s_2 = 0{,}13$ mm/rot, $s_3 = 0{,}20$ mm/rot şi $s_4 = 0{,}31$ mm/rot. Burghiele folosite, cu diametrele: 7; 9; 12; 15; 17; 20 şi 25 mm, sînt produse de către F. S. R., şi au următoarele caracteristici: a) materialul — oţel rapid, b) canale lustruite, c) raportul dintre grosimea miezului şi diametru $\eta = d_m/d = 0{,}15$, constant pentru toate burghiele, d) unghiul $\omega = 30°$, e) metoda de ascuţire conică (procedeul Washborne) realizată pe un dispozitiv Kellemberger adaptat pe un polizor. Ascuţirile au respectat următoarea geometrie: $\alpha_{ex} = 12°$, $\psi = 55°$, $2\varkappa = 120°$, valori care se încadrează în prescripţiile STAS. Burghierea s-a efectuat menţinîndu-se valoarea vitezei de aşchiere între limitele 7...10 m/min, folosindu-se lichid de răcire-ungere 5% emulsie.

Ca metodică, pentru fiecare oţel cercetat s-au trasat două rînduri de drepte în coordonate dublu-logaritmice la s = const. (fig. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 şi 19) şi d = const. (fig. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 şi 20), atît pentru forţa axială cît şi pentru momentul de torsiune.

Dreptele reprezentînd variaţia forţei P funcţie de avansul s, la un anumit diametru de burghiu, permit să se determine exponentul y_P, în timp ce dreptele reprezentînd variaţia forţei P în funcţie de diametrul d, la diversele valori ale avansului s = const., permit deter-

minarea exponentului x_P. O situaţie analogă se obţine şi la determinarea exponenţilor din relaţia (2) a momentului de torsiune.

Cum fiecare dreaptă din diagramele unui material a permis să se cunoască fie valorile x_P, y_P, fie valorile x_M, y_M, s-a procedat apoi la determinarea valorilor medii ale exponenţilor (tabelul 1).

Tabelul 1

Nr. crt.	Oţelul	H_B kgf/mm²	P kgf			M_t kgfcm		
			x_P	y_P	C_P	x_M	y_M	C_M
1	OT 40-1	164	1,14	0,72	55	1,62	0,85	10,2
2	OT 45-1	163	1,30	0,77	42	1,82	0,82	5,6
3	OT 50-1	144	1,19	0,67	46	1,76	0,86	6,7
4	OT 55-1	148	1,18	0,76	52	1,76	0,88	7,6
5	OT 60-1	183	1,18	0,68	58	1,69	0,84	9,5
6	OT 40-2	195	1,06	0,69	68	1,74	0,84	7,4
7	OT 45-2	162	1,28	0,72	44	1,77	0,90	7,7
8	OT 50-2	167	0,98	0,69	85	1,69	0,81	7,7
9	OT 55-2	167	1,19	0,71	48	1,71	0,82	7,8
10	OT 60-2	167	1,20	0,75	59	1,69	0,81	9,0

Valorile medii ale constantei C_{P_m} s-au determinat folosind relaţiile:

$$(3) \qquad C_{P_m} = \frac{P}{d^{x_{P_m}} s^{y_P}}, \qquad (4) \qquad C_{P_m} = \frac{P}{d^{x_P} s^{y_{P_m}}}.$$

Fiecare relaţie a furnizat pentru un anumit material o valoare medie C_{P_m}; media acestor valori este redată în tabelul 1. Fiecare valoare C_{P_m} s-a calculat pentru un anumit material, introducînd în relaţii valorile P pentru $s = 1$ mm/rot, respectiv P pentru $d = 10$ mm. În mod analog s-au calculat şi valorile C_{M_m} (tabelul 1).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh., Rener Al., *Determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune şi a forţei axiale.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3-4*, p. 345.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE ET DES MOMENTS CONCERNANT LE PERÇAGE DES ACIERS ROUMAINS STANDARDISÉS, STAS 600-65

(Résumé)

On détermine les valeurs des paramètres C_P, x_P, y_P, C_M, x_M, y_M, pour les suivantes sortes d'acier: OT 40-1, OT 45-1, OT 50-1, OT 55-1, OT 60-1, OT 40-2, OT 45-2, OT 50-2, OT 55-2, OT 60-2.

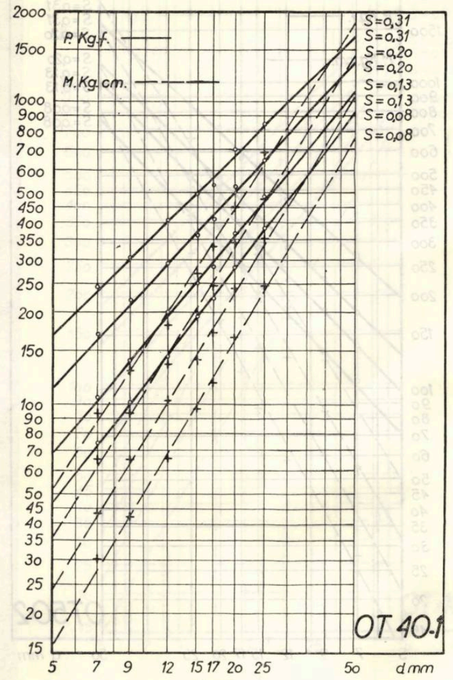


Fig. 1

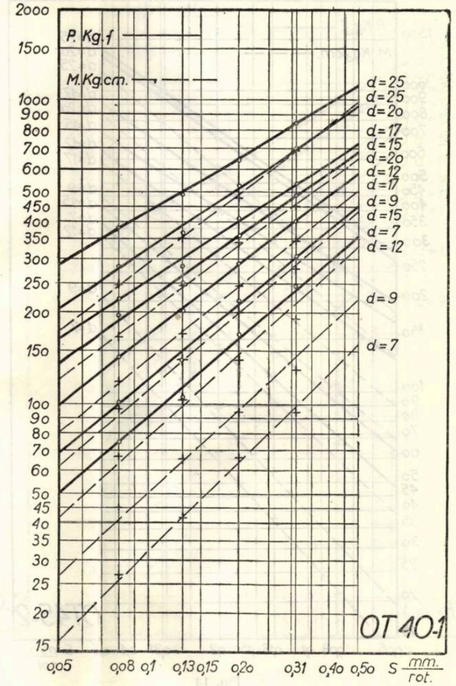


Fig. 2

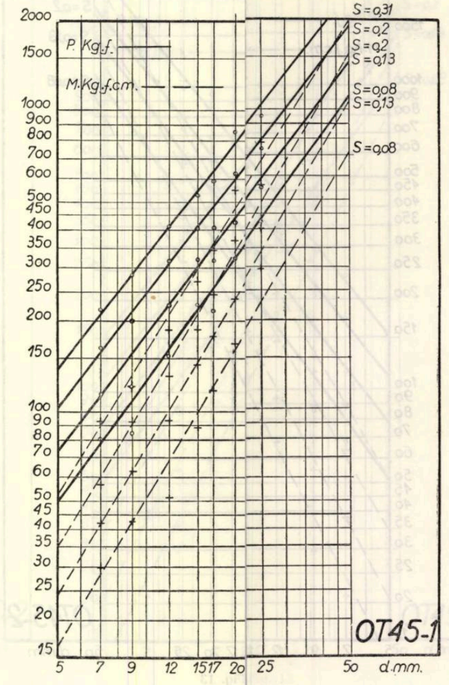


Fig. 3

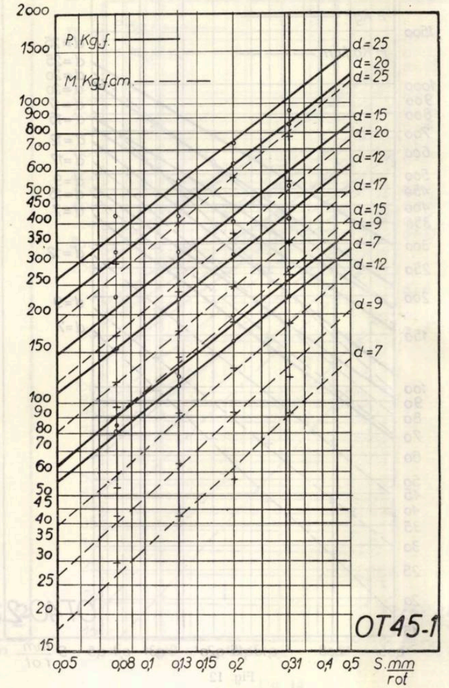


Fig. 4

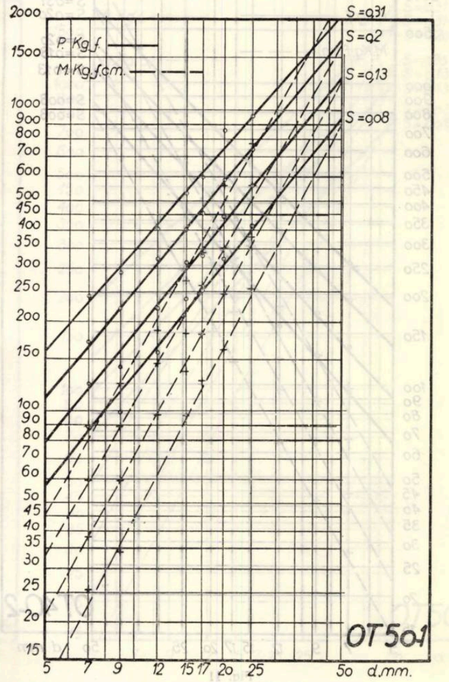


Fig. 5

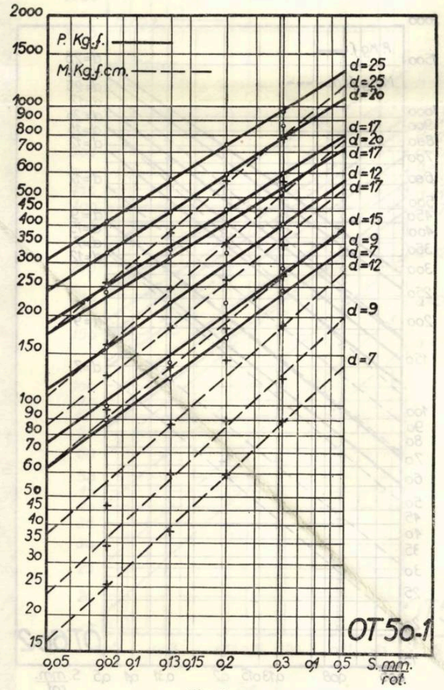


Fig. 6

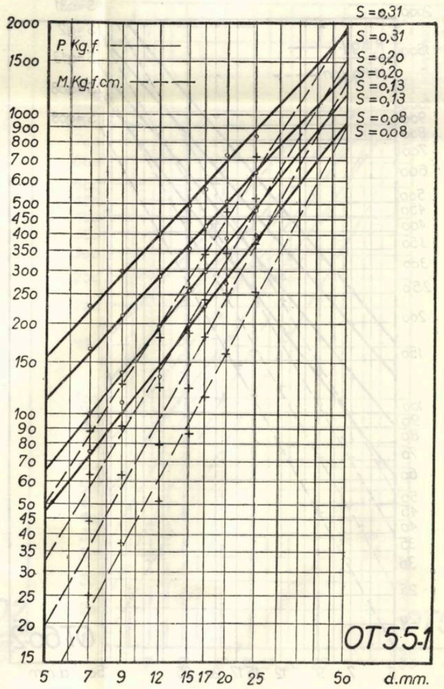


Fig. 7

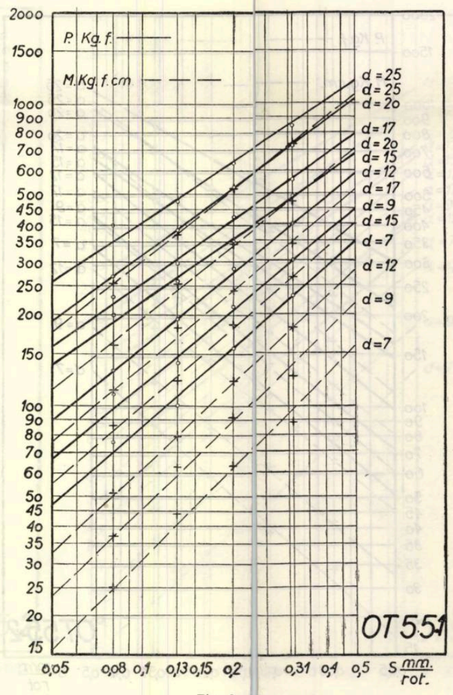


Fig. 8

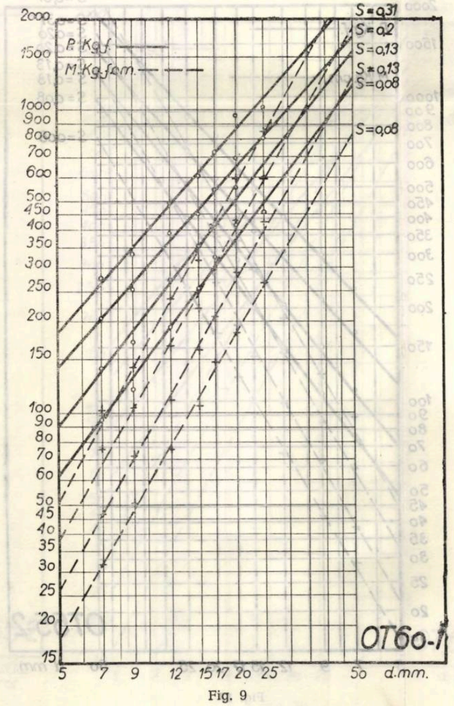


Fig. 9

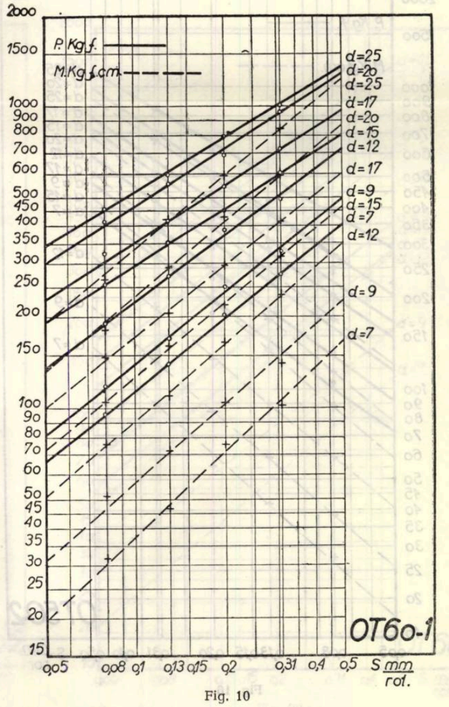


Fig. 10

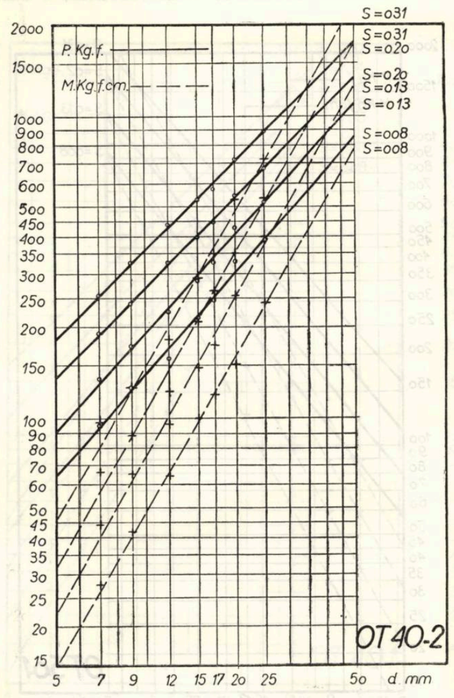


Fig. 11

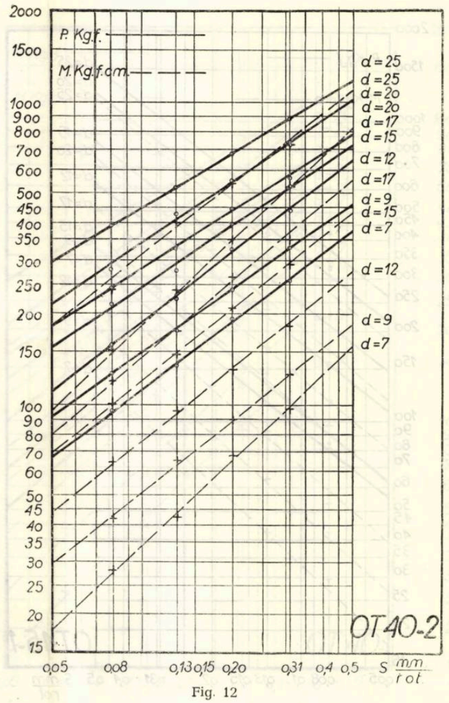


Fig. 12

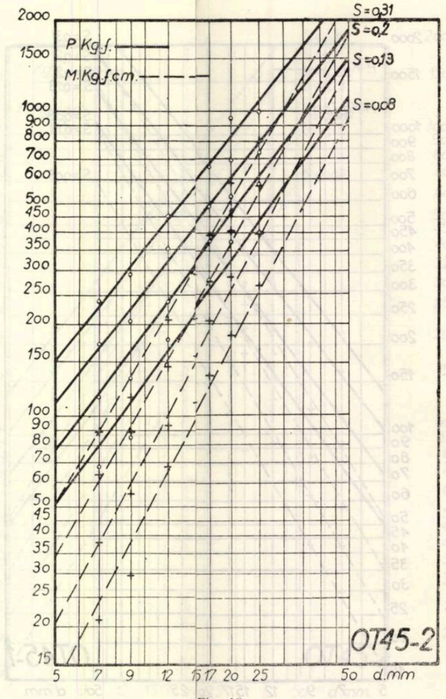


Fig. 13

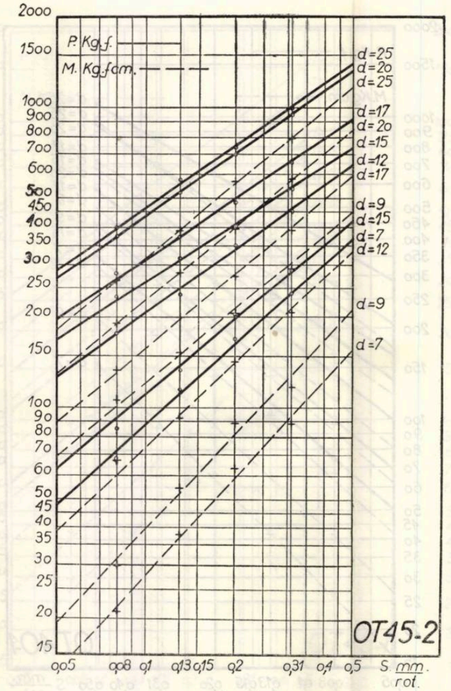


Fig. 14

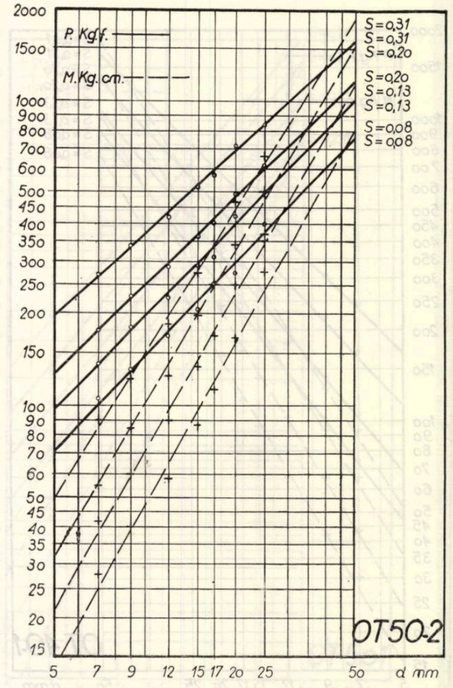


Fig. 15

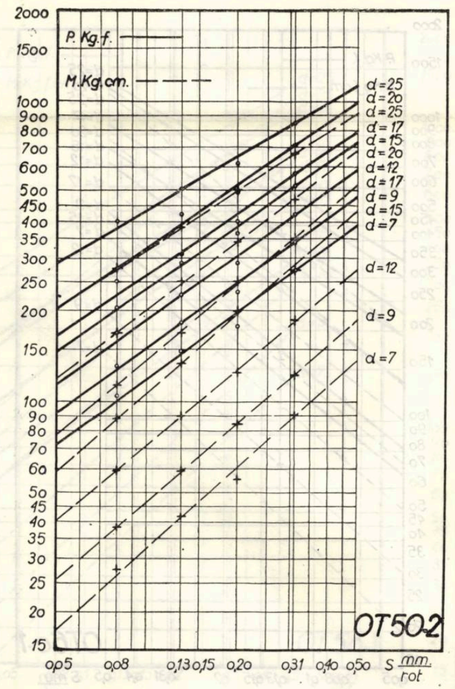


Fig. 16

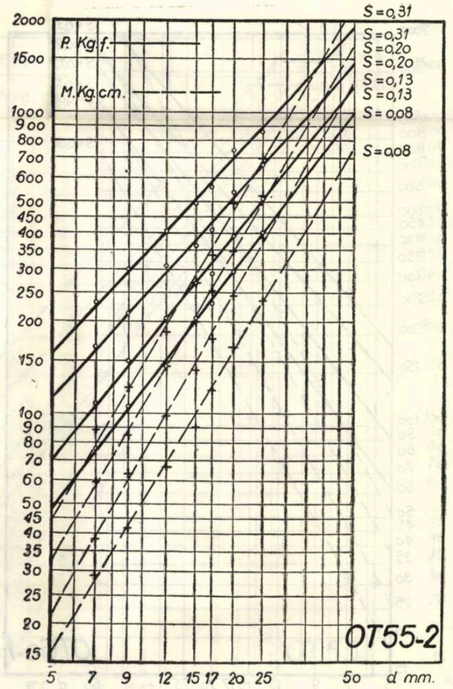


Fig. 17

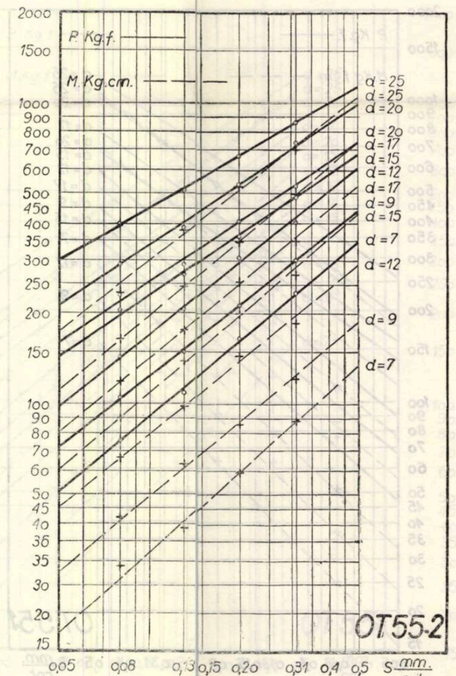


Fig. 18

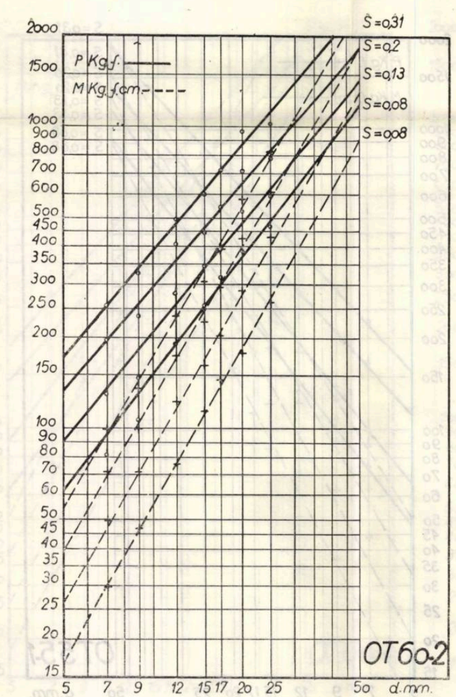


Fig. 19

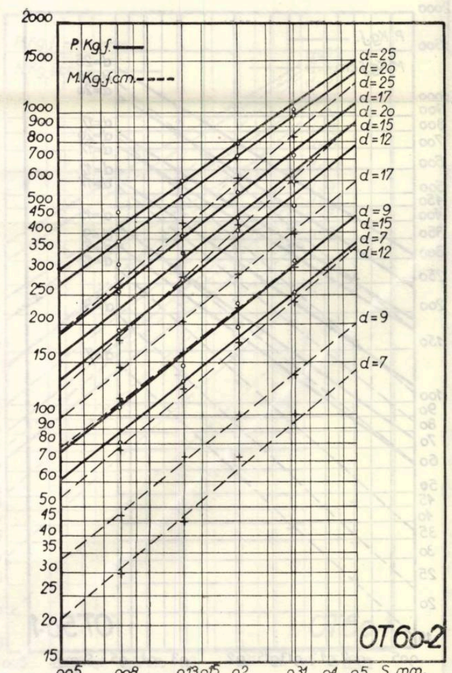


Fig. 20

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 338.062.214

CONTRIBUŢII LA CALCULUL DURATEI CICLULUI DE FABRICAŢIE ÎN CONSTRUCŢIA DE MAŞINI

DE

M. NICULAE, AURORA DIMA şi COSTACHE RUSU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Durata ciclului de fabricaţie a unui lot de piese identice, în construcţia de maşini, se determină cu relaţii corespunzătoare modului de circulaţie a pieselor: succesivă, paralelă, mixtă [3].

Pentru coordonarea proceselor neritmice în lucrările de construcţii s-au propus metode grafice şi analitice. Astfel prof. Baturin a căutat să rezolve această problemă printr-o metodă grafică, iar prof. Pertkovski indică o metodă analitică de calcul. T. Silion [1] propune o metodă de calcul a duratei ciclului, bazată pe un tabel.

În lucrarea [2] unul dintre autori aplică principiile de coordonare a proceselor neritmice în construcţia de maşini, cu observaţii, completări şi condiţii suplimentare specifice, dar tot numai pentru un singur lot de piese.

Calculul duratei ciclului de fabricaţie a unui singur lot de piese diferite, în ceea ce priveşte timpii pe operaţii, şi totodată determinarea termenelor de lansare în lucru a pieselor pe fiecare operaţie, respectîndu-se condiţiile: a) timpul de aşteptare a pieselor între operaţii să fie minimum posibil; b) durata ciclului de fabricaţie să fie cea mai scurtă; c) să fie asigurată continuitatea funcţionării fiecărui loc de muncă, se efectuează cu relaţia:

$$T_c = t_p + \sum_{2}^{n} t_m + \sum_{1}^{m-1} \Delta t_{\max}, \tag{a}$$

în care: t_p — durata de prelucrare a primei piese la toate operaţiile, $\sum_{2}^{n} t_m$ — suma timpilor de prelucrare a tuturor pieselor, începînd cu a doua, la ultima operaţie,

$$\Delta t_{\max} = \sum_{2}^{k} t_i - \sum_{1}^{k-1} t_j \tag{b}$$

— decalajul dintre două operaţii i şi j, şi asigură respectarea condiţiilor de mai sus.

2. În cele ce urmează se stabileşte o metodă de calcul a duratei ciclului de fabricaţie a unui număr N de loturi de piese diferite, în ceea ce priveşte: numărul de piese, numărul de operaţii şi durata timpilor pe operaţii.

Metoda propusă şi relaţiile de calcul stabilite asigură respectarea condiţiilor necesare unei organizări judicioase în timp a procesului de fabricaţie, amintite mai înainte.

Loturile de piese de care ne ocupăm se caracterizează prin următoarele particularităţi:

a) suma timpilor pe operaţii la toate piesele dintr-un lot, aceeaşi, dar nu aceeaşi la toate loturile;

b) numărul n de piese din lot, diferit de la lot la lot;

c) numărul operaţiilor, m, de prelucrare a pieselor din loturi, diferit;

d) duratele timpilor pe operaţii a pieselor din loturi, diferite: $t_{ik1} \neq t_{ik2} \neq \ldots \neq t_{ikl}$, unde: $i = 1,\ldots, m$ — numărul de operaţii la o piesă, $k = 1,\ldots, n$ — numărul de piese din lot, $l = 1,\ldots, N$ — numărul de loturi.

Schimbarea elementelor de structură (n, m, t) arătate conduce la considerarea mai multor variante şi anume:

Varianta I-a, caracterizată prin:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_l, \quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} = \ldots = \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta II-a, caracterizată prin:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_l, \quad n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \ldots \neq n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} = \ldots = \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta III-a, caracterizată prin:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_l, \quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} \neq \ldots \neq \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta IV-a, caracterizată prin:

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_k, \quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} = \ldots = \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta V-a caracterizată prin:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_l, \quad n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \ldots \neq n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} \neq \ldots \neq \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta VI-a, caracterizată prin:

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_k, \quad n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \ldots \neq n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} = \ldots = \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta VII-a, caracterizată prin:

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_k, \quad n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} \neq \ldots \neq \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

Varianta VIII-a, caracterizată prin:

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_k, \quad n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \ldots \neq n_l,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_{ik1} \neq \ldots \neq \sum_{k=1}^{k=n} t_{ikl}.$$

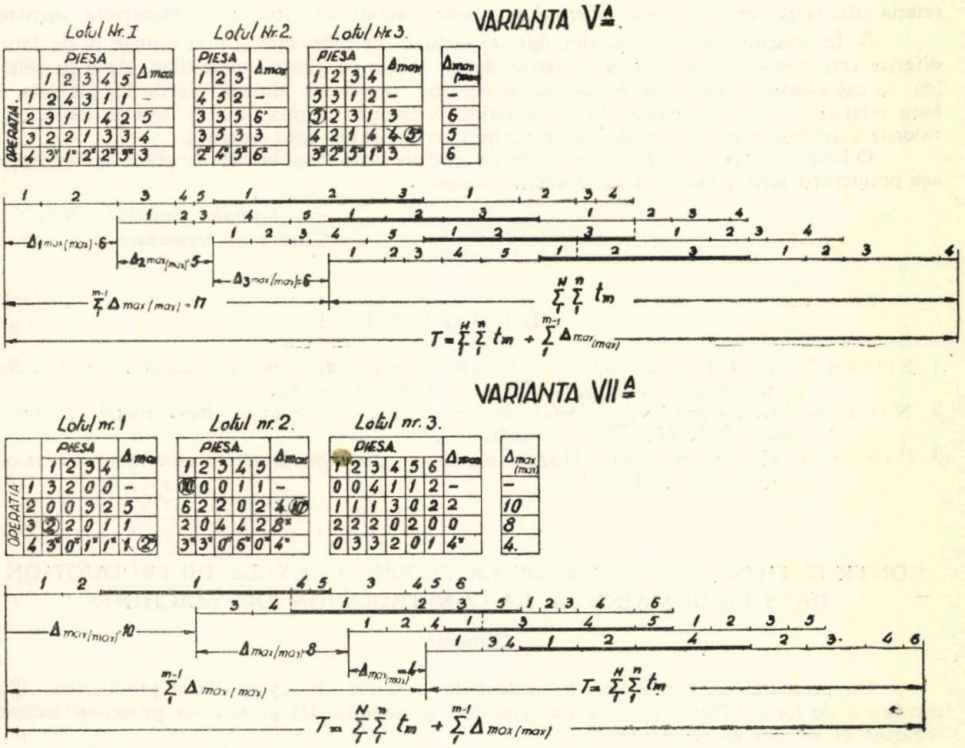


Fig. 1

Din studiul întreprins (a se vedea și graficele din fig. 1 ale variantelor V respectiv VII), s-a dedus relația de calcul valabilă pentru toate variantele prezentate, de forma:

$$T_c = \sum_{1}^{N} \sum_{1}^{n} t_m + \sum_{1}^{m-1} \Delta t_{\max(\max)}, \tag{c}$$

în care: $\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{n} t_{in}$ — suma timpilor de prelucrare a tuturor pieselor din toate loturile la ultima operaţie (suma numerelor ultimei linii din tabele, notate cu asterisc), Δt_{max} — decalajul maxim între două operaţii succesive, calculat cu relaţia:

$$\Delta t_{max} = \sum_{1}^{k} t_i - \sum_{1}^{k-1} t_j. \tag{d}$$

În cazul în care decalajul maxim calculat între două operaţii cu relaţia (d) este mai mic decît timpul de prelucrare a primei piese la operaţia i, ($\Delta t_{ij\max} < t_{i1}$), trebuie considerat drept decalaj maxim însăşi valoarea acestui timp (vezi numerele încercuite în exemplele prezentate).

$\Delta t_{max(max)}$ reprezintă decalajul cel mai mare dintre decalajele maxime calculate cu relaţia (d), între aceleaşi două operaţii succesive (notate cu asterisc în exemplele noastre).

3. În concluzie pentru calculul duratei ciclului de fabricaţie a unui număr N de loturi diferite este necesar mai întîi să se întocmească tabele cu timpii operaţiilor. Apoi cu relaţia (d) se calculează decalajele şi se înscrie în coloana respectivă numai valorile lor maxime. În baza relaţiei (c) se însumează direct valorile înscrise în ultima linie a tuturor tabelelor şi valorile cele mai mari ale decalajelor maxime dintre fiecare două operaţii.

Observaţie. Liniile verticale de pe grafice arată locul în care se realizează succesiunea prelucrării unei piese la două operaţii succesive.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de organizare şi planificare

BIBLIOGRAFIE

1. Silion T., *Contribuţii la studiul coordonării proceselor de lucru la lanţurile neritmice.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, V (IX), *3—4*, pp. 379—382.
2. Niculae M., *Cu privire la calculul duratei ciclului de fabricaţie.* Rev. metal. şi constr. maş, 1961, *11*, pag. 905—999.
3. Разумов И. М. и сотр., *Организация и планирование машиностроительных предприятий.* М., 1960.

CONTRIBUTIONS AU CALCUL DE LA DURÉE DU CYCLE DE PRODUCTION DANS LE DOMAINE DE LA CONSTRUCTION DES MACHINES

(Résumé)

On présente une méthode de calcul de la durée du cycle de la production, d'un nombre n de lots, différents en ce qui concerne le nombre des pièces, les processus technologiques et les durées respectives.

On détermine la durée de la production, la plus brève possible, en respectant la continuité de la circulation des pièces.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 3—4, 1967

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

D. C. 539.4

DISPLACEMENT FIELD AND STATE OF STRESS IN A HEAVY ELASTIC RING SUPPORTED AT A POINT (III)

BY

J. GOLECKI and J. WALCZAK

Paper presented at the scientific symposium on the theme „Up-to-date Problems in the Strenght of Materials in the Building of Machines", Faculty of Mechanics of the Cracow Polytechnic Institute, September 22—25, 1960

1. Introduction

In the present last part of our research work the authors expose subsequently formulas of displacements and stresses in an auxiliary problem nad displacements and stresses in a heavy ring supported at a point. The whole set of notations and numerical results presented in the previous two Notes published in the same *Bulletin* [1], [2], are used.

2. Formulas of Displacements and Stresses in an Auxiliary Problem

On the basis of formulas (2.1) [1], displacements and stresses of the problem will be put in form:

$$u_r^p = u_{r,1} + \frac{1}{2G} r \left\{ \frac{1}{2} \sigma_s s^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{A_{zn}(\mu')}{n(n-1)} A'_n s^n + \frac{n}{n+1} B'_n s^{n+2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{A_{w,n}(\mu')}{n(n+1)} C'_n q^n - \frac{n}{n-1} D'_n q^{n-2} \right] \cos n\varphi \right\},$$

(2.1$_1$)

$$v_\varphi^p = v_{\varphi,1} + \frac{1}{2G} r \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{B_{z,n}(\mu')}{n-1} A'_n s^n - \frac{n}{n+1} B'_n s^{n+2} - \right.$$

$$\left. - \frac{B_{w,n}(\mu')}{n+1} C'_n q^n - \frac{n}{n-1} D'_n q^{n-2} \right] \sin n\varphi,$$

$$\sigma_r^p = -\frac{1}{2}\sigma_s s^2 + \sigma_{r,1} + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)A_n' s^n + nB_n' s^{n+2} + (n-2)C_n' q^n + nD_n' q^{n-2}]\cos n\varphi,$$

$$(2.1_2)\quad \sigma_\varphi^p = \frac{1}{2}\sigma_s s^2 + \sigma_{\varphi,1} - \sum_{n=2}^{\infty}[(n-2)A_n' s^n + nB_n' s^{n+2} + (n+2)C_n' q^n + nD_n' q^{n-2}]\cos n\varphi,$$

$$\tau_{r,\varphi}^p = \tau'_{r\varphi,1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(A_n s^n + B_n' s^{n+2} - C_n' q^n - D_n' q^{n-2})\sin n\varphi,$$

where

$$(2.2)\quad \begin{cases} u'_{r,1} = -\dfrac{1}{2G} r[a_1' s(3-4\mu')\ln s + b_1' s^3 + (1-4\mu')c_1' q]\cos\varphi, \\ v'_{\varphi,1} = -\dfrac{1}{2G} r\{a_1' s[1-(3-4\mu')\ln s] + b_1' s^3 + (5-4\mu')c_1' q\}\sin\varphi, \\ \sigma'_{r,1} = [(3-2\mu')a_1' s + 2b_1' s^3 - 2c_1' q]\cos\varphi, \\ \sigma'_{\varphi,1} = -[(1-2\mu')a_1' s + 2b_1' s^3 + 6c_1' q]\cos\varphi, \\ \tau'_{r\varphi,1} = -[(1-2\mu)a_1' s - 2b_1' s^3 + 2c_1' q]\sin\varphi \end{cases}$$

and coefficients a_1', b_1', c_1', A_n', B_n', C_n', D_n' are determined by means of formulas (1.8), (1.9) [2].

In particular we determine distribution of displacements and stresses along the circle $r = R_0$, $(s = 1,\ q = x_0)$ and $r = R$, $(s = x_0,\ q = 1)$:

$$r = R_0$$

$$u_r^p = \frac{1}{2G} R\left\{\frac{1}{2}\sigma_s x_0 - x_0[b_1' + (1-4\mu')c_1' x_0]\cos\varphi - x_0\sum_{n=2}^{\infty}(A_n' + B_n' - C_n' x_0^n - D_n' x_0^{n-2})\cos n\varphi - x_0\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3-4\mu'}{n-1}A_n' - \frac{1}{n+1}B_n' + \frac{3-4\mu'}{n+1}C_n' x_0^n - \frac{1}{n-1}D_n' x_0^{n-2}\right)\cos n\varphi\right\},$$

$$v_\varphi^p = -\frac{1}{2G} R\left\{x_0[a_1' + b_1' + (5-4\mu')c_1' x_0]\sin\varphi + x_0\sum_{n=2}^{\infty}[A_n' + B_n' + C_n' x_0^n + D' x_0^{n-2}]\sin n\varphi - x_0\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3-4\mu'}{n-1}A_n' + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{n+1}B'_n-\frac{3-4\mu'}{n-1}C'_n x_0^n-\frac{1}{n-1}D'_n x_0^{n-2}\Big)\sin n\varphi\Big\},$$

$$\sigma_r^p=-\frac{1}{2}\sigma_s+[(3-2\mu')\,a'_1+2b'_1-2c'_1 x_0]\cos\varphi+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)\,A'_n+nB'_n+(n-2)\,C'_n x_0^n+nD'_n x_0^{n-2}]\cos n\varphi,$$

$$\sigma_\varphi^p=\frac{1}{2}\sigma_s-[(1-2\mu')\,a'_1+2b'_1+6c'_1 x_0]\cos\varphi- \tag{2.3$_2$}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}[(n-2)\,A'_n+nB'_n+(n+2)\,C'_n x_0^n+nD'_n x_0^{n-2}]\cos n\varphi,$$

$$\tau_{r\varphi}^p=-[(1-2\mu')\,a'_1-2b'_1+2c'_1 x_0]\sin\varphi+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}n\,(A'_n+B'_n-C'_n x_0^n-D'_n x_0^{n-2})\sin n\varphi.$$

$$r=R$$

$$u_r^p=\frac{1}{2G}R\Big\{\frac{1}{2}\sigma_s x_0^2-[a'_1 x_0(3-4\mu')\ln x_0+b'_1 x_0^3+(1-4\mu')\,c'_1]\cos\varphi-$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}[A'_n x_0^n+B'_n x_0^{n+2}-C'_n-D'_n]\cos n\varphi-\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{3-4\mu'}{n-1}A'_n x_0^n-$$

$$-\frac{1}{n+1}B'_n x_0^{n+2}+\frac{3-4\mu'}{n+1}C'_n-\frac{1}{n-1}D'_n\Big)\cos n\varphi\Big\},$$

$$v_\varphi^p=-\frac{1}{2G}R\{a'_1 x_0[1-(3-4\mu')\ln x_0]+b'_1 x_0^3+(5-4\mu')\,c'_1]\}\sin n\varphi- \tag{2.4$_1$}$$

$$-\frac{1}{2G}R\Big[\sum_{n=2}^{\infty}(A'_n x'_0+B'_n x_0^{n+2}+C'_n+D'_n)\sin n\varphi-$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{3-4\mu'}{n-1}A'_n x_0^n+\frac{1}{n+1}B'_n x_0^{n+2}-\frac{3-4\mu'}{n+1}C'_n-\frac{1}{n-1}D'_n\Big)\sin n\varphi\Big],$$

$$\sigma_r^p=-\frac{1}{2}\sigma_s x_0^2+[a'_1 x_0(3-2\mu')+2b'_1 x_0^3-2c'_1]\cos\varphi+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)\,A'_n x_0^n+nB'_n x_0^{n+2}+(n-2)\,C'_n+nD'_n]\cos n\varphi,$$

$$\sigma_{\varphi}^{p} = \frac{1}{2}\sigma_s x_0^2 - [a_1' x_0 (1 - 2\mu') + 2b_1' x_0^3 + 6c_1'] \cos\varphi -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} [(n-2) A_n' x_0^n + nB_n' x_0^{n+2} + (n+2) C_n' + nD_n'] \cos n\varphi,$$

(2.4$_2$)

$$\tau_{r\varphi}^{p} = -[a_1' (1 - 2\mu') x_0 - 2b_1' x_0^3 + 2c_1'] \sin\varphi +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} n (A_n' x_0^n + B_n' x_0^{n+2} - C_n' - D_n') \sin n\varphi.$$

Taking into account formulas (1.8)...(1.10) [2], after some transformation we reduce formulas (2.3), (2.4) to the form :

$$r = R_0$$

$$u_r^p = \frac{\sigma_s}{2G} R x_0 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma_s} [b_1' + (1 - 4\mu') c_1' x_0] \cos\varphi - \right.$$

$$- \frac{1}{2}(1 - x_0^2) \frac{\cos 2\varphi - x_0 \cos\varphi}{1 - 2x_0 \cos\varphi + x_0^2} - \frac{1}{\sigma_s} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3 - 4\mu'}{n-1} A_n' - \frac{1}{n+1} B_n' + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3 - 4\mu'}{n+1} C_n' x_0^n - \frac{1}{n-1} D_n' x_0^{n-2} \right) \cos n\varphi \right\},$$

$$v_{\varphi}^{p} = -\frac{\sigma_s}{2G} R x_0 \left\{ \frac{1}{\sigma_s} [a_1' + b_1' + (5 - 4\mu') c_1' x_0] \sin\varphi + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - x_0^2) \frac{\sin 2\varphi - x_0 \sin\varphi}{1 - 2x_0 \cos\varphi + x_0^2} + \frac{2}{\sigma_s} \sum_{n=2}^{\infty} (C_n' x_0^n + D_n' x_0^{n-2}) \sin n\varphi -$$

(2.5$_1$)

$$\left. - \frac{1}{\sigma_s} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3 - 4\mu'}{n-1} A_n' + \frac{1}{n+1} B_n' - \frac{3 - 4\mu'}{n+1} C_n' x_0^n - \frac{1}{n-1} D_n' x_0^{n-2} \right) \sin n\varphi \right\},$$

$$\frac{\sigma_r^p}{\sigma_s} = -\frac{1}{2} - x_0 \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi - x_0 \cos\varphi}{1 - 2x_0 \cos\varphi + x_0^2} +$$

$$+ \frac{x_0 (1 - x_0^2)}{2 (1 - 2x_0 \cos\varphi + x_0^2)^2} [(1 - x_0^2) \cos\varphi - 2 \cos 2\varphi (\cos\varphi - x_0)],$$

$$\frac{\sigma_{\varphi}^p}{\sigma_s} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\sigma_s} (b_1' + c_1' x_0) \cos\varphi + (1 - 2x_0^2) \frac{\cos 2\varphi - x_0 \cos\varphi}{1 - 2x_0 \cos\varphi + x_0^2} -$$

$$- \frac{x_0 (1 - x_0^2)}{2 (1 - 2x_0 \cos\varphi + x_0^2)^2} [(1 - x_0^2) \cos\varphi - 2 \cos 2\varphi (\cos\varphi - x_0)] +$$

$$+ 4x_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n (x_0) \cos n\varphi,$$

$$(2.5_2)\quad \frac{\tau_{\varphi}^{p}}{\sigma_s}=\frac{1}{2}(1-x_0^2)\sin\varphi\left[\frac{2(2\cos\varphi-x_0)}{1-x_0\cos\varphi+x_0^2}-x_0\frac{1-x_0^2-4\cos\varphi(\cos\varphi-x_0)}{(1-2x_0\cos\varphi+x_0^2)^2}\right],$$

and

$$r=R$$

$$u_r^p=\frac{\sigma_s}{2G}R\left\{\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{\sigma_s}[a_1' x_0(3-4\mu')\ln x_0+b_1' x_0^3+(1-4\mu')c_1']\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sigma_s}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3-4\mu'}{n-1}A_n' x_0^n-\frac{1}{n+1}B_n' x_0^{n+2}+\frac{3-4\mu'}{n+1}C_n'-\frac{1}{n-1}D_n'\right]\cos n\varphi\right\},$$

$$v_{\varphi}^{p}=-\frac{\sigma_s R}{2G}\left\{\frac{a_1'}{\sigma_s}x_0[1-(3-4\mu')\ln x_0]+\frac{b_1'}{\sigma_s}x_0^3+(5-4\mu')\frac{c_1'}{\sigma_s}\right\}\sin\varphi-$$

$$-\frac{\sigma_s R}{G}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sigma_s}(A_n' x_0^n+B_n' x_0^{n+2})\sin n\varphi+\frac{\sigma_s R}{2G}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sigma_s}\times$$

$$(2.6)\qquad \times\left(\frac{3-4\mu'}{n-1}A_n' x_0^n+\frac{1}{n+1}B_n' x_0^{n+2}-\frac{3-4\mu'}{n+1}C_n'-\frac{1}{n-1}D_n'\right)\sin n\varphi,$$

$$\sigma_r^p=\begin{cases}0\ , & \varphi\neq 0,\\ +\infty\ , & \varphi=0,\end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{\varphi}^{p}}{\sigma_s}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_0^2-\dfrac{4}{\sigma_s}(x_0^3 b_1'+c_1')\cos\varphi-\dfrac{1}{2}x_0^2\dfrac{\cos 2\varphi-\cos\varphi}{1-\cos\varphi}+\\ \qquad +4x_0^2\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(x_0)\cos n\varphi, & \varphi\neq 0,\\ 2x_0^2-\dfrac{4}{\sigma_s}(x_0^3 b_1'+c_1')+4x_0^2\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(x_0), & \varphi=0,\end{cases}$$

$$\tau_{r\varphi}^{p}=0.$$

Moreover, we shall also determine formulas for displacements and stresses along characteristic directions (diameters of the ring), and the formulas for stresses in characteristic points:

$$\varphi = 0$$

$$u_r^p = \frac{\sigma_s}{2G} R\left\{\frac{1}{2} s^2 q - \frac{1}{\sigma_s} q\left[a_1' s (3 - 4\mu') \ln s + b_1' s^3 + (1 - 4\mu') c_1' q\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma_s} q \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{A_{z,n}(\mu')}{n(n-1)} A_n' s^n + \frac{n}{n+1} B_n' s^{n+2} - \frac{A_{w,n}(\mu')}{n(n+1)} C_n' q^n - \frac{n}{n-1} D_n' q^{n-2}\right]\right\},$$

$$v_\varphi^p = 0,$$

$$\frac{\sigma_r^p}{\sigma_s} = -\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{\sigma_s}\left[(3 - 2\mu') a_1' s + 2b_1' s^3 - 2c_1' q\right] + \tag{2.7}$$

$$+ \frac{1}{\sigma_s} \sum_{u=2}^{\infty}\left[(n+2) A_n' s^n + n B_n' s^{n+2} + (n-2) C_n' q^n + n D_n' q^{n-2}\right],$$

$$\frac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s} = \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{\sigma_s}\left[(1 - 2\mu') a_1' s + 2b_1' s^3 + 6c_1' q\right] -$$

$$- \frac{1}{\sigma_s} \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-2) A_n' s^n + n B_n' s^{n+2} + (n+2) C_n' q^n + n D_n' q^{n-2}\right],$$

$$\tau_{r\varphi}^p = 0;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$u_r^p = \frac{\sigma_s}{2G} R\left\{\frac{1}{2} s^2 q - \frac{1}{\sigma_s} q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{A_{z,2k}(\mu')}{2k(2k-1)} A_{2k}' s^{2k} + \frac{2k}{2k+1} B_{2k}' s^{2k+2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{A_{w,2k}(\mu')}{2k(2k+1)} C_{2k}' q^{2k} - \frac{2k}{2k-1} D_{2k}' q^{2k-2}\right]\right\},$$

$$v_\varphi^p = -\frac{\sigma_s}{2G} R\left\{\frac{1}{\sigma_s} a_1' sq\left[1 - (3 - 4\mu') \ln s\right] + b_1' s^3 q + (5 - 4\mu') c_1' q^2 - \right. \tag{2.8$_1$}$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma_s} q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{B_{z,2k+1}(\mu')}{2k} A_{2k+1}' s^{2k+1} - \frac{2k+1}{2k+2} B_{2k+1} s^{2k+3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{B_{w,2k+1}(\mu')}{2k+2} C_{2k+1}' q^{2k+1} - \frac{2k+1}{2k} D_{2k+1}' q^{2k-1}\right]\right\},$$

$$\frac{\sigma_r'}{\sigma_s} = -\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{\sigma_s} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[(2k+2) A_{2k}' s^{2k} + 2k B_{2k}' s^{2k+2} + \right.$$

$$\left. + (2k+2) C_{2k}' q^{2k} + 2k D_{2k}' q^{2k-2}\right],$$

$$\frac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s} = \frac{1}{2}\, s^2 - \frac{1}{\sigma_s}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,[(2k-2)\,A'_{2k}\,s^{2k} + 2kB'_{2k}\,s^{2k+2} + \\ + (2k+2)\,C'_{2k}\,q^{2k} + 2kD'_{2k}\,q^{2k-2}],$$

$$(2.8_2)\qquad \frac{\tau_{r\varphi}^p}{\sigma_s} = -\frac{1}{\sigma_s}[(1-2\mu')\,a'_1\,s + 2b'_1\,s^3 + 2c'_1\,q] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,(2k+1)\,(A'_{2k+1}\,s^{2k+1} + B'_{2k+1}\,s^{2k+3} - C'_{2k+1}\,q^{2k+1} - \\ - D'_{2k+1}\,q^{2k-1});$$

$$\varphi = \pi$$

$$u_r^p = -\frac{\sigma_s}{2G}R\left\{\frac{1}{2}s^2\,q + \frac{1}{\sigma_s}[a'_1\,s\,(3-4\mu')\ln s + b'_1\,s^3 + (1-4\mu')\,c'_1\,q]\,q - \right. \\ - \frac{1}{\sigma_s}\,q\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{A_{z,n}(\mu')}{n(n-1)}A'_n\,s^n + \frac{n}{n+1}B'_n\,s^{n+2} - \right. \\ \left. \left. - \frac{A_{w,n}(\mu')}{n(n+1)}C'_n\,q^n - \frac{n}{n-1}D'_n\,q^{n-2}\right]\right\},$$

$$v_\varphi^p = 0,$$

$$(2.9)\qquad \frac{\sigma_r^p}{\sigma_s} = -\frac{1}{2}\,s^2 - \frac{1}{\sigma_s}[(3-2\mu')\,a'_1\,s + 2b'_1\,s^3 - 2c'_1\,q] + \\ + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,[(n+2)\,A'_n\,s^n + nB'_n\,s^{n+2} + (n-2)\,C'_n\,q^n + nD'_n\,q^{n-2}],$$

$$\frac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s} = \frac{1}{2}\,s^2 + \frac{1}{\sigma_s}[(1-2\mu')\,a'_1\,s + 2b'_1\,s^3 + 6c'_1\,q] - \\ - \frac{1}{\sigma_s}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,[(n-2)\,A'_n\,s^n + nB'_n\,s^{n+2} + (n+2)\,C'_n\,q^n + nD'_n\,q^{n-2}],$$

$$\tau_{r\varphi}^p = 0.$$

The points:

$$(2.10)\qquad \left\{\begin{array}{l} M_1\,(\varphi = 0,\ q = 1,\ s = x_0) \\ \sigma_r^p = +\infty,\quad \dfrac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s} = 2x_0^2 - 4\left(\dfrac{b'_1}{\sigma_s}\,x_0^3 + \dfrac{c'_1}{\sigma_s}\right) + 4x_0^2\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(x),\quad \tau_{r\varphi}^p = 0; \end{array}\right.$$

$$(2.11)\quad \begin{cases} M_2\,(\varphi=0,\ q=x_0,\ s=1) \\ \dfrac{\sigma_r^p}{\sigma_s}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3+2x_0-x_0^2}{1-x_0}, \\ \dfrac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s}=\dfrac{3}{2}(1+x_0)-4\left(\dfrac{b_1'}{\sigma_s}+\dfrac{c_1'}{\sigma_s}x_0\right)+4x_0^2\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n(x_0),\quad \tau_{r\varphi}^p=0; \end{cases}$$

$$(2.12)\quad \begin{cases} M_3\,(\varphi=\dfrac{\pi}{2},\ q=x_0,\ s=1), \\ \dfrac{\sigma_r^p}{\sigma_s}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+x_0^4}{(1+x_0^2)^2}, \\ \dfrac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-2x_0^2-x_0^4}{(1+x_0^2)^2}+4x_0^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\beta_{2k}(x_0), \\ \dfrac{\tau_{r\varphi}^p}{\sigma_s}=-\dfrac{1}{2}x_0(1-x_0^2)\dfrac{3+x_0^2}{(1+x_0^2)^2}; \end{cases}$$

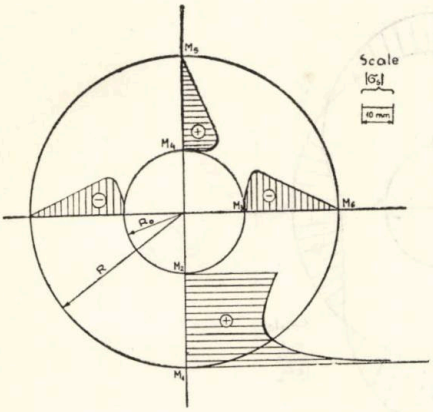
$$(2.13)\quad \begin{cases} M_4\,(\varphi=\pi,\ q=x_0,\ s=0) \\ \dfrac{\sigma_r^p}{\sigma_s}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{2-3x_0-x_0^2}{2(1+x_0)}, \\ \dfrac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s}=\dfrac{3}{2}(1-x_0)+4\left(\dfrac{b_1'}{\sigma_s}+\dfrac{c_1'}{\sigma_s}x_0\right)+4x_0^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\beta_n(x_0),\quad \tau_{r\varphi}^p=0; \end{cases}$$

$$(2.14)\quad \begin{cases} M_5\,(\varphi=\pi,\ q=1,\ s=x_0), \\ \sigma_r^p=0,\quad \dfrac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s}=4\left(\dfrac{b_0'}{\sigma_s}x_0^3+\dfrac{c_0'}{\sigma_s}\right)+4x_0^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\alpha_n(x_0),\quad \tau_{r\varphi}^p=0, \end{cases}$$

$$(2.15)\quad \begin{cases} M_6\,(\varphi=\dfrac{\pi}{2},\ q=1,\ s=x_0) \\ \sigma_r^p=0,\quad \dfrac{\sigma_\varphi^p}{\sigma_s}=x_0^2+4x_0^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\alpha_{2k}(x_0),\quad \tau_{r\varphi}^p=0. \end{cases}$$

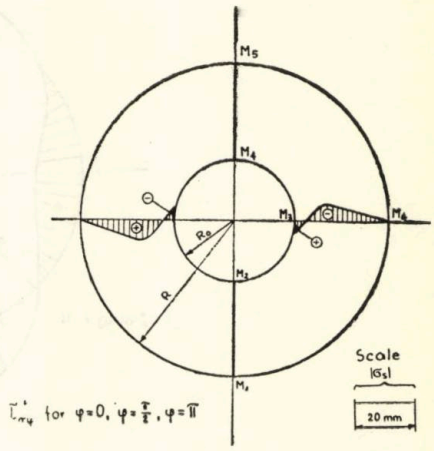
The derived formulae of stresses we shall interpret graphically assuming that $x_0=.4$, $\mu=.3$.

Assuming the plane state of stress and the plane state of strain we shall determine circumferencial stresses marked correspondingly with symbols $\sigma_\varphi^{p'}$, $\sigma_\varphi^{p''}$. The change of the ratio of the value $\Delta\sigma_\varphi^p=\sigma_\varphi^{p'}-\sigma_\varphi^{p''}$ to the absolute value of mean stress σ_s along the outer and inner boundary of the ring we can illustrate graphically assuming $\mu=.3$.



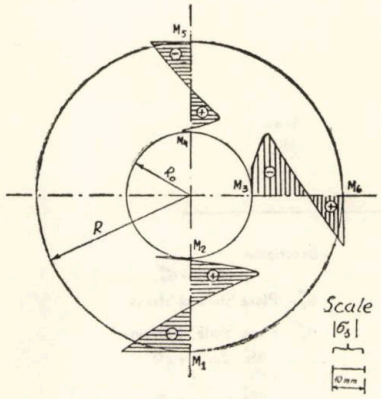
σ_r^p for $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\pi$

Fig. 1



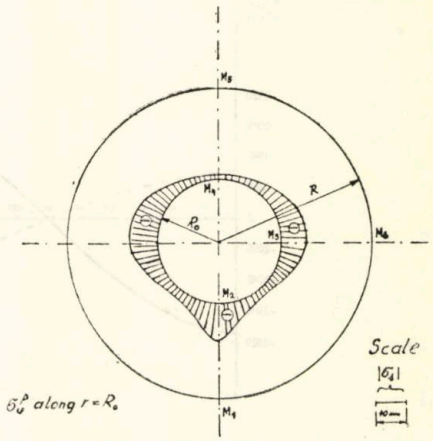
$\tau_{r\varphi}^p$ for $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\pi$

Fig. 2



σ_φ^p for $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\pi$

Fig. 3



σ_ϑ^p along $r=R_0$

Fig. 4

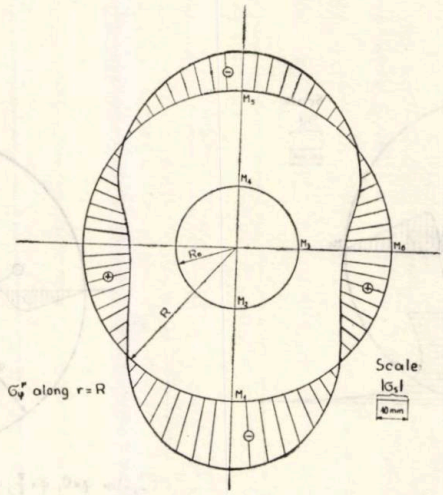

M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
R_o
R
$\sigma_\varphi^{p''}$ along r = R
Scale
$|\sigma_3|$
40 mm

Fig. 5

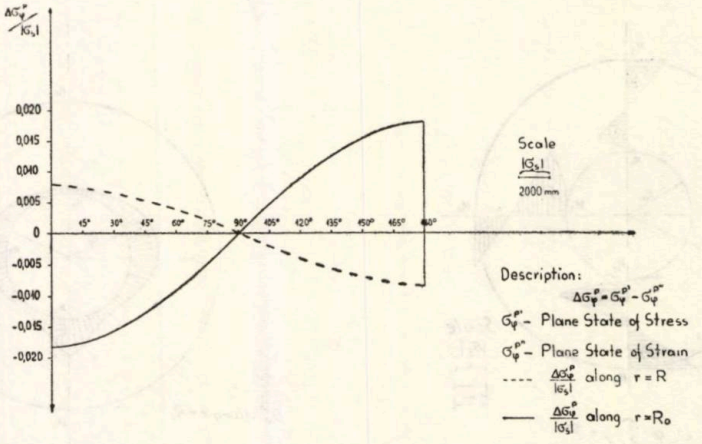

$\frac{\Delta\sigma_\varphi^p}{|\sigma_3|}$
0,020
0,015
0,010
0,005
0
-0,005
-0,010
-0,015
-0,020
15° 30° 45° 60° 75° 90° 105° 120° 135° 150° 165° 180°
Scale
$|\sigma_3|$
2000 mm
Description:
$\Delta\sigma_\varphi^p = \sigma_\varphi^{p'} - \sigma_\varphi^{p''}$
$\sigma_\varphi^{p''}$ - Plane State of Stress
$\sigma_\varphi^{p''}$ - Plane State of Strain
---- $\frac{\Delta\sigma_\varphi^p}{|\sigma_3|}$ along r = R
—— $\frac{\Delta\sigma_\varphi^p}{|\sigma_3|}$ along r = R_o

Fig. 6

On the basis of the graphs (Fig. 6) we deduce that difference between the values of circumferencial stresses $\sigma_\varphi^{p'}$ and $\sigma_\varphi^{p''}$ is of diminutive value and may be neglected at calculation.

3. Displacements and Stresses in a Heavy Ring Supported at a Point

By summing up displacements and stresses derived for the heavy solid disc, together with displacements determined in the auxiliary problem, we shall obtain solution of the propounded problem:

$$(3.1)\quad \begin{cases} u_r = u_r^k + u_r^p, & v_\varphi = v_\varphi^k + v_\varphi^p, \\ \sigma_r = \sigma_r^k + \sigma_r^p, & \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^k + \sigma_\varphi^p, \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}^k + \tau_{r\varphi}^p. \end{cases}$$

Particularly in the characteristic points, the formulas for stresses will take form:

$$(3.2)\quad \begin{cases} M_1\,(\varphi = 0,\ q = 1,\ s = x_0)\,^{1)} \\ \sigma_r = \sigma_s\,(1 - x_0^2)\left[\dfrac{1}{2} - \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x\,(x - \cos\varphi)}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}\right] = \begin{cases} 0, & \varphi \neq 0, \\ -\infty, & \varphi = 0, \end{cases} \\ \sigma_\varphi - \text{indeterminate}, \quad \tau_{r\varphi} = 0; \end{cases}$$

$$(3.3)\quad \begin{cases} M_2\,(\varphi = 0,\ q = x_0,\ s = 1) \\ \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0, \\ \dfrac{\sigma_\varphi}{\sigma_s} = 1 + x_0 - 4\left(\dfrac{b_1'}{\sigma_s} + \dfrac{c_1'}{\sigma_s}x_0\right) + 4x_0^2\sum\limits_{k=2}^{\infty}\beta_n\,(x_0); \end{cases}$$

$$(3.4)\quad \begin{cases} M_3\,(\varphi = \dfrac{\pi}{2},\ q = x_0,\ s = 1) \\ \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0, \\ \dfrac{\sigma_\varphi}{\sigma_s} = 1 + 4x_0^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\beta_{2k}\,(x_0); \end{cases}$$

$$(3.5)\quad \begin{cases} M_4\,(\varphi = \pi,\ q = x_0,\ s = 1), \\ \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0, \\ \dfrac{\sigma_\varphi}{\sigma_s} = 1 - x_0 - \dfrac{4}{\sigma_s}(b_1' + c_1'x_0') + 4x_0^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\beta_n\,(x_0); \end{cases}$$

[1]) Compare with part I [1].

$$(3.6)\quad \begin{cases} & M_5\,(\varphi=\pi,\ q=1,\ s=x_0) \\ \sigma_r=0, \quad \tau_{r\varphi}=0, & \dfrac{\sigma_\varphi}{\sigma_s}=4\left(x_0^3\dfrac{b'}{\sigma_s}+\dfrac{c_1'}{\sigma_s}\right)+4x_0^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\alpha_n\,(x_0)\,; \end{cases}$$

$$(3.7)\quad \begin{cases} & M_6\,(\varphi=\dfrac{\pi}{2},\ q=1,\ s=x_0) \\ \sigma_r=0, \quad \tau_{r\varphi}=0, & \dfrac{\sigma_\varphi}{\sigma_s}=x_0^2\left[1+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\alpha_{2k}\,(x_0)\right]. \end{cases}$$

The obtained formulae we shall interpret in the particular case $x_0=.4$ $\mu=.3$, tabulating the values of stresses, for plane state of stress, in the characteristic points (table 1).

Moreover, we shall graphically interpret the change of the total strain σ_0, along the inner boundary of the ring, in case of the plane state of stress (Fig. 7).

Table 1

Characteristic points	$-\frac{1}{\sigma_s}\sigma_r$	$-\frac{1}{\sigma_s}\sigma_\varphi$	$-\frac{1}{\sigma_s}\tau_{r\varphi}$
M_1	$-\infty$	indeterminate	.0000
M_2	.0000	− .5157	.0000
M_3	.0000	− 1.7791	.0000
M_4	.0000	+ .1697	.0000
M_5	.0000	− 1.2486	.0000
M_6	.0000	+ 1.5584	.0000

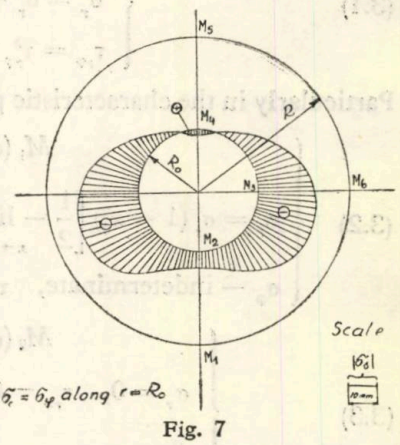


Fig. 7

Received the 15 VIII 1963

Academy of Mining and Metallurgy, Cracow
Polytechnic Institute, Cracow,
Poland

REFERENCES

1. Golecki J., Walczak J., *Displacement Field and State of Stress in a Heavy Elastic Ring Supported at a Point* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (VIII)**, *3–4*, pp. 337–354.
2. — *Displacement Field and State of Stress in a Heavy Elastic Ring Supported at a Point* (II). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1–2*, pp. 479–482.
3. Golecki J., *Boundary Value Problems for Elastic Circular Rings*. Arch. Mech. Stosowanej, 1956, **VIII**.

CÎMPUL DE DEPLASĂRI ŞI STAREA DE TENSIUNE ÎNTR-UN INEL ELASTIC GREU, SPRIJINIT ÎNTR-UN PUNCT (III)

(Rezumat)

Autorii, folosind notaţiile şi rezultatele stabilite în două note anterioare proprii, publicate în acelaşi *Buletin* [1], [2], stabilesc formule pentru calculul deplasărilor şi tensiunilor într-un inel elastic greu, sprijinit într-un punct.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 624.07

DYNAMIC ANALYSIS OF MULTI-LEVEL GUYED TOWERS SUBJECT TO WIND ACTION (I)

BY

KOJI MIZUHATA

1. Introduction

In this paper and in a subsequent one to be published in the same *Bulletin*, the author, starting from his results presented at the Thirteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, considers the shaft of a guyed tower to be a continuous beam-column lying on bilineary deflected supports at the guy levels. Herein, the guyed cables at each guy level give the shaft a horizontal reaction, an axial force, and a concentrated moment of nonlinear type. The wind load is assumed to be a rectangular or triangular pulse with respect to time and to be constant along a span. Then, the differential equations of the flexural vibrations of the shaft have been solved by means of the finite difference method and numerically calculated for a single-level guyed tower by using the IBM 7074. The relationships of the deflection and the bending moment to time and height for several combinations of the magnitude of the wind shocks and stiffness of the guyed cables are shown in diagrams. Allso, the dynamic results are compared with the static ones [1]).

2. Statement of the Problem

A guyed tower is composed of a main mast hinged at the bottom and some guyed cables connected to the main mast at some guy levels as shown in Fig. 1. Although the natural wind varies with time, guyed towers have never been solved dynamically before. Therefore, dynamic analysis of guyed towers is carried out. As in the most recent static analysis by F. H. Hull

1) The author underlines a very interesting set of results obtained by A. Şesan and his pupils [7] in relation with their research work concerned with Dynamic Analysis of Multi-Level Guyed Towers and various Buildings subject to artificially produced seismological Actions.

[1], in this paper the shaft is considered to be a continuous beam-column on nonlinearly deflected supports at the guy levels as shown in Fig. 2. Herein, to simplify the problem, this continuous beam-column is assumed to have a uniform cross-section, a constant weight for unit lenght, and a constant moment of inertia in each span and a constant Young's modulus for all spans. The guyed cables are arranged in a symmetric pattern on the plan and the wind blow is assumed to be acting perpendicular to the

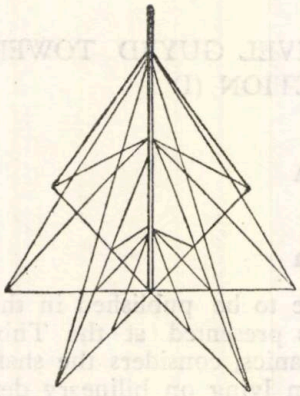


Fig. 1.—Typical multi-level guyed tower [2].

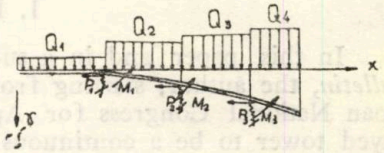


Fig. 2. — Multi-level guyed tower shaft and loading after simplifying assumptions.

tower face. In this case, the external loads on the shaft are the axial load due to the dead weight plus ice and the transverse wind load which is a function of time and height. The internal loads are the axial and lateral loads at the guy levels by the reactions of the guys and the concentrated moment at the guy levels by eccentric cable pulls, which are all nonlinear functions of lateral deflections of the tower at the guy levels shown in Fig. 3. As the first step of the analysis, these nonlinear functions are approximated by the bilinear functions shown in Fig. 4. Since the axial load by the cables at a guy level is much larger than the distributed axial load due to the dead weight plus ice, the axial load is assumed to act concentratedly at the guy level. In this work, the distribution of the wind pressure with heigt is taken from [3], that is $q_h = c_h \times q$, where $q = 0.00256\, V^2$ (lb/ft^2) and $c_h = (h/50)^{2/5}$. The variation in time refers to [5]. From the data in [5], a possible wind velocity increase is from 0.5 V to V in 1 sec. This would correspond to wind force increase from 0.2 Q to Q in 1 sec. For practical purposes, this may be approximated by a linear increase from zero to Q in 1 sec. In this paper, however, duration of a wind load is chosen to be 1.6 sec., because of uncertainty of the wind behavior, des-

creteness of the time increment in the numerical calculation, and comparison with the natural period of the shaft. In addition to the triangular pulse, the rectangular pulse of the same duration is used for comparison (Fig. 5). Actual records of wind pressure can be applied to this method[2]).

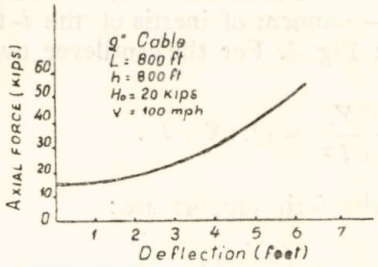


Fig. 3. — Axial force at a guy level vs. deflection.

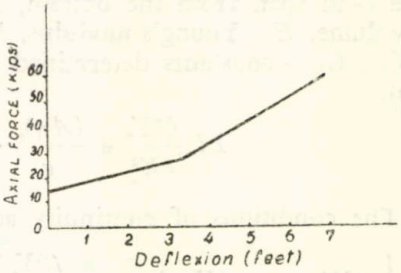


Fig. 4. — Bilinearized relationship between axial force at a guy level and deflection.

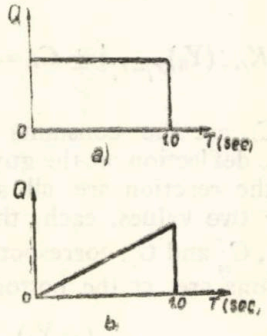


Fig. 5. — Wind load time used in this paper.

3. Fundamental Differential Equation

Consider the continuous beam-column with n spans in Fig. 2. It is simply supported on $n-1$ intermediate nonlinear deflected supports and with a free end at the right end. Taking the origin of coordinates at the left end of each span, the differential equation governing the transverse vibration of the beam-column subjected to the axial force P_i and the lateral force $Q_i(X_i, T)$ is

[2]) Very interesting and important results concerned with Wind Effects on Building and Structures are to be found in the Proceedings of the conference held at the National Physical Laboratory, Teddington [6].

$$(1)\qquad EI_i\frac{\partial^4 Y_i}{\partial X_i^4}+\left(\sum_{l=1}^{n}P_l\right)\frac{\partial^2 Y_i}{\partial X_i^2}+\frac{(A\gamma)_i}{g}\cdot\frac{\partial^2 Y_i}{\partial T^2}=Q_i(X_i,T)$$

for the i-th span [4], $(i\neq n)$, where $P_l=K_{pl}|(Y_l)_{X_l=L_l}|+C_{pl}$ and L_i—length of the i-th span from the bottom, A— cros-sectional area, γ— weight per unit volume, E— Young's modulus, I_i— moment of inertia of the i-th span, and K_{pl}, C_{pl}— constants determined in Fig. 4. For the cantilever overhang, $(i=n)$,

$$(2)\qquad EI_n\frac{\partial^4 Y_n}{\partial X_n^4}+\frac{(A\gamma)_n}{g}\cdot\frac{\partial^2 Y_n}{\partial T^2}=Q_n(X_n,T).$$

The conditions of continuity at the i-th support are:

$$(3)\qquad \begin{cases} (Y_i)_{X_i=L_i}=(Y_{i+1})_{X_{i+1}=0},\ \left(\dfrac{\partial Y_i}{\partial X_i}\right)_{X_i=L_i}=\left(\dfrac{\partial Y_{i+1}}{\partial X_{i+1}}\right)_{X_{i+1}=0}, \\ -EI_i\left(\dfrac{\partial^2 Y_i}{\partial X_i^2}\right)_{X_i=L_i}-K_{mi}|(Y_i)_{X_i=L_i}|\mp C_{mi}=-EI_{i+1}\left(\dfrac{\partial^2 Y_{i+1}}{\partial X_{i+1}^2}\right)_{X_{i+1}=0}, \\ -EI_i\left(\dfrac{\partial^3 Y_i}{\partial X_i^3}\right)_{X_i=L_i}+K_{ri}|(Y_i)_{X_i=L_i}|\pm C_{ri}=-EI_{i+1}\left(\dfrac{\partial^3 Y_{i+1}}{\partial X_{i+1}^3}\right)_{X_{i+1}=0} \end{cases}$$

where K_{mi}, K_{ri}, C_{mi} and C_{ri} are the constants measured in Fig. 4. Since the relationships between the deflection at the guy level and the axial force, the bending moment, and the reaction are all assumed to be bilinear, K_{pi}, K_{mi}, C_{pi}, C_{mi} and C_{ri} have two values, each, that is, K_{pi}, K'_{pi}, K_{mi}, K'_{mi}, K_{ri}, K'_{ri}, C_{pi}, C'_{pi}, C_{mi}, C'_{mi}, C_{ri} and C'_{ri} corresponding to two linear branches.

The boundary conditions are, at the bottom,

$$(4)\qquad (Y_1)_{X_1=0}=0,\quad -EI_1\left(\frac{\partial^2 Y_1}{\partial X_1^2}\right)_{X_1=0}=0,$$

and at the top,

$$(4')\qquad -EI_n\left(\frac{\partial^2 Y_n}{\partial X_n^2}\right)_{X_n=L_n}=0,\quad -EI_n\left(\frac{\partial^3 Y_n}{\partial X_n^3}\right)_{X_n=L_n}=0.$$

The initial conditions may have various combinations, but, in this paper, the initial deflection and the initial velocity are assumed to be zero for all spans as the primary analysis, that is,

$$(5)\qquad (Y_i)_{T=0}=0,\quad \left(\frac{\partial Y_i}{\partial T}\right)_{T=0}=0.$$

In order to simplify and generalize the problem, the above differential system are non dimensionalized by introducing the following new variables, parameters, and constants:

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_i=\dfrac{X_i}{L_i},\quad y_i=\dfrac{Y_i}{L_i},\quad t=\dfrac{T}{L_i^2\sqrt{(A\gamma/EIg)}},\quad q_i(x_i,t)=\dfrac{1}{EI_i}Q_i(X_i,T),\\[2ex]
k_{pi}=\dfrac{K_{pi}L_i^3}{EI_i},\quad k_{mi}=\dfrac{K_{mi}L_i^2}{EI_i},\quad k_{ri}=\dfrac{K_{ri}L_i^3}{EI_i},\quad c_{pi}=\dfrac{C_{pi}L_i^2}{EI_i},\quad c_{mi}=\dfrac{C_{mi}L_i}{EI_i},\\[2ex]
c_{ri}=\dfrac{C_{ri}L_i^2}{EI_i},\quad a_i=\dfrac{(A\gamma/EI)_i}{(A\gamma/EI)_1},\quad e_i=\dfrac{I_{i+1}}{I_i},\quad l_i=\dfrac{L_{i+1}}{L_i}.
\end{array}\right. \tag{6}
$$

In the case of $n=4$, for example, the nondimensional differential system appears as below:

$$
\left\{\begin{array}{l}
(y_1)_{x_1=0}=0,\ \left(\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\right)_{x_1=0}=0,\ \dfrac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4}+[k_{p1}|(y_1)_{x_1=1}|+k_{p2}|(y_2)_{x_2=1}|+\\
\qquad +k_{p3}|(y_3)_{x_3=1}|+c_{p_1}+c_{p_2}+c_{p_3}]\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=q_1(x_1,t),\\
(y_1)_{x_1=1}=l_1(y_2)_{x_2=0},\ \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=1}=\left(\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=0},\ \left(\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\right)_{x_1=1}-\left(\dfrac{e_1}{l_1}\right)\left(\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\right)_{x_2=0}+\\
+k_{m1}(y_1)_{x_1=1}\pm c_{m1}=0,\left(\dfrac{\partial^3 y_1}{\partial x_1^3}\right)_{x_1=1}-\left(\dfrac{e_1}{l_1^2}\right)\left(\dfrac{\partial^3 y_2}{\partial x_2^3}\right)_{x_2=0}-k_{r1}(y_1)_{x_1=1}\mp c_{r1}=0,\\
\dfrac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4}+[k_{p2}|(y_2)_{x_2=1}|+k_{p3}|(y_3)_{x_3=1}|+c_{p2}+c_{p3}]\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}+a^2\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=q_2(x_2,t),\\
(y_2)_{x_2=1}=l_2(y_3)_{x_3=0},\quad \left(\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=1}=\left(\dfrac{\partial y_3}{\partial x_3}\right)_{x_3=0},\\
\left(\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\right)_{x_2=1}-\left(\dfrac{e_2}{l_2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2}\right)_{x_3=0}+k_{m2}(y_2)_{x_2=1}\pm c_{m2}=0,\\
\left(\dfrac{\partial^3 y_2}{\partial x_2^3}\right)_{x_2=1}-\left(\dfrac{e_2}{l_2^2}\right)\left(\dfrac{\partial^3 y_3}{\partial x_3^3}\right)_{x_3=0}-k_{r2}(y_2)_{x_2=1}\mp c_{r2}=0,\\
\dfrac{\partial^4 y_3}{\partial x_3^4}+[k_{p3}|(y_3)_{x_3=1}|+c_{p3}]\dfrac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2}+a_3\dfrac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}=q_3(x_3,t),(y_3)_{x_3=1}=l_3(y_4)_{x_4=0},\\
\left(\dfrac{\partial y_3}{\partial x_3}\right)_{x_3=1}=\left(\dfrac{\partial y_4}{\partial x_4}\right)_{x_4=0},\quad \left(\dfrac{\partial y_3}{\partial x_3}\right)_{x_3=1}-\left(\dfrac{e_3}{l_3}\right)\left(\dfrac{\partial^2 y_4}{\partial x_4^2}\right)_{x_4=0}+k_{m3}(y_3)_{x_3=1}\pm c_{m3}=0,\\
\left(\dfrac{\partial^3 y_3}{\partial y_3^3}\right)_{x_3=1}-\left(\dfrac{e_3}{l_3^2}\right)\left(\dfrac{\partial^3 y_4}{\partial x_4^3}\right)_{x_4=0}-k_{r3}(y_3)_{x_3=1}\pm c_{r3}=0,\\
\dfrac{\partial^4 y_4}{\partial x_4^4}+a_4\dfrac{\partial^2 y_4}{\partial t^2}=q_4(x_4,t),\quad \left(\dfrac{\partial^2 y_4}{\partial x_4^2}\right)_{x_4=1}=0,\quad \left(\dfrac{\partial^3 y_4}{\partial x_4^3}\right)_{x_4=1}=0.
\end{array}\right. \tag{7}
$$

In our next Note we shall present: Solution of the Differential System and the Numerical Results; Discussion of the Results and Conclusions.

Received the 20 X 1966

Architectural Institute of Japan,
Tokyo, Kobe University, Japan
and the Pennsylvania State University
U.S.A.

REFERENCES

1. Hull F. H., *Some Problems in the Analysis of Tall Multi-Level Guyed Towers.* Princeton University, Doctorate Dissertation, 1960.
2. Wells H. A., *Microwave Radio-Relay Towers.* Bell Laboratories Record, 1959, **37**, pp. 299–304.
3. * * * U. S. Bureau of Yards and Docks: Basic Structural Engineering. Technical Publication Navdocks, TP-Te-3, May 1954.
4. Timoshenko S., *Vibration Problems in Engineering.* 3-rd Ed., D. Van Nostrand Company, Inc., 1955.
5. Norris C. H., *Structural Design for Dynamic Loads.* 1 st Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1959.
6. * * * *Wind Effects on Building and Structures.* Proc. Conf. Nat. Physical Lab., Teddington, Middlesex, June 26 – 28, Dept. of Sci. a. Ind. Research, Nat. Phys. Lab. Symposium No. 16, vol. **I**, London, Her Majesty's Stationary Office, 1965, VII+430 pp.; vol. **II**, pp. 431–852
7. Şesan A., Manolovici M., *On the Method and the Criterion for testing the Structures.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)** *3–4*, pp. 411–416.
8. Mizuhata Koji, *Dynamic Analysis of Multi-Level Guyed Towers Subject to Wind Action.* Thirteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, 1963.

ANALIZA DINAMICĂ A TURNURILOR ÎNALTE ANCORATE, SUPUSE LA ACŢIUNEA VÎNTULUI (I)

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei a lucrării cu ace'aşi titlu prezentată la cel de al 15-lea Congres Naţional Japonez de Mecanică aplicată [8], formulează şi schematizează matematic problema de analiză dinamică a turnurilor înalte ancorate, supuse la acţiunea vîntului, urmînd ca într-o Notă de proximă publicaţie în acelaşi *Buletin* să prezinte soluţia sistemului diferenţial şi rezultatele numerice corespunzătoare, obţinute la MEC IBM 7 074, să expună rezultatele discuţiei şi concluziile respective.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Turn tipic înalt, ancorat.
Fig. 2. — Axa turnului ancorat multietajat şi sarcina în urma ipotezelor simplificatoare.
Fig. 3. — Forţa axială la un nivel al ancorării funcţie de încovoiere.
Fig. 4. — Relaţia biliniarizată între forţa axială la un nivel al ancorării şi încovoiere.
Fig. 5. — Dependenţa sarcinii eoliane în raport cu timpul, folosită în lucrare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 624.1 ; 550.3

PARTICULARITĂŢILE CALCULULUI LA ACŢIUNI SEISMICE A STRUCTURILOR FUNDATE PE PILOŢI

DE

N. UNGUREANU şi DANIEL DIACONU

1. Introducere

Concepţia, calculul şi execuţia construcţiilor situate în zone supuse cutremurelor, trebuie să ţină seama de fenomenele ce se produc în structură şi în terenul de fundaţie datorită solicitărilor seismice.

Proprietăţile elastice, elementele geometrice şi caracteristicile dinamice ale structurii influenţează direct mărimea forţelor de inerţie ce acţionează construcţia, a căror valoare se determină funcţie de gama frecvenţelor proprii de vibraţii, de modul de oscilaţie şi de amortizarea clădirii. Mărimea acestor forţe de inerţie depinde nemijlocit de proprietăţile dinamice ale undei seismice (grad de intensitate, viteză, accelerații, nivel energetic etc.), precum şi de proprietăţile fizico-mecanice ale terenului de fundaţie.

Perioada oscilaţiilor proprii, modul fundamental de oscilaţie şi amortizarea globală a clădirii (în care se cuprinde pe lîngă amortizarea proprie a clădirii şi amortizarea dintre clădire şi teren), sînt factori generici ce caracterizează răspunsul dinamic al construcţiilor supuse la acţiuni seismice. Funcţie de mărimea lor se precizează rigiditatea de ansamblu a construcţiei, valoarea forţelor de inerţie şi respectiv repartiţia lor pe verticală.

Formulările analitice exacte, aproximative sau exprimări directe ale perioadelor de oscilaţie — factor de bază ce condiţionează răspunsul seismic al unei construcţii — trebuie să ţină seama de deformaţiile reale ce se produc în structură şi în terenul de fundare. Astfel, deformata reală a unui punct la un anumit nivel va fi:

$$Y_K = Y_T + Y_M + Y_L + Y_\varphi, \tag{1}$$

în care Y_T reprezintă deplasarea datorită forţei tăietoare, iar Y_M — deplasarea datorită momentului încovoietor. Valoarea acestor deplasări va trebui corectată cu deplasarea orizontală datorită lunecării (Y_L) şi rotirii (Y_φ) fundaţiei, valori ce se determină după procedeele cunoscute în cazul fundaţiilor directe de tip rigid.

În cazul fundaţiilor rigide pe piloţi, corecţiile Y_L şi Y_φ se vor determina ţinînd seama de capacitatea de deformare a piloţilor individuali, de numărul lor, precum şi de natura terenului de fundare. Deoarece radierele rigide fundate pe piloţi la nivelul terenului, nu conlucrează direct cu terenul de fundaţie, ci prin intermediul piloţilor, valorile corecţiilor Y_L şi Y_φ vor fi condiţionate numai de capacitatea de deformare a piloţilor şi a terenului de fundare.

Ipotezele admise pentru calculul deplasării orizontale (y_0) şi al rotirii (θ_0) a radierului fundat pe piloţi sînt următoarele:

a) Radierul se consideră de rigiditate infinită în planul său, capabil să egaleze deformațiile tuturor piloților în secțiunea de legătură cu radierul.

b) Se consideră că piloții lucrează ca grinzi în mediu elastic de lungime semiinfinită, iar deformarea lor se produce conform ipotezei lui Winkler.

c) Coeficienții de tasare (C și r) la acțiuni orizontale și respectiv verticale se consideră constanți în adîncime, iar valoarea lor se determină experimental utilizînd piloți de probă care se încarcă corespunzător cu sarcini statice.

d) Se admite că valorile coeficienților de tasare, determinate experimental, pe piloți individuali, sînt valabile și pentru piloții din grupă.

e) Se presupune că piloții au toți aceeași orientare a secțiunii orizontale. În cazul cînd orientarea secțiunii orizontale a piloților este diferită se va ține seama de rigiditățile oblice ale piloților respectivi.

f) Valoarea perioadei naturale de oscilație, a modului I, se va determina prin aproximații succesive, plecînd de la o încărcare inițială a structurii (flexibilă sau rigidă) cu sarcinile gravitaționale (Q_k) aplicate orizontal după direcția de oscilație la nivelele respective.

În lucrarea de față se prezintă un calcul practic, care respectă ipotezele menționate anterior, pentru evaluarea corecțiilor din deplasarea orizontală $\left(y_0 = f\left(\sum_1^n Q_k\right)\right)$ și din rotirea radierului $\left(\theta_0 = f\left(\sum_1^n Q_k\right)\right)$ fundat pe piloți, valori ce corectează deformata unui punct curent al nivelului K $\left(Y_K = f\left(\sum_1^n Q_k\right)\right)$, calculată în ipoteza că structura este perfect încastrată la nivelul superior al radierului.

Valorile corecțiilor y_0 și θ_0 sînt calculate pentru piloți verticali și înclinați, considerați articulați și respectiv încastrați în radier.

2. Piloți verticali

1. Piloți verticali articulați în radier

a) *Deplasarea radierului datorită forței tăietoare*

Considerînd pilotul ca o grindă de lungime semiinfinită în mediu elastic, acționat la partea superioară de o forță orizontală q_i (fig. 1 a), se obține:

$$y_i = \frac{2q_i \alpha_i}{b_i C}, \tag{2}$$

unde s-a notat cu: b_i — lățimea pilotului perpendiculară pe planul de încovoiere (cm), C — coeficientul de pat (kg/cm³), (valoarea lui se determină experimental pe piloți de probă încărcați cu sarcini orizontale, cărora li se măsoară săgeata de la capătul superior), $\alpha_i = \sqrt[4]{Cb_i/4EI_p}$.

Pentru $q_i = 1$ se obține rigiditatea pilotului, $k_i^* = 1/y_i = b_i C/2\alpha_i$. Rigiditatea grupei de piloți (fig. 1 b) va fi $K^* = \sum_1^m k_i^* = \sum_1^m b_i C/2\alpha_i$, iar deplasarea orizontală a radierului datorită forței tăietoare $T = \sum_1^n Q_k$ are valoarea:

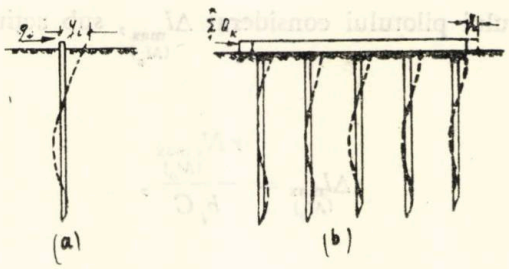


Fig. 1

$$y_0 = \frac{\sum_1^n Q_k}{\sum_1^m b_i C/2\alpha_i}, \tag{3}$$

pentru $K = 1, 2, \ldots, n$ etaje și $i = 1, 2, \ldots, m$ piloți.

Dacă piloții au aceeași secțiune și aceeași orientare, relația (3) devine:

$$y_0 = \frac{\sum_1^n Q_k}{m k^*} = \frac{2\alpha \sum_1^n Q_k}{mb C}. \tag{3'}$$

b) *Rotirea globală a radierului datorită momentului încovoietor*

Vom presupune în acest caz că centrul masic al construcției coincide, pe direcție verticală, cu centrul de greutate al secțiunilor transversale ale piloților. Radierul va fi acționat de $M_0 = M_{Q_k} + \sum_1^n Q_K h_{\text{radier}}$, ca vector fiind dirijat după axa x-x.

Considerînd pilotul cel mai depărtat de axa x-x (fig. 2), valoarea efortului unitar normal (σ) al acestuia va fi:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_0 y_{\max}}{I_x} = \frac{M_0 y_{\max}}{A_{pi} Y_i^2}, \tag{4}$$

unde I_x — momentul de inerţie al secţiunii piloţilor (A_{pi}) în raport cu axa $x-x$.

Forţa axială aplicată în capul pilotului considerat, va fi $N_{i\,\max}^{(M_0)} = \sigma_{\max} A_{pi}$, iar deplasarea capului pilotului considerat $\Delta l_{\max}^{(M_0)}$, sub acţiunea acestei forţe, rezultă:

$$\Delta l_{\max}^{(M_0)} = \frac{r N_{i\,\max}^{(M_0)}}{b_i C}, \tag{5}$$

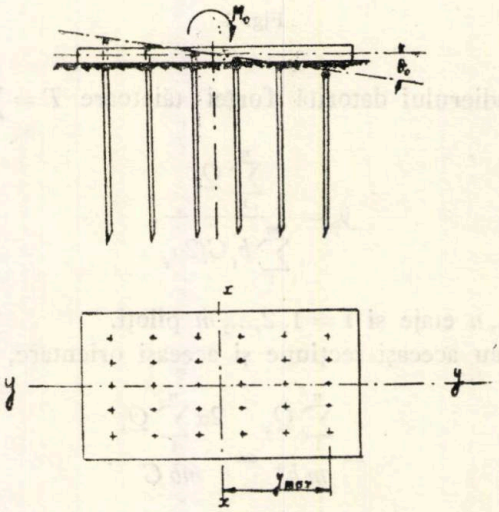


Fig. 2

unde r — coeficientul de tasare la vîrf (cm^{-1}) şi se determină prin încercări pe piloţi de probă acţionaţi de sarcini verticale. Anume, se măsoară deplasarea Δl_i a capului pilotului; valoarea lui C fiind determinată anterior, din (5) rezultă $r = (\Delta l_i / N_i)\, C b_i$.

Evident, rotirea radierului va fi:

$$\theta_0 = \frac{\Delta l_{\max}^{(M_0)}}{y_{\max}} = \frac{M_0 A_{pi}}{I_x C b_i} r. \tag{6}$$

2.2 Piloți verticali încastrați în radier

a) *Deplasarea radierului datorită forței tăietoare*

Datorită acțiunii forței tăietoare $\sum_1^n Q_K$ asupra radierului, în piloți (în secțiunile de capăt) vor apare atît forțe tăietoare cît și momente încovoietoare.

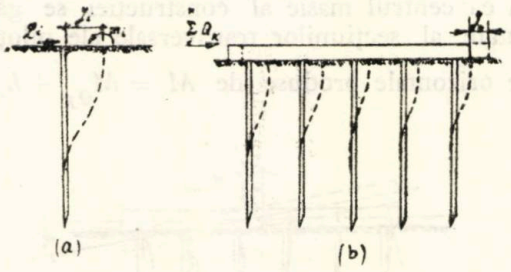


Fig. 3

Din condiția invariabilității unghiului din secțiunea de încastrare a pilotului în radier (fig. 3 a), rezultă valoarea momentului încovoietor ce acționează asupra capului pilotului:

$$m_i = \frac{q_i}{2\alpha_i}. \tag{7}$$

Deplasarea capului pilotului va fi:

$$y_i = y_i^{T_i} - y_i^{m_i} = \frac{2q_i\alpha_i}{b_i C} - \frac{2m_i\alpha_i^2}{b_i C} = \frac{q_i\alpha_i}{b_i C}. \tag{8}$$

Pentru $q_i = 1$, rigiditatea pilotului la deplasare are valoarea $k_i^* = 1/y_i = b_i C/\alpha_i$, iar rigiditatea grupei de piloți (fig. 3 b), va fi $K^* = \sum_1^m k_i^* = \sum_1^m b_i C/\alpha_i$.

Deci valoarea deplasării radierului (y_0) fundat pe piloți, datorită acțiunii forței tăietoare $\sum_1^n Q_K$, este:

$$y_0 = \frac{\sum_1^n Q_k}{K^*} = \frac{\sum_1^n Q_k}{\sum_1^m b_i C/\alpha_i}. \tag{9}$$

Dacă piloții au secțiuni identice și aceeași orientare relația (9) devine:

$$y_0 = \frac{\alpha}{mbC} \sum_1^n Q_K. \tag{9'}$$

b) *Rotirea globală a radierului datorită acțiunii momentului încovoietor*

Presupunem că centrul masic al construcției se găsește pe verticala centrului de greutate al secțiunilor transversale ale piloților; totodată vom neglija deplasările orizontale produse de $M_0 = M_{Q_K} + h_{\text{rad}} \sum_1^n Q_K$.

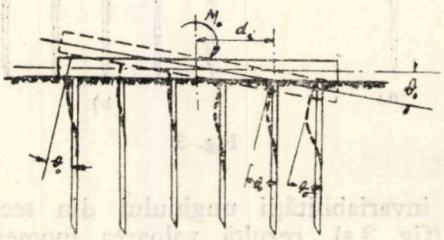


Fig. 4

Din relația $\theta_i d_i = rN_i/Cb_i$ se deduce deplasarea axială a pilotului, care în baza considerațiilor făcute, nu poate avea loc decît datorită forței axiale din pilot. Rezultă:

$$N_i = \frac{Cb_i}{r} \theta_0 d_i. \tag{10}$$

Momentul de încastrare al pilotului îl vom exprima funcție de θ_0 (fig. 4):

$$m_i = \frac{Cb_i}{4\alpha_i^3} \theta_0. \tag{11}$$

Valoarea lui θ_0 se obține din condiția de echilibru mecanic scrisă pentru radier, acționat de M_0, forțele axiale și momentele încovoietoare din capetele piloților (fig. 4), $\sum_1^m N_i d_i + \sum_1^m m_i = M_0$ sau

$$\theta_0 \left(\sum_1^m \frac{Cb_i}{r} d_i^2 + \sum_1^m \frac{Cb_i}{4\alpha_i^3} \right) = M_0. \tag{12}$$

Din (12) se deduce:

$$\theta_0 = \frac{M_0}{\sum_1^m (Cb_i d_i^2/r + Cb_i/4\alpha_i^3)}. \tag{13}$$

Pentru cazurile practice curente, cînd piloții au aceeași secțiune transversală și aceeași orientare, relația (13) devine:

$$\theta_0 = \frac{M_0}{Cb\left(\frac{1}{r}\sum_1^m d_i^2 + \frac{m}{4\alpha^3}\right)}. \tag{13'}$$

În cazul cînd centrul masic al clădirii nu coincide cu centrul de greutate al secțiunilor transversale ale piloților se aduce rezultanta forțelor gravitaționale V_0 în centrul de greutate al secțiunilor transversale ale piloților, iar valoarea momentului încovoietor care acționează radierul se modifică în consecință, anume:

$$M_0' = M_0 \pm V_0 e.$$

S-a notat cu e valoarea excentricității lui V_0 față de centrul de greutate al secțiunilor transversale ale piloților.

3. Piloți înclinați

3.1 Piloți înclinați articulați în radier

a) *Deplasarea radierului datorită forței tăietoare*

Pentru pilotul înclinat cu un unghi φ_i (fig. 5 a), acționat de o forță orizontală unitară, deplasarea capului pilotului y_i se poate considera ca fiind

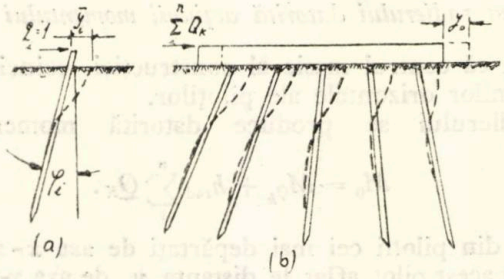


Fig. 5

compusă din deplasarea orizontală din forța axială $N_i = \sin\varphi_i$ și deplasarea orizontală din forța tăietoare $T_i = \cos\varphi_i$, adică:

$$(14) \qquad \bar{y}_i = y_i^N + y_i^T = \frac{r \sin \varphi_i}{b_i C} + \frac{2\alpha_i \cos \varphi_i}{b_i C} = \frac{1}{b_i C}(r \sin \varphi_i + 2\alpha_i \cos \varphi_i).$$

Rigiditatea la deplasare a pilotului va fi:

$$k_i^* = \frac{1}{\bar{y}_i} = \frac{b_i C}{r \sin \varphi_i + 2\alpha_i \cos \varphi_i},$$

iar rigiditatea la deplasare a grupei de piloţi (fig. 5 b),

$$(15) \qquad K^* = \sum_1^m k_i^* = C \sum_1^m \frac{b_i}{r \sin \varphi_i + 2\alpha_i \cos \varphi_i}.$$

Expresia deplasării radierului pe direcţie orizontală devine:

$$(16) \qquad y_0 = \frac{\sum_1^n Q_K}{C \sum_1^m [b_i/(r \sin \varphi_i + 2\alpha_i \cos \varphi_i)]}.$$

Dacă piloţii au aceeaşi secţiune transversală şi aceeaşi orientare a secţiunilor în raport cu radierul, relaţia (16) devine:

$$(16') \qquad y_0 = \frac{\sum_1^n Q_K}{Cb \sum_1^m [1/(r \sin \varphi_i + 2\alpha \cos \varphi_i)]}.$$

b) *Rotirea radierului datorită acţiunii momentului încovoietor*

Presupunem că centrul masic al construcţiei coincide cu centrul de greutate al secţiunilor orizontale ale piloţilor.

Rotirea radierului se produce datorită momentului încovoietor

$$M_0 = M_{Q_k} + h_{\text{rad}} \sum_1^n Q_K.$$

Fie u unul din piloţii cei mai depărtaţi de axa x-x (fig. 6). Efortul unitar normal din acest pilot, aflat la distanţa y_u de axa x-x, este $\sigma_u = M_0 y/I_x$.

Acest efort unitar se poate considera uniform distribuit pe secţiunea $A_{pu}/\cos \varphi_u$, iar mărimea forţei verticale ce acţionează pilotul va fi:

$$V_u = \sigma_u A_{pu}/\cos \varphi_u.$$

Forța axială N_u și forța tăietoare T_u din pilotul considerat se deduc imediat, anume:

$$N_u = V_u \cos \varphi_u = \sigma_u A_{pu}, \quad T_u = V_u \sin \varphi_u = \sigma_u A_{pu} \operatorname{tg} \varphi_u.$$

Avînd valorile lui N_u și T_u, se poate calcula deplasarea pe verticală a capului pilotului u:

$$Z_u = \frac{rN_u}{b_u C} \cos \varphi_u + \frac{2\alpha_u T_u}{b_u C} = \frac{\sigma_u A_{pu}}{b_u C} (r + 2\alpha_u \operatorname{tg}^2 \varphi_u) \cos \varphi_u$$

sau

$$Z_u = \frac{M_0 y_u}{I_x} \cdot \frac{A_{pu}}{b_u C} (r + 2\alpha_u \operatorname{tg}^2 \varphi_u) \cos \varphi_u.$$

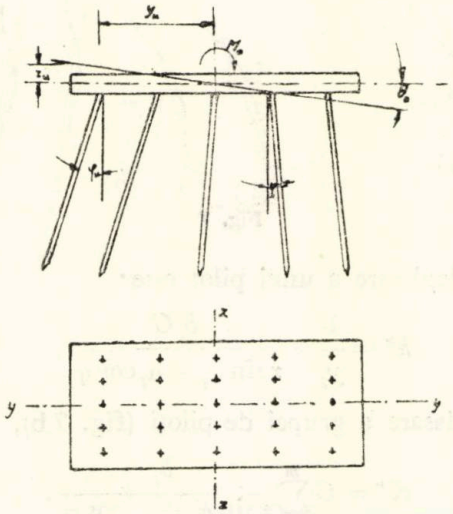


Fig. 6

Rotirea radierului θ_0 rezultă imediat

$$\theta_0 = \frac{Z_u}{y_u} = \frac{M_0}{I_x} \cdot \frac{A_{pu}}{b_u C} (r + 2\alpha_u \operatorname{tg}^2 \varphi_u) \cos \varphi_u. \tag{17}$$

3.2 Piloți înclinați încastrați în radier

a) *Deplasarea radierului datorită forței tăietoare*

Din condiția de invariabilitate a unghiului dintre pilotul i (fig. 7 a) și radier, pentru o forță orizontală unitară ce acționează în capul pilotului se obține:

$$-\frac{2\alpha_i^2}{Cb_i}\cos\varphi_i+\frac{4m_i\alpha_i^3}{b_iC}=0 \text{ şi } m_i=\frac{\cos\varphi_i}{2\alpha_i}.$$

Deplasarea orizontală a capului pilotului va fi:

$$\bar{y}_i=y_i^T+y_i^N-y_i^m=\frac{2\alpha_i\cos\varphi_i}{b_iC}+\frac{r\sin\varphi_i}{b_iC}-\frac{\alpha_i\cos\varphi_i}{b_iC}$$

sau

$$\bar{y}_i=\frac{1}{b_iC}(r\sin\varphi_i+\alpha_i\cos\varphi_i).$$

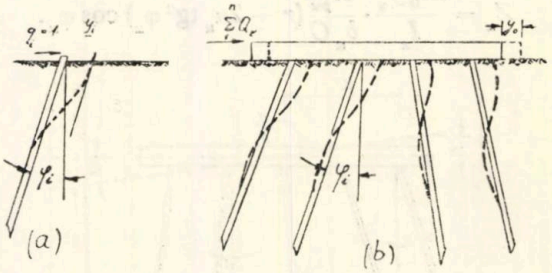


Fig. 7

Rigiditatea la deplasare a unui pilot este:

$$k^*=\frac{1}{\bar{y}_i}=\frac{b_iC}{r\sin\varphi_i+\alpha_i\cos\varphi_i},$$

iar rigiditatea la deplasare a grupei de piloţi (fig. 7 b),

$$K^*=C\sum_1^m\frac{b_i}{r\sin\varphi_i+\alpha_i\cos\varphi_i}.$$

Se poate determina acum deplasarea orizontală a radierului

$$y_0=\frac{\sum_1^n Q_K}{K^*}=\frac{\sum_1^n Q_K}{C\sum_1^m[b_i/(r\sin\varphi_i+\alpha_i\cos\varphi_i)]}.$$

b) *Rotirea radierului datorită acţiunii momentului încovoietor*

Neglijînd deplasarea orizontală a radierului produsă de M_0 (ca fiind redusă) vom considera deformaţiile din piloţi corespunzător deplasării pe verticală şi rotirii dalei.

Deplasarea capului pilotului i pe direcția axei sale, dată de forța axială, este

$$\Delta l_i = \frac{rN_i}{Cb_i}.$$

Între θ_0 și Δl_i se poate scrie o relație geometrică (fig. 8 a) anume :

$$\theta_0 d_i = \frac{\Delta l_i}{\cos \varphi_i} = \frac{rN_i}{Cb_i \cos \varphi_i},$$

din care se determină forța axială N_i în funcție de θ_0:

$$N_i = \frac{Cb_i d_i \cos \varphi_i}{r} \theta_0.$$

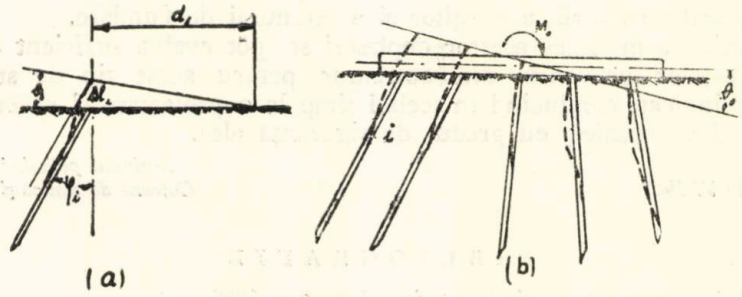


Fig. 8

Valoarea momentului încovoietor ce apare în capul pilotului i este:

$$m_i = \frac{b_i C}{4\alpha_i^3} \theta_0.$$

Întrucît dala trebuie să fie în echilibru sub acțiunea momentului M_0 și a eforturilor N_i și m_i, în secțiunile de îmbinare a piloților cu dala, vom scrie o ecuație de moment în raport cu centrul de greutate al secțiunilor transversale ale piloților (fig. 8 b):

$$\sum_1^m N_i d_i \cos \varphi_i \pm \sum_1^m m_i = M_0.$$

Dacă în această ecuație de echilibru se înlocuiesc N_i și m_i cu expresiile scrise mai sus, se obține rotirea radierului:

$$\theta_0 = \frac{M_0}{\sum_1^m [(Cb_i d_i^2/r) \cos^2 \varphi_i \pm b_i C/4\alpha_i^3]}. \tag{19}$$

Pentru piloţi de aceeaşi secţiune transversală şi identic orientaţi, relaţia (19) se scrie:

$$\theta_0 = \frac{M_0}{(Cb/r)\sum_1^m d_i^2 \cos^2 \varphi_i + (m-S)\, Cb/4\alpha^3}, \tag{19'}$$

unde S reprezintă numărul piloţilor din stînga centrului de greutate al secţiunilor transversale ale piloţilor, înclinaţi spre dreapta şi al celor din dreapta înclinaţi spre stînga.

4. Concluzii

S-a urmărit stabilirea unor procedee privind evaluarea mai exactă a deplasărilor orizontale pentru structurile fundate pe piloţi cu radier rigid, produse de un sistem de forţe exterioare orizontale oarecare, cu considerarea deformării structurii, a piloţilor şi a terenului de fundare.

Funcţie de mărimea acestor deplasări se pot evalua suficient de exact valorile forţelor provenite din cutremur pentru acest tip de structuri, procedeele indicate conducînd în acelaşi timp la o proiectare şi execuţie mai judicioasă şi economică, cu gradul de siguranţă ales.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statică şi rezistenţă

Primită la 20 VI 1967

BIBLIOGRAFIE

1. Heteny M., *Beams on Elastic Foundations.* Michigan, 1956.
2. Radosavljevic Z., *Calcul et essais des pieux en groupe 3b/12.* Proc. of the Fourth Intern. Conference on Soil Mechanics Foundations Eng., London, 1957.
3. Şesan A., Diaconu D., Bauşic V., Ciongradi I., *Asupra repartizării forţelor orizontale pe diafragme la clădiri din panouri mari.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, pp. 355—360.
4. Şesan A., Ciongradi I., Diaconu D., Strat L., *Experimental Determination of Natural Periods and Damping in Buildings.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 337—344.

PARTICULARITÉS DU CALCUL DES STRUCTURES FONDÉES SUR PIEUX, SOUMISES AUX ACTIONS SÉISMIQUES

(Résumé)

On présente des procédés d'approximations succésives pour la correction de la déformée des structures fondées sur pieux, en tenant compte des déplacements horizontaux et de la rotation du radier, ce qui permet d'évaluer d'une manière plus exacte la valeur et la distribution des charges séismiques.

La possibilité d'obtenir correctement la déformée d'une telle structure permet à estimer d'une manière plus précise la grandeur de la distribution des charges séismiques,

Le problème est traité en considérant des pieux — verticaux ou inclinés articulés ou encastrés dans le radier qui est infinimment rigide en plan horizontal — comme des poutres dans un milieu élastiques de longueur sémiinfinie, travaillant dans l'hypothèse du coefficient de couche déterminé sur des pieux d'essai.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C.D. 624.07; 621.101

APLICATION DE LA REPRÉSENTATION ANALOGIQUE DES CHAMPS DE DIFFUSION À L'ÉTUDE DES PAROIS SANDWICHES

PAR

ADRIAN RADU

1. Introduction

Les parois sandwiches comportent toujours des zones favorisant les pertes de chaleur et l'humidification excesive en saison froide, désignées d'habitude sous le nom de ponts thermiques [1], [2]. Pour l'étude des ponts thermiques on doit résoudre le problème complexe de l'échange de masse et de chaleur à travers les parois dont la structure est particulièrement compliquée.

L'utilisation des méthodes analogiques s'est avérée particulièrement efficace pour l'établissement des champs thermiques en permettant d'estimer aisément le risque de condensation à la surface des ponts thermiques [3], [4]. Dans une Note précédente [5] nous avons présenté un procédé pour la représentation analogique des champs de diffusion.

L'utilisation conjointe des modèles électriques pour l'échange de masse et de chaleur rend possible la mise en évidence du phénomène de condensation même lorsqu il se manifeste à l'intérieur de la paroi. Dans ce qui suit on présente les résultats obtenus par cette voie pour l'étude d'une paroi sandwich à structure améliorée.

2. Caractéristiques de la paroi et représentation analogique

La paroi étudiée est constituée par trois couches dont les caractéristiques thermiques et de perméabilité à la vapeur d'eau sont présentées dans le tableau 1. On constate asément (fig. 1) que dans la partie courante où le flux est perpendiculaire à la paroi et unidirectionnel, la condensation est absente. La présence des nervures de liaison, constituant le pont thermique, modifie la direction des flux et rend nécessaire une étude analogique. À cet effet on réalise un réseau de calcul à mailles rectangulaires Δx, Δy (fig. 2).

Tableau 1

Nr.	Matériaux composant la paroi	Epaisseur de la paroi d m	Poid spécifique γ kg/m³	Conductivité thermique λ kcal/m h °C	Perméabilité à la vapeur d'eau μ g/m h mm Hg
1.	Beton armé vibré	0,12	2 600	1,750	0,003
2.	Isolant léger (mousse de polistyrène expansé)	0,04	20	0,035	0,002
3.	Béton à agrégat céramique	0,04	1 600	0,650	0,012

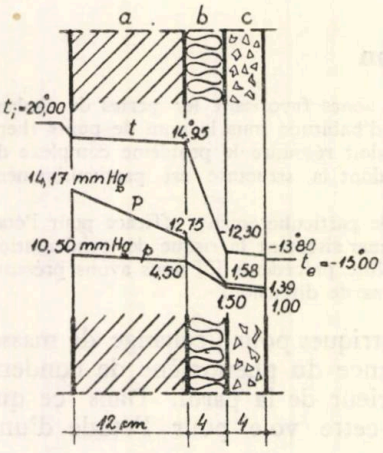


Fig. 1. — Section verticale de la paroi. Températures et pressions de la vapeur d'eau en absence des ponts thermiques ; a—béton armé vibré, b—isolation thermique (mousse de polistyrène), c—béton à agregats céramiques. p—pression partielle de la vapeur d'eau, t—températures.

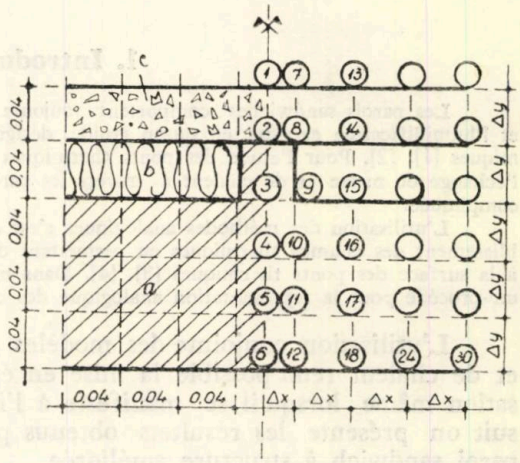


Fig. 2. — Pont thermique et réseau de calcul.

En désignant par A le modèle électrique pour l'étude du champ thermique et par B le modèle électrique pour l'étude de la diffusion de la vapeur d'eau, on aura :

MODÈLE *A*

$$r_{e-1} = \frac{1}{\alpha_e \Delta x/2} = \frac{0{,}05}{0{,}01} = 5{,}00, \qquad R_{e-1} = mr_{e-1} = 5\,000,$$

$$r_{1-2} = \frac{\Delta y}{\lambda \Delta x/2} = \frac{0{,}04}{0{,}65 \times 0{,}01} = 6{,}16, \qquad R_{1-2} = mr_{1-2} = 6\,160,$$

$$r_{2-3} = \frac{\Delta y}{\lambda \Delta x/2} = \frac{0{,}04}{1{,}75 \times 0{,}01} = 2{,}28, \qquad R_{2-3} = mr_{2-3} = 2\,280,$$

. . . . . .

MODÈLE *B*

$$r'_{e-1} = \frac{1}{\beta_e \Delta x/2} = 0, \qquad R'_{e-1} = 0,$$

$$r'_{1-2} = \frac{\Delta y}{\mu \Delta x/2} = \frac{0{,}04}{0{,}012 \times 0{,}01} = 333{,}3, \qquad R'_{1-2} = nr'_{1-2} = 3{,}333,$$

$$r'_{2-3} = \frac{\Delta y}{\mu \Delta x/2} = \frac{0{,}04}{0{,}003 \times 0{,}01} = 1\,333{,}3, \qquad R'_{2-3} = nr'_{2-3} = 13\,333,$$

. . . . . .

Dans ce qui précède on à désigné par: α_e — le coefficient d'echange de chaleur à la surface extérieure de la paroi, (kcal/m² h °C), β_e — le coefficient d'echange de la vapeur d'eau à la surface de la paroi, dont la valeur est considérée pratiquement infinie, R — la résistance électrique homologue à la résistance thermique, (Ω), R' — résistance la électrique homologue à la résistance à la diffusion de la vapeur d'eau, (Ω), m — facteur de proportionnalité reliant les résistances thermiques et électriques, n — facteur de proportionnalité reliant les résistances à la diffusion et celles électriques.

En considérant le régime permanent et les conditions aux limites qui résultent d'une exploitation normale en hiver:

$$t_i = 20°\,\text{C}, \quad t_e = -15°\,\text{C}, \quad p_i = 10{,}50\ \text{mm Hg}, \quad p_e = 1{,}00\ \text{mm Hg},$$

et en associant à la différence de températures $t_i - t_e$ une différence de potentiel $V_i - V_e$, on aura avec le modèle *A* la température de chaque point du réseau de calcul:

$$t = t_e + \frac{t_i - t_e}{V_i - V_e} V.$$

De même, avec la modèle *B*, la pression partielle de chaque point du réseau de calcul sera donnée par la relation

$$p = p_e + \frac{p_i - p_e}{v_i - v_e} v,$$

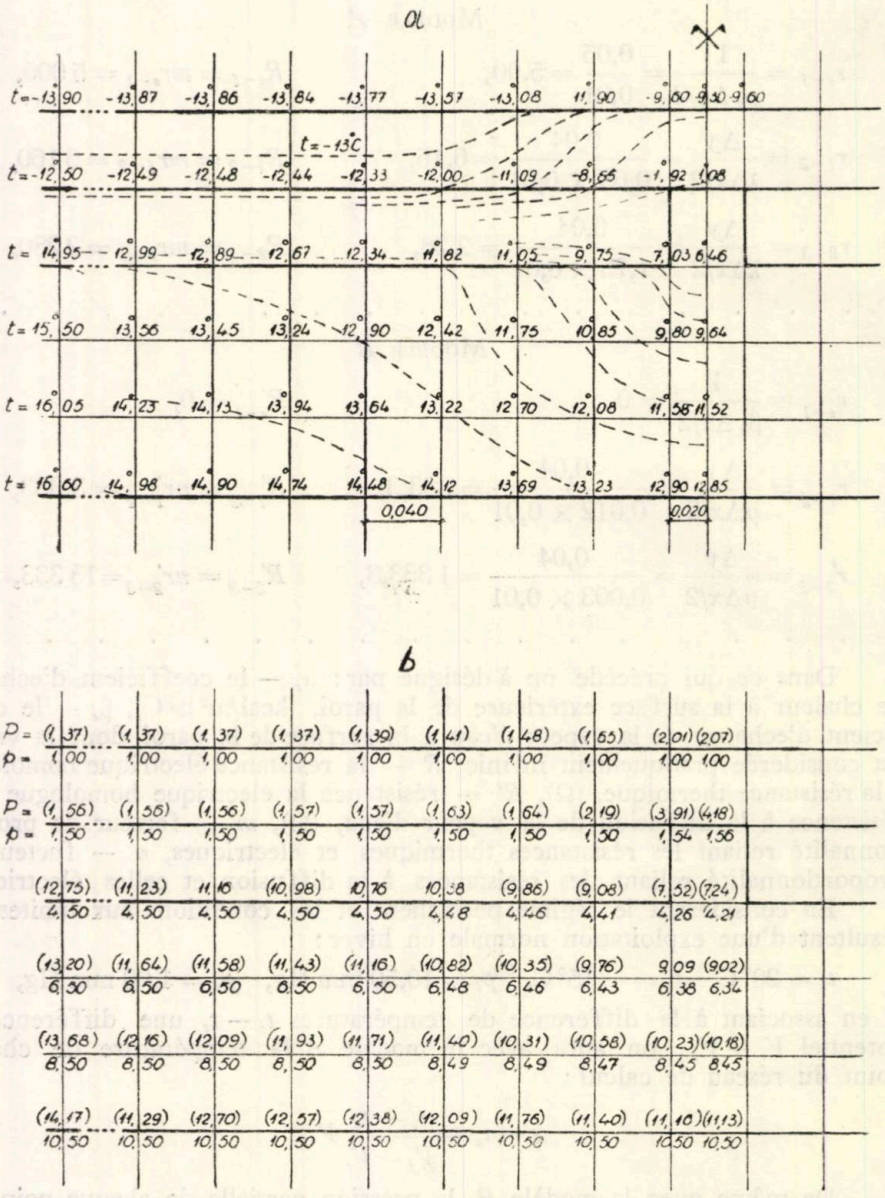


Fig. 3 — Champ thermique et champ de diffusion dans la région du pont thermique étudié; *a* — section horizontale et températures en régime permanent, *b* — section horizontale et pressions de la vapeur d'eau.

la différence de potentiel $v_i - v_e$ étant associée à la chute totale de pression de la vapeur d'eau entre les deux milieux qui evironnent la paroi.

3. Résultats

Les résultats obtenus à l'aide des modèles électriques *A* et *B* sont représentés dans la fig. 3. A côté des pressions partielles on a noté la pression de saturation entre paranthèses. On constate que partout $p_i < P$, ce qui dénote que le phénomène de condensation est absent.

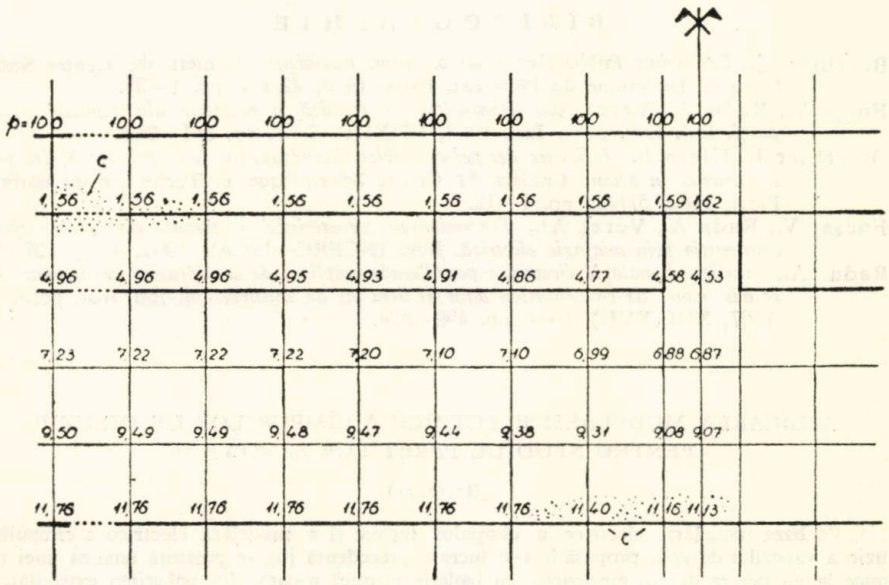


Fig. 4. — Champ de diffusion pour $p_i = 11{,}76$ mm Hg; *c* — zone de condensation.

En considérant les mêmes températures et l'hypothèse du caractère permanent des régimes thermique et de diffusion on a examiné ensuite la situation qui résulte pour des pressions supérieures de la vapeur d'eau à l'intérieur du local. La rosée aparaît aux points numérotés *6*, *12* et *18* sans que le phénomène de condensation puisse se produire à l'intérieur de la paroi. Par contre, si la pression de saturation est atteinte aux points *6*, *12*, *18* et *24*, en régime permanent, la condensation prend place aussi à l'intérieur de la paroi dans certains points situés au contact entre le polistyrène et le béton de protection extérieure. Dans la fig. 4 on présente la situation qui correspond à cette dernière hypothèse.

4. Conclusions

L'utilisation conjointe de la représentation analogique des champs thermique et de diffusion en régime permanent permet de décéler les points où la condensation pourrait nuire au confort et à la durabilité des éléments de construction. L'analyse effectuée pour une paroi sandwich à isolant léger, peu perméable, recouvert vers l'extérieur par une couche de béton perméable, conduit à la conclusion que cette structure est avantageuse.

Reçue le 24 VI 1967

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Constructions

BIBLIOGRAPHIE

1. Berthier J., *Les points faibles thermiques ou ponts thermiques.* Cahiers du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, Paris, 1960, *42/334*, pp. 1—35.
2. Focşa V., Radu A., Vereş Al., *Dimensionarea termică a pereţilor din panouri mari cu punţi.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, pp. 361—369.
3. Berthier J., Klein F., *Incidence des points faibles thermiques sur le coefficient K des parois sandwiches en béton.* Cahiers du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, Paris, 1962, *57/455* pp. 1—12.
4. Focşa V., Radu A., Vereş Al., *Determinarea caracteristicilor termice ale elementelor de construcţie prin analogie electrică.* Rev. INCERC—ISCAS, 1962, *4*, pp. 127—136.
5. Radu A., *Principe d'analogie électrique pour l'étude simplifiée de la diffusion des vapeurs d'eau et des zones de condensation dans les éléments de construction.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2*, pp. 499—504.

APLICAREA MODELĂRII ELECTRICE A CÎMPURILOR DE DIFUZIE PENTRU STUDIUL PEREŢILOR SANDWICH

(Rezumat)

Pe baza modelării electrice a cîmpului termic şi a modelării electrice a cîmpului de difuzie a vaporilor de apă, propusă într-o lucrare precedentă [5], se prezintă analiza unei punţi termice la un perete de tip sandwich, cu izolaţie termică uşoară, din polistiren expandat. Rezultatele obţinute arată că structura analizată se comportă favorabil în condiţiile climatice din zona a II-a climatică a ţării.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Secţiune verticală prin perete, cu indicarea temperaturilor şi presiunilor parţiale ale vaporilor de apă în absenţa punţilor termice; a — beton armat vibrat, b — izolaţie termică din polistiren expandat, c — beton cu agregate ceramice; p — presiunea parţială a vaporilor de apă, P — presiunea de saturaţie a vaporilor de apă, t — temperaturile.

Fig. 2. — Puntea termică şi reţeaua de calcul.

Fig. 3. — Cîmpul termic şi cîmpul de difuzie în zona punţii termice studiate; a — secţiune orizontală prin punte şi temperaturi în regim staţionar; b — secţiune orizontală şi presiunile vaporilor de apă.

Fig. 4. — Cîmpul de difuzie pentru p_i=11,76 mm Hg; c — zonă de condens.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 622.36

NISIPURILE DE DUNĂRE CA MATERIAL PENTRU CONSTRUCŢII

NOTA I

BANCUL DE NISIP DE LA km 249...250

DE

ELISABETA PĂUNEL, FLORIN CONSTANTINESCU, FLORICA VASILESCU, C. CARAMAN şi N. SAVA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În căutarea de noi surse de agregate, bogatele depozite de nisipuri aluvionare existente de-a lungul Dunării, în sectorul inferior [1], au atras în mod deosebit atenţia constructorilor; utilizarea lor a început să fie extinsă începînd din anul 1963. Un studiu sistematic al tuturor acestor depozite, în comparaţie cu nisipurile de carieră şi rîu din apropiere, s-a impus ca o necesitate. Acest studiu[1]) a fost iniţiat pe zone, după direcţia în care înaintează exploatarea. Într-o primă etapă, pentru oraşele Galaţi şi Brăila un interes imediat îl prezintă depozitele de nisip din sectorul 3 al Dunării. În cele ce urmează se prezintă rezultatele studiului referitor la bancul de nisip aflat între km 249...250.

2. Date de teren

Sectorul 3 dunărean [2] — Călăraşi-Brăila, format din Balta Ialomiţei şi Balta Brăilei[2]), este bogat în depozite de nisip. El se întinde pe o lungime de circa 195 km iar in aval de oraşul Hîrşova valea atinge cea mai mare lăţime — 28 km. Fiecare din cele două „bălţi" sînt constituite din nenumărate lacuri, foarte diferite ca dimensiuni şi adîncime. Amplele lucrări de desecare care se execută aici, vor schimba curînd aspectul acestei regiuni.

Balta Ialomiţei, care începe la km 376, sfîrşeşte puţin în aval de Hîrşova (km 253), unde cele două braţe ale fluviului—Borcea şi Dunărea Veche—se reunesc într-un singur curs de apă. La nord de Vadul Oii albia Dunării se împarte din nou în două braţe mari — braţul stîng (Dunărea Nouă), care constituie principala cale navigabilă, şi braţul drept (Dunărea Veche); ambele se unesc în apropiere de Brăila (km 170).

Între braţele principale, ca şi între cele interioare, secundare, s-au dezvoltat o serie de ostroave alcătuite din depozite nisipo-mîloase [1], care abundă în lacuri. Periodic, la viiturile

---

[1]) solicitat de către Sfatul Popular Regional, Galaţi.

[2]) Aceste bălţi, deoarece au caracter comun cu Delta Dunării, mai sînt numite şi „deltele interne".

mari, chiar de două ori pe an, ele sînt inundate de ape. Lucrările de indiguire care se execută în prezent vor modifica sensibil cursul apelor în această regiune,

Din punct de vedere geomorfologic sectorul Călăraşi–Brăila aparţine ţinutului Cîmpiei Române, subţinutul Cîmpia Dunăreană, districtul Luncii şi Deltei Dunării. Este o cîmpie pe fundament de platformă şi geosinclinal; ea prezintă cel mai liniar relief de acumulare din ţara noastră [1]. Cifrele de mai jos [1] sînt concludente în privinţa posibilităţilor de acumulare aluvionară care au existat în acest sector înainte de începerea lucrărilor hidroameliorative.

a) Debitul mediu anual în sectorul românesc creşte cu 890 m³/sec faţă de sectorul din amonte. Valoarea maximă a debitului este atinsă o dată în amonte de cele două „bălţi" (în sectorul Oltenita–Călăraşi), în aval de care circa 74 m³/sec se pierd prin umplerea lacurilor din lunca inundabilă şi prin evaporarea de la suprafaţa bălţilor, iar al doilea maxim (6 515 m³/sec — valoarea maximă pentru întreaga Dunăre) este atins în amonte de primul Ceatal (Tulcea), pentru ca în aval să scadă prin pierderile de apă din deltă.

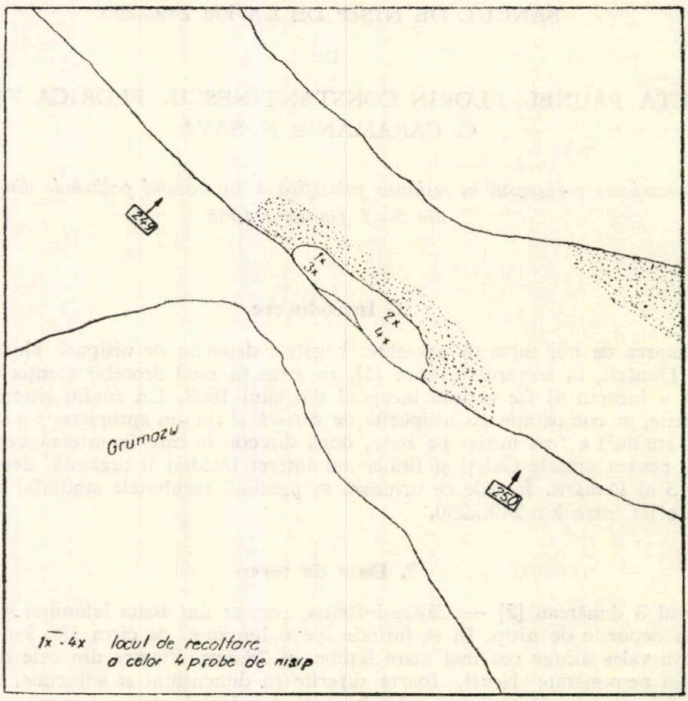


Fig. 1. — Banc de nisip între km 249...250, în exploatare.

b) Panta în sectorul românesc scade treptat din amonte — 5 cm/km — la 1 cm/km la vărsare.

c) Viteza medie variază între 3,3....4,5 km/h, pentru ca la vărsare (Brăila–Sulina) să scadă la 2 km/h.

d) La aceste caracteristici adăugîndu-se şi debitul solid total anual al Dunării, în medie de 70,7 milioane tone, se poate explica uşor existenţa în sectorul 3, a unui mare volum de depuneri aluvionare.

Bancul de nisip format între km 249...250, în aval de Hîrşova (fig. 1, 2), spre malul stîng al braţului stîng, adesea inundat de ape, a început să fie exploatat din anul 1963 [3]) pe o distanţă de 150 m de la mal şi pînă la 5 m adîncime.

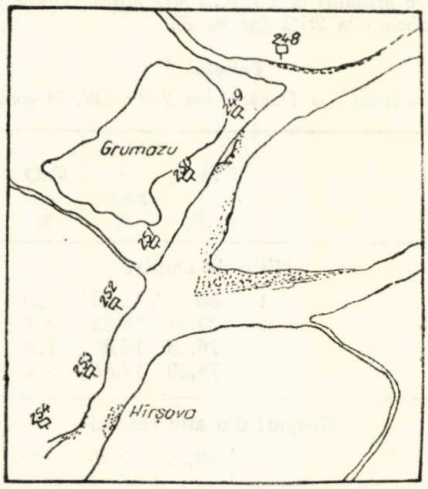


Fig. 2. — Banc de nisip între km 249...250 (detalii la fig. 1).

3. Caracteristicile nisipului de Dunăre de la km 249...250

Determinările de laborator s-au efectuat pe probe recoltate din patru puncte marcate pe fig. 1.

În genere asemănătoare, cele patru probe diferă între ele prin tenta de culoare: probele *1, 2* au o culoare gri închis iar probele *3, 4* au culoarea gri deschis. Proba *2* diferă cu puţin de celelalte probe printr-un conţinut mai mare în fracţiuni grosiere.

a) *Compoziţia petrografică* este aceeaşi la cele patru probe, chiar pe sorturi. Frecvente sînt cuarţitele, menilitele, silexul; în proporţii mai reduse apar granulele din gresii silicioase, şisturile. Frecvente sînt scoicile cu diferite mărimi, ori fragmentele de scoici; rar apar foile de mica; nu se văd cu ochiul liber granulele de gresii calcaroase ori de calcare.

b) *Din punct de vedere chimic* cele patru probe de nisip sînt asemănătoare (tabelul 1). Cu toate că la examenul macroscopic pare să predomine SiO_2, din analiza chimică proporţia de SiO_2 rezultă numai de 76,36...80%, deci este cu mult mai redusă decît în multe nisipuri de carieră (ex. Catarg şi Bîrnova — Iaşi, Lespezi I şi II—rîul Siret); în schimb este ridicat conţinutul în $Al_2O_3+Fe_2O_3$ (14,80...17,85%) şi chiar cel în CaO, care ajunge la 7,3%, ca o consecinţă a prezenţei cochiliilor calcaroase şi nu a granulelor de calcar şi a gresiilor calcaroase, cum este cazul nisipurilor din cariere ori din lungul rîurilor.

c) *Caracteristicile tehnice* sînt prezentate în tabelele 2 şi 3. Din compararea datelor rezultă o mare asemănare a probelor *1, 3, 4* iar proba *2* prezintă uşoare diferenţe faţă de cele precedente.

Este un nisip curat, partea levigabilă fiind $< 1,5\%$. La nisipurile de carieră partea levigabilă este mare, de exemplu la nisipurile de Catarg-Iaşi —8%, la Bîrnova-Iaşi —16%; chiar la nisipurile de rîu se întîlneşte o parte levigabilă mare, de exemplu la nisipul de Doaga 5...8%. iar la nisipul de Vădeni s-a întîlnit o parte levigabilă pînă la 5,9%. Rezultă că bancul din

[3]) Exploatarea s-a început de către DRNC, Galaţi, extragerea efectuîndu-se cu dragele

această zonă ori a fost spălat periodic de partea fină dusă mai departe, ori aici nu au existat condiții de depuneri ale granulelor fine.

Este un nisip care se compactează bine, căci densitatea specifică de grămadă (ϱ_g) crește de la 1 465...1 547 kg (stare afînată) la 1 720...1 800 kg/m³ (stare îndesată), iar volumul de goluri la nisipul îndesat coboară la 26% (proba *2*).

Tabelul 1

Compoziția chimică a nisipului de Dunăre, km 249—250, în comparație cu alte nisipuri

Proba		SiO_2 %	$Al_2O_3 + Fe_2O_3$ %	CaO %	MgO %	P.C. %	Total %
Nisip de Dunăre							
Proba *1*		80	14,80	5,20	0,70	—	100,17
Proba *2*		79,02	15,25	4,80	0,62	—	99,70
Proba *3*		76,36	16,02	7,30	0,32	—	100,00
Proba *4*		78,20	17,85	3,40	0,42	—	99,87
Nisipuri din alte regiuni							
Iași—Repedea-Catarg		92,78	3,96	2,18	0,56	0,68	100,16
Iași—Alforiment Bîrnova	Proba *1*	86,28	3,76	3,24	0,73	3,49	97,50
	Proba *2*	85,24	5,32	2,88	0,83	3,22	97,49
Iași—Valea Lupului	Proba *1*	70,82	4,90	11,20	0,68	11,46	99,06
	Proba *2*	55,80	8,10	18,34	0,88	16,34	99,46
Rîul Siret Lespezi I, amonte pod metalic, 2 km de gară		92,78	3,96	2,18	0,56	0,68	100,16
Rîul Siret Lespezi II, aval pod metalic, 2,5 km de gară		85,76	5,54	3,06	0,78	0,32	97,46

Tabelul 2

Caracteristicile tehnice ale nisipului de Dunăre, km 249-250

Proba	Densitatea specifică ϱ g/cm³	Densit. spec. grămadă ϱ_g kg/m³		Vol. goluri %		Părți levigabile %
		afînat	îndesat	afînat	îndesat	
1	2,622	1 493	1 725	39,5	30,0	1,5
2	2,675	1 547	1 800	37,5	26,0	1,4
3	2,639	1 465	1 720	40,5	30,0	1,2
4	2,617	1 470	1 740	42,0	31,5	1,2

d) *Compoziţia granulometrică* a celor patru probe de nisip, sub forma în care au fost recoltate din banc, este prezentată în tabelul 3 iar curbele granulometrice pentru fracţiunile 0...3 mm şi 0...7 mm sînt redate în fig. 3 şi 4.

Proporţiile diferitelor fracţiuni sînt apropiate la probele *1*, *3*, *4*; uşoare diferenţe se constată la proba *2*, care dă un reziduu mai mare pe ciurul cu ochiurile de 7 mm decît celelalte probe (9,72%).

Deoarece reziduul pe ciurul cu ochiurile de 7 mm este redus, se poate considera că aceste nisipuri au o granulozitate pînă la 7 mm; se poate conta că probele *1*, *3*, *4* au chiar o granulozitate pînă la 3 mm.

Sînt nisipuri fin grăunţoase, majoritatea granulelor fiind de dimensiuni cuprinse între 0,09...2 mm şi apropiate din punct de vedere granulometric de nisipurile de Siret (Suraia, Vădeni, Doaga) (fig. 3). Curbele granulometrice ale celor patru probe de nisip sînt situate cu mult deasupra curbelor limită cerute la nisipurile pentru mortare de zidărie (0...7 mm),

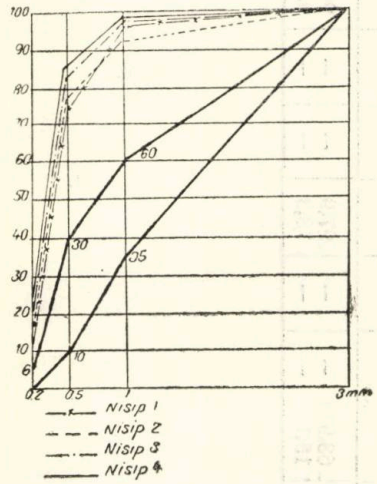


Fig. 3. — Compoziţia granulometrică (0...3 mm) a nisipului de Dunăre de la km 249...250 (probele *1*, *3*, *4*), faţă de curbele limită ale nisipului pentru mortarele de injecţie.

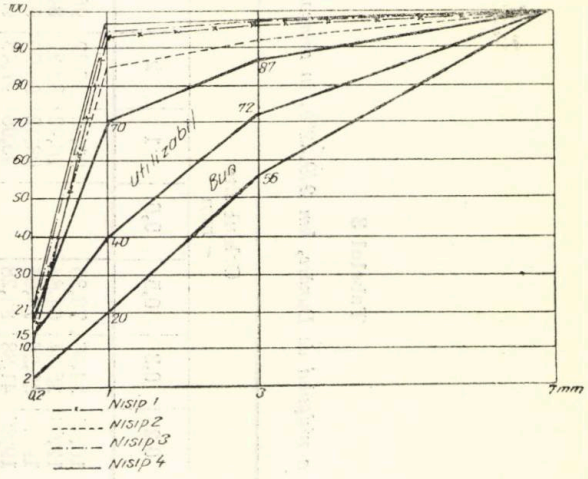


Fig. 4. — Compoziţia granulometrică (< 7 mm) a nisipului de Dunăre de la km 249...250 (proba *2*), faţă de curbele limită ale nisipului pentru mortare.

mortare de tencuială, mortare de injecţie (0...3 mm) (fig. 3 şi 4). Curba probei *2* se apropie de curba limită a nisipului pentru mortarele de zidărie (fig. 4). Pentru lucrările de drumuri (covoare asfaltice) nisipul este corespunzător cu menţiunea că fracţiunea 0,5...0,2 mm este situată la limita superioară admisă.

e) *Suprafeţele specifice* (v. tabelul 3), determinate prin metoda permeabilităţii utilizînd ca agent de pătrundere aerul atmosferic [3], arată de asemenea că este vorba de un nisip fin (S_g = 250,6...308,75 cm²/g).

În concluzie, cu toate că la determinările de laborator s-au constatat unele diferenţe între proba *2* şi probele *1*, *3*, *4*, acestea sînt totuşi destul de mici, încît în practică amestecarea lor nu va da loc la modificarea caracteristicilor lor generale.

Tabelul 3

Compoziția granulometrică a nisipului de Dunăre, km 249...250, în comparație cu alte nisipuri

Proba		Ochiul sitei mm													Supraf. specif. S_g cm²/g
		0,06	0,075	0,09	0,2	0,3	0,5	0,6	1	2	3	5	7	10	
Nisip de Dunăre	Proba *1*	0,32		0,78	10,68	24,96	70,36		91,96	96,02	96,48		98,20	100	250,60
	Proba *2*	0,40		0,80	12,68	35,34	64,84		76,92	83,22	84,48		91,28	100	296,35
	Proba *4*	0,32		0,96	19,24	36,26	78,66		93,42	96,90	97,40		98,80	100	302,50
	Proba *4*	0,24		0,84	19,86	41,88	82,28		95,08	97,48	98,38		99,60	100	308,75
Nisip de Vădeni		—	7,9	—	63,9	—	—	97,9	—	—	99,1	100			
Nisip de Suraia		—	—	2,4	15,1	—	—	78,3	—	—	93,5	100			

4. Posibilităţi de utilizare a nisipurilor de Dunăre, km 249...250

a) *Mortare de zidărie şi tencuială cu nisip de Dunăre*

Cu toate că sînt nisipuri mai fin grăunţoase decît prevăd normativele, avînd în vedere totuşi că se pretează la compactare ($\varrho_g = 1\,800$ kg/m^3), au un volum de goluri mic şi părţi levigabile în proporţie reduse ($< 1{,}5\%$), am considerat util să experimentăm o serie de reţete de mortare spre a se stabili care sînt limitele admisibile ale utilizării lor în acest domeniu.

În tabelul 4 sînt prezentate tipurile de mortare care s-au experimentat, dozajul şi rezistenţele obţinute la 28 zile de la confecţionare. Se constată următoarele:

a) Cu excepţia mărcii 100, celelalte mărci au fost depăşite (v. fig. 5) şi în special cu nisipul din proba *1*; dozajul de liant s-a încadrat în limitele obişnuite prevăzute de norme.

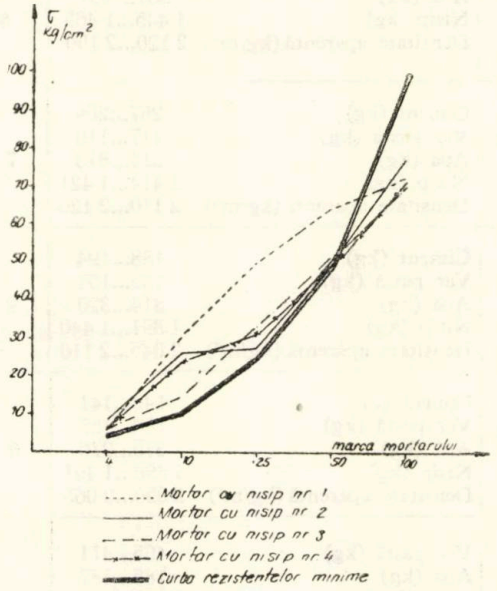


Fig. 5. —Rezistenţele la compresiune ale mortarelor cu nisip de Dunăre, km 249...250, faţă de mărcile urmărite.

b) Pentru obţinerea mortarului cu marca 100 trebuie fie corectată curba granulometrică, fie sporit dozajul în ciment.

c) De oarece probele *1*, *3*, *4* au granulozitatea în general sub 3 mm, mortarele specificate în tabelul 4 ca bune pentru zidărie pot fi considerate mortare de tencuială (la care granulozitatea maximă ajunge la 3 mm).

b) *Covoare asfaltice cu subif*

De oarece compoziţia granulometrică a nisipului de Dunăre nu se încadrează total în zona agregatelor optime pentru astfel de lucrări, această deficienţă s-a înlăturat prin adaos de nisip de Vădeni (30%). In modul acesta s-au putut obţine covoare asfaltice cu subif.

Tabelul 4

Caracteristicile mortarelor cu nisip de Dunăre, km-249...250

Nr. crt.	Marca mortar	Dozajul volume (STAS)	Dozajele în greutate		Consistența con etalon cm	Rezistența medie compresiune kgf/cm² probele			
						1	*2*	*3*	*4*
Mortare pentru zidărie									
1	100	1 : 4 ciment	Ciment (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	314...319 361...366 1 445...1 465 2 120...2 150	6	73	78	71	72
2	50	1 : 0,4 : 5 ciment-var	Ciment (kg) Var pastă (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	267...269 117...119 311...313 1 414...1 421 2 110...2 120	7	64	50	52	50
3	25	1 : 0,7 : 7 ciment-var	Ciment (kg) Var pastă (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	188...194 146...151 314...320 1 391...1 440 2 045...2 110	8	50	27	33	32
4	10	1 : 1 : 10 var-ciment	Ciment (kg) Var pastă (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	140...141 153...157 275...276 1 480...1 491 2 050...2 065	6	31	26	15	24
5	4	1 : 3 var	Var pastă (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	465...471 185...187 1 320...1 332 1 970...1 990	8	6	0,5	6,4	6,0
Mortare pentru tencuieli									
1	50	1 : 0,3 : 4 ciment	Ciment (kg) Var pastă (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	305...308 95...97 308...310 1 402...1 415 2 110...2 130	7	97	72	55	66
2	25	1 : 1 : 6,5 ciment	Ciment (kg) Var pastă (kg) Apă (kg) Nisip (kg) Densitate aparentă (kg/m³)	200...204 222...228 268...273 1 378...1 405 2 070...2 090	7	50	36	43	32

Un astfel de covor a fost executat în anii 1960 şi 1961 pe drumul regional 204 Brăila–Măicăneşti (Raionul Rîmnicul Sărat). Rezultatele încercărilor, redate în tabelul 5, au fost obţinute pe probe (plăci, cilindri) recoltate în iunie 1962 din acest covor, deci după circa un an de circulaţie.

Tabelul 5

Caracteristicile fizico-mecanice ale probelor de covor asfaltic cu subif[4])

Proprietăţile fizico-mecanice	Probe din covoare asfaltice executate în anii			
	1960		1961	
	Plăci	Cilindri	Plăci	Cilindri
Densitatea aparentă (t/m³)	2,062	1,985	2,065	2,017
Absorbţia de apă (% vol.)	11,7	15,5	8,6	12,8
Rezistenţa la compresiune la 20°C (kgf/cm²)	—	23,8	—	30,5

5. Forme actuale de utilizare

În prezent nisipul de Dunăre de la km 249...250 este utilizat de către secţia drumuri a Sfatului Popular Regional, Galaţi, pentru lucrări de drumuri: la Galaţi (1 006 t anual) şi Brăila (5 000 t anual), în special la lucrări cu subif. Forma în care îl utilizează: 70% nisip de Dunăre + 30% nisip de Siret (Doaga, Suraia).

Trustul Regional de Construcţii, Galaţi, foloseşte acest nisip în volum mare (49 000 m³ în anul 1964) preferîndu-l la lucrări de tencuieli, datorită fineţii şi purităţii.

Preţul de cost al nisipului de Dunăre revine la aproximativ 27,30 lei/t loco port Galaţi.

6. Concluzii

Concluziile generale asupra caracteristicilor pe care le prezintă formaţiunile aluvionare din sectorul 3 şi asupra formelor juste de a le utiliza în construcţii, vor fi prezentate la încheierea studiului asupra tuturor depozitelor de nisip din acest sector.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geologie şi geotehnie
şi
Institutul politehnic, Galaţi

BIBLIOGRAFIE

1. *** *Monografia geografică.* I., *Geografia Fizică.* Ed. Acad. R. P. R., 1960.
2. *** *Indicateur kilométrique du Danube.* Budapest, 1958.
3. Constantinescu Fl., *Asupra unor metode pentru determinarea suprafeţei specifice la piatră spartă şi nisip.* Lucr. şt. Inst. polit. Galaţi, Fac. mec., 1963, I, pp. 173–181.
4. *** Indicator de norme de deviz C-1961.
5. *** STAS 1 667-62, 4 606-62, 1 030-55.

[4]) Buletinele de analiză aparţin Sfatului Popular Regional, Galaţi.

ИССЛЕДОВАНИЯ ДУНАЙСКИХ ПЕСКОВ КАК СТРОИТЕЛЬНОГО МАТЕРИАЛА (I)

(Резюме)

После общего обзора речных отложений третьего дунайского сектора (Бэлциле Иаломицей, Брэилей) даются результаты лабораторных исследований (химический и минералогический составы, физические свойства) песков приречной полосы на 249...250 км (Хыршова), а также их сравнения с песками ископаемыми.

Основываясь на найденых их свойствах и результатах экспериментальных исследований строительных смесей, штукатурок, и поведения их во времени в некоторых шоссейных асфальтовых смесях (для которых эти пески были найдены годными), заключаются возможности и способы их использования в производстве.

В дальнейшем будут производиться и другие исследования в этой области и изыскиваться способы использования этих песков в строительстве.

Объяснения рисунков

Рис. 1.—Песчаная полоса между км. 249...250, в эксплуатации.

Рис. 2.—Песчаная полоса между км. 249...250, (деталь к фиг. 1.).

Рис. 3.—Гранулометрический состав (0...3 мм) дунайского песка между км. 249...250 (пробы *1, 3, 4*) в отношении граничных кривых песка для смесей и инжекций.

Рис. 4.—Гранулометрический состав (< 7 мм) дунайского песка между км 249...250 (проба *2*) в отношении граничных кривых песка для смесеи.

Рис. 5. — Сопротивление на сжатие смесей на дунайском песке, км 249...250, сравнимаемое с исследуемыми марками.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 621.64

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОЛЬЦЕВЫХ ВОДОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ

А. Я. ЛАСИС

Пусть даны: схема водопроводной сети, состоящая из p участков, m узлов и n колец, при этом $m + n - p = 1$; длины участков и диаметры труб; питание и водоотборы, сосредоточенные в узлах сети.

Требуется определить расходы воды, их направления и потери напора во всех участках сети с наперед заданной точностью.

Задача решается на электронно-вычислительной машине по следующему алгоритму:

1. Производится первоначальное распределение расходов по всем участкам сети с соблюдением баланса воды во всех узлах:

$$\sum_{i \in M_k} \bar{q}_i = 0, \tag{1}$$

где M_k — множество индексов тех пронумерованных расходов $\bar{q}_i$, которые приходят (+) к k-тому узлу или отходят (—) от этого узла ($k = 1, 2, \ldots, m$).

Неизвестные расходы $\bar{q}_i$ в k-том узле сети распределяются по формуле:

$$\bar{q}_i = -\sum_{i \in M_k} \bar{q}_i^* : (n_k - n_k^*). \tag{2}$$

Здесь $\bar{q}_i^*$ — известные (к моменту вычисления) в k-том узле величины расходов со знаками, определенными как выше указано, n_k — общее число пронумерованных расходов в k-том узле, n_k^* — число известных величин расходов в том же узле.

Узлы сети следует пронумеровать в порядке их расчета по формуле (2), начиная с любого узла питания. При этом в любом узле, за исключением последнего, к моменту его расчета (2) должно

быть не менее одного неизвестного расхода, т. е. необходимо выполнить условие $n_k - n_k^* \geqslant 1$.

2. Вычисляются потери напора h_i для всех участков сети по любой известной формуле, которая соответствует условиям работы рассчитываемой сети.

3. Вычисляются невязки напора Δ_j для всех колец сети:

$$\Delta_j = \sum_{i \in M_j} \bar{h}_i, \tag{3}$$

где M_j — множество индексов тех пронумерованных участков сети, которые разграничивают j-тое кольцо, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\bar{h}_i$ — потеря напора на i-том участке со знаком, который зависит от направления потока воды. При этом условно принимается положительный знак для тех участков j-того кольца, на которых направление потока воды совпадает с направлением обхода этого кольца по его элементам так, чтобы область внутри кольца находилась направо, а отрицательный знак принимается для тех участков, в которых направление потока воды противоположно к направлению упомянутого обхода кольца.

4. Сравниваются $|\Delta_j|$ с $|h^*|$, где h^* — допустимая невязка напора в кольцах (заданная точность расчета).

5. Если хотя бы в одном кольце $|\Delta_j| > |h^*|$, тогда вычисляются оперативные расходы q_i^+ и q_i^- для всех участков сети:

$$q_i^+ = q_i + 0{,}5\,\lambda, \tag{4}$$

$$q_i^- = q_i - 0{,}5\,\lambda, \tag{5}$$

$$\lambda = 10^{n-N}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{6}$$

где n — порядок наименьшего, по абсолютной величине, расхода из всех расходов, рассчитанных в операции 1, N — номер итерации по порядку выполнения.

6. Повторяется операция 2 для всех оперативных расходов q_i^+ и q_i^-, рассчитанных в операции 5. При этом получается для всех участков сети h_i^+ и h_i^-.

7. Вычисляются разности потерь напора δ_i для всех участков сети:

$$\delta_i = h_i^+ - h_i^-. \tag{7}$$

8. Вычисляются a_{jj} для всех колец сети:

$$a_{jj} = \sum_{i \in M_j} \delta_i. \tag{8}$$

9. Вычисляются a_{jk} для всех смежных колец j и k:

$$a_{jk} = -\sum_{i \in M_{jk}} \delta_i, \tag{9}$$

где M_{ik} — множество индексов тех пронумерованных участков сети, которые разграничивают смежные кольца j и k между собой.

10. Решается система линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{10}$$

где A — симметричная матрица n-ого порядка, элементы которой a_{jj} вычислены в операции 8, $a_{jk} = a_{kj}$ вычислены в операции 9 для смежных колец j и k, остальные элементы матрицы равны нулю, x — неизвестный n-мерный вектор, b — вектор, координаты которого вычислены в операции 3 с обратными знаками, т. е. $b_j = -\Delta_j$, n — число колец в сети.

11. Вычисляются исправленные расходы q'_i для всех участков сети, которые входят только в j-тое кольцо:

$$\bar{q}'_i = \bar{q}_i + \lambda x_j, \tag{11}$$

или в два смежных кольца j и k:

$$\bar{q}'_i = \bar{q}_i + \lambda x_j - \lambda x_k, \tag{12}$$

где $\bar{q}$ — расход на i-том участке со знаком, определенным для j-ого кольца по правилу, изложенному при объяснении формулы (3).

12. Повторяются операции 2...4 со всеми исправленными расходами q'_i. При этом получаются соответственно h'_i и Δ'_j.

13. Если хотя бы в одном кольце $|\Delta'_j| > |h^*|$, тогда повторяются операции 5...12, используя исправленные расходы.

14. Задача решена, когда во всех кольцах сети

$$|\Delta_j^{(\nu)}| < |h^*|, \tag{13}$$

где (ν) — индекс последней итерации.

Все строки (столбцы) матрицы A системы (10) являются линейно независимыми, что можно легко доказать, так как во всех строках (столбцах) между их элементами существует соотношение

$$a_{jj} \geqslant \sum_k |a_{jk}|, \quad (k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n). \tag{14}$$

Следовательно система (10) является определенной и имеет единственное решение.

Изложенный выше алгоритм обеспечивает весьма быструю сходимость итерационного процесса, так как при каждой итерации автоматически уточняются все элементы матрицы, которые выражают взаимодействие всех участков и колец сети.

В качестве примера в таблице 1 приводятся сводные результаты расчета водопроводной сети, состоящей из 180 участков и 50 колец.

Таблица 1

Этапы расчета	λ л/сек	$\max \lvert \Delta_j \rvert$ м	$\sum_{j=1}^{50} \lvert \Delta_j \rvert$ м
Начало		11,359	97,945
Первая итерация	10,0	1,262	15,518
Вторая итерация	1,0	0,056	0,397
Третья итерация	0,1	0,000	0,001

За три итерации сумма модулей первоначальных невязок напора в кольцах уменьшилась в 100 000 раз. Для расчета этого примера понадобилось 6 минут времени электронно вычислительной машины БЭСМ-2.

Поступила 10 I 1967 г.

Латвийская сельскохозяйственная академия, Рига, СССР

ALGORITM DE CALCUL AL CONDUCTELOR INELARE DE APĂ

(Rezumat)

Autorul expune un algoritm util pentru calculul conductelor inelare de apă, efectuat cu ajutorul maşinilor electronice de calcul. Algoritmul se bazează pe rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare, ce se formează automat în funcţie de datele furnizate de reţelele luate în consideraţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 628.2

CONTRIBUŢII LA METODICA DE CALCUL A BAZINELOR DE RETENŢIE ÎN CANALIZĂRI

DE

M. GIURCONIU, CORNEL JURA, GH. POPA, şi I. MIREL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Generalităţi

Canalele ce transportă ape meteorice în reţelele de canalizare ale centrelor populate sau ale industriilor sînt supuse la variaţii mari de debite, în funcţie de caracteristicile ploilor de calcul. Au secţiuni mai reduse decît cele corespunzătoare celor mai abundente ploi şi totuşi funcţionează la plin foarte rar şi pe durată scurtă. De asemenea la bazine de recepţie mari şi în continuă creştere şi la ploi de intensităţi mari rezultă secţiuni mari de canale care duc la cheltuieli de investiţie exagerate.

Bazinele de retenţie se încadrează în complexul reţelelor de canalizare atît pentru reducerea dimensiunilor canalelor cît şi pentru micşorarea capacităţii staţiilor de pompare a apelor transportate prin canale, cînd aceste ape nu mai pot fi evacuate gravitaţional. În atari situaţii se pot folosi eficient şi lacurile sau depresiunile de pe vatra canalizată, adaptîndu-le scopului de înmagazinare pe durata descărcării colectoarelor. În cartiere cu clădiri dese se vor construi numai bazine subterane. Situaţia cea mai favorabilă corespunde cazului cînd apa din unda de viitură, ce este înmagazinată în bazinele de retenţie, este evacuată treptat pe cale gravitaţională printr-un debit atenuat după trecerea viiturii. Bazinele de retenţie se pot prevedea în reţele noi de canalizare dar mai ales în reţele vechi cu capacitatea de transport depăşită prin extinderea suprafeţei canalizate sau prin mărirea gradului de amenajare a bazinului de recepţie.

2. Metode de calcul ale bazinelor de retenţie

În literatura de specialitate sînt cunoscute diferite metode de calcul ale bazinelor de retenţie.

Din [1] rezultă că volumul necesar al bazinelor de retenţie a apei este dat de valoarea maximă a diferenţei dintre volumul scurs care intră în bazin ($V_s = f(t)$) şi volumul evacuat care iese din bazin ($V_d = f(t)$). Funcţia $V_s = f(t)$ depinde de caracteristicile ploii, ale bazinului de recepţie şi ale reţelei de colectare şi transport a apei, iar V_d poate fi aproximat cu o formă liniară. Calculele se pot conduce în mod rapid cu ajutorul unei diagrame în care se suprapun peste curbele V_s, curbele V_d. Curbele V_s din această diagramă sînt trasate pentru diferite valori ale duratei de parcurgere a reţelei de canalizare în ipoteza că ploaia de calcul atinge volumul precipitaţiilor zilnice.

În baza unor numeroase calcule numerice se deduce [2] că volumul maxim al bazinului de retenţie din care se pompează un debit Q_1 se obţine pentru $t_p > t_s$ (fig. 1), că la diferite debite Q_1 se obţin volume maxime pentru diferite valori t_p şi că unei valori date a raportului Q_1/Q îi corespunde un raport V/V_s (fig. 2) practic constant pentru bazine cu caracteristicile S, φ, i şi t_s diferite. Volumul bazinului se determină din relaţia:

$$V = kV_s, \tag{1}$$

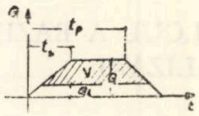


Fig. 1. — Hidrograful teoretic pentru dimensionarea bazinelor de retenţie.

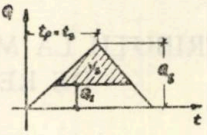


Fig. 2. — Hidrograful teoretic pentru dimensionarea canalelor.

în care coeficientul k se determină din relaţia stabilită din prelucrarea datelor:

$$k = 0{,}664 + \frac{0{,}232}{z}, \tag{2}$$

ar $z = Q_1/Q$.

În aceeaşi lucrare [2] se fac comparaţii cu formula prof. Belov:

$$V = 0{,}001\,\alpha \left[0{,}25 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] Q_s t_s, \tag{3}$$

în care: V — volumul bazinului (m^3), 0,001 reprezintă coeficientul de transformare a dimensiunilor, Q_s — debitul din colector în secţiunea bazinului, (l/sec), pentru $t_p = t_s$, t_s — timpul de scurgere în canal, (sec), $\alpha = Q_1/Q$, Q_1 fiind debitul pompat.

3. Metoda propusă pentru calculul bazinelor de retenţie

Se consideră bazinul de retenţie din fig. 3 şi se pune problema determinării volumului maxim V_{max} al acestui bazin şi durata ploii de calcul t_p corespunzătoare acestui volum, pentru un debit de pompare Q_1. Volumul maxim al bazinului de retenţie corespunde hidrografului debitelor la bazin sub formă de trapez (fig. 4), adică ipotezei $t_p > t_s$, t_s find timpul de scurgere al apei în canalul de aport.

Volumul bazinului de retenţie corespunde trapezului haşurat *EBCF* şi se poate determina, în m^3, din relaţia:

$$V = V_t - V_1, \tag{4}$$

în care V_t — volumul, (m^3), corespunzător suprafeţei trapezului *ABCD*, iar V_1 — volumul, (m^3), corespunzător suprafeţei trapezului *AEFD*.

Cu notațiile din fig. 4 se poate scrie:

$$V_t = Q\frac{t_p + t_s + t_p - t_s}{2} = 0{,}00775\, S\varphi a \sqrt{t_p}, \tag{5}$$

$$V_1 = \left(t_p + t_s - \frac{Q_1 t_s}{0{,}00775\, S\varphi a/\sqrt{t_p}} \right) Q_1, \tag{6}$$

în care: Q — debitul apelor meteorice corespunzător timpului t_p, (m³/sec), t_p — durata ploii de calcul, (sec), t_s — timpul de scurgere în canalul de aport, (sec), S — suprafața bazinului de recepție, (ha), φ — coeficientul de scurgere, a — o constantă în funcție de caracteristicile ploilor, Q_1 — debitul pompat, (m³/sec).

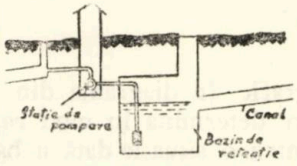


Fig. 3. — Schema bazinului de retenție în punctul final al unei rețele de canalizare.

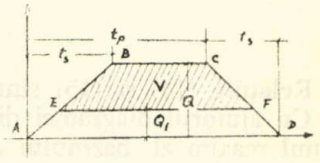


Fig. 4. — Hidrograful teoretic pentru dimensionarea bazinelor de retenție după metoda propusă.

Introducînd (5) și (6) în (4) se obține:

$$V = 0{,}00775\, S\varphi a \sqrt{t_p} - Q_1 t_p - Q_1 t_s + \frac{Q_1^2 t_s \sqrt{t_p}}{0{,}00775\, S\varphi a}. \tag{7}$$

Derivînd relația (7) în raport cu t_p se obține:

$$\frac{dV}{dt_p} = \frac{1}{2\sqrt{t_p}} \left(0{,}00775\, S\varphi a + \frac{Q_1^2}{0{,}00775\, S\varphi a} t_s \right) - Q_1. \tag{8}$$

Prin anularea derivatei se obține timpul t_p corespunzător volumului maxim:

$$t_p = \left(\frac{0{,}00775\, S\varphi a + Q_1^2 t_s / 0{,}0075\, S\varphi a}{2 Q_1} \right)^2. \tag{9}$$

Introducînd valoarea t_p din relația (9) în relația (7) se obține valoarea volumului maxim al bazinului de retenție:

$$V_{max} = \frac{(0{,}00775\, S\varphi a)^2}{4 Q_1} - \frac{Q_1 t_s}{2} + \frac{Q_1^3 t_s^2}{4\,(0{,}00775\, S\varphi a)^2}. \tag{10}$$

Este indicat ca relațiile (9) și (10) să se scrie sub formă adimensională prin introducerea notațiilor:

$$\frac{V_{max}}{V_t} = \alpha_V, \tag{11}$$

$$\frac{Q_1}{0{,}00775\, S\varphi a/\sqrt{t_s}} = \alpha_Q, \tag{12}$$

$$\frac{t_s}{t_p} = \alpha_t, \tag{13}$$

unde: α_V — raportul dintre volumul maxim al bazinului de retenție și volumul total, α_Q — raportul dintre debitul pompat și debitul meteoric maxim ce poate să apară la vărsarea canalului colector în bazinul de retenție, α_t — raportul dintre timpul de scurgere și durata ploii de calcul pentru bazinul de retenție.

Introducînd relațiile (12) și (13) în relația (9) se obține:

$$\alpha_t = \left(\frac{2\alpha_Q}{1 + \alpha_Q^2} \right)^2 . \tag{14}$$

Substituind acum relațiile (11)...(14) în relația (10) se obține:

$$\alpha_V = \frac{(1 - \alpha_Q^2)^2}{2(1 + \alpha_Q^2)} . \tag{15}$$

Relațiile (14) și (15) sînt reprezentate grafic în diagrama din fig. 5.

Cu ajutorul diagramei din fig. 5 se poate determina în mod rapid atît volumul maxim al bazinului de retenție, pentru o situație dată a bazinului de recepție și pentru o stație de pompare cu debit cunoscut, cît și debitul de pompare necesar pentru o situație dată a bazinului de recepție și un volum al bazinului de retenție limitat de condiții constructive și economice.

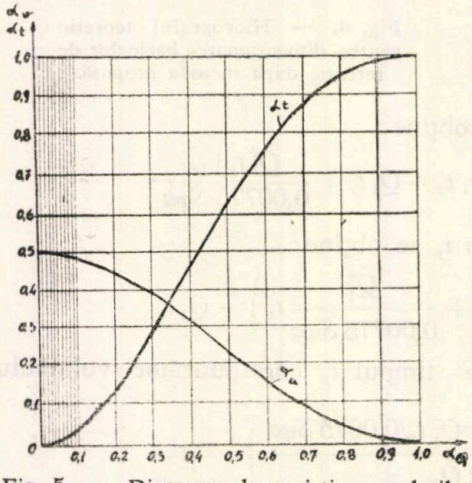


Fig. 5. — Diagrama de variație a valorilor α_V și α_t în funcție de α_Q.

În cazul determinării volumului maxim al bazinului de retenție corespunzător unui debit de pompare instalat Q_1 și unei rețele de canale caracterizată prin t_s, S, a și φ se calculează α_Q din relația (12) și valoarea obținută se fixează pe abscisă în diagrama din fig. 5. Ridicînd o verticală prin punctul fixat acesta va intersecta curbele α_t și α_V în cîte un punct pentru care se citesc valorile corespunzătoare ale rapoartelor α_t și α_V, pe ordonata diagramei. Din relația (13) se determină durata ploii de calcul t_p, corespunzătoare volumului maxim, din relația (5) se determină volumul total V_t iar apoi din relația (11) se determină volumul maxim V_{max}.

Dacă este necesară determinarea debitului pompat Q_1 pentru un volum de bazin și pentru o rețea de canale la care se cunosc t_s, S, a și φ se alege prin încercări o durată a ploii t_p și se calculează rapoartele α_V și α_t care se introduc în diagrama din fig. 5. În cazul cînd punctele corespunzătoare de pe curbele α_t și α_V se găsesc pe aceeași verticală se citește valoarea α_Q

cu ajutorul căreia se calculează valoarea Q_1 din relația (12). Debitul determinat astfel corespunde soluției optime din punct de vedere tehnico-economic.

În două exemple de calcul se va arăta modul de determinare a capacității maxime a unui bazin de retenție cu ajutorul metodei propuse:

Exemplul 1. pentru $S = 12$ ha, $\varphi = 0{,}5$, $a = 580$, $t_s = 15$ min și $Q_1 = 0{,}075$ m³/sec se calculează:

$$\alpha_Q = \frac{0{,}075}{\frac{0{,}00775 \times 12 \times 0{,}5 \times 580}{\sqrt{15 \times 60}}} = 0{,}0832.$$

Pe diagrama din fig. 5 se citesc valorile $\alpha_V = 0{,}448$ și $\alpha_t = 0{,}028$.

Se calculează timpul t_p din relația:

$$t_p = \frac{15}{0{,}028} = 535 \text{ min.}$$

Volumul maxim rezultă în acest caz:

$$V_{max} = 0{,}498 \times 0{,}00775 \times 12 \times 0{,}5 \times 580 \times \sqrt{535 \times 60} = 2\,380 \text{ m}^3.$$

Exemplul 2. Pentru $S = 12$ ha, $\varphi = 0{,}5$, $a = 580$, $t_s = 15$ min și $Q_1 = 0{,}400$ m³/sec se determină:

$$\alpha_Q = \frac{0{,}400}{\frac{0{,}00775 \times 12 \times 0{,}5 \times 580}{\sqrt{15 \times 60}}} = 0{,}445.$$

Pentru această valoare rezultă din fig. 5 valoarile $\alpha_V = 0{,}265$ și $\alpha_t = 0{,}56$.

Rezultă apoi:

$$t_p = \frac{15}{0{,}56} = 26{,}8 \text{ min,}$$

$$V_{max} = 0{,}265 \times 0{,}00775 \times 12 \times 0{,}5 \times 580 \times \sqrt{26{,}8 \times 60} = 268 \text{ m}^3.$$

În tabelul 1 se compară valorile obținute cu cele ce rezultă din formula propusă de prof. Belov, precum și cu cele din [1], [2], pentru aceleași elemente cunoscute.

Tabelul 1

Capacitatea bazinului de retenție determinată prin diferite metode

Exemplul	După metoda propusă		După formula prof. Belov	După [1]	După [2]
	V_{max}	t_p	V	V	V
	m³	min	m³	m³	m³
1	2 380	535	2 370	2 090	2 320
2	286	26,8	291	630	300

4. Concluzii

Bazinele de retenţie amplasate în complexele reţelelor de canalizare ale apelor meteorice influenţează şi sînt influenţate atît de reţeaua de canalizare cît şi de staţiile de pompare, dacă evacuarea apei din aceste bazine se efectuează prin pompare. Dacă pentru calculul reţelelor de canalizare se consideră ipoteza $t_s = t_p$, pentru bazinele de retenţie rezultă volume maxime în cazul ploilor de durate mai mari decît timpul de scurgere.

În lucrare s-a calculat atît volumul maxim al bazinului de retenţie pentru un canal de aport al unui bazin de recepţie determinat prin S, φ, a şi t_s şi pentru un debit de pompare Q_1 cunoscut cît şi timpul corespunzător ploii de calcul pentru care se obţine volumul maxim. Pentru uşurarea calculelor s-au introdus relaţii adimensionale şi s-a întocmit o diagramă în care sînt reprezentate grafic funcţiile $\alpha_t = f(\alpha_Q)$ şi $\alpha_V = f(\alpha_Q)$. Comparativ cu alte metode, din tabelul 1 rezultă că datele obţinute prin metoda prezentată nu diferă cu mai mult de $\pm 5\%$, în afară de datele obţinute în [1].

În concluzie dimensionarea bazinelor de retenţie prin metoda prezentată se face mai expeditiv dar cu aceeaşi precizie, comparativ cu alte metode, iar în plus se poate determina ploaia de calcul corespunzătoare bazinelor respective.

Institutul politehnic, Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Wittenberger A., *Dimensionarea bazinelor de reţinere la canalizări de apă pluvială.* Hidrotehnica, 1960, *5.*
2. Мандель С. И., *Расчет насосных станции и регулирующих резервуаров для дождевых вод.* М., 1952.

BEITRAG ZUR BERECHNUNGSMETODE DER RÜCKHALTEBECKEN IN KANALEN

(Zusammenfassung)

Das Studium der Rückhaltebecken welche vor den Pumpstationen liegen wird aus hydraulischen Standpunkt ausgemacht in dem man die Parameter welche von der Grösse des maximalen Lauminhalts abhängen, die Regenzeit und die gepumpte Durchflussmenge betrachtet.

En wurden dimensionslose Parameter verwendet auf Grund welcher ein opperatives Diagramm begründet wurde.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Der für Dimensionierung der Rückhaltebecken theoretischer Hydrograph·
Abb. 2. — Der für Dimensionierung der Kanäle theoretischer Hydrograph.
Abb. 3. — Rückhaltebecksschema im Endpunkt eines Kanalisationesnetzes.
Abb. 4. — Der für Dimensionierung der Rückhaltebecken wegen der ersetzten Methode theoretischer Hydrograph.
Abb. 5. — Variationsdiagramm der α_V- und α_t - Werte als Funktion von α_Q betrachtet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 626.8

CONTRIBUŢII LA PROBLEMA ÎMBUNĂTĂŢIRII ASPERSOARELOR CU PRESIUNE MEDIE ŞI MARE, FOLOSITE ÎN IRIGAŢII

DE

ECATERINA BLIDARU şi VALERIU BLIDARU

Extras din comunicarea prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

Introducerea în tehnica irigaţiei prin aspersiune a aspersoarelor cu presiuni medie şi mare, cu bătaie, lungă este consecinţa randamentelor scăzute pe care le oferă instalaţiile şi agregatele cu presiune mică (rampe oscilante cu orificii, duze pulverizatoare conice (fig. 1a) etc.).

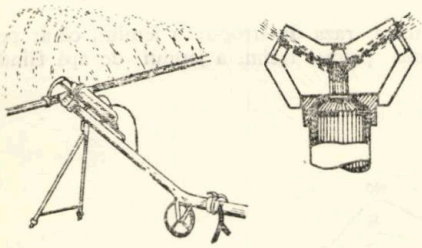


Fig. 1 a. — Dispozitive cu aripă oscilantă şi pulverizator conic.

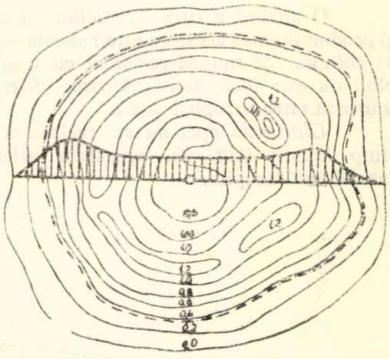


Fig. 1 b. — Graficul repartiţiei ploii.

Acestea din urmă deşi asigură ploi cu intensităţi şi uniformităţi satisfăcătoare (fig. 1 b), precum şi presiuni de servici reduse ($H = 0{,}2...2$ atm), totuşi au o folosire limitată în agricultura mare datorită suprafeţelor irigabile mici pe care le deservesc dintr-o anumită poziţie ($R_s = 5...10$ m) şi a volumului mare de muncă reclamat de deplasări.

Aparatele de aspersiune cu presiune medie şi mare au căpătat o extindere deosebită datorită productivităţii lor ridicate; ele pot uda dintr-o anumită poziţie suprafeţe de 4 000...40 000 m².

În tehnica irigaţiei sînt introduse numeroase tipuri de aspersoare de acest gen care se pot grupa după numărul de ştuţuri, după modul de distribuire a apei, după presiune etc.

După numărul ştuţurilor se diferenţiază (fig. 2): 1° aspersoare cu un singur ştuţ şi cu dispoziv de spargere a jetului (fig. 2 a, b, c); 2° aspersoare cu un singur ştuţ şi fără dispozitiv de spargere a jetului (fig. 2 d, e); 3° aspersoare cu mai multe ştuţuri (fig. 2 f, g, h, i).

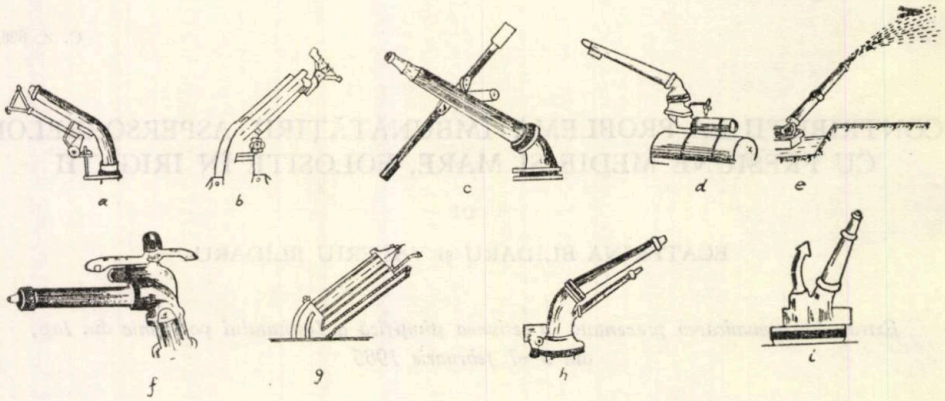


Fig. 2. — Aspersoare folosite în tehnica irigaţiei: *a, b, c* — aspersoare cu un singur ştuţ şi cu dispozitiv de spargere a jetului, *d, e* — aspersoare cu un singur ştuţ şi fără dispozitiv de spargere a jetului; *f, g, h, i* — aspersoare cu mai multe ştuţuri.

O analiză a caracteristicilor acestor aspersoare scoate în evidenţă următoarele aspecte: a) productivitatea acestora este ridicată — pot uda dintr-o poziţie suprafeţe mari (4 000...40 000 m); b) volumul de muncă reclamat cu transportul, dintr-o poziţie în alta, este redus; c) calitatea ploii nu este încă satisfăcătoare (distribuţia, coeficientul de pulverizare, mărimea picăturii, uniformitatea stropirii ş. a.).

Distribuţia apei nu se realizează uniform pe toată raza de stropire a jetului, chiar pe timp liniştit (fig. 3), suprafaţa aflată sub acţiunea primei treimi a jetului de apă fiind insuficient stropită.

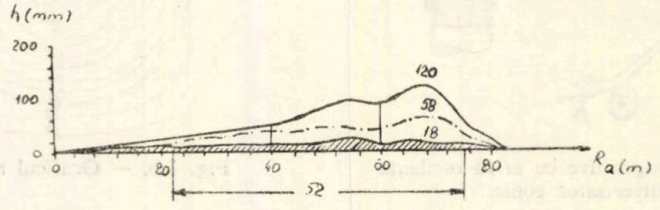


Fig. 3. — Curba de repartizare a ploii pulverizate de dispozitivele cu bătaie lungă.

Studiile întreprinse cu aspersoarele romîneşti cu presiune medie (A.S.M.) şi mare (A. R.-60) de către C. Gr. Popescu [7] verifică observaţiile de mai sus (fig. 4 a, b).

Coeficientul de pulverizare ($K_1 = dH^{-1}$, d — diametrul duzei şi H — presiunea la ştuţ) corespunde în general pentru ploi grosiere şi foarte grosiere ($K > 0{,}36$) la tipurile de aspersoare româneşti (A.S.M. şi A.R.-60).

Mărimea picăturilor depăşeşte valoarea mărimii optime ($\varnothing < 2$ mm).

Uniformitatea stropirii. Gradul de uniformitate ($G_u = i_m/i_{max}$, i_m — intensitatea medie reală şi i_{max} intensitatea a 3...5 puncte de intensitate maximă) al ploii corespunzătoare trebuie să aibă valori cît mai apropiate de unitate.

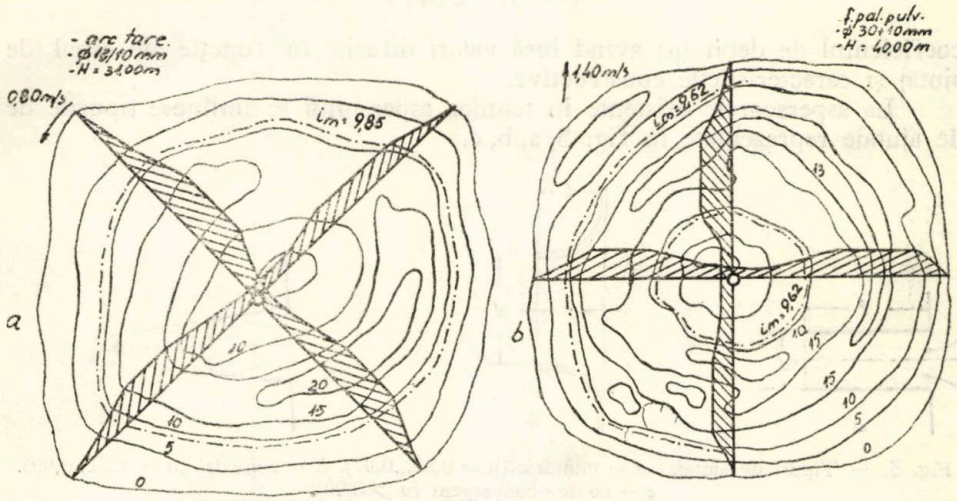


Fig. 4. — Diagrama stropirii; *a* — la aspersorul A.M.S., *b* — la aspersorul A.R.-60.

La aspersoarele A.S.M. şi A.R.-60 studiile [7] indică o uniformitate slabă: 0,112... 0,624 pentru aspersorul A.S.M. şi 0,225 ... 0,532 la aspersorul A.R.-60.

Datele asupra calităţii ploii, expuse sumar mai sus, scot în evidenţă cu suficientă claritate faptul că aspersoarele cu presiune medie şi mare nu asigură încă umectarea uniformă şi corespunzătoare a terenurilor agricole (aspersoarele româneşti ca şi celelalte tipuri construite cu scheme similare).

Avînd însă în vedere productivităţile ridicate ale aspersoarelor cu presiune medie şi mare, se impune concentrarea eforturilor în direcţia îmbunătăţirii calităţii ploii, astfel ca întreaga suprafaţă să fie udată uniform.

În acest scop s-au analizat următoarele aspecte hidraulice de care depind cele două calităţi (productivitate ridicată şi umectarea uniformă): a) elementele constructive ale aspersorului, în special ajutajul; b) caracteristicile structurale ale vînei de apă ieşită din ajutaj.

Pentru întregirea problemei s-au examinat de asemenea şi condiţiile de exploatare ale acestor aspersoare.

Aparatul de stropit cu presiune medie şi mare se compune dintr-un tub cilindric cu cot (20°...35° faţă de orizontală), legat la sursa de apă sub presiune, în diverse moduri: prin hidrant, amplasat direct pe mufa de lucru a conductei sub presiune, amplasat pe refularea pompei etc.

Acest tub cilindric înclinat este terminat printr-un ajutaj, prin care jetul de apă este proiectat în atmosferă; forma şi dimensiunile ajutajului

influenţează caracteristicile hidraulice şi geometrice ale jetului de aspersiune şi calitatea ploii.

Debitul de apă ce iese din ajutaj se determină cu relaţia cunoscută:

$$Q = \mu\Omega\sqrt{2gh},$$

coeficientul de debit (μ) avînd însă valori diferite în funcţie de tipul de ajutaj şi caracteristicile constructive.

La aspersoarele existente în tehnica aspersiunii se întîlnesc tipurile de de ajutaje reprezentate în fig. 5, a, b, c.

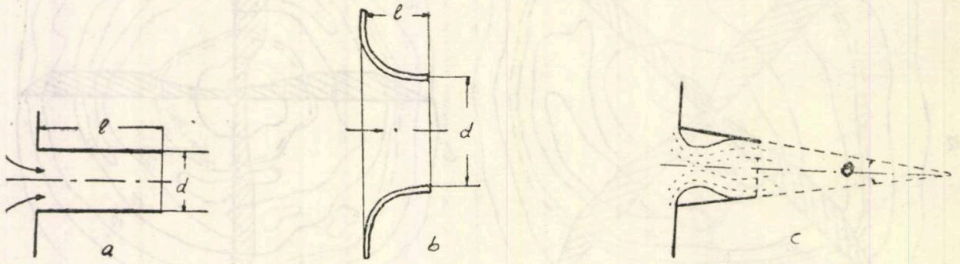


Fig. 5. — Tipuri de ajutaje; *a* — cilindric ($\mu = 0{,}82...0{,}97$), *b* — conoidal ($\mu = 0{,}96...0{,}99$), *c* — conic—convergent ($\mu > 0{,}90$).

La alegerea ajutajelor pentru aspersoare trebuie să se realizeze cerinţa ca jetul de apă să iasă sub formă cilindrică, fără mişcări turbionare (la unele aspersoare tuburile principale sînt prevăzute cu dispozitive interioare în acest sens: tuburi, aripi directoare etc.).

Aspersoarele trebuie să asigure pe de o parte bătaia maximă a jetului de apă (condiţie ce impune ca vîna la ieşirea din ajutaj să fie cît mai compactă), iar pe de altă parte trebuie să asigure udarea uniformă a întregii suprafeţe, de la aspersor pînă la extremitatea picăturilor (condiţie ce impune ca pulverizarea vînei de apă să înceapă imediat de la ieşirea din ajutaj).

Aceasta a constituit una din cauzele ce a întîrziat crearea unui tip de aspersor care să satisfacă ambele cerinţe: a) productivitate mare (rază de stropire mare); b) ploaie uniformă pe întreaga suprafaţă.

O îmbunătăţire a tehnicii aspersiunii, respectiv a aspersoarelor, ar însemna şi îmbinarea caracteristicilor celor două zone de vînă la ieşirea din ajutaj: vîna compactă şi vîna pulverizată.

Pînă în prezent problema a fost soluţionată parţial prin suplimentarea ştuţului principal, ce asigură raza maximă de stropit, cu ştuţuri secundare sau cu alte dispozitive de împrăştiere (spargerea jetului): turbine, palete, etc. (v. fig. 2).

Vîna de apă (jetul) iese din ajutaj în atmosferă, compactă, iar după un parcurs se descompune (se destramă) în fascicole secundare şi apoi în picături, căzînd sub formă de ploaie pe teren.

Fenomenele de destrămare şi pulverizare, la care participă următoarele forţe: diferenţele de presiune interioară, rezistenţa aerului, tensiunea superficială şi vîscozitatea (ca forţă stabilizatoare), zonează vîna de apă longitunal şi transversal, ca în fig. 6 [3].

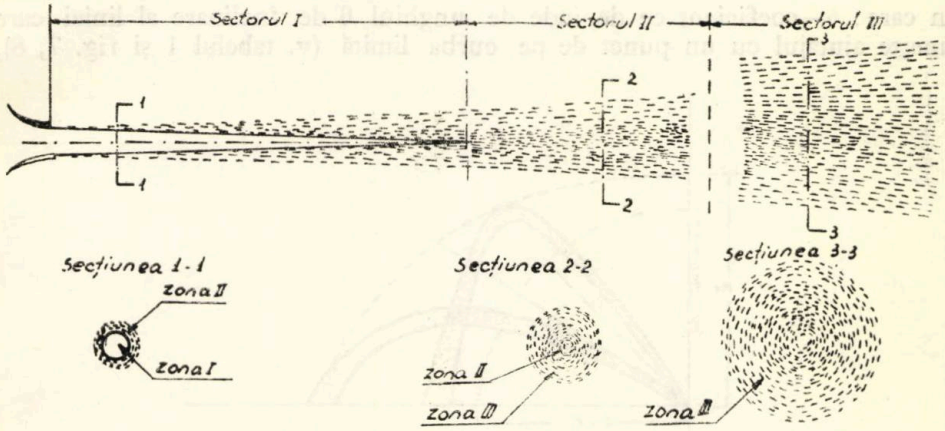


Fig. 6. — Zonarea structurală a unei vîne de apă în atmosferă.

La irigaţia prin aspersiune interesează instalarea domeniului de pulverizare pe întreaga lungime a razei de stropit; această situaţie este greu de obţinut la aspersoarele cu jet mediu şi lung însă realizarea sa este posibilă prin ridicarea presiunii de servici şi prin suplimentarea ştuţurilor principale cu mai multe ştuţuri secundare, în anumite condiţii tehnice şi hidraulice ce se vor expune în cele ce urmează.

Se impune cunoaşterea în prealabil a domeniilor în care cele trei zone ale vînei îşi exercită efectul.

Aspersoarele realizează tipuri de *vîne înclinate*, care sînt mai puţin studiate din punct de vedere teoretic decît cele verticale; expresia analitică a ecuaţiei traiectoriei vînei înclinate (reale) n-a fost determinată deoarece rezistenţele ce iau naştere în timpul mişcării nu sînt complet cunoscute.

Curba înfăşurătoare a tuturor traiectoriilor vînelor ce ies din aspersor — curba limită a vînelor descompuse — este redată în fig. 7.

Soluţionarea corespunzătoare a problemei îmbunătăţirii aspersoarelor reclamă mai întîi precizarea, aşa cum s-a spus, a celor trei domenii: domeniul vînei compacte, domeniul vînei dispersate şi cel al vînei pulverizate. Ultimele două domenii practic se interpătrund (v. fig. 6) în aşa fel încît pot fi luate în consideraţie două domenii mari: A—domeniul vînei compacte (I) şi B—domeniul vînei dispersate şi pulverizate (II+III).

Rezultă de mai sus că este necesară determinarea distanţelor $R_c = l_c$ şi l—lungimea razei de stropit.

Distanţa de la ajutajul aspersorului la curba limită a vînei pulverizate (R_a) se calculează cu relaţia:

(1) $$R_a = \delta H_v \quad [\text{m}],$$

în care: δ—coeficient ce depinde de unghiul θ de înclinare al liniei care uneşte ajutajul cu un punct de pe curba limită (v. tabelul 1 şi fig. 7, 8),

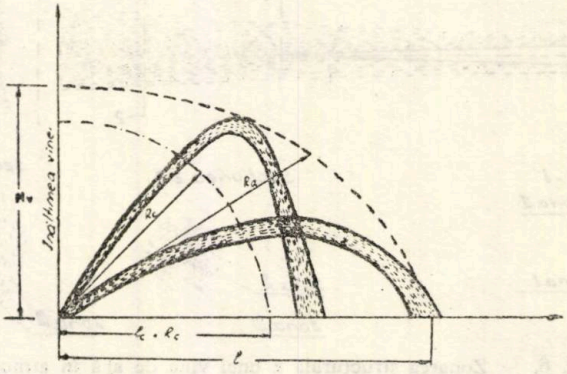


Fig. 7. — Traiectoriile vînelor înclinate şi zonarea lor.

Tabelul 1

Valoarea coeficientului δ în funcţie de unghiul θ

$\theta°$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
δ	1,40	1,30	1,20	1,12	1,07	1,03	1,00

H_v—înălţimea la care ajung picăturile izolate ale vînei de apă pe verticală ($H_v = H - \Delta H$, H—presiunea sub care are loc ieşirea din ajutaj sau înălţimea teoretică a vînei, ΔH—pierderile de presiune).

Prin analogie cu formula pierderilor liniare:

(2) $$h_l = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

se pot stabili două tipuri de formule pentru pierderile de presiune:

(3) $$\Delta H = K_1 \frac{H_v}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$ (4) $$\Delta H = K_2 \frac{H}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

admiţînd că $v^2/2g = H$; notînd $\varphi = K_1/d$ şi substituind în formulele (3) şi (4) se obţine:

$$(3') \quad H_v = \frac{H}{1 + \varphi H}, \qquad (4') \quad H_v = H\left(1 - K_2 \frac{H}{d}\right).$$

φ are dimensiunea $[L^{-1}]$ şi variază în funcţie de diametrul $\varnothing$ al ajutajului între valorile: $\varphi = 0{,}0228$ şi $\varphi = 0{,}0014$ pentru $\varnothing = 10$ mm, respectiv 50 mm (formula lui Lüger).

După datele experimentale ale lui Firman $K_2 = \text{const.} = 0{,}000113$ (ajutaj convergent-cilindric).

Între coeficienţii K_1 şi K_2 există relaţiile:

$$(5) \quad K_1 = \frac{K_2}{1 - K_2 H/d}, \qquad (6) \quad K_2 = \frac{K_1}{1 - K_1 H/d}.$$

Interpretarea în comun a formulelor lui Firman şi Lüger conduce la formula generală:

$$(7) \quad H_v = \frac{H}{1 + \beta},$$

în care $\beta = f(H, d)$, (v. tabelul 2).

Tabelul 2

Valorile coeficienţilor β şi α

Înălţimea vînei $H_v = \frac{H}{1+\varphi H}$ (m)	7	9,5	12	14,5	17,2	20	24,5	26,8	30,5	35	48,5
Înălţimea zonei compacte H_c (m)	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	28
Coeficientul β	0,840	0,840	0,835	0,825	0,815	0,805	0,780	0,760	0,725	0,690	0,60
Coeficientul α	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,24	1,27	1,32	1,38	1,45	1,67

Din cele de mai sus rezultă că bătaia totală a vînei de apă sau distanţa dintre ajutaj şi curba limită a vînei pulverizate ($R_a = \delta H/(1 + \beta)$) creşte pe măsură ce unghiul de înclinare scade.

În fig. 8 se reprezintă grafic [4] vînele înclinate, cu unghiuri diferite faţă de orizontală, care ies dintr-un ajutaj cu $d = 1^1/_8''$ şi presiunea de servici $H = 28{,}1$ m; la $\theta = 45°$, $R_a = 40$ m, iar la $\theta = 75°$, $R_a = 20$ m.

Teoretic lungimea razei de stropit se determină în funcţie de bătaia vînei de apă, ca fiind proiecţia acesteia pe axa Ox (fig. 9).

După cum s-a menţionat, expresia analitică a ecuaţiei traiectoriei vînei înclinate reale n-a fost determinată deoarece rezistenţele ce iau naştere în timpul mişcării nu sînt complet cunoscute [4], [6].

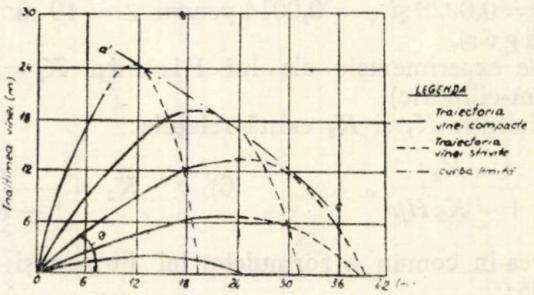


Fig. 8. — Repartizarea vînelor înclinate.

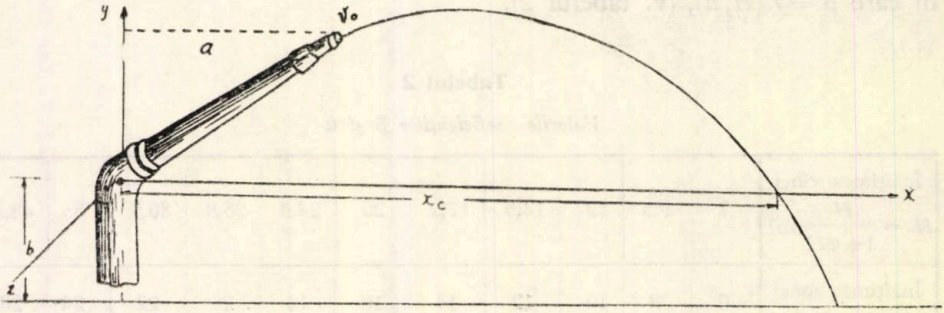


Fig. 9. — Traiectoria vînei de apă.

Totuşi se poate aproxima lungimea razei medii de stropit $l = x_c$ în ipoteza că se neglijează în calcule rezistenţa mediului (datorită faptului că vitezele iniţiale sînt relativ reduse şi bătăile maxime ale traiectoriei sînt mici).

Ecuaţiile de mişcare vor fi deduse din teorema mişcării centrului de masă aplicată unui tronson din jetul aruncat.

Pulverizarea apei făcîndu-se pe teren, de o parte şi alta a traiectoriei calculate a centrului de masă [5], ecuaţia mişcării este $M\ddot{\mathbf{r}}_c = M\mathbf{g}$, conducînd la ecuaţiile de proiecţie (mişcarea are caracter spaţial) pe axele Ox, Oy, Oz:

$$\ddot{x}_c = 0, \quad \ddot{y}_c = -g, \quad \ddot{z}_c = 0,$$

la care se adaugă sistemul de condiţii iniţiale (corespunzătoare formei aspersorului şi mişcării de rotaţie cu viteza unghiulară $\omega = \pi n/30$ a aspersorului), care sînt:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x_c = a \cos \alpha, \\ y_c = a \sin \alpha, \\ z_c = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_c = v_0 \cos \alpha, \\ y_c = v_0 \sin \alpha, \\ z_c = a \cos \alpha\omega, \end{cases}$$

α fiind unghiul format de axa aspersorului cu planul orizontal.

Integrînd sistemul şi impunînd condiţiile iniţiale (la $t = 0$) se obţin ecuaţiile de mişcare:

$$(8) \qquad \begin{cases} x_c = a \cos \alpha + (v_0 \cos \alpha)\, t, \\ y_c = a \sin \alpha + (v_0 \sin \alpha)\, t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ z_c = (a \cos \alpha\omega)\, t = \left(a \dfrac{\pi n}{30} \cos \alpha\right) t. \end{cases}$$

Coordonatele punctului în care centrul de masă al tronsonului va atinge solul vor fi obţinute introducînd în expresia lui y_c, $y_c = -b$ şi rezolvînd în raport cu timpul t ecuaţia:

$$(9) \qquad t^2 - 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} t - \frac{2}{g}(b + a \sin \alpha) = 0,$$

a cărei rădăcină pozitivă este

$$(10) \qquad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{2}{g}(b + a \sin \alpha)}$$

sau

$$(10') \qquad t = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

dacă a şi b sînt neglijabili.

Înlocuind valoarea (10) a lui t în expresiile lui x_c şi z_c se obţin relaţiile:

$$(11) \qquad \begin{cases} x_c = \left(a + \dfrac{v_0^2}{g} \sin \alpha\right) \cos \alpha + v_0 \cos \alpha \sqrt{\dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \dfrac{2}{g}(b + a \cos \alpha)}, \\ z_c = a \dfrac{\pi n}{30} v_0 \dfrac{\sin 2\alpha}{2} + a \dfrac{\pi n}{30} \cos \alpha \sqrt{\dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \dfrac{2}{g}(b + a \cos \alpha)}, \end{cases}$$

iar pentru a şi b neglijabili se capătă (fig. 10):

$$(11') \qquad x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \qquad z_c = a\frac{\pi n}{30}\cdot\frac{v_0}{g}\sin 2\alpha.$$

Distanţa la care centrul de masă al tronsonului va atinge solul va fi dată de relaţia:

$$(12) \qquad d_c = \sqrt{x_c^2 + z_c^2} = \frac{v_0}{g}\sin 2\alpha \sqrt{v_0^2 + \frac{a^2\pi^2 n^2}{900}}.$$

Bineînţeles şi aici picăturile de apă vor fi dispersate în jurul poziţiei punctului c, modul de distribuţie depinzînd de forma ajutajului şi de natura regimului eolian.

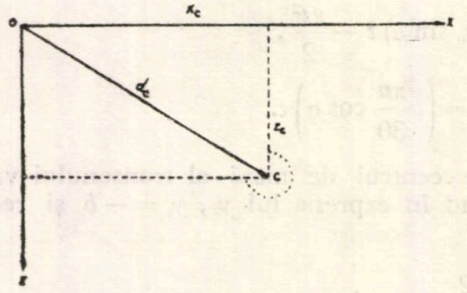


Fig. 10. — Proiecţia vînei de apă.

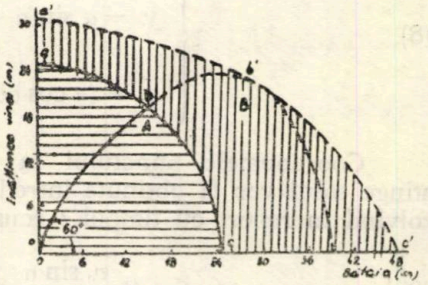


Fig. 11. — Domeniul vînei compacte.

Experienţele au stabilit că bătaia maximă a vînei se realizează atunci cînd unghiul de înclinare (al vînei) faţă de orizontală este $\alpha = 32°$, iar uniformitatea acceptabilă este asigurată atunci cînd vîna se roteşte într-un plan orizontal în jurul axului vertical al aspersorului.

Pentru acest caz s-a obţinut experimental (Pikalov, 1940) următoarea relaţie pentru determinarea bătăii vînei:

$$(13) \qquad l = 0{,}42\,H + 1\,000\,d \quad [\text{m}],$$

în care l — bătaia maximă (măsurată ca proiecţie orizontală a vînei), (m), H — presiunea de servici (în secţiunea de ieşire), (m), d — diametrul ajutajului, (m).

Relaţia este valabilă pentru $H/d \geqslant 1\,000$. Rotaţia aspersorului micşorează bătaia vînei (l) cu 10...15%.

Sînt situaţii cînd aspersoarele cu presiune mare şi bătaie lungă se folosesc ca hidromonitoare; pentru determinarea bătăii vînei se poate folosi formula lui N. P. Gavîrin:

$$l = 0{,}415\sqrt[3]{\alpha d H^2}.$$

Formula este valabilă pentru $\alpha = 5°...32°$, $d = 5...50$ mm, $H = 30...80$ m.

S-a arătat mai sus că aspersoarele cu presiune mare şi jet lung pot avea unul sau mai multe ştuţuri (ajutaje). În cazul aspersoarelor cu un singur ajutaj repartiţia vînei de apă se va face conform celor expuse pînă aici în sensul că de la aspersor şi pînă la curba limită a vînei pulverizate (R_a) ploaia artificială creată nu va fi uniformă, deci udarea terenului de-a lungul razei de stropit ($R_s = l$) va fi diferită.

În acest caz umectarea bună şi satisfăcătoare se va realiza în limita zonei III (de pulverizare) respectiv zonei II (de destrămare), adică în domeniul vînei dispersate şi pulverizate; în limita zonei I (domeniul vînei compacte) umectarea va fi insuficientă.

În scopul realizării unei umectări uniforme de-a lungul razei de stropit (l) sînt necesare măsuri suplimentare de umectare, ce trebuie să activeze în limita zonei I (domeniul vînei compacte — R_c).

Cercetările au arătat [4] că dacă se înclină treptat o vînă ce iese din ajutaj, extremitatea părţii compacte descrie traiectoria a, b, c (care diferă foarte puţin de arcul unui cerc de rază H_v), care mărgineşte domeniul vînei compacte (A—fig. 11).

Curba limită a vînei pulverizate a', b', c' şi curba a, b, c, vor limita domeniul vînei dispersate şi pulverizate (B).

Din graficul din fig. 11 rezultă că pentru diferite unghiuri de înclinare ale vînei (deci ale aspersorului) zona compactă are aproximativ aceleaşi lungimi, spre deosebire de zona de pulverizare, la care R_a este în funcţie de θ.

Vîna este compactă pe o distanţă de la ajutaj la curba limită a vînei compacte (R_c—fig. 11) considerată egală cu înălţimea vînei compacte verticale H_c:

$$R_c = H_c. \tag{14}$$

(Înălţimea părţii compacte a vînei H_c se consideră de la ajutaj şi pînă la secţiunea în care vîna transportă într-un cerc cu diametrul de 38 cm, 90% din debitul de apă ieşit din ajutaj ($Q = \mu\Omega\sqrt{2gH}$), iar într-un cerc cu diametrul de 26 cm, 75% din debitul ajutajului).

Datele experimentale pun în evidenţă totdeauna $H_c < H_v$ (v. tabelul 2). Prin urmare

$$H_c = \frac{H_v}{\alpha}, \tag{15}$$

valorile coeficientului α fiind date în tabelul 2, unde H_v — înălţimea vînei (după Lüger).

Legătura dintre presiunea la ajutaj (H) şi înălţimea vînei compacte (H_c) se poate stabili cu relaţia:

$$H_c = K\frac{H-10}{H+10} + 0{,}8H + 5{,}7. \tag{16}$$

Valorile coeficientului K sînt date în tabelul 3.

Tabelul 3

Valoarea coeficientului K în funcţie de diametrul ajutajului

Diametrul ajutajului (mm)	13	16	19	22	25	28,2	32	35	38
Coeficientul K	16	18,5	20,7	22,5	24	25,2	26,1	26,7	27

Legătura dintre presiunea la ajutaj (H), diametrul (d) şi înălţimea vînei compacte (H_c) se exprimă prin formula empirică:

$$H_c = \frac{H}{1 + (e^{5,42} + 0,03044)/[(1 - 2,4\sqrt[3]{d})\sqrt{10^6 d^3}]}, \quad (17)$$

în care: e — baza logaritmilor naturali, H — presiunea la ajutaj, (m), d — diametru orificiului, (m).

Concluzii

Din analiza structurii şi zonării vînei lichide aplicată la aspersiune se desprind următoarele concluzii:

1. *Pentru asigurarea unei raze de stropit* (l) *maxime* trebuie să se mărească presiunea de serviciu H şi diametrul ajutajului d, iar unghiul de înclinare a vînei θ să aibă valori maxime (practica a dovedit că înclinarea aspersorului cu $\alpha = 32°$ faţă de orizontală asigură şi o bătaie satisfăcătoare şi o pulverizare bună în domeniul B —(dispersare, pulverizare).

Raza de stropit fiind direct proporţională cu lungimea zonei compacte, se impun măsuri pentru asigurarea unei lungimi maxime a zonei I, şi anume:

a) alegerea tipului de ajutaj care să conducă la ieşirea paralelă a filetelor de apă, fără mişcări turbionare (ajutajul cilindric este mai indicat);

b) de asemenea alegerea unui raport corespunzător între lungimea ajutajului şi diametrul acestuia reprezintă o altă condiţie ce nu trebuie neglijată.

2. *Pentru asigurarea uniformităţii stropirii de-a lungul razei,* se impune soluţionarea umezirii în domeniul zonei compacte (A) precum şi la extremităţile domeniului de pulverizare (B).

Umezirea în domeniul zonei A se asigură în prezent prin: turbine, palete şi ştuţuri suplimentare situate deasupra sau dedesubtul ştuţului principal.

a) Turbinele şi paletele care asigură stropirea zonei A şi rotirea aparatului la aspersorul cu un singur ştuţ, apar ca defectuoase; spărgînd parţial sau total jetul în zona compactă (I) reduc implicit productivitatea aparatului (micşorează raza de stropit).

b) ştuţul secundar, cu sau fără paletă, situat deasupra celui principal prezintă următoarele dezavantaje:

b_1) jetul ştuţului secundar căzînd parţial peste cel principal este antrenat în parte de acesta, pe de o parte, iar pe de altă parte provoacă şi destrămarea parţială a vînei de apă în limita zonei compacte (I), avînd ca efect reducerea razei de stropit (la aspersorul A. S. M. deşi ştuţul secundar are o deviere faţă de cel principal — în plan orizontal, în perioadele cu vînt — jetul acestuia se suprapune peste cel principal);

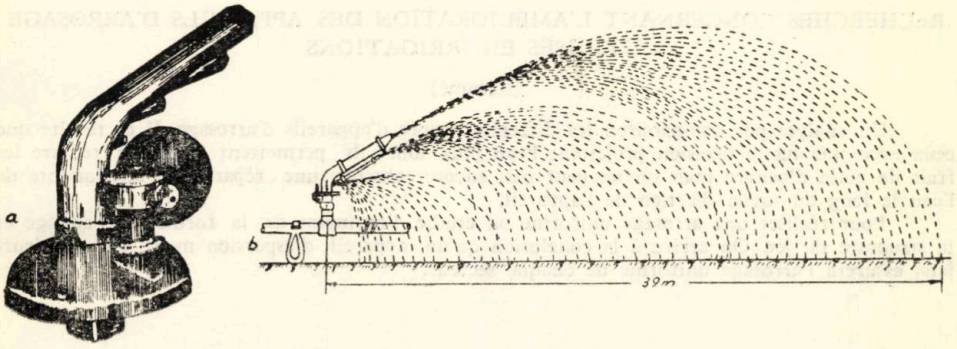


Fig 12. — Aspersoare cu mai multe ştuţuri; *a* — Delfino; *b* — VNIIGIM în funcţiune.

b_2) ştuţul secundar, situat sub cel principal, corespunde din punct de vedere hidraulic şi asigură umectarea domeniului *A*. Calitatea ploii realizată în domeniul *A* depinde de: unghiul pe care-l face acest ştuţ cu orizontala, de dimensiunile acestuia (*L*, ∅), de tăietura duzei şi de presiunea la ştuţ.

Soluţia aspersoarelor cu ştuţuri secundare (unul sau mai multe), situate sub cel principal, în ideia asigurării prin fiecare ştuţ a udării domeniilor diferite (*A*, *B*), se consideră că este recomandabilă la nivelul tehnic actual (ex. aspersorul Delfino, VNIIGIM (fig. 12 a, b), la care trebuie mărită însă raza de stropit prin mărirea presiunii şi alegerea ştuţului).

Soluţia aspersorului cu un singur ştuţ şi fără dispozitive speciale de spargere a jetului, asemănător celui de pompieri, se apreciază că este cea mai puţin indicată din punct de vedere al uniformităţii stropirii şi calităţii ploii.

3. Ultima observaţie, legată de umezirea insuficientă la extremitatea razei de stropit (extremitatea domeniului *B* — de pulverizare) se remediază de obicei prin intersectarea la extremitate, a suprafeţelor circulare umectate.

Institutul politehnic, Iaşi
Catedra de hidraulică,
Caredra de hidroameliorații

BIBLIOGRAFIE

1. Blidaru V., *Irigaţii — Desecări.* Note de curs, Iaşi, 1967.
2. Blidaru E., *Hidraulica.* E. D. P., Buc., 1965.
3. Mateescu Cr., *Hidraulica.* E. D. P., Buc., 1963.
4. Agroskin I. I. ş. a., *Hidraulica.* E. E. S., Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
5. Irimiciuc N., *Mecanică teoretică.* E. D. P., Buc., 1966.
6. Stoenescu Al., Silaş Gh., *Mecanică teoretică.* E. D. P., Buc., 1963.
7. Popescu C. Gr., *Contribuţii la studiul indicilor de exploatare ai instalaţiilor de irigaţie prin aspersiune IAC şi IAŢ-60 S.* Teză de doctorat, 1965.

RECHERCHES CONCERNANT L'AMÉLIORATION DES APPAREILS D'ARROSAGE UTILISÉS EN IRRIGATIONS

(Résumé)

On analyse par comparaison les différents types d'appareils d'arrosage. Il en résulte que ceux avec une haute pression projettent l'eau plus loin ; ils permettent aussi de réduire les frais de main d'oeuvre mais on ne peut pas encore obtenir une répartition satisfaisante de l'eau le long du rayon d'action de l'appareil.

Pour réaliser une arrosage uniforme on étudie l'optimum de la forme de l'ajutage et la structure du jet. On arrive à la conclusion qu'un appareil d'aspersion muni par plusieurs jets, assurera l'arrosage uniforme de chaque secteur.

Explications des figures

Fig. 1. — *a* — Dispositif avec aile oscillante et pulvérisateur conique; *b* — graphique de répartition de la pluie.

Fig. 2. — Arroseurs utilisés en irrigation ; *a*, *b*, *c* — arroseurs avec une seul tubulure et avec brise-jet, *d*, *e* — arroseurs à une seul tubulure et sans brise-jet, *f*, *g*, *h*, *i* — arroseurs à plusieurs tubulures.

Fig. 3. — Courbe de répartition de la pluie pulverisée par les dispositives à long jet.

Fig. 4. — Diagramme d'arrosage ; *a* — pour l'arroseur A.S.M., *b* — pour l'arroseur A.R.-60.

Fig. 5. — Types d'ajutages ; *a* — cylindrique ($\mu = 0{,}82...0{,}97$), *b* — conique ($\mu = 0{,}96...0{,}99$), *c* — conique-convergent ($\mu > 0{,}90$).

Fig. 6. — Zones d'une veine d'eau, en atmosphère.

Fig. 7. — Trajectoires des veines d'eau inclinés et ses zones.

Fig. 8. — Représentation des veines d'eau inclinées.

Fig. 9. — Trajectoire de la veine d'eau.

Fig. 10. — Projection de la veine d'eau.

Fig. 11. — Domaine de la veine compacte.

Fig. 12. — Arroseurs à plusieurs tubulures en fonctionnement: *a* — Delfino, *b* — VNIIGIM.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 33(.)-25

CU PRIVIRE LA CRITERIILE REPARTIZĂRII TERITORIALE A FORŢELOR DE PRODUCŢIE ÎN ŢARA NOASTRĂ

DE

P. MÂLCOMETE şi GEORGE MEDRIHAN

Extras din comunicarea prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Repartizarea teritorială raţională a forţelor de producţie constituie o trăsătură specifică economiei socialiste. Ca urmare a dominaţiei proprietăţii socialiste, forţele de producţie se dezvoltă armonios, pe baza unui plan unic. Planul unic al complexului economic naţional presupune nu numai realizarea unor proporţii, a unui echilibru dinamic dintre diferitele ramuri economice şi momente ale procesului reproducţiei (între sfera productivă şi neproductivă, între diferitele ramuri şi subramuri, între volumul mijloacelor de producţie şi al forţei de muncă, acumulare şi consum etc.), ci şi o repartizare teritorială raţională a forţelor de producţie.

Luarea în considerare a legăturilor de producţie, repartiţie şi consum între diferitele regiuni şi raioane ale ţării, a necesităţilor şi posibilităţilor lor de dezvoltare ca părţi componente ale complexului economic naţional unitar, constituie nu numai o necesitate, dar şi o posibilitate a economiei socialiste. Acest proces este o cerinţă obiectivă, o legitate a reproducţiei socialiste. Şi sub acest aspect socialismul îşi manifestă superioritatea faţă de orînduirea capitalistă, oferind posibilitatea folosirii eficiente a teritoriului ţării, contopirii organice a regiunilor şi raioanelor ţării într-un complex teritorial de producţie raţional şi armonios dezvoltat.

Pentru ţara noastră repartizarea teritorială raţională a forţelor de producţie decurge şi din necesitatea lichidării moştenirii trecutului în acest domeniu. In timpul regimului capitalist, repartiţia teritorială a forţelor de producţie era anarhică şi neraţională. Din acest punct de vedere este suficient să arătăm că circa 70% din producţia industrială a ţării în 1938 era concentrată în şase centre: oraşul Bucureşti, Valea Prahovei, Braşov, Hunedoara, Timişoara şi Reşiţa. Actualele regiuni Dobrogea, Oltenia, Iaşi, Crişana, Mureş-Autonomă Maghiară şi Suceava, în care trăia peste jumătate din populaţia ţării, furnizau mai puţin de 1/5 din totalul producţiei industriale. O situaţie necorespunzătoare exista şi în agricultură. Culturile tehnice şi creşterea animalelor erau concentrate în anumite regiuni, mai dezvoltate din punct de vedere industrial.

Aceasta, pe de o parte, a influenţat negativ progresul economic, de ansamblu, al ţării, iar pe de altă parte a determinat diferenţieri regionale foarte însemnate din punct de vedere economic şi social.

O asemenea situaţie era incompatibilă cu esenţa orînduirii noastre socialiste. De aceea, încă din primii ani de după eliberarea ţării, P.C.R. a înscris în cadrul

politicii sale economice îmbunătățirea repartizării teritoriale a forțelor de producție, asigurînd dezvoltarea armonioasă a regiunilor în cadrul progresului multilateral al economiei naționale în ansamblu, lichidarea disproporțiilor moștenite de la capitalism în acest domeniu.

Ca urmare a politicii de industrializare socialistă, a cărei parte componentă importantă o constituie și repartizarea teritorială rațională a forțelor de producție, în țara noastră a fost lichidat decalajul existent în trecut între regiuni, în ceea ce privește nivelul dezvoltării economice, avînd loc procesul de apropiere a regiunilor din punct de vedere economic și social. Acest proces a fost asigurat de dezvoltarea mai accentuată a regiunilor rămase în urmă, fapt ilustrat de o seamă de indicatori și anume: volumul investițiilor, creșterea ponderii fondurilor fixe industriale în totalul fondurilor fixe productive în economia țării, sporirea ponderii salariaților industriali, a producției industriale globale, ritmuri superioare ritmului mediu pe țară în creșterea producției industriale etc.

Ca urmare a unei asemenea politicii, regiunile: Argeș, Oltenia, Mureș-Autonomă Maghiară și altele, în trecut cu o industrie aproape inexistentă, se apropie de nivelul de dezvoltare industrială a regiunilor mai avansate, devin tot mai mult centre industriale puternice ale țării.

Inscriindu-se în această orientare constantă a politicii economice a P.C.R., Congresul al IX-lea al partidului a inclus printre sarcinile de bază ale planului economic pe anii 1966—1970 și îmbunătățirea în continuare a repartizării teritoriale a forțelor de producție pe teritoriul țării. Unul din elementele noi în politica economică a partidului de repartizare teritorială a forțelor de producție, care scoate în evidență desfășurarea acestui proces pe un plan superior în etapa actuală, este luarea în considerare în amplasarea obiectivelor economice nu numai a regiunilor țării, ci și a raioanelor fiecărei regiuni. Pentru prima oară la elaborarea actualului plan cincinal s-a examinat multilateral și s-au stabilit prin plan principalele obiective de investiții atît pe regiuni cît și pe raioane. In acest sens s-a prevăzut crearea unei baze industriale în 70 din cele circa 100 de raioane fără industrie sau cu o industrie incipientă. Majoritatea acestor raioane sînt situate în regiunile București (11 raioane), Oltenia (9 raioane), Suceava (5 raioane), Argeș, Iași, Mureș-Autonomă Maghiară și Maramureș (cîte 4 raioane). Fondul de investiții repartizat acestor regiuni reprezintă circa 38% din volumul total al investițiilor ce vor fi efectuate în economia națională.

Practica economică din țara noastră a demonstrat că repartizarea teritorială rațională a forțelor de producție este una din cele mai complexe sarcini care urmează să fie rezolvată de clasa muncitoare și partidul ei marxist-leninist în procesul construirii noii orînduiri. Aceasta deoarece asigurarea unei proporționalități raționale teritoriale a forțelor de producție necesită luarea în considerare a unei diversități de factori de ordin economic, social și politic în amplasarea forțelor de producție. Nu întîmplător literatura de specialitate cuprinde numeroase publicații pe această temă.

Pe linia aprofundării politicii economice a P.C.R. în acest domeniu, în cele ce urmează ne propunem să adăugăm și punctul nostru de vedere la unele din aspectele repartizării teritoriale a forțelor de producție.

Apreciem că cercetarea acestor probleme creează posibilitatea înlăturării în practica economică a subiectivismului și arbitrariului și stabilirii amplasamentelor obiectivelor economice în conformitate cu cerințele reale ale dezvoltării armonioase și echilibrate a economiei naționale.

2. Așa cum am subliniat mai sus repartizarea în profil teritorial a forțelor de producție se face în funcție de o seamă de criterii de ordin economic, social și politic, prin îmbinarea și corelarea lor judicioasă. Fiecare din aceste criterii îndeplinește un rol însemnat în politica de repartizare teritorială rațională a forțelor de producție.

Cu toate acestea, așa cum rezultă din documentele partidului nostru, amplasarea teritorială a forțelor de producție se face prin îmbinarea organică în primul rînd a criteriului creșterii productivității muncii sociale cu cel al asigurării unor posibilități egale de ridicare a nivelului de trai material și cultural al populației de pe cuprinsul întregii țări, din toate regiunile, raioanele și orașele patriei. „In alegerea localităților unde se vor construi noile obiective — subliniază tov. N. Ceaușescu la Congresul al IX-lea al partidului — trebuie să îmbinăm și în viitor politica de ridicare a regiunilor și raioanelor mai slab dezvoltate cu criteriile de eficiență economică" [1, p. 54]. Nici unul din aceste criterii nu trebuie absolutizat. În fiecare caz în parte, la alegerea amplasamentelor noilor obiective trebuie să se asigure „strînsa îmbinare a criteriilor de eficiență economică cu prioritatea ce trebuie acordată raioanelor, respectiv orașelor mai slab dezvoltate" [2].

Aceste două criterii sînt, după părerea noastră, criterii fundamentale în politica repartizării teritoriale a forțelor de producție. „Nici o economie — arată tov. N. Ceaușescu — nu-și poate permite să organizeze o producție cu deficit, să finanțeze unele întreprinderi pe seama altora" [1]. A amplasa anumite obiective economice în condiții mai puțin favorabile, înseamnă a trage înapoi în mod conștient nivelul productivității muncii sociale, a lipsi societatea de contribuția unor întreprinderi la dezvoltarea economiei. Pe de altă parte, tot atît de adevărat este și faptul că socialismul nu este de conceput fără asigurarea unor condiții egale pentru satisfacerea nevoilor materiale și spirituale ale populației întregii țări, dezvoltarea și afirmarea multilaterală a tuturor membrilor societății. Acest lucru nu este posibil decît prin progresul economic și social al tuturor regiunilor și raioanelor. Aceste criterii fundamentale se realizează numai în condițiile în care la amplasarea noilor obiective se au în vedere o serie de factori economici, sociali și politici, factori care se modifică de la un loc la altul și de la o etapă la alta, în funcție de gradul de dezvoltare și diversificare a forțelor de producție, de sarcinile privind valorificarea superioară a resurselor naturale, de particularitățile tehnice și tehnologice ale fiecărei ramuri, de modificarea sarcinilor sociale și politice de la o etapă la alta etc. Dacă pe acestea din urmă le denumim criterii primare, deosebirea dintre ele și criteriile fundamentale constă în aceea că, în timp ce criteriile fundamentale (generale) stabilesc ce trebuie să se realizeze prin amplasarea noilor obiective economice (industriale, agricole etc.), criteriile primare precizează prin ce mijloace, cum să realizăm obiectivul urmărit. Criteriile fundamentale sînt aceleași pentru orice obiectiv economic, în orice timp și la orice nivel de dezvoltare economică, în timp ce criteriile primare diferă ca număr și însemnătate social-economică de la un obiectiv la altul și de la o perioadă la alta.

3. Practica a demonstrat că ridicarea economică și social-culturală a regiunilor mai puțin dezvoltate dintr-o țară, ca și dezvoltarea social-economică a țărilor mai puțin dezvoltate, este de neconceput fără industrializarea lor. Industria este singura ramură care poate conduce la dezvoltarea economică și social-culturală a fiecărui raion și oraș. Ea permite valorificarea superioară a resurselor existente, ocuparea mai rațională a forței de muncă și creșterea nivelului de trai al populației. Amplasarea unor obiective industriale într-un oraș sau raion constituie factorul cel mai dinamic al dezvoltării orașului sau raionului respectiv, întrucît industria atrage după sine dezvoltarea transporturilor, a comerțului, a serviciilor de deservire socială, a construcțiilor de locuințe și tehnico-edilitare, a întregii vieți cultural-științifice. „Dacă este just că o țară fără industrie nu poate fi socotită o țară stăpînă pe soarta sa — arată tov. N. Ceaușescu la întîlnirea cu activul de partid din regiunea Argeș — o regiune lipsită de industrie va rămîne în urmă din punct de vedere al nivelului economic și al nivelului vieții sociale, al dezvoltării științei și culturii".

Desigur, ridicarea economică a regiunilor, ca urmare a dezvoltării lor pe baza industrializării, nu trebuie înțeleasă ca o creștere în egală măsură a tuturor ramurilor, ca o copie la scara regiunii a structurii economiei naționale. Este vorba de

apropierea la nivel superior a regiunilor, de un proces de omogenizare a lor în ceea ce privește indicatorii care reflectă gradul de dezvoltare economică, socială și culturală. Aceasta este unica garanție a afirmării multilaterale a tuturor cetățenilor, a adevăratei lor egalități.

4. O problemă importantă privind repartizarea teritorială a forțelor de producție se referă la amplasarea unei întreprinderi industriale într-o regiune (zonă) agricolă. Așa de exemplu, unele regiuni deși dispun de resurse de muncă nu au resurse naturale, ceea ce ridică probleme de transport. În cazul în care transportul nu constituie o problemă sau există resurse naturale, totuși forța de muncă existentă este necalificată, nu cunoaște disciplina de fabrică. Integrarea populației agricole într-o muncă industrială necesită o perioadă de timp pentru calificare și adaptare la sistemul muncii industriale. Pe de altă parte, apar investiții suplimentare legate de dezvoltarea localităților respective, crearea infrastructurii economice necesare (locuințe, instituții social-culturale, transporturi, telecomunicații, aprovizionare cu apă, energie electrică etc.). După unele aprecieri, în industria transformatoare locuințele și serviciile publice necesare lucrătorilor costă de 3 pînă la 5 ori mai mult decît locul de muncă însăși [3].

Toate acestea au condus la ideea greșită, susținută uneori în literatura de specialitate, că în repartizarea teritorială a forțelor de producție poate să apară o opoziție între criteriul eficienței economice și cel al ridicării regiunilor și raioanelor mai puțin dezvoltate, care nu-și poate găsi rezolvarea decît printr-un compromis. În realitate între aceste două criterii nu există opoziție. Ridicarea regiunilor și raioanelor mai puțin dezvoltate nu presupune renunțarea la eficiența economică. Aceste două criterii sînt în realitate aspecte diferite ale aceleași politici — de creștere a producției de bunuri materiale pentru satisfacerea nevoilor oamenilor muncii.

Rezolvarea problemei îmbinării acestor două criterii fundamentale necesită luarea în considerare a criteriilor primare de care depinde amplasarea unui obiectiv cu cea mai ridicată eficiență economică. Este vorba aici de resursele naturale ale fiecărei regiuni sau raion și necesitatea valorificării lor superioare.

5. Prin amplasarea unui obiectiv economic se crează un anumit raport între producția viitoare și mediul social-natural al teritoriului respectiv. Mediul social-natural intră în raport cu producția prin faptul că oferă condiții pentru desfășurarea acesteia: materii prime exploatabile în condiții economice și tehnice avantajoase, combustibil, energie electrică și termică, apă industrială și potabilă, anumite condiții hidrogeologice, forță de muncă, un anumit consum etc.

Această corelație dintre cerințele producției și condițiile mediului social-natural diferă în funcție de felul și volumul producției. Fiecare ramură are alte cerințe față de mediul social-natural care decurg din particularitățile tehnice și economice ale ramurii și de volumul producției.

Există ramuri ale economiei naționale care sînt imobile față de condițiile mediului social-natural. Așa este cazul industriei extractive care nu poate fi amplasată decît în funcție de așezarea zăcămintelor respective, ramurile agriculturii legate nemijlocit de condițiile pedoclimatice, producția de energie hidro-electrică, organic legată de locurile în care cursurile de apă prezintă potențialul energetic necesar etc. De aici concluzia că exploatarea zăcămintelor sau a altor bogății naturale influențează repartiția teritorială a forțelor de producție. Nu întîmplător, în cadrul eforturilor pe care le face statul pentru efectuarea lucrărilor geologice în vederea lărgirii bazei de materii prime, un loc important îl ocupă tocmai regiunile rămase în urmă din punct de vedere economic, știut fiind că acesta se reflectă favorabil asupra procesului repartiției teritoriale a forțelor de producție.

Prin urmare resursele naturale și valorificarea lor rațională constituie un criteriu primar foarte important al repartizării teritoriale a forțelor de producție.

„Repartizarea forțelor de producție pe teritoriul țării — se arată în Directivele Congresului al IX-lea al P.C.R. — va fi orientată și în viitor potrivit necesităților economiei naționale și condițiilor economice și naturale proprii fiecărei regiuni" [1].

6. Există ramuri ale producției industriale care într-o anumită măsură sînt eliberate de localizarea resurselor naturale, prezentînd din acest punct de vedere un anumit grad de mobilitate. În această categorie sînt cuprinse ramurile industriei prelucrătoare a materiilor prime și consumatoare de combustibil și energie electrică, care prin însăși obiectul lor de activitate nu vin în contact nemijlocit cu zăcămintele de substanțe minerale utile, cu acele cursuri de apă care dețin potențial energetic sau cu condițiile pedoclimatice etc.

În acest caz intervine un alt criteriu primar și anume transportul. Cheltuielile de transport ale diferitelor elemente ale procesului de producție și produselor finite joacă un rol important în amplasarea teritorială a forțelor de producție. Mărimea cheltuielilor de transport depinde pe de o parte de distanța față de resursele de aprovizionare cu materii prime, materiale, energie, semifabricate etc. și de centrele de consum ale produsului finit, iar pe de altă parte de greutatea, volumul, complexitatea și alte caracteristici tehnice ale elementelor transportate, care determină un anumit nivel al cheltuielilor pe km transportat. Dacă raportul dintre costul total al transporturilor de la sursele de aprovizionare pînă la întreprinderea proiectată și costul transportului de la întreprindere pînă la centrele de consum este supraunitar, va predomina tendința orientării amplasării întreprinderii aproape de sursele de materii prime. Din această categorie fac parte îndeosebi întreprinderile din industria metalurgică și siderurgică, industria producătoare de energie termoelectrică (mai ales pe bază de cărbune), întreprinderile din industria celulozei și hîrtiei, materialelor de construcții și altele, unde volumul și greutatea materiei prime sînt mai mari decît cele ale produsului finit.

Dacă raportul dintre costul total al transporturilor de aprovizionare și cel de desfacere este subunitar, orientarea amplasării obiectivelor economice va fi în general către centrele de consum. Acesta este cazul întreprinderilor ale căror produse finite pun probleme mai dificile de transport. Astfel, producția unei serii întregi de mijloace de producție ca cea de utilaj petrolier, minier, a fost amplasată în apropierea locurilor unde mijloacele de producție respective urmează să fie folosite. De asemenea, materialele de construcții greu transportabile (cărămizi, țigle), care sînt necesare pe tot cuprinsul țării se produc aproape în toate regiunile. Tot în această categorie sînt cuprinse și o mare parte din întreprinderile producătoare de bunuri de consum ca cele de panificație, mobilă etc.

În condițiile în care cheltuielile de transport pentru aprovizionare sînt relativ egale cu cele de desfacere, transportul devine neutru în orientarea amplasării obiectivelor economice. Așa se întîmplă de obicei cu unele întreprinderi din industria construcțiilor de mașini, laminate, industria ușoară, unele fabrici din industria chimică etc.

Mobilitatea amplasării în spațiu depinde și de gradul de perisabilitate al materialelor transportate. Ca urmare, în deosebi în industria alimentară (întreprinderile de industrializare a laptelui, a cărnii, centrele de vinificație), unde materia primă este perisabilă, sau își pierde în timpul transportului o parte din calitățile utile, amplasarea întreprinderilor respective se face în funcție de localizarea materiilor prime.

7. În procesul repartizării teritoriale a forțelor de producție, pentru asigurarea sporirii eficienței producției sociale pe baza amplasării unor noi obiective economice, se ține seama și de criteriul ambianței fizico-geografice și a gradului de amenajare a teritoriului: relieful, structura geologică a solului, clima și rețeaua hidrologică, rețeaua tehnico-edilitară etc. Industria modernă implică o înaltă dotare tehnico-edilitară a teritoriului: drumuri, șosele, căi ferate, canalizări, energie electrică și termică. Soluția constructivă și tehnologică a noului obiectiv nu se modi-

fică în funcție de condițiile fizico-geografice și de gradul de amenajare a teritoriului. Diferă în funcție de aceste condiții cheltuielile de investiții exterioare cauzate de costul fundațiilor, al racordărilor la utilități (apă, canal, gaze, energie electrică), la căile de transport etc. Potrivit unor calcule, relieful și condițiile hidrogeologice pot determina variații în mărimea investițiilor de la 5% pînă la 10% și uneori mai mari [4]. La construirea unor obiective industriale din țara noastră investițiile pentru dotarea tehnico-edilitară au ajuns la circa 30% din totalul investițiilor respective (Combinatul chimic și de cauciuc sintetic din orașul Gh. Gheorghiu-Dej, Combinatul chimic, Brazi).

Studiile întreprinse atît la noi cît și în alte țări socialiste [5], arată că în orașele mici, mai puțin dezvoltate, cheltuielile de acest gen sînt relativ ridicate, în timp ce în orașele mari, care impun soluții tehnice complicate privind transportul (intersecții, locuri de parcare, conducte cu gabarit mare), aceste cheltuieli sînt excesiv de mari. Ca urmare, eficiența investiției se poate realiza prin orientarea amplasării noilor obiective spre orașe mici și îndeosebi către cele mijlocii.

8. Rezolvarea acestei probleme în mod eficient se poate face și prin gruparea mai multor întreprinderi din aceeași ramură sau din ramuri diferite, în zone industriale. În zone industriale se amplasează întreprinderi care își utilizează reciproc produsele, care lucrează în cooperare, preluînd succesiv aceeași materie primă. Crearea zonelor industriale prezintă însemnate avantaje economice. Se realizează condiții optime de sistematizare, de dezvoltare viitoare a lucrărilor edilitare, desfășurarea rațională a lucrărilor de construcții, rezolvarea unitară a problemelor comune mai multor întreprinderi și orașului. De asemenea, zonele industriale reduc și suprafața de teren folosit pentru construcții, limitînd astfel suprafața care este scoasă din circuitul agricol. După unele calcule s-a ajuns la concluzia că prin concentrarea întreprinderilor în zone industriale costul lucrărilor de construcții se reduce cu 5...20%, teritoriul total necesar se restrînge în medie cu 20...25%, iar teritoriul pentru căile de acces și comunicații cu 10...15%, față de amplasarea izolată a acelorași întreprinderi.

Totodată, crearea unei zone industriale într-o anumită localitate, modifică în mare măsură soluțiile de amplasare a obiectivelor economice, reducînd criteriul resurselor naturale și lărgind posibilitățile de amplasare în funcție de alte criterii. Astfel, un nucleu industrial atrage după sine crearea unor întreprinderi cu care cooperează cele existente, asigură formarea mai rapidă a forței de muncă. Pînă în anul 1965 în țara noastră s-au construit circa 30 de asemenea zone industriale, între care și zona industrială din orașul Iași, care are ca obiectiv folosirea în comun a utilităților.

Menționăm însă că organizarea zonelor industriale necesită studii deosebit de dificile privind complexul social-economic al teritoriului, sistematizarea orașului, aspectele demografice. Zona industrială trebuie să prezinte atît o amplasare cît și o arie optimă în raport cu factorii amintiți. Aria optimă a zonei industriale a unui oraș este deosebit de importantă. Mai ales depășirea acestei arii poate conduce la complicarea problemelor de aprovizionare, la aglomerarea populației sau atragerea forței de muncă de la distanțe mari, la greutăți în rezolvarea problemei spațiului locativ, ceea ce influențează negativ asupra eficienței procesului repartizării teritoriale a forțelor de producție.

9. În cadrul condițiilor amintite un rol deosebit îl are crearea spațiului locativ și a condițiilor de deservire a populației, deoarece acestea sînt legate direct de nivelul de trai al populației. După cîte se știe există o limită a aglomerării populației într-o localitate, a cărei depășire poate provoca pierderi economice.

Pe de altă parte, sub aspectul eficienței economice, trebuie să se țină seama și de faptul că există o ordine de mărime a eficienței amplasării obiectivului economic. Dacă la început, pentru crearea fondurilor de acumulare, au fost luate în considerare variantele teritoriale cele mai eficiente, pe măsură ce cresc posibilită-

țile de investiții se creează condiții pentru amplasarea obiectivelor și în localități cu un nivel mai scăzut al eficienței economice.

10. Un criteriu deosebit de important al repartizării teritoriale a forțelor de producție îl constituie folosirea deplină și eficientă a forței de muncă. Ca urmare, acele ramuri ale industriei prelucrătoare care depind în mai mică măsură de condițiile naturale (resurse de materii prime) și care cer un consum mare de forță de muncă, sînt amplasate în regiunile și raioanele cu forță de muncă disponibilă, în care intră raioanele agricole, de unde poate fi atrasă spre industrie populația devenită excedentară în agricultură. Pe lîngă asigurarea folosirii depline și eficiente a forței de muncă, o asemenea orientare în amplasarea obiectivelor industriale duce și la o mai bună distribuire a veniturilor, la ridicarea generală a nivelului de trai al populației.

11. Alături de industrie, care este ramura conducătoare în ansamblul economiei și a cărei repartizare teritorială este hotărîtoare pentru dezvoltarea complexului economic național, acest proces cuprinde și celelalte ramuri economice, între care foarte importantă este agricultura.

În afara criteriilor fundamentale care stau la baza procesului de ansamblu al repartizării teritoriale a forțelor de producție, în agricultură intervin o serie de factori specifici acestei ramuri. Pe primul plan apar aici condițiile naturale de climă și sol. La fel de importanți sînt însă și factorii de ordin economic, între care o influență foarte mare asupra dezvoltării teritoriale a agriculturii o exercită dezvoltarea și structura industriei în regiunea sau raionul respectiv. Industria influențează pozitiv dezvoltarea agriculturii prin posibilitățile pe care le oferă pentru mecanizare și chimizare, prin nevoile de materii prime agricole, prin crearea de centre populate care sînt aprovizionate cu produse agroalimentare.

Un alt grup de factori economici sînt aceia care influențează direct amplasarea ramurilor agricole. Între aceștia enumerăm: gradul de tehnicitate și de intensificare a producției agricole, nivelul productivității muncii și a cheltuielilor de producție etc. Pe măsura dezvoltării forțelor de producție din agricultură rolul factorilor economici în amplasarea ramurilor agricole crește, ceea ce impune o studiere mai temeinică a lor în rezolvarea acestei probleme.

Menționăm de asemenea că influența factorilor social-economici și naturali influențează diferit asupra repartizării producției agricole și în funcție de ramura agricolă. Astfel, apropierea centrelor de desfacere și căile de comunicație au un rol mai mare în cazul culturii legumelor decît în cel al culturii porumbului; sau, condițiile de climă și sol pentru tutun, in de fuior etc., sînt mai importante decît pentru grîu. Totodată, amplasarea producției agricole este influențată și de corelația dintre diferitele ramuri ale agriculturii, de faptul că acestea nu pot fi izolate complet unele de altele. Ca urmare, rezolvarea acestei probleme impune amplasarea producției atît pe zone cît și pe fiecare unitate agricolă în parte în cadrul dezvoltării multilaterale a agriculturii pe ansamblul economiei naționale.

Din cele prezentate rezultă că repartizarea teritorială rațională a producției agricole presupune luarea în considerare a tuturor factorilor în interdependența și condiționarea lor reciprocă. În acest sens, în raportul prezentat la Congresul al IX-lea al P.C.R., tov. N. Ceaușescu arată: „Organele agricole, specialiștii din agricultură trebuie să ia măsuri pentru amplasarea mai judicioasă a culturilor pe zone și în cadrul fiecărei unități ținînd seama de condițiile de climă și de sol, de factorii social-economici, de posibilitățile asigurării mijloacelor mecanizate și a forței de muncă pentru executarea tuturor lucrărilor la timp și la un nivel de calitate ridicat" [1, p. 48].

12. Am apreciat mai înainte că repartizarea teritorială a forțelor de producție se face și în funcție de gradul de mobilitate a diferitelor ramuri față de condițiile naturale. Trebuie să subliniem că gradul de dependență față de condițiile naturale a diferitelor ramuri nu este invariabil, ci se modifică în funcție de progresul tehnic. Revoluția științifică-tehnică contemporană contribuie în mare măsură la micșo-

rarea gradului de dependenţă a ramurilor economice faţă de condiţiile naturale, lărgind foarte mult posibilităţile de amplasare.

Cuceririle ştiinţei şi tehnicii permit descoperirea unor noi resurse naturale în regiuni socotite multă vreme ca fiind lipsite de asemenea bogăţii. Tot ca urmare a progresului tehnic, resurse care în trecut nu-şi găseau utilizarea sau a căror prelucrare tehnologică cunoscută în trecut nu era rentabilă, sînt în prezent atrase în circuitul economic. Aşa de exemplu, elaborarea metodelor tehnologice moderne şi în primul rînd chimizarea, au permis intrarea în circuitul economic a unor resurse care înainte nu erau folosite (paie, stuf, lemn de esenţă moale) sau utilizate insuficient (minereuri complexe), precum şi prelucrarea superioară a unor resurse naturale cum sînt gazele naturale şi petrolul. În acelaşi sens acţionează şi crearea sistemului energetic naţional, ca şi progresele înregistrate în tehnica transportului, care reduc într-o mare măsură importanţa distanţelor.

13. Din cele prezentate se desprinde concluzia că procesul repartizării teritoriale a forţelor de producţie este un proces deosebit de complex şi dificil. Aceasta atît datorită faptului că amplasarea obiectivelor economice depinde de un mare număr de factori economici şi social-politici, cît şi datorită interdependenţei în care acţionează aceştia. Ca urmare, stabilirea amplasamentului unui obiectiv economic cere luarea în considerare a tuturor factorilor, analiza amplasării fiecărui obiectiv în parte nu în mod izolat, ci în strînsă legătură cu situaţia de ansamblu. Trebuie avute în vedere nu numai cerinţele şi condiţiile prezente, ci şi situaţia de perspectivă.

Luarea în considerare a numeroaselor elemente şi premise ale repartizării teritoriale a forţelor de producţie pe baza unor studii aprofundate impune utilizarea largă a metodelor moderne de calcul şi îndeosebi programarea liniară şi neliniară, spre a se asigura alegerea variantelor optime de repartizare teritorială a forţelor de producţie.

Paralel cu aceasta este necesară dezvoltarea cercetărilor în vederea perfecţionării metodologiei de planificare în acest domeniu. Definitivarea amplasamentelor obiectivelor prevăzute în actualul plan cincinal cît şi obiectivele ce vor fi stabilite în procesul elaborării planului de dezvoltare a economiei naţionale pentru perioada 1971—1975, pe baza unor criterii ştiinţific fundamentate, vor duce la îmbunătăţirea în continuare a repartizării forţelor de producţie, cu profunde urmări pozitive asupra tuturor domeniilor vieţii sociale din ţara noastră.

Institutul politehnic, Iaşi
Catedra de economie politică

BIBLIOGRAFIE

1. *** *Congresul al IX-lea al Partidului Comunist Român.* Ed. Polit. Buc., 1965.
2. Maurer I. Gh., *Expunere cu privire la Planul de Stat de dezvoltare a economiei naţionale pe anii 1966—1970.* Ed. Polit., Buc., 1965, p. 26.
3. Français J., *Descentralisation et progrès technique.* Paris, p. 320.
4. *** Rev. de statistică, 1965, 3, p. 90.
5. Mrzylod T., Inwestycje i Budownictwo, 1965, *7—8*, p. 23.

SUR LES CRITÈRES DE RÉPARTITION TERRITORIELLE DES FORCES DE PRODUCTION DANS LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

(Résumé)

On donne nombre de détails concernant les critères fondamentaux et primaires de répartition teritorielle des forces de production dans la République Socialiste de Roumanie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIII (XVII), вып. 3—4, 1967

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIII (XVII), Fasc. 3–4, 1967

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 677

REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE PRODUCŢIE DE LA UZINELE TEXTILE „VASIA VASILESCU", MEDIAŞ, PENTRU DETERMINAREA BENEFICIULUI OPTIM LA PRODUSUL „FINET"

DE

ANA TRIANDAF şi MALCA BERCOVICI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

Problema determinării beneficiului optim se referă la produsul Finet care necesită două procese de producţie şi anume:

1° Procesul de ţesătorie, în care se realizează 13 000 m liniari în 24 ore şi

2° Procesul de finisaj, în care se realizează 1 500 m liniari în acelaşi timp.

Vom nota cu p_p preţul produsului care-l presupunem şi-l vom considera ca o funcţie continuă de producţia x şi cu p_f preţul variabil, funcţie de cantitate variabilă, materia primă, pe care o notăm cu v şi care o considerăm tot o funcţie continuă de variabila v.

Prin urmare

$$p_p = f(x) = a_1 - b_1 x, \quad p_f = \varphi(v) = a_2 + b_2 v,$$

unde a_1, b_1, b_2 sînt numere pozitive, iar a_2 poate fi pozitiv sau negativ. Factorul variabil v (materia primă) depinde de nivelul de utilizare al fiecărui proces.

Fie x_1 şi x_2 cantităţile, socotite în metri liniari, de produse de fiecare proces, cu condiţia ca $x_1 + x_2 = x$.

Fie λ_1 şi λ_2 unităţile fizice de factori variabili pentru fiecare unitate, respectiv x_1 şi x_2, din care rezultă cantităţile totale de factori variabili utilizaţi:

$$v_1 = \lambda_1 x_1, \quad v_2 = \lambda_2 x_2.$$

Preţurile de cost corespunzătoare sînt: $p_f \lambda_1$ pentru fiecare unitate x_1, $p_f \lambda_2$ pentru fiecare unitate x_2, de unde rezultă pentru venitul total expresia

$$c = (p_p - p_f \lambda_1) x_1 + (p_p - p_f \lambda_2) x_2,$$

căreia trebuie să-i determinăm valoarea maximă.

Deoarece

$$p_p = a_1 - b_1 (x_1 + x_2)$$

şi

$$p_f = a_2 + b_2 (v_1 + v_2) = a_2 + b_2 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

rezultă

$$c = [a_1 - b_1 (x_1 + x_2) - a_2 \lambda_1 - b_2 \lambda_1 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] x_1 + \\ + [a_1 - b_1 (x_1 + x_2) - a_2 \lambda_2 - b_2 \lambda_2 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] x_2$$

sau

$$c = -(b_1 + b_2 \lambda_1^2) x_1^2 - 2 (b_1 + b_2 \lambda_1 \lambda_2) x_1 x_2 - (b_1 + b_2 \lambda_2^2) x_2^2 - \\ - (a_1 - a_2 \lambda_1) x_1 + (a_1 - a_2 \lambda_2) x_2.$$

În cazul problemei pe care o tratăm: $a_1 = 5{,}30$ lei (preţul de cost, plus beneficiul pe unitate), $b_1 = 4{,}70$ lei (preţul de cost pe unitate), $a_2 = 0{,}60$ lei (beneficiul pe unitate), $b_2 = 2{,}92$ lei (costul materiei prime pe unitate), $\lambda_1 = 1{,}07$ m (materia primă la primul proces pe unitate), $\lambda_2 = 1{,}03$ m (materia primă la al doilea proces pe unitate).

Prin urmare, avem

$$c = -8{,}043108 x_1^2 - 2.7{,}928132 x_1 x_2 - 7{,}797828 x_2^2 + 4{,}658 x_1 + 4{,}682 x_2.$$

Se constată că graficul funcţiei de mai sus, pentru orice beneficiu, este o elipsă reală (fig. 1) şi în particular pentru $c = 0$, avem prima curbă de beneficiu, C_0.

Mulţimea beneficiilor superioare sau egale cu zero este determinată de domeniul limitat de axele de coordonate Ox_1, Ox_2 şi arcul de curbă C_0 care se găseşte în primul cadran.

Valoarea maximă a venitului net este determinată în interiorul mulţimii convexe, fiind obţinută prin următoarea constrîngere

$$(C_1 C_2) \quad 0{,}28 x_1 - 0{,}012 x_2 \leqslant 1,$$

unde: 0,28 — timpul necesar, în ore, pentru unitatea de produs x_1, 0,012 — timpul necesar, în ore, pentru unitatea de produs x_2.

În cazul acesta fiind o singură constrîngere, beneficiul optim va fi reprezentat prin coordonatele punctului C_2.

Ne propunem să determinăm producţia optimă astfel încît beneficiul pe unitate de producţie să fie cuprins între 0,60 şi 0,85.

Figurînd elipsele corespunzătoare, cu restricția indicată s-a obținut următorul rezultat (fig. 1):

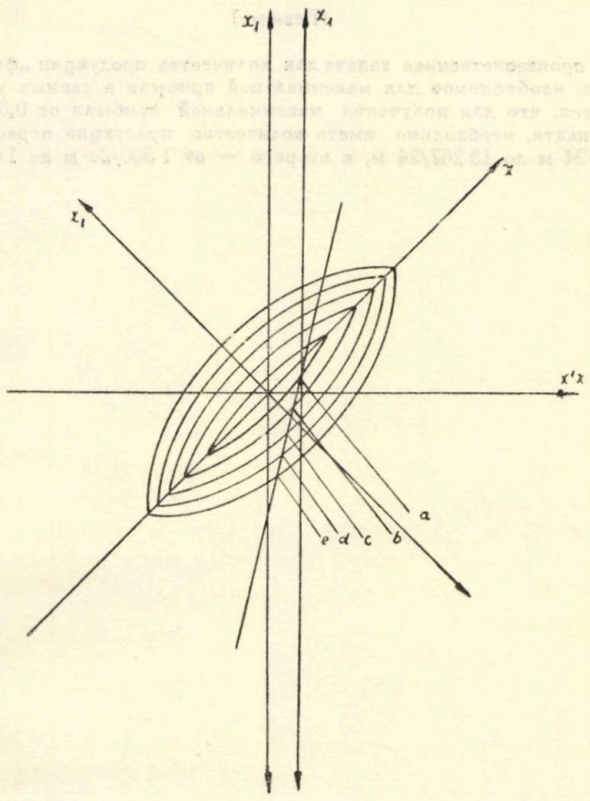


Fig. 1

Beneficiul pe unitate variind între 0,60 lei și 0,85 lei, producția din cele două procese trebuie să varieze după cum urmează:

x_1 între 13 000/24 m și 15 627/24 m; x_2 între 1 500/24 m și 1 683/24 m.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici I

BIBLIOGRAFIE

1. Yuan-Li Wu, Ching Wen Kwang, *Comparaison analytique et graphique de l'analyse marginale et de la programmation mathématique dans la théorie de l'entreprise.*
2. Gass C. I., *Linear Programming. Methods and Applications.* McGraw—Hill Book Company, New-York, 1958.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРИБЫЛИ С ГОТОВОЙ ПРОДУКЦИИ НА ТЕКСТИЛЬНОЙ ФАБРИКЕ „ВАСИЯ ВАСИЛЕСКУ“, МЕДИАШ

(Резюме)

Решается производственная задача для количества продукции „финет“, текстильной фабрики Медиаш, необходимое для максимальной прибыли в данных условиях.

Заключается, что для получения максимальной прибыли от 0,60 лей до 0,85 лей с единицы фабриката, необходимо иметь количество продукции первого процесса обработки от 13 000/24 м до 15 267/24 м, а второго — от 1 500/24 м до 1 683/24 м.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 677.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОВТОРНОГО ПОСТОЯННОГО УДЛИНЕНИЯ НА ОБРАТИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ТЕКСТИЛЬНЫХ ВОЛОКОН

И. ВЛАД

1. *Введение*

Из двух, известных нам, методов определения восстановления волокон — метода постоянной нагрузки, относительно разрывной прочности, и метода постоянной деформации, относительно начальной длины — большое применение имеет второй, так как при его помощи исключаются погрешности неровности тонины и прочности волокон на растяжение.

Деформацию волокон в зависимости от времени определяют по мгновенному упругому восстановлению (ε_1), по замедленному упругому восстановлению (ε_2), а также по остаточной или пластичной деформации (ε_3).

Из работ проф. Г. Н. Кукина и его сотрудников следует, что мгновенное упругое восстановление происходит в течении 3...4 секунд после снятия напряжений [1]. Остальные две деформации — замедленная упругая и пластичная — устанавливаются в зависимости от условий времени.

В исследовании деформации методом постоянной нагрузки с учетом различных механических моделей, которым соответствуют уравнения вида:

$$\varepsilon = \frac{f_0}{E}(1 - e^{-Et/\eta}),$$

где: f_0 — нагрузка, E — модуль Юнга, (дин/см^2), ε — деформация, t — время, η — коэффициент вязкости, (дин сек/см^2), встречаются трудности вследствие изменения значений E и η в зависимости от влажности и температуры. К этому нужно прибавить одновременность деформаций [3] в различных периодах времени, а также особенности строения различных волокон [4].

Принимая во внимание вышеуказанные трудности и тот факт, что для текстильных изделий большое значение представляет не столько одновременность деформаций под нагрузкой, сколько изменения строения, происходящие в волокне с последствиями на обратимость после определенных напряженных состояний при растяжении, являющихся меньше разрывной прочности [5], были проведены исследования по

изменению обратимости волокон в результате некоторых постоянных повторных удлинений, чередующихся с периодами покоя.

2. *Характеристики волокон*

Виды исследуемых волокон и их характеристики даны в таблице 1.

Таблица 1

Вид исследуемых волокон и их характеристики

№	Название волокон	Тонина м текс	Вязкость г с/текс	Разрывное удлинение %	Фактор разрывной работы
1	Полиамидные (релон)	421	41,31	47,4	0,64
2	Полиакрилнитриловые (мелана)	342	23,61	28,7	0,54
3	Полиэфирные (терон)	321	33,71	37,5	0,55
4	Вискоза	409	19,50	18,2	0,52
5	Шерсть	501	14,64	32,9	0,68

3. *Условия исследований*

Исследование обратимости волокон после повторных постоянных удлинений проведено в следующих условиях: а) удлинение — 5 и 10 % ; б) стационарное время в удлиненном состоянии — $T_1 = 30$ сек; в) время покоя после снятия напряжений — $T_2 = 60$ сек; г) исходное напряжение — 0,055 г с/ден, д) скорость деформации — 5 мм/мин, е) климатические условия — $\varphi = 65\%$, $t = 20°C$.

Испытания проводились на микродеформетре, построенном в Ясском политехническом институте.

4. *Результаты и интерпретации*

Для всех видов исследуемых волокон установлено, что у первых циклов напряженного состояния — удлинение = 5 % — появляются резко выраженные пластические деформации, затем компоненты как мгновенной и замедленной упругой, так и пластической деформации сохраняются приблизительно постоянными при довольно значительном количестве циклических напряженных состояний (табл. 2.).

Из данных таблицы 2 заключается почти одинаковое поведение шерстяных и полиэфирных волокон при повторном постоянном удлинении в 5 %. Это утверждает тот факт, что шерсть можно смешивать

с полиэфирными волокнами в любых пропорциях без опасности существенного изменения формы и вида изделий, в случае если напряженные состояния не вызывают деформаций свыше 5%.

Таблица 2

Упругое мгновенное (ε_1) *и замедленное* (ε_2) *восстановление и пластическая деформация* (ε_3) *при повторных удлинениях* ($\varepsilon_t = 5\%$, $T_1 = 30$ сек, $T_2 = 60$ сек)

№ цикла	Шерсть			Релон			Мелана			Терон			Вискоза		
	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %
1	64	9	27	80	7	13	44	13	43	59	5	36	18	8	74
2	73	7	20	84	8	8	46	15	39	66	8	26	31	10	59
3	72	12	16	90	7	3	52	15	33	69	11	20	41	16	43
4	75	12	13	92	5	3	52	15	33	69	11	20			
5	75	12	13	93	5	2	52	17	31	69	11	20			
6	75	12	13	95	3	2	57	15	28	72	10	18			
7	75	12	13	95	3	2	57	15	28	73	12	15			
8	75	12	13	95	3	2	59	15	26	73	12	15			
9	75	12	13	95	3	2	62	15	23	73	12	15			
10	75	12	13	95	3	2	62	15	23	73	12	15			

Возрастание мгновенного восстановления волокон (табл. 2) после повторного удлинения поддерживает предположение, что это является, в первую очередь, результатом межмолекулярных связей, число которых возрастает с удлинением. С другой стороны пластическая деформация, оставаясь постоянной при большом количестве напряженных состояний, подтверждает предположение перемещения структурных элементов волокон в прямом отношении с величиной напряженного состояния.

Особым видом является замедленное восстановление. Благодаря тому, что оно сохраняется постоянным, следует, что до определенного предела напряженного состояния структуральные элементы волокна не изменяют свою обратимость.

При повторном удлинении (10%), в одинаковых условиях времени замечаются подобные виды, с той разницей, что тероновые и вискозные волокна выносят меньшее количество циклических напряжений и что замедленное удлинение, при таких же условиях, уменьшается у всех видов волокон, кроме шерсти (табл. 3).

Возрастание мгновенного и замедленного восстановления волокон в результате повторного удлинения одного и того же волокна показано на рис. 1 (для удлинения = 5%) и на рис. 2 (для удлинения = 10%).

Из данных рисунков заключается, что при большем повторном удлинении (10%) происходят вначале более заметные пластические деформации, которые затем постепенно уменьшаются после следующих циклов напряженного состояния.

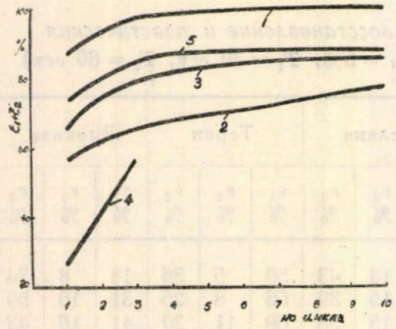


Рис. 1. — Изменение восстановления волокон в результате повторного удинения ($\varepsilon_t = 5\%$, $T_1 = 30$ сек, $T_2 = 60$ сек).

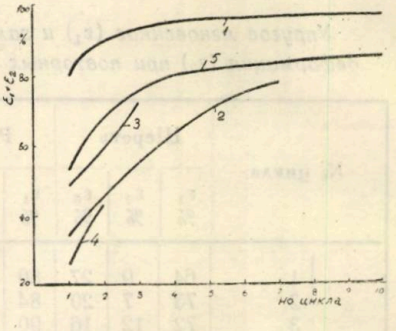


Рис. 2. — Изменение восстановления волокон в результате повторного удлиненя ($\varepsilon_t = 10\%$, $T_1 = 30$ сек, $T_2 = 60$ сек).

Таблица 3

Мгновенное (ε_1) и замедленное (ε_2) упругое восстановление и платическая деформаци (ε_3) при повторных удлинениях ($\varepsilon_t = 10\%$, $T_1 = 30$ сек, $T_2 = 60$ сек)

№ цикла	Шерсть			Релон			Мелана			Терон			Вискоза		
	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %	ε_1 %	ε_2 %	ε_3 %
1	43	9	48	76	4	20	20	14	66	43	6	51	20	5	75
2	53	13	34	85	5	10	33	12	55	53	6	41	38	5	57
3	64	12	24	90	4	6	44	12	44	67	6	27			
4	69	11	20	90	5	5	53	12	35						
5	63	12	20	92	3	5	58	12	30						
6	68	12	20	92	3	5	63	12	25						
7	67	13	20	91	4	5	68	11	21						
8	67	18	15	93	2	5									
9	68	19	13	92	3	5									
10	71	16	13	94	3	3									

Предварительное рентгеновское изучение полиамидных 6 (релон) и полиэфирных (терон) напряженных и ненапряженных волокон в следующих условиях: а) удлинение — 15%, б) стационарное время в удлиненном состоянии — $T_1 = 12$ час, в) время покоя — $T = 80$ дней'

а *б*

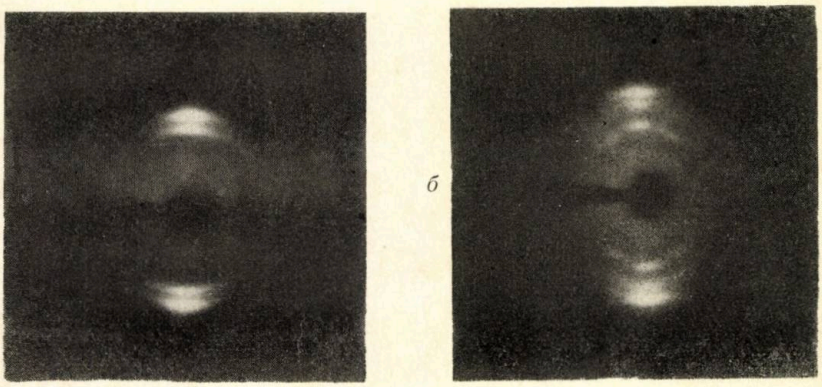


Рис. 3. — Рентгенограммы полиамидных волокон; *а* — ненапряженных, *б* — напряженных.

а *б*

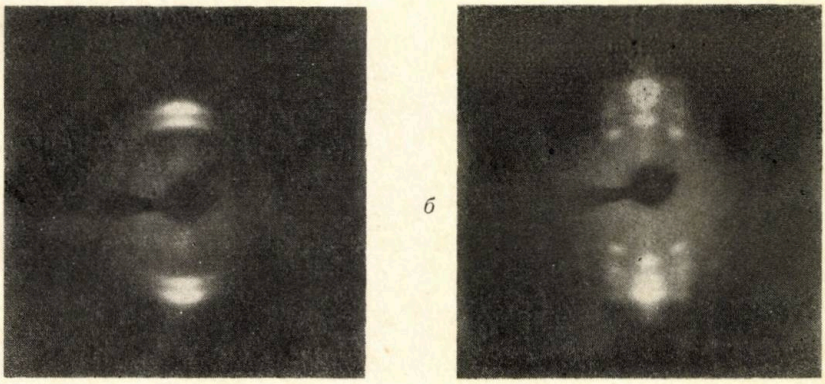


Рис. 4. — Рентгенограмм полиэфирных волокон; *а* — ненапряженных, *б* — напряженных.

г) линейная плотность пучка волокон — $d = 0{,}6$ мг/см, д) $U = 30$ кВ; $I = 20$ мА, е) время экспозиции — 10 часов, анодная трубка Cu с фильтром Ni, показывает значительное возрастание ориентации материи волокон (рис. 3 и 4) в течение их сохранения в напряженном состоянии.

Поступила 25 V 1967 г.

Ясский политехнический институт,
Кафедра прядение

ЛИТЕРАТУРА

1. Kukin G. N., Soloviev A. N., Faserforschung und Textiltechnik, 1958, *1*, S. 9.
2. Morton W. E., Hearle J. W. S., *Physical Properties of Textil Fibres*. Manchester, London, 1962.
3. Zylinski T., *Nauka o wloknie*. Warszawa, 1958.
4. Mark H., Rayonne et fibres synthétiques, 1966, *1*, p. 12.
5 Kaswell E., *Textile Fibres, Yarns and Fabrics*. Reinhold Publishing Corp., New, York 1963.
6. Vlad I., Celuloză şi hîrtie, 1965, **14**, *7—8—9*, p. 313.
7. Collins J. D., Chaikin M., Text. Res. J., 1965, *8*, p. 679.
8. Gunthrie J. C., Norman S., J. Text. Inst., 1961, **52**, p. 503.
9. Gunthrie J. C., Wibberly J., J. Text. Inst., 1965, **56**, T. 97.

CERCETĂRI PRIVIND INFLUENŢA ALUNGIRII CONSTANTE REPETATE ASUPRA CAPACITĂŢII DE REVENIRE A UNOR FIBRE TEXTILE

(Rezumat)

Se studiază modificarea capacităţii de revenire a fibrelor poliamidice 6 (relon), poliesterice (teron), poliacrilnitrilice (melana) şi a lînii Merinos, în urma unor alungiri constante repetate, alternate cu perioade scurte de odihnă.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia revenirii fibrelor în urma alungirii repetate de 5% ($T_1 = 30$ sec, $T_2 = 60$ sec).

Fig. 2. — Variaţia revenirii fibrelor în urma alungirii repetate de 10% ($T_1 = 30$ sec, $T_2 = 60$ sec).

Fig. 3. — Roentgenogramele fibrelor poliamidice 6 (relon): *a* — netensionate, *b* — tensionate.

Fig. 4. — Roentgenogramele fibrelor poliesterice (teron): *a* — netensionate, *b* — tensionate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

УДК 677.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ И ОТДЕЛКИ ТКАНЕЙ НА ИХ ИЗНОС ОТ СТИРОК

Б. Д. СЕМАК

В связи с тем, что в реальных условиях эксплуатации, изделия из летних платьевых тканей подвергаются многократным стиркам и стирки являются одним из основных факторов износа этих изделий, изыскание наиболее устойчивых к действию стирок структур тканей из смеси различных природных и химических волокон и способов отделки тканей представляет известный практический и теоретический интерес.

В настоящей работе мы задались целью выяснить, какое влияние на износ некоторых видов летних платьевых тканей из различных волокон оказывает природа волокнистого состава и вид отделки этих тканей.

Для решения поставленной задачи на комбинате „Трехгорная Мануфактура" им. Дзержинского были выработаны образцы опытных тканей [1]. Стирки образцов производились по ранее описанной методике [2]. В качестве критерия оценки износа исследуемых образцов от стирок был взят показатель разрывной нагрузки. Полученные результаты изменения разрывной нагрузки (+ плюс-повышение, — минус-понижение) в процессе стирок приведены в таблице 1. Гарантийная ошибка находилась в пределах 1,5...2,5%.

Из анализа данных таблицы следует, что степень повреждения исследуемых образцов в процессе многократных стирок (одна стандартная стирка по времени соответствует 6...7 бытовым стиркам) находится в прямой зависимости от природы и структуры применяемого сырья, а также вида отделки тканей.

Установлено, что замена в хлопчатобумажных тканях утка из хлопчатобумажной пряжи на уток из вискозной штапельной пряжи и вискозных комплексных нитей приводит к некоторому снижению устойчивости этих тканей к действию многократных стирок. Так, например, если после 20-ти повторных стирок отбеленная ткань типа арт. 1 171 с хлопчатобумажным утком понижает свою прочность по утку на

7,4%, то аналогичные ткани с утком из вискозной штапельной пряжи и комплексных нитей теряют соответственно по утку 27,8 и 19,0% своей первоначальной прочности. Вместе с тем, сравнение степени понижения прочности в процессе стирок тканей в направлении основы и утка позволяет сделать вывод о том, что хлопчатобумажные ткани с утком из вискозной штапельной пряжи и вискозных комплексных нитей примерно одинаково разрушаются в процессе стирок в направлении основы и утка. Следовательно, равнопрочность структуры тканей в процессе моделированного износа не нарушается.

Введение в хлопчатобумажные ткани по утку лавсано-хлопковой и лавсано-вискозной пряжи способствует повышению устойчивости этих тканей к действию многократных стирок. При этом замечено, что в направлении основы указанные ткани в 4...5 раз интенсивнее разрушаются, чем в направлении утка. Таким образом, введение в хлопчатобумажные ткани (хлопчатобумажная основа) по утку лавсанового волокна не только способствует повышению прочности, снижению усадки [3] и сминаемости [4] этих тканей, но и открывает возможности для изменения структуры и облегчения тканей с целью экономии сырья без ухудшения их свойств.

Сравнение понижения прочности в направлении утка в образцах с утком из вискозней штапельной пряжи и вискозных комплексных нитей показывает, что образцы с утком из вискозной штапельной пряжи являются более чувствительными к действию повторных стирок. Аналогичная зависимость наблюдается в различных по виду отделки образцах. Такое различие в степени повреждения образцов, имеющих по утку одинаковые по природе, но различные по структуре вискозные пряжу и нити, следует объяснить тем, что вискозные комплексные нити вследствие наличия непрерывных филаментов менее чувствительные к действию щелочных растворов и, как отмечает Е. Г. Эйгес [5], примерно в 2 раза меньше разрушаются истиранием в мокром состоянии (истирание является неотъемлемым элементом процесса стирки).

Далее установлено, что несминаемая отделка исследуемых образцов на базе диметилолэтиленмочевины значительно замедляет интенсивность их разрушения от стирок. Причем, эффективность защитного действия несминаемого аппрета в значительной мере определяется природой волокнистого состава тканей. Так, например, если обработанные ткани с утком из хлопчатобумажной, лавсано-хлопковой и лавсано-вискозной пряжи в процессе 20 последовательных стирок (это соответствует 120...140 бытовым стиркам) фактически свой прочности по утку не понижают, то аналогичные ткани с утком из вискозной щтапельной пряжи и вискозных комплексных нитей соответственно понижают свою прочность по утку на 13...15%.

При изучении динамики изменения прочности обработанных образцов в процессе многократных стирок нетрудно заметить, что после

Таблица 1

№№ обр.	Наименование тканей	Приведенная прочность по основе, до стирок гс	Изменение приведенной прочности по основе, после стирок *) %				Приведенная прочность по утку, до стирок гс	Изменение приведенной прочности по утку, после стирок %			
			5-й	10-й	15-й	20-й		5-й	10-й	15-й	20-й
1.	Ткань типа арт. 1 171 с утком из хлопчатобумажной пряжи										
	а) отбеленная	195	— 14,3	— 14,7	— 24,8	— 31,7	194	— 1,9	+ 0,7	— 3,9	— 7,4
	б) отбеленная с несминаемой отделкой	160	—	+ 5,2	—	+ 3,7	136	—	+ 24,2	—	+ 11,8
2.	Ткань типа арт. 1 171 с утком из вискозной штапельной пряжи										
	а) отбеленная	190	— 11,4	— 15,9	— 25,0	— 28,7	211	— 4,9	— 6,9	— 13,7	— 27,8
	б) отбеленная с несминаемой отделкой	165	+ 1,1	— 3,0	— 5,2	— 6,7	188	+ 17,9	+ 13,2	+ 3,0	— 15,4
3.	Ткань типа арт. 1 171 с утком из лавсано-хлопковой пряжи										
	а) отбеленная	202	—	— 12,4	—	— 24,7	238	—	— 3,2	—	— 4,0
	б) отбеленная с несминаемой отделкой	154	—	+ 4,2	—	+ 1,4	201	—	+ 7,8	—	+ 3,6
4.	Ткань типа арт. 1 171 с утком из лавсано-вискозной пряжи										
	а) отбеленная	213	—	— 10,9	—	— 27,9	236	—	— 4,0	—	— 6,3
	б) отбеленная с несминаемой отделкой	155	—	+ 6,3	—	+ 2,1	214	—	+ 7,4	—	+ 4,8
5.	Ткань типа арт. 1 171 с утком из вискозных комплексных нитей										
	а) отбеленная	190	— 12,8	— 13,1	— 22,2	— 24,3	291	+ 1,4	+ 3,8	— 1,7	— 19,9
	б) отбеленная с несминаемой отделкой	162	+ 8,5	+ 0,5	— 4,3	— 4,7	230	+ 26,2	+ 18,6	— 0,4	— 13,4

*) Знаком + (плюс) показано повышение, знаком — (минус) — понижение прочности.

первых 5...10 стирок их прочность не только понижается, но даже заметно повышается и только после 15...20 стирки наблюдается последовательное понижение прочности. Такой характер изменения прочности обработанных образцов в процессе многократных стирок следует объяснить, по-видимому, тем, что под действием стирок происходит последовательное разрушение связей между смолой и другими компонентами несминаемого аппрета (несминаемая отделка типа „стирай-носи"), с одной стороны, и элементами ткани, с другой. Последовательное разрушение аппрета и приводит к восстановлению первоначальной прочности, потеряной тканью в процессе несминаемой отделки (в процессе отделки, как видно из таблицы 1, ткани теряют 20...30% своей прочности). Существенное влияние на повышение прочности образцов особенно после первых стирок оказывает и изменение плотности тканей, характер которого также определяется природой и структурой применяемых пряжи и нитей.

Далее следует отметить, что по мере разрушения аппрета от стирок, вследствие восстановления первоначальной прочности и изменения плотности, наряду с некоторым повышением прочности образцов именно после первых 5...10-ти стирок, происходит и второй противоположный и взаимосвязанный процесс — процесс разрушения самых образцов по мере снижения в процессе стирок эффективности защитного действия несминаемого аппрета.

Следовательно, несминаемая отделка типа „стирай-носи" на базе диметилолэтиленмочевины не только улучшают внешний вид, значительно снижает усадку, сминаемость, повышает светоустойчивость тканей из смеси целлюлозных и гидратцеллюлозных волокон, но в значительной мере замедляет процесс износа этих тканей от стирок. Поэтому эту отделку необходимо рекомендовать промышленности не только для узкого ассортимента сорочечных хлопчатобумажных тканей, но и для широкого ассортимента тканей платьево-бельевой группы, вырабатываемых из целлюлозных и целлюлозных в смеси с гидратцеллюлозными волокнами.

Выводы

1. Замена в хлопчатобумажных летних платьевых тканях утка из хлопчатобумажной пряжи на уток из вискозной штапельной пряжи и вискозных комплексных нитей хотя и приводит к заметному снижению устойчивости этих тканей к действию многократных стирок, но равнопрочность структуры тканей при этом существенно не изменяется.

2. Введение в хлопчатобумажные ткани по утку лавсано-хлопковой и лавсано-вискозной пряжи взамен хлопчато-бумажной пряжи не только приводит к улучшению внешнего вида, снижению усадки и сминаемости этих тканей, но и значительно замедляет их износ от стирок, что позволяет значительно повысить износоустойчивость тканей платьевого назначения.

3. Несминаемая отделка тканей из целлюлозных и смеси целлюлозных и гидратцеллюлозных волокон с использованием диметилолэтиленмочевины наряду со значительным улучшением таких ценных эксплуатационных свойств тканей платьевой группы, как усадочность, несминаемость, мягкость, эластичность и другие, заметно замедляет процесс износа этих тканей от стирок. В результате несминаемой отделки устойчивость исследуемых тканей к действию стирок повышается в несколько раз, причем эффективность защитного действия несминаемого аппрета в значительной мере зависит от природы и структуры применяемого сырья.

Поступила 15 XI 1966 г.

Львовский торгово-экономический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Семак Б. Д., *Исследование физико-механических свойств летних платьевых тканей разного волокнистого состава.* Изв. вузов., Технол. текстильной пром., 1963, *6*, стр. 29.
2. Филатов М. С., Шмелева Л. С., Легкун Я. А., Пугачевский Г. Ф., Семак Б. Д. *Влияние стирок на усадку тканей из полинозных волокон.* Легкая промисловість, 1966, *4*, стр. 7.
3. Семак Б. Д., *Усадка летних плтьевых тканей разной структуры и отделки.* Изв. вузов., Технология текстильной промышленности, 1965, *2*, стр. 15.
4. — *Исследование несминаемости различных летних платьевых тканей.* Текстильная промышленность, 1964, *9*, стр. 61.
5. Эйгес Г. Е., *Об улучшении прядильных и эксплуатационных свойств вискозного штапельного волокна.* Текстильная промышленность, 1956, *3*, стр. 27.

STUDIUL INFLUENŢEI STRUCTURII ŞI FINISĂRII ŢESĂTURILOR ASUPRA UZURII LOR LA SPĂLAT

(Rezumat)

Se expun rezultatele obţinute în ceea ce priveşte influenţa structurii şi finisării ţesăturilor asupra uzurii lor la spălat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. Z. 338.062.5

ASPECTE PRIVIND DETERMINAREA DURATEI CICLULUI DE FABRICAŢIE ÎN ÎNTREPRINDERILE TEXTILE

DE

COSTACHE RUSU şi OCTAVIAN JABA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Universităţii „Al. I. Cuza", din 30 — 31 octombrie 1965

1. Determinarea pe baze ştiinţifice a ciclului de fabricaţie constituie un punct de plecare pentru o bună organizare a producţiei şi a muncii. Programarea operativă a producţiei în întreprinderile industriale—problemă actuală a organizării pe baze ştiinţifice a producţiei în timp şi în spaţiu—nu poate fi făcută dacă nu se cunoaşte cu precizie durata ciclului de fabricaţie pentru fiecare produs pe care-l fabrică unitatea economică respectivă.

Determinarea ciclului de fabricaţie în întreprinderile industriale presupune cunoaşterea şi precizarea următorilor factori: tipul de producţie al întreprinderii, modul de organizare al producţiei de bază, cantitatea de producţie care trebuie luată în considerare la determinarea ciclului ş. a.

Procesul de producţie în întreprinderile industriei textile (filaturi-ţesătorii) se desfăşoară în flux continuu, fără o legătură rigidă între diferitele faze de fabricaţie. Materia primă parcurge o serie de faze succesive de prelucrare, amplasate în spaţiu în linie dreaptă, pînă la obţinerea produsului finit. Între diferitele faze de prelucrare există o corelaţie precisă în ceea ce priveşte capacităţile de producţie. Această corelaţie a capacităţilor de producţie a diferitelor faze asigură desfăşurarea în mod continuu şi în paralel a operaţiilor.

Trecerea semifabricatelor de la o fază la alta se asigură cu ajutorul mijloacelor de transport mecanice sau manuale: cărucioare, electrocare, convaere etc. Datorită acestui fapt între diferitele faze ale procesului de fabricaţie sînt timpi de aşteptare pentru formarea rezervelor de semifabricate (stocuri), cît şi timpi pentru transport. Introducerea unor mijloace de transport mecanice sau automate reduce tot mai mult timpul pentru transport şi aşteptare.

2. O problemă importantă în ceea ce priveşte ciclul de fabricaţie o constituie precizarea tipului de producţie a întreprinderilor industriei textile (filaturi-ţesătorii). Producţia întreprinderilor integrate textile trebuie considerată ca o producţie de masă pe baza următoarelor considerente: a) producţia este omogenă din punct de vedere tehnologic şi se realizează în cantităţi mari, prezentînd şi un grad mare de stabilitate, b) în fiecare fază de prelucrare se foloseşte utilaj specializat în executarea anumitor operaţii (maşini de destrămat, carde laminoare, războaie de ţesut etc.); c) executarea unei operaţii este strîns legată de executarea operaţiei anterioare şi începe după ce se termină aceasta.

Producţia întreprinderilor textile fiind o producţie de masă, organizată pe comenzi (partizi), mărimea totală a ciclului de fabricaţie depinde de mărimea comenzii (partizii) respective. Aşadar ciclul de fabricaţie trebuie să fie determinat în funcţie de acest parametru — mărimea comenzii (partizii) — şi va avea valori diferite, determinate de mărimea comenzii.

Întrucît mărimea comenzilor lansate în fabricaţie este variabilă, vom determina durata ciclului de fabricaţie pentru o comandă de producţie egală cu capacitatea de fabricaţie a secţiei conducătoare pe timp de 24 ore, care în cazul filaturilor ar reprezenta capacitatea de producţie a secţiei de maşini cu inele, iar pentru ţesătorii capacitatea de producţie a secţiei de ţesut (secţia de războaie).

Filatura de bumbac luată în studiu produce fire număr metric mediu 34/1, fiind necesare pentru aceasta următoarele faze (operaţii) de prelucrare; 1° destrămare-batere; 2° cardare; 3° laminare (cu două treceri); 4° toarcere la flyerul de mare întindere; 5° toarcere (filare) la maşinile cu inele.

Ţinînd seama de faptul că procesul de fabricaţie se desfăşoară în flux continuu, diferitele operaţii executîndu-se în paralel, se poate stabili următoarea relaţie:

$$C_f = t_1 + t_{pf} + \sum_{i=1}^{n-1} t_{ri} + \sum_{i=2}^{n} t_{nth} + T_{\text{cond}} + t_2 + T_{\text{intr}}, \tag{1}$$

în care: C_f — durata ciclului de fabricaţie (zile sau ore), t_1 — timpul mediu de transport de la magazia de materii prime la secţia de batere, de depozitare şi aşteptare în această secţie pînă la începerea prelucrării, t_{pf} — timpul de pregătire şi încheiere, t_{ri} — suma timpilor de regim de prelucrare a materiei prime din comanda dată pentru a produce o unitate de format la faza i.

Timpul de regim se calculează cu relaţia cunoscută:

$$t_{ri} = \frac{60\, G_i}{P_{pi}} \quad [\text{min}],$$

unde: G_i — greutatea formatului unei anumite faze, (kg), P_{pi} — producţia practică pe unitatea caracteristică a unei maşini la faza i, (kg).

n — numărul de operaţii în procesul dat, t_{nth} — timpul opririlor netehnologice care se calculează cu relaţia:

$$\sum_{i=2}^{n} t_{nth} = \sum_{i=2}^{n} t_{aşt_1} + \sum_{i=2}^{n} t_{aşt_2} + \sum_{i=2}^{n} t_{depl},$$

unde: $t_{aşt_1}$ — durata timpilor de aşteptare a formatelor lîngă maşini, pentru formarea stocului de siguranţă de semifabricate, $t_{aşt_2}$ — timpul de aşteptare pentru formarea rezervelor de semifabricate interoperaţii în vederea încărcării complete a unei maşini, t_{depl} — timpul de deplasare a formatului de la o maşină la alta.

T_{cond} — timpul de prelucrare la operația conducătoare (mașini cu inele) pentru o comandă (o partidă), pentru o tonă, sau pentru o producție egală cu capacitatea de fabricație a utilajului în timp de 24 de ore etc., t_2 — timpul de încărcare-descărcare, de transport al firelor din secție la magazie, de ambalare și sortare, ținînd seama de suprapunerea în timp cu operațiile de prelucrare (numai pentru ultima levată din secția mașini cu inele), T_{intr} — durata întreruperilor procesului de fabricație datorită regimului de lucru al întreprinderii, zilelor de duminică și sărbători legale, egală cu 58 zile pe an.

Relația (1) de calcul a ciclului de fabricație se poate corecta cu un coeficient $\alpha = 365/(365 - 58) = 365/307 = 1{,}18$ pentru a exprima durata în ore sau zile calendaristice. Notînd cu s numărul de schimburi lucrătoare pe zi și cu h numărul de ore pe schimb, relația (1) a ciclului de fabricație capătă următoarea formă:

$$C_f = \frac{\alpha}{sh}\left(t_1 + t_{pt} + \sum_{i=1}^{n-1} t_{ri} + \sum_{i=2}^{n} t_{nth} + T_{cond} + t_2\right) \quad \text{[zile]}. \tag{2}$$

Pentru calculul mărimii ciclului de fabricație după relația (2), vom considera o filatură de bumbac cardat cu un număr de 70 mașini cu inele a cărei producție pe 24 ore este de 12500 kg fire număr metric mediu 34/1, în proporțiile stabilite prin plan. In acest caz mărimea comenzii (partizii) va fi egală deci cu 12500 kg fire. Ciclul de fabricație s-a calculat în tabelul 1 prin însumarea potrivit formulei (2) a tuturor timpilor, calculați cu ajutorul relațiilor arătate, sau prin stabilirea unor categorii de timpi pe cale experimentală și statistică. Intreprinderea considerată nu are locuri înguste de capacități de producție pe diferite secții. Regimul de lucru este de trei schimburi.

Întrucît $\sum_{i=2}^{n} t_{aşt_2} > t_{pi}$ și operațiile se execută în paralel s-au luat în calcul numai timpii de pregătire și încheiere, pentru prima și ultima operație.

Cînd mărimea partizii Q depășește producția secției conducătoare Q_c într-un interval de timp de 24 de ore (în exemplul nostru 12500 kg) durata ciclului de fabricație se va micșora deoarece timpul de așteptare pentru formarea rezervelor de semifabricate în vederea încărcării complete a unei mașini este constant, nedepinzînd de mărimea comenzii. Deci cînd $Q > Q_c$, timpul de așteptare pentru formarea rezervelor de semifabricate pentru încărcarea completă a unei mașini se va calcula cu relația:

$$\sum_{i=2}^{n} t'_{aşt_2} = \frac{Q_c}{Q} \sum_{i=2}^{n} t_{aşt_2}. \tag{3}$$

Durata ciclului de fabricație permite cunoașterea cu anticipație a timpului necesar pentru a prelucra o anumită cantitate de materie primă cu scopul de a obține o cantitate programată de produse finite. În acest mod

Tabelul 1

Calculul ciclului de fabricaţie la o filatură de bumbac cardat pentru mărimea unei comenzi egală cu producţia secţiei conducătoare pe timp de 24 ore

Nr. crt.	Denumirea operaţiilor procesului tehnologic	Elementele ciclului de fabricaţie,								Total
		t_1	t_{pt}	$\sum_{i=1}^{n-1}$	$\sum_{i=2}^{n} t_{nth}$ min.			T_{cond}	t_2	
					$\sum_{i=2}^{n} t_{ast_1}$	$\sum_{i=2}^{n} t_{ast_2}$	$\sum_{i=2}^{r} t_{depl}$			
		min.	min.	min.	min.	min.	min.	min.	min.	min.
1	Batere-curăţire	720	30	10						760
2	Cardare			40	20	40	2			102
3	Laminoare, tr. I-a			6	12	123	1			142
4	Laminoare, tr. II-a			6	12	122	1			141
5	Flyere de mare întindere			60	30	480	2			572
6	Maşini cu inele		10	180	90	140	1	1 440	30	1 711
	Total minute	720	40	122	160	905	7	1 440	30	3 428
	Total minute calendaristice	3 428 × 1,18 = 4 045,06								
	Total ore calendaristice	4 045,06 : 60 = 67,418								
	Total zile calendaristice	(C. F.)		67,418 : 24 ≅ 2,81						

se pot determina cu precizie stocurile de materiale în vederea unei desfăşurări continue şi ritmice a procesului de producţie, contribuind la înlăturarea stocurilor supranormative şi la o mai bună organizare a aprovizionării tehnico-materiale.

În prezent, în întreprinderile industriale textile nu se calculează durata ciclului de fabricaţie. Comparînd durata ciclului de fabricaţie de 2,81 zile, care a rezultat din calculele efectuate de noi, cu mărimea acestei durate, luată în considerare de unele întreprinderi la calculul normativelor de mijloace circulante pentru producţie neterminată, rezultă diferenţe mari. Astfel la unele întreprinderi această durată este de 4...5 zile („Ţesătura", Iaşi), iar la altele de 7 zile („Moldova", Botoşani), deşi la aceste întreprinderi tehnologia de fabricaţie, sortimentul producţiei, modul de organizare

și gradul de înzestrare tehnică nu diferă atît de mult pentru a justifica aceste diferențe mari.

3. Calculînd normativul de mijloace circulante pentru producția neterminată potrivit metodologiei în vigoare, considerînd cele trei durate ale ciclului de fabricație precum și coeficienții de corectare a cheltuielilor, aferenți acestor durate la un volum al producției marfă în preț de cost de uzină de 28 000 mii lei, exclusiv amortizarea, rezultă datele din tabelul 2.

Tabelul 2

Normativul de mijloace circulante

Nr. crt.	Durata ciclului de fabricație (zile)	Cheltuieli de fabricație pe zi la preț de cost de uzină exclusiv amortizarea (mii lei)	Coeficient de corectare	Normativul de mijloace circulante (mii lei)	Coeficientul vitezei de rotație (rotații/an)
1	7	311	0,75	1 632,75	68,6
2	4	311	0,84	1 044,96	107,2
3	2,81	311	0,94	821,04	136,4

Se observă că normativul de mijloace circulante ar trebui să fie în realitate mult mai mic față de realizările prezente în unele întreprinderi. De asemenea prin compararea primelor două situații (variante) cu ultima rezultă o eliberare de mijloace circulante de 811,71 mii lei, respectiv 223,92 mii lei.

Dată fiind importanța acestui indicator, considerăm că ar fi necesară elaborarea unor normative pentru durata ciclului de fabricație care să permită introducerea lui ca indicator în dările de seamă ale întreprinderilor și care să fie urmărite în mod asemănător cu indicii de utilizare ai mașinilor și ai consumurilor specifice. În acest mod întreprinderile ar fi mobilizate la o mai bună organizare a procesului de producție, la asigurarea unei desfășurări ritmice și continui a procesului de fabricație, precum și la o organizare mai rațională a aprovizionării tehnico-materiale. Ca rezultat al acestor perfecționări s-ar îmbunătăți o serie de indicatori ai activității economice a întreprinderilor și s-ar realiza o bază științifică pentru stabilirea stocurilor necesare producției.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de organizare și planificare
și
Universitatea „Al. I. Cuza", Iași

ASPECTS CONCERNANT LA DÉTERMINATION DE LA DURÉE DU CYCLE DE FABRICATION DANS LES ENTREPRISES TEXTILES

(Résumé)

On établie la durée du cycle de fabrication pour une filature de cotton. Les données concernant l'industrie textile et regardant le cycle de fabrication sont comparées avec les résultats obtenus par calcul. On détermine les moyens circulants élibérés et la durée moyenne de leur rotation dans la production inachevée.

40822